Лекция 9

ВОЗВРАЩЕНИЯ БЕСКОНЕЧНОГО БЛУЖДАНИЯ

1. Одномерное случайное блуждание

Теорема 1. *Вероятность того, что случайное блуждание, начинающееся из* 0, *вернется в начало, равна* 1.

Доказательство. Утверждение теоремы вытекает из формулы (4.5). Действительно,

$$\{\omega\colon F<\infty\}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\{\omega\colon F=2k\}\quad \text{и}\quad \{\omega\colon F=2k\}\cap\{\omega\colon F=2l\}=\varnothing,\ k\neq l.$$

Используя σ-аддитивность вероятности, получаем

$$\mathsf{P}(F<\infty)=\sum_{k=1}^{\infty}\mathsf{P}(F=2k)=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}[u_{2k-2}-u_{2k}]=\lim_{N\to\infty}[u_0-u_{2N}]=1$$

в силу следствия 4.2, так как $u_0=1$. □

Замечание 1. Интуитивно понятно, что из теоремы 1 вытекает, что с вероятостью 1 случайное блуждание возвращается бесконечно много раз. Действительно, после первого возвращения блуждание "начинается сначала". Значит с вероятностью 1 оно вернется в начало и второй раз. Аналогичное "правдоподобное" рассуждение можно провести сколько угодно раз.

2. Случайное блуждание на плоскости

В начальный момент времени частица находится на плоскости в точке $O=(0,0)$. В следующий момент времени частица переходит в одну из соседних точек, то есть в одну из точек $(0,1)$, $(1,0)$, $(0,-1)$, $(-1,0)$. Вероятность перехода в любую из этих точек равна $\frac{1}{4}$. Затем независимо от своего положения частица переходит в одну из следующих четырех соседних точек. Вероятности перехода такие же, как и в первом случае. Таким же образом частица меняет свое состояние бесконечное количество раз. В результате мы получаем последовательность точек (x_n,y_n) на плоскости, которые частица посещала в моменты $n=1,2\dots$.

Описанный стохастический эксперимент *называется случайным блужданием на плоскости.* Последовательность точек $(0,0),(x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n)$, которые посетила частица, называется *траекторией случайного блуждания до момента* n. В качестве вероятностного пространства для случайного блуждания с n шагами можно выбрать множество Ω_n всех возможных последовательностей $(x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n)$, у которых обе координаты являются целыми числами и $|x_k-x_{k-1}|+|y_k-y_{k-1}|=1$.

[0] Printed from the file [TSP-00-09.tex] on 19.11.2014

Лемма 1. $|\Omega| = 4^n$.

Доказательство. Каждую траекторию можно однозначно определить с помощью последовательности символов $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{$С,Ю,З,В$\}$. Символы $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ имеют следующий смысл: $\varepsilon_i =$ "С", если на i-ом шаге частица передвинулась на "север"; значения "Ю", "З", "В" определяются аналогично. Количество таких последовательностей равно 4^n, поэтому $|\Omega| = 4^n$. $\square$

Лемма 2. $\mathsf{P}(\omega) = 4^{-n}$ *для любого* $\omega \in \Omega_n$.

Доказательство. Каждый элементарный исход имеет вид $\omega = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{$С,Ю,З,В$\}$. Обозначим через X_i направление движения частицы на шаге i. Поскольку изменения состояния частицы независимы друг от друга, то $\mathsf{P}(\omega) = \mathsf{P}(X_1 = \varepsilon_1, \dots, X_n = \varepsilon_n) = \prod_{i=1}^n \mathsf{P}(X_i = \varepsilon_i) = \frac{1}{4^n}$, $\omega \in \Omega$. $\square$

2.1. Моменты возврата.

Мы рассматриваем бесконечное блуждание и изучаем вероятность того, что частица вернется в начало координат. Понятно, что в момент времени $2n+1$ частица не может вернуться в O. В момент времени $2n$ частица возвращается в O тогда и только тогда, когда количество шагов на "север" равно количеству шагов на "юг", а количество шагов на "запад" равно количеству шагов на "восток". Пусть A_{2n} — это множество траекторий с $2n$ шагами, возвращающихся в O, а u_{2n} — вероятность того, что блуждание с $2n$ шагами возвращается в O. Тогда $u_{2n} = \frac{|A_{2n}|}{4^{2n}}$. Чтобы найти u_{2n}, подсчитаем $|A_{2n}|$. Для этого определим

$$D_k = A_{2n} \cap \{\text{в траектории } k \text{ шагов на "север" и } n-k \text{ шагов на "запад"}\}.$$

Таким образом каждая тректория из D_k имеет k шагов на "север", k шагов на "юг", $n-k$ шагов на "запад" и $n-k$ шагов на "восток". Поэтому

$$\begin{aligned}|D_k| &= C_{2n}^k \cdot C_{2n-k}^k \cdot C_{2n-2k}^{n-k} = \frac{(2n)!}{k!(2n-k)!} \cdot \frac{(2n-k)!}{k!(2n-2k)!} \cdot \frac{(2n-2k)!}{(n-k)!(n-k)!} \\ &= C_{2n}^n \left(C_n^k\right)^2.\end{aligned}$$

Понятно, что $A_{2n} = \bigcup_{0 \le k \le n} B_k$ и $B_i \cap B_j = \varnothing$, $i \neq j$. Так как $C_n^k = C_n^{n-k}$, то

$$|A_{2n}| = \sum_{k=0}^n |D_k| = C_{2n}^n \sum_{k=0}^n \left(C_n^k\right)^2 = C_{2n}^n \sum_{k=0}^n C_n^k C_n^{n-k} = \left(C_{2n}^n\right)^2$$

в силу равенства

$$\sum_{k=0}^n C_n^k C_n^{n-k} = C_{2n}^n. \tag{1}$$

Равенство (1) объясняется с помощью блуждания по прямой. Число справа — это количество траекторий с $2n$ шагами, среди которых n шагов вправо и n шагов влево. Слагаемое слева с индексом k — это количество траекторий с $2n$ шагами, среди которых k шагов вправо сделано в первой половине блуждания и $n-k$ шагов — во второй половине.

Теорема 2.

$$u_{2n} = \frac{(C_{2n}^n)^2}{4^{2n}} = \left(\frac{C_{2n}^n}{2^{2n}}\right)^2 \sim \frac{1}{\pi n}, \qquad n \to \infty. \tag{2}$$

Асимптотика в формуле (2) получается согласно следствию 5.1.

2.2. Рекуррентное равенство для u_{2n}.

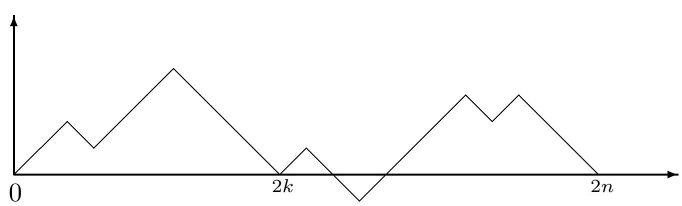
Рассмотрим события $B_0 = \{$возвращение в O не состоялось до момента $2n\}$ и $B_{2k} = \{$первое возвращение в O состоялось в момент $2k\}$, $1 \le k \le n$. Положим $f_{2k} = \mathsf{P}(B_{2k})$. Тогда B_{2k}, $0 \le k \le n$, является полной группой событий. Из формулы полной вероятности вытекает, что

$$\mathsf{P}(A_{2n}) = \sum_{k=0}^{n} \mathsf{P}(B_{2k})\mathsf{P}\left(A_{2n}/B_{2k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(B_{2k})\mathsf{P}\left(A_{2n}/B_{2k}\right).$$

Так как $\mathsf{P}\left(A_{2n}/B_{2k}\right) = \mathsf{P}(A_{2n-2k})$, то

$$u_{2n} = \sum_{k=1}^{n} f_{2k} u_{2n-2k}, \qquad n \ge 1. \tag{3}$$

Чтобы доказать равенство $\mathsf{P}\left(A_{2n}/B_{2k}\right) = \mathsf{P}(A_{2n-2k})$, будем обозначать через $|\mathfrak{C}|_k$ количество траекторий длины k, которые удовлетворяют условиям $\mathfrak{C}$. Например, $|B_{2k}|_{2n}$ — это количество траекторий длины $2n$, которые впервые возвращаются в O в момент $2k$.



По основному правилу комбинаторики $|A_{2n} \cap B_{2k}|_{2n} = |B_{2k}|_{2k} \cdot |A_{2n-2k}|_{2n-2k}$ (см. рис. 1 для блуждания по прямой). Ясно, что $|B_{2k}|_{2n} = |B_{2k}|_{2k} \cdot 4^{2n-2k}$ и $|A_{2n-2k}|_{2n} = |A_{2n-2k}|_{2n-2k} \cdot 4^{2k}$. После деления на 4^{2n} получаем $\mathsf{P}(A_{2n} \cap B_{2k}) = \mathsf{P}(B_{2k})\mathsf{P}(A_{2n-2k})$, откуда и вытекает $\mathsf{P}\left(A_{2n}/B_{2k}\right) = \mathsf{P}(A_{2n-2k})$.

2.3. Производящие функции для u_{2n} и f_{2n}. Если обозначить через S_n положение частицы в момент n, то

$$u_{2n} = \mathsf{P}(S_{2n} = O), \qquad n \ge 1.$$

Целесообразно также положить $u_0 = 1$. Рассмотрим производящие функции

$$U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{2n} z^{2n}, \qquad F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{2n} z^{2n}, \qquad |z| < 1.$$

Поскольку каждый из этих рядов не превосходит $\sum z^{2n}$, то они сходятся при $|z| < 1$. Поэтому функции U и F определены по-крайней мере на отрезке $|z| < 1$. Используя (3), получаем при $z \neq 0$

$$\begin{aligned} U(z) - 1 &= \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n} z^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} z^{2n} \sum_{k=1}^{n} f_{2k} u_{2n-2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} z^{2n} f_{2k} u_{2n-2k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} f_{2k} z^{2k} \sum_{n=k}^{\infty} z^{2n-2k} u_{2n-2k} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{2k} z^{2k} \sum_{m=0}^{\infty} z^{2m} u_{2m} = F(z) U(z). \end{aligned}$$

Поскольку $u_2 = \frac{1}{4}$ (см. теорему 2 для $n = 1$), то $U(z) \neq 0$ для $z \neq 0$ и поэтому

$$F(z) = 1 - \frac{1}{U(z)}. \tag{4}$$

Задача 1. *Подсчитать u_2 непосредственно.*

2.4. Вероятность возвращения.

Теорема 3. *Вероятность возвращения в O случайного блуждания на плоскости равна* 1.

Доказательство. Положим $A = \{$блуждание когда-либо возвращается в $O\}$. Тогда $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{2k}$, $B_{2i} \cap B_{2j} = \varnothing$, $i \neq j$, откуда вытекает, что $\mathsf{P}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(B_{2k}) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{2n}$, то есть ряд $\sum f_{2n}$ сходится. Мы сейчас увидим, что для того, чтобы определить вероятность возвращения $\mathsf{P}(A)$, необходимо найти пределы $\lim_{z \uparrow 1} U(z)$ и $\lim_{z \uparrow 1} F(z)$.

Замечание 2. Если $a_k \geq 0$ и ряд $\sum a_k$ сходится, то степенной ряд $\sum a_k z^k$ сходится равномерно на отрезке $[-1, 1]$ (Фихтенгольц, т. II, глава 433, §434, стр. теорема 4). Поэтому возможен почленный переход к пределу при $z \uparrow 1$ (Фихтенгольц, т. II, глава 430, §427, стр. признак Вейерштрасса). Иное доказательство этого факта заключается в применении теоремы Абеля (Фихтенгольц, т. II, глава 437, §446, стр. 6°).

Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{2n} = \lim_{z \uparrow 1} F(z). \tag{5}$$

Замечание 3. Если же ряд $\sum a_k$ расходится, то полагаем $A_1 = a_1$, $A_n = a_1 + \cdots + a_n$, $n > 1$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = (1 - z) \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^n \tag{6}$$

(см. Фихтенгольц, т. II, глава 385, §312, стр. 6°). Поэтому для любого $N \geq 1$

$$\begin{aligned} \lim_{z \uparrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n &= \lim_{z \uparrow 1} (1 - z) \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^n = \lim_{z \uparrow 1} (1 - z) \sum_{n=N}^{\infty} A_n z^n \\ &\geq A_N \lim_{z \uparrow 1} (1 - z) \sum_{n=N}^{\infty} z^n = A_N \lim_{z \uparrow 1} z^N = A_N. \end{aligned}$$

Так как $A_N \to \infty$, $N \to \infty$, то $\lim_{z\uparrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = \infty$.

Теперь, используя асимптотику (2), доказываем, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_{2n}$ расходится. Поэтому

$$\lim_{z\uparrow 1} U(z) = \infty. \tag{7}$$

Объединяя (4), (5) и (7), получаем

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{2n} = 1. \qquad \square$$

Доказательство равенства (6). Воспользуемся преобразованием Абеля (Фихтенгольц, т. 2, глава 383, §305, стр. (10)): если $A_0 = 0$, то

$$\sum_{i=1}^{n} a_i z^i = \sum_{i=1}^{n-1} A_i \left(z^i - z^{i+1}\right) + A_n z^n.$$

Отсюда и вытекает (6), если $A_n z^n \to 0$. Найдем предел $\lim A_n z^n$. Пусть z фиксировано; выберем $0 < r < 1$, при котором $|z| < r$. Так как $a_i r^i \to 0$ (в силу сходимости ряда $\sum a_i z^i$ внутри единичного отрезка), то последовательность $\{a_i r^i\}$ ограниченна, то есть $a_i r^i \le L$ для некоторой константы $L > 0$. Значит

$$|A_n z^n| \le L\left(\frac{1}{r} + \dots + \frac{1}{r^n}\right)|z|^n = L\left(\frac{|z|}{r}\right)^n \cdot \sum_{n=0}^{n-1} r^i \le \frac{L}{1-r} \cdot \left(\frac{|z|}{r}\right)^n \to 0.$$

$\square$

3. Случайное блуждание в пространстве

Симметричное случайное блуждание можно определить и в пространстве: частица перемещается за один шаг из точки (x, y, z) в одну из шести соседних точек $(x \pm 1, y \pm 1, z \pm 1)$ с вероятностями $\frac{1}{6}$. Пусть в начальный момент времени частица находится в начале координат $O = (0, 0, 0)$. Найдем вероятность возвращения блуждания в точку O. Прежде всего заметим, что элементарными исходами случайного блуждания с n шагами можно считать наборы точек $(x_1, y_1, z_1), \dots, (x_n, y_n, z_n)$, координаты которых являются целыми числами, для которых $|x_{n+1} - x_n| + |y_{n+1} - y_n| + |z_{n+1} - z_n| = 1$.

Лемма 3. $|\Omega| = 6^n$.

Доказательство. Траекторию длины n можно однозначно определить с помощью последовательности символов $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{x_+, x_-, y_+, y_-, z_+, z_-\}$. Символы ε_i, $1 \le i \le n$, имеют следующий смысл: $\varepsilon_i = x_+$ или $\varepsilon_i = x_-$, если на i-ом шаге частица увеличила или уменьшила абсциссу; значения y_+, y_-, z_+, z_- определяются аналогично. Количество таких последовательностей равно 6^n в силу основного правила комбинаторики, поэтому $|\Omega| = 6^n$. $\square$

3.1. Задача о блудном сыне в пространстве. В теоремах 1 и 3 мы доказали, что вероятность возвращения случайного блуждания в начало координат равна 1 и на прямой, и на плоскости. Теперь нашей целью является доказать, что в пространстве эта вероятность меньше 1.

Пусть, как и в случае плоскости, A_{2n} — это событие, которое заключается в том, что блуждание возвращается в точку O в момент времени $2n$, то есть $u_{2n} = \mathsf{P}(S_{2n} = O)$, где $S_{2n} = (x_{2n}, y_{2n}, z_{2n})$ — это положение частицы в момент $2n$. Как и раньше, пусть f_{2k} — это вероятность того, что первое возвращение в O состоялось в момент времени $2k$.

Как и в случае плоскости, доказываем рекуррентное равенство

$$u_{2n} = \sum_{k=1}^{n} f_{2k} u_{2n-2k}, \qquad n \geq 1. \tag{8}$$

Отсюда выводим для производящих функций U и F последовательностей $\{u_{2k}\}$ и $\{f_{2k}\}$, что

$$F(z) = 1 - \frac{1}{U(z)}. \tag{9}$$

Аналогично случаю блуждания на плоскости имеют место соотношения

$$\lim_{z \uparrow 1} U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{2n}, \tag{10}$$

$$\lim_{z \uparrow 1} F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{2n}. \tag{11}$$

Ряд в правой части (11) сходится, так как он равен вероятности того, что частица вернется в O. Сходимость ряда в правой части (10) требует дополнительного анализа, хотя его аналог для прямой и плоскости расходится.

Исследуем сходимость ряда $\sum_{n \geq 1} u_{2n}$ для блуждания в пространстве. Для этого найдем асимптотику вероятностей u_{2n} при $n \to \infty$. Обозначим через N_{x_+} и N_{x_-} количество шагов, на которых абсцисса точки увеличивается или уменьшается. Аналогично определяем N_{y_+}, N_{y_-}, N_{z_+} и N_{z_-}. Возвращение в O происходит тогда и только тогда, когда $N_{x_+} = N_{x_-}$, $N_{y_+} = N_{y_-}$, $N_{z_+} = N_{z_-}$.

Пусть $D_{k_1,k_2} = A_{2n} \cap \left\{N_{x_+} = k_1,\, N_{y_+} = k_2,\, N_{z_+} = n - k_1 - k_2\right\}$.

Таким образом каждая траектория из D_{k_1,k_2} имеет k_1 шагов типа x_+, k_1 шагов типа x_-, k_2 шагов типа y_+, k_2 шагов типа y_-, $n-k_1-k_2$ шагов типа z_+ и $n-k_1-k_2$ шагов типа z_-. Тогда по основному правилу комбинаторики

$$\begin{aligned} |D_{k_1,k_2}| &= C_{2n}^{k_1} C_{2n-k_1}^{k_1} C_{2n-2k_1}^{k_2} C_{2n-2k_1-k_2}^{k_2} C_{2n-2k_1-2k_2}^{n-k_1-k_2} \\ &= \frac{(2n)!}{(k_1!)^2\,(k_2!)^2\,((n-k_1-k_2)!)^2} = C_{2n}^{n}\left[\frac{n!}{k_1!k_2!(n-k_1-k_2)!}\right]^2. \end{aligned}$$

В дальнейшем для краткости не будем писать $k_1 \geq 0$ и $k_2 \geq 0$ в знаках сумм или максимумов. Имеем

$$|A_{2n}| = \sum_{k_1+k_2 \leq n} |D_{k_1,k_2}| = C_{2n}^{n} \sum_{k_1+k_2 \leq n}\left[\frac{n!}{k_1!k_2!(n-k_1-k_2)!}\right]^2.$$

Числа $C_n(k_1,k_2) = \frac{n!}{k_1!k_2!(n-k_1-k_2)!} = C_n^{k_1}C_{n-k_1}^{k_2}$ является коэффициентами в разложении $(a+b+c)^n$ по степеням a, b и c. Действительно,

$$(a+b+c)^n = \underbrace{(a+b+c)\cdot(a+b+c)\cdot\ldots\cdot(a+b+c)}_{n \text{ скобок}}$$

и поэтому разложение $(a+b+c)^n$ действительно состоит из слагаемых вида $a^{k_1}b^{k_2}c^{n-k_1-k_2}$. При фиксированных k_1 и k_2 в этой сумме слагаемых вида $a^{k_1}b^{k_2}c^{n-k_1-k_2}$ ровно столько, сколько существует способов выбрать k_1 символов a из n скобок и k_2 символов b из оставшихся $n-k_1$ скобок. По основному правилу комбинаторики это количество равно $C_n^{k_1}C_{n-k_1}^{k_2} = C_n(k_1,k_2)$. Поэтому

$$(a+b+c)^n = \sum_{k_1+k_2\le n} C_n(k_1,k_2)a^{k_1}b^{k_2}c^{n-k_1-k_2}.$$

Полагая $a=b=c=1$, получаем $3^n = \sum_{k_1+k_2\le n} C_n(k_1,k_2)$. Обозначая $\gamma_n = \max_{k_1+k_2\le n} C_n(k_1,k_2)$, записываем оценку $|A_{2n}| \le C_{2n}^n \cdot 3^n\gamma_n$, вытекающую из

$$\sum_{k_1+k_2\le n}\left[\frac{n!}{k_1!k_2!(n-k_1-k_2)!}\right]^2 = \sum_{k_1+k_2\le n}[C_n(k_1,k_2)]^2 \le 3^n\gamma_n.$$

Теперь мы докажем, что

$$\text{(12)}\qquad \begin{cases} \text{I. } \gamma_n = C_n\left(\frac{n}{3},\frac{n}{3}\right), & \text{если } n \text{ делится на 3,}\\ \text{II. } \gamma_n = C_n\left(\frac{n-1}{3},\frac{n-1}{3}\right), & \text{если } n-1 \text{ делится на 3,}\\ \text{III. } \gamma_n = C_n(\frac{n+1}{3},\frac{n+1}{3}), & \text{если } n+1 \text{ делится на 3.}\end{cases}$$

После этого мы докажем, что

$$\text{(13)}\qquad \gamma_n \le L\frac{3^n}{n}$$

для некоторой константы L. Используя эту оценку, оцениваем u_{2n}:

$$\text{(14)}\qquad u_{2n} = \frac{|A_{2n}|}{6^{2n}} \le \frac{C_{2n}^n}{6^{2n}}\cdot 3^n\gamma_n \le L\cdot\frac{C_{2n}^n}{2^{2n}}\cdot\frac{1}{n} \sim \frac{L}{\sqrt{\pi n}}\cdot\frac{1}{n}$$

в силу следствия 5.1. Значит последовательность $\{n^{3/2}u_{2n}\}$ ограниченна, то есть существует константа $M>0$, при которой $u_{2n} \le Mn^{-2/3}$, $n\ge 1$. Поэтому ряд $\sum u_{2n}$ сходится, следовательно $\sum f_{2k} < 1$ в силу (9)–(11).

Таким образом мы доказали такой результат.

Теорема 4. *Вероятность возвращения в O случайного блуждания в пространстве меньше* 1 (*можно доказать, что она приблизительно равна* 0.35).

Доказательство случая (I) **в** (12)**.** Пусть $n=3m$. Требуется доказать, что $(m!)^3 \le i!j!(3m-i-j)!$ для любых $i\ge 0$, $j\ge 0$, для которых $i+j\le 3m$. Целые числа r и s, которые мы используем ниже, считаются неотрицательными.

Случай $i = m - r$, $j = m + s$, $r \le s$. Необходимое неравенство сводится к $(m!)^3 \le (m-r)!(m+s)!(m+r-s)!$ или

$$(m-r+1)\dots m \cdot (m+r-s+1)\dots m \le (m+1)\dots(m+s).$$

Поскольку сомножителей слева и справа одинаковое количество и каждый сомножитель справа больше любого сомножителя слева, то это неравенство истинно. Случаи $r = s = 0$, $r = s \ne 0$ и $r = 0$, $s > 0$ надо рассмотреть отдельно.

(i) *Случай* $r = s = 0$. Надо проверять неравенство $(m!)^3 \le (3m)!$, которое эквивалентно очевидному $(1\dots m)^3 \le 1\dots m \cdot (m+1)\dots 2m \cdot (2m+1)\dots 3m$.

(ii) *Случай* $r = s \ne 0$. Надо проверять неравенство $(m!)^3 \le (m-r)!(m+r)!m!$, которое эквивалентно очевидному $(m-r+1)\dots m \le (m+1)\dots(m+r)$.

(iii) *Случай* $r = 0$, $s > 0$. Надо неравенство $(m!)^3 \le m!(m+s)!(m-s)!$, которое эквивалентно очевидному $(m-s+1)\dots m \le (m+1)\dots(m+s)$.

Случай $i = m - r$, $j = m + s$, $r > s$. Необходимое неравенство вытекает из

$$(m-r+1)\dots m \le (m+1)\dots(m+s)(m+1)\dots(m+r-s).$$

Особый случай $s = 0$ совпадает с (ii).

Случай $i = m + r$, $j = m + s$. Необходимое неравенство вытекает из

$$(m-r-s+1)\dots m \le (m+1)\dots(m+r)(m+1)\dots(m+s).$$

Случаи $r = 0$, $s \ne 0$; $r \ne 0$, $s = 0$; и $r = 0$, $s = 0$ надо рассмотреть отдельно.

Случай $i = m - r$, $j = m - s$. Необходимое неравенство вытекает из

$$(m-r+1)\dots m(m-s+1)\dots m \le (m+1)\dots(m+r+s).$$

Случаи $r = 0$, $s \ne 0$; $r \ne 0$, $s = 0$; и $r = 0$, $s = 0$ надо рассмотреть отдельно.

Задача* 2. *Рассмотреть случай* II *в* (12).

Задача* 3. *Рассмотреть случай* III *в* (12).

Доказательство оценки (13). Во всех трех случаях из (12) мы будем пользоваться формулой де Муавра (5.1): $n! \sim \beta e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}$, $n \to \infty$.

В случае I имеем $n = 3m$ и поэтому

$$\gamma_n = C(m,m) = \frac{n!}{[m!]^3} = \frac{(3m)!}{(m!)^3} \sim \frac{1}{\beta^2} \cdot \frac{e^{-3m}(3m)^{3m+\frac{1}{2}}}{\left[e^{-m}m^{m+\frac{1}{2}}\right]^3} = \frac{1}{\beta^2} \cdot \frac{3^{n+\frac{3}{2}}}{n}.$$

Отсюда вытекает, что при $\varkappa = \frac{3}{2}$

$$\gamma_n \sim \frac{3^\varkappa}{\beta^2} \cdot \frac{3^n}{n}, \qquad n \to \infty. \tag{15}$$

Таким образом, в неравенство (13) выполнено для некоторой константы $L = L_1$, если $n = 3m$.

В случае II имеем $n = 3m + 1$ и поэтому

$$\gamma_n = C(m,m) = \frac{(3m+1)!}{(m)!(m)!(m+1)!} \sim \frac{1}{\beta^2} \cdot \frac{(3m+1)^{3m+\frac{3}{2}}}{m^{2m+1}(m+1)^{m+\frac{3}{2}}}$$
$$= \frac{3}{\beta^2} \cdot \frac{3^{3m}}{3m} \cdot \underbrace{\frac{(3m+1)^{3m}}{(3m)^{3m}}}_{\to e} \cdot \underbrace{\frac{m^m}{(m+1)^m}}_{\to e^{-1}} \cdot \underbrace{\frac{(3m+1)^{\frac{3}{2}}}{(m+1)^{\frac{3}{2}}}}_{\to 3^{\frac{3}{2}}},$$

отсюда вытекает (15) при $\varkappa = \frac{5}{2}$. Таким образом, в неравенство (13) выполнено для некоторой константы $L = L_2$, если $n = 3m + 1$.

В случае III имеем $n = 3m - 1$ и поэтому

$$\gamma_n = C(m,m) = \frac{(3m-1)!}{(m)!(m)!(m-1)!} \sim \frac{1}{\beta^2} \cdot \frac{(3m-1)^{3m-\frac{1}{2}}}{m^{2m+1}(m-1)^{m-\frac{1}{2}}}$$
$$= \frac{3}{\beta^2} \cdot \frac{3^{3m}}{3m} \cdot \underbrace{\frac{(3m-1)^{3m}}{(3m)^{3m}}}_{\to e^{-1}} \cdot \underbrace{\frac{m^m}{(m-1)^m}}_{\to e} \cdot \underbrace{\frac{(3m-1)^{-\frac{1}{2}}}{(m-1)^{-\frac{1}{2}}}}_{\to 3^{-\frac{1}{2}}},$$

отсюда вытекает (15) при $\varkappa = \frac{1}{2}$. Таким образом, в неравенство (13) выполнено для некоторой константы $L = L_3$, если $n = 3m - 1$.

Выбирая теперь $L = \max\{L_1, L_2, L_3\}$, доказываем оценку (15) для любого n.

Итак, (15) выполнено при любых n. Это, в частности, означает, что последовательность $\{n\gamma_n/3^n\}$ является ограниченной, то есть существует константа $L > 0$, для которой $\gamma_n \le L3^n/n$ для всех $n \ge 1$. Отсюда вытекает асимптотика (14), что и влечет сходимость ряда $\sum u_{2n}$.

Замечание 4. Как мы видели в процессе доказательства оценки (13), константа $\varkappa$ в асимптотике (15) зависит от подпоследовательности: $n = 3m$, $n = 3m+1$ или $n = 3m - 1$. Для всей последовательности натуральных чисел эта асимптотика не выполняется.