Лекция 10

СВОЙСТВА СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ, КОТОРЫЕ ВЫПОЛНЯЮТСЯ ПОЧТИ НАВЕРНОЕ

1. Верхний предел последовательности событий

Пусть A_n, $n \geq 1$, некоторая последовательность случайных событий. *Верхним пределом последовательности событий* $\{A_n\}$ называется

$$\limsup A_n \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n \geq m} A_n. \tag{1}$$

Поскольку $\limsup A_n$ образовано из событий $\{A_n\}$ с помощью счетного количества операций, то $\limsup A_n \in \mathscr{F}$. $\boxed{\text{объяснить!}}$

Задача 1. *Найти* $\limsup A_n$ *для монотонных последовательностей* $\{A_n\}$.

Пусть $B = \{\omega \in \Omega \colon \omega$ принадлежит бесконечному количеству событий $A_n\}$.

Задача 2. *Доказать, что* $\bigcap_{n \geq 1} A_n \subseteq B$ *и* $\bigcap_{n \geq 1} A_{2n} \subseteq B$.

Лемма 1. $B = \limsup A_n$.

Доказательство. Пусть $\omega \in B$, однако $\omega \notin \limsup A_n$. Согласно определению (1) последнее означает, что $\omega \notin \bigcup_{n \geq m} A_n$ для любого $m \geq 1$. В частности, $\omega \notin \bigcup_{n \geq 1} A_n$, то есть ω не принадлежит ни одному из событий A_n, что противоречит определению B.

Если же $\omega \in \limsup A_n$, то $\omega \in \bigcup_{n \geq m} A_n$ при любом $m \geq 1$. Значит $\omega \in A_n$ при некотором $n \geq m$ и любом $m \geq 1$. Если бы при этом $\omega \notin B$, то мы бы выбрали $N = 1 + \max\{n : \omega \in A_n\}$. Тогда бы $\omega \notin A_n$, $n \geq N$. С другой стороны, как мы доказали $\omega \in A_n$ для некоторого $n \geq N$. □

Замечание 1. Мы будем использовать обозначение $\{A_n$ б.ч.р.$\}$ для $\limsup A_n$, которое объясняется леммой 1.

2. Лемма Бореля–Кантелли

Лемма 2. *Пусть* A_n, $n \geq 1$, *— некоторая последовательность случайных событий, то есть* $A_n \in \mathscr{F}$, $n \geq 1$.

(a) *если* $\sum \mathsf{P}(A_n) < \infty$, *то* $\mathsf{P}(A_n$ *б.ч.р.*$) = 0$.
(b) *если же* $\sum \mathsf{P}(A_n) = \infty$ *и события* $\{A_n\}$ *независимы в совокупности, то* $\mathsf{P}(A_n$ *б.ч.р.*$) = 1$.

Задача 3. *Привести пример последовательности* $\{A_n\}$, *для которой* $\sum \mathsf{P}(A_n) = \infty$, *но* $\mathsf{P}(A_n$ *б.ч.р.*$) \neq 1$.

Указание к задаче 3. Если $A_1 = \overline{A}$ и $A_n = A$, $n \geq 2$, то $\limsup A_n = A$ и $\mathsf{P}(A_n$ б.ч.р.$) = \mathsf{P}(A)$.

[0]Printed from the file [TSP-00-10.tex] on 19.11.2014

Доказательство леммы 2. Поскольку для любого $m \geq 1$

$$\mathsf{P}(\limsup A_n) \leq \mathsf{P}\bigg(\bigcup_{n \geq m} A_n\bigg) \leq \sum_{n \geq m} \mathsf{P}(A_n),$$

то $\mathsf{P}(\limsup A_n) = 0$ в случае (a).

Для доказательства утверждения (b) заметим, что $\overline{A}_n$, $n \geq 1$, также последовательность независимых в совокупности случайных событий.

Задача 4. *Доказать, что* $\overline{A}_n$, $n \geq 1$, *также является последовательностью независимых в совокупности случайных событий.*

<u>Решение задачи 4</u>. Согласно формуле включений-исключений

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i\right) &= 1 - \mathsf{P}\left(\overline{\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i}\right) = 1 - \mathsf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \\ &= 1 - \sum \mathsf{P}(A_i) + \sum \mathsf{P}(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^n \mathsf{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) \\ &= 1 - \sum \mathsf{P}(A_i) + \sum \mathsf{P}(A_i)\mathsf{P}(A_j) + \dots + (-1)^n \mathsf{P}(A_1)\dots\mathsf{P}(A_n).\end{aligned}$$

Правая часть очевидно равна $(1-\mathsf{P}(A_1))\dots(1-\mathsf{P}(A_n))$, что и доказывает $\mathsf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i\right) = (1-\mathsf{P}(A_1))\dots(1-\mathsf{P}(A_n))$. Такое же рассуждение можно провести для любого набора индексов $\{i_1, \dots, i_n\}$ вместо $\{1, \dots, n\}$, что и доказывает независимость событий $\{\overline{A}_n\}$.

Зафиксируем n. В силу задачи 4 имеем для любого $N \geq n$

$$\mathsf{P}\bigg(\bigcap_{m=n}^{N} \overline{A}_m\bigg) = \prod_{m=n}^{N} \mathsf{P}\left(\overline{A}_m\right) = \prod_{m=n}^{N} (1 - \mathsf{P}(A_m)).$$

Случай 1: *Существует бесконечная последовательность* $\{m_k, k \geq 1\}$, *для которой* $\mathsf{P}(A_{m_k}) = 1$. Зафиксируем n и для него найдем $m_k > n$. Поскольку $\bigcap_{m=n}^{\infty} \overline{A}_m \subseteq \overline{A}_{m_k}$ и $\mathsf{P}(\overline{A}_{m_k}) = 0$, то

$$\mathsf{P}\bigg(\bigcap_{m=n}^{\infty} \overline{A}_m\bigg) = 0. \tag{2}$$

Случай 2: *Существует* n_0, *для которого* $\mathsf{P}(A_m) < 1$ *при* $m \geq n_0$. Тогда для любых $N \geq n \geq n_0$

$$\ln \mathsf{P}\bigg(\bigcap_{m=n}^{N} \overline{A}_m\bigg) = \sum_{m=n}^{N} \ln(1 - \mathsf{P}(A_m)).$$

Задача 5. $\ln(1 - x) \leq -x$ *для всех* $0 \leq x < 1$.

<u>Решение задачи 5</u>. Положим $f(x) = \ln(1 - x) + x$. Для $0 \leq x < 1$ имеем $f'(x) = -x/(1 - x) \leq 0$, то есть f убывает и $f(x) \leq f(0) = 0$ для $0 \leq x < 1$.

Из задачи 5 и свойства непрерывности вероятности для убывающих событий вытекает, что для $n \geq n_0$

$$\mathsf{P}\bigg(\bigcap_{m=n}^{\infty} \overline{A}_m\bigg) = \lim_{N \to \infty} \mathsf{P}\bigg(\bigcap_{m=n}^{N} \overline{A}_m\bigg) \leq \lim_{N \to \infty} \exp\bigg\{ -\sum_{m=n}^{N} \mathsf{P}(A_m)\bigg\} = 0.$$

Если считать, что $n_0 = 1$ в случае 1, то (2) выполнено для всех $n \geq n_0$ в обоих случаях. Покажем теперь, что

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m. \tag{3}$$

Действительно, правая часть есть верхний предел последовательности событий $A_{n_0}, A_{n_0+1}, \ldots$. Поскольку отбрасывание конечного числа событий не меняет их верхнего предела, $\boxed{\text{почему?}}$ то равенство (3) доказано. Таким образом

$$1 - \mathsf{P}\left(\limsup A_n\right) = \mathsf{P}\biggl(\bigcup_{n=n_0}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} \overline{A}_m\biggr) \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} \mathsf{P}\biggl(\bigcap_{m=n}^{\infty} \overline{A}_m\biggr) = 0$$

и поэтому $\mathsf{P}(\limsup A_n) = 1$, что и требовалось доказать. $\square$

Пример 1. Симметричная монета подбрасывается бесконечное количество раз. Пусть k — фиксированное натуральное число. Положим

$$A_n \stackrel{\text{def}}{=} \{\text{во всех подбрасываниях от } k(n-1)+1\text{-ого до } kn\text{-ого выпал “\textit{герб}”}\}\,.$$

Тогда $\mathsf{P}(A_n) = \frac{1}{2^k}$ и поэтому ряд $\sum \mathsf{P}(A_n)$ расходится. Так как события $\{A_n\}$ независимы в совокупности, то лемма Бореля–Кантелли для независимых событий влечет $\mathsf{P}(\limsup A_n) = 1$. Отметим, что $\limsup A_n$ это только часть события {в последовательности результатов подбрасываний имеется бесконечно много участков длины k, каждый из которых состоит только из “*гербов*”}.

3. Лемма Беппо Леви

Лемма 3. *Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность неотрицательных случайных величин. Предположим, что $\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{E}\,[\xi_n] < \infty$. Тогда $\xi_n \xrightarrow{\text{м.н.}} 0$.*

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и положим $A_n \stackrel{\text{def}}{=} \{\omega \colon \xi_n \geq \varepsilon\}$. В силу неравенства Маркова $\mathsf{P}(A_n) \leq \frac{\mathsf{E}[\xi_n]}{\varepsilon}$, откуда $\sum \mathsf{P}(A_n) < \infty$. Из леммы Бореля–Кантелли (леммы 2) вытекает, что $\mathsf{P}(\limsup A_n) = 0$. Обозначим теперь дополнение события $\limsup A_n$ через B. Тогда $\mathsf{P}(B) = 1$. Зафиксируем элементарное событие $\omega \in B$. Заметим, что оно принадлежит только конечному количеству событий $\{A_n\}$. Значит $\xi_n(\omega) < \varepsilon$, начиная с некоторого номера n_0. Поскольку ε произвольно, то лемма 3 доказана. $\square$

4. Усиленный закон больших чисел Бореля

Теорема 1. *Пусть S_n — положение (p, q) случайного блуждания на прямой после n шагов. Тогда*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{м.н.}} p - q, \qquad n \to \infty. \tag{4}$$

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим только случай $p = q = \frac{1}{2}$. Пусть X_n обозначает шаг n случайного блуждания. Тогда $\mathsf{E}[X_n] = 0$, $\mathsf{E}\left[X_n^2\right] = 1$, $\mathsf{E}\left[X_n^4\right] = 1$. Поэтому $\mathsf{E}\left[S_n^2\right] = n$ и $\boxed{\text{объяснить!}}$

$$\mathsf{E}\left[S_n^4\right] = \sum_{1\le i_1,i_2,i_3,i_4\le n} \mathsf{E}\left[X_{i_1}X_{i_2}X_{i_3}X_{i_4}\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{E}\left[X_i^4\right] + \sum_{1\le i_1\ne i_2\le n} \mathsf{E}\left[X_{i_1}^2 X_{i_2}^2\right].$$

Значит $\mathsf{E}\left[S_n^4\right] = n + 6n(n-1) \le 6n^2$. Обозначим $\xi_n = (S_n/n)^4$. Тогда $\mathsf{E}[\xi_n] \le \frac{6}{n^2}$, откуда $\sum \mathsf{E}[\xi_n] < \infty$. Применяя лемму Беппо Леви, доказываем (4). $\square$

Задача 6. *Доказать, что если ν_n — количество успехов в (p,q) схеме Бернулли, то*

$$\frac{\nu_n}{n} \xrightarrow{\text{м.н.}} p, \qquad n \to \infty. \tag{5}$$

Указание к задаче 6. Воспользоваться тождеством $2\nu_n - n = S_n$.

5. Скорость сходимости в теореме Бореля

Теорема 2. *Пусть S_n — положение (p,q) случайного блуждания на прямой после n шагов. Для любого $0 \le r < \frac{1}{2}$*

$$n^r\left(\frac{S_n}{n} - p + q\right) \xrightarrow{\text{м.н.}} 0 \iff \frac{S_n - n(p-q)}{n^{1-r}} \xrightarrow{\text{м.н.}} 0, \qquad n \to \infty. \tag{6}$$

Доказательство теоремы 2. Мы рассматриваем только случай $p = q = \frac{1}{2}$ и доказываем (6) только для $r < \frac{1}{4}$. Полагая $\xi_n = \left(S_n/n^{1-r}\right)^4$, как и в доказательстве теоремы 1, мы получаем $\mathsf{E}[\xi_n] \le \frac{6}{n^{2-4r}}$, откуда $\sum \mathsf{E}[\xi_n] < \infty$, так как $r < \frac{1}{4}$. Применяя теперь лемму Беппо Леви, заканчиваем доказательство теоремы 2. $\square$

Задача* 7. *Доказать теорему 2 для $\frac{1}{4} \le r < \frac{1}{2}$.*

Указание к задаче 7. В определении ξ_n вместо 4 использовать более высокие степени.

Задача 8. *Доказать, что если ν_n — количество успехов в (p,q) схеме Бернулли, то для любого $0 \le r < \frac{1}{2}$*

$$n^r\left(\frac{\nu_n}{n} - p\right) \xrightarrow{\text{м.н.}} 0 \iff \frac{\nu_n - np}{n^{1-r}} \xrightarrow{\text{м.н.}} 0, \qquad n \to \infty. \tag{7}$$

6. Неограниченность случайного блуждания

Теорема 3. *Пусть S_n — положение симметричного случайного блуждания на прямой после n шагов. Для любого $r \ge \frac{1}{2}$*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{n^{1-r}} = -\infty \quad \text{и} \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n^{1-r}} = +\infty \qquad \text{почти наверное.} \tag{8}$$

Доказательство. Мы рассматриваем только случай $r = 1$, причем доказываем более слабое утверждение $\boxed{\text{почему это слабее (8)?}}$

$$\limsup_{n\to\infty} |S_n| = +\infty \qquad \text{почти наверное.}$$

Для этого достаточно доказать, что $\limsup_{k\to\infty} |S_{2^k}| = +\infty$ почти наверное.

Положим $n_k = 2^k$, $m_k = n_k - n_{k-1} = n_{k-1}$, а также $\zeta_n = S_n/\sqrt{n/4}$, $\xi_k = \left|\frac{S_{n_k} - S_{n_{k-1}}}{\sqrt{m_k/4}}\right|$ и $A_k = \{\omega\colon |\xi_k| \geq x\}$ для $x \in \mathbf{N}$. Согласно центральной предельной теореме,

$$\mathsf{P}(A_k) = \mathsf{P}(|\xi_k| \geq x) = \mathsf{P}(|\zeta_{m_k}| \geq x) \to 2(1 - \Phi(x)) > 0, \qquad x \in \mathbf{N}.$$

Поэтому ряд $\sum \mathsf{P}(A_k)$ расходится. $\boxed{\text{объяснить!}}$ Так как события A_n, $n \geq 1$, независимы в совокупности, то $\mathsf{P}(\limsup A_n) = 1$ в силу леммы Бореля–Кантелли. Заметим, что событие $B(x) \stackrel{\text{def}}{=} \limsup A_n$ зависит от x. Таким образом неравенство $|\xi_k(\omega)| \geq x$ выполняется бесконечное число раз для любого $\omega \in B_n$ и при любом $x \in \mathbf{N}$. Пусть $\Omega_1 \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{x\in\mathbf{N}} B(x)$. Понятно, что $\limsup |\xi_k(\omega)| = \infty$ для любого $\omega \in \Omega_1$. $\boxed{\text{доказать!}}$ Ясно, что $\mathsf{P}(\Omega_1) = 1$, так как

$$\mathsf{P}\Bigg(\overline{\bigcap_{x\in\mathbf{N}} B(x)}\Bigg) = \mathsf{P}\Bigg(\bigcup_{x\in\mathbf{N}} \overline{B}(x)\Bigg) \leq \sum_{x\in\mathbf{N}} \mathsf{P}(\overline{B}(x)) = 0.$$

Положим теперь $U(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \limsup_{k\to\infty} |S_{2^k}(\omega)|$ и $\Omega_0 = \{\omega\colon U(\omega) < \infty\}$. Нашей задачей является доказать, что $\mathsf{P}(\Omega_0) = 0$. Предположим от противного, что $\mathsf{P}(\Omega_0) > 0$. Прежде всего, если $\Omega_0 \cap \Omega_1 \neq \varnothing$, то выберем $\omega \in \Omega_0 \cap \Omega_1$. Тогда $\omega \in B(1)$ и

$$|S_{n_k}(\omega)| \geq |\xi_k(\omega)| \cdot \sqrt{m_k/4} - |S_{n_{k-1}}(\omega)| \stackrel{\text{б.ч.р.}}{\geq} \sqrt{m_k/4} - |S_{n_{k-1}}(\omega)|.$$

Последнее неравенство выполняется не обязательно для всех k, а только для бесконечного количества k (так как $x \in B(1)$). Поскольку $|S_{n_{k-1}}(\omega)| < U(\omega) + 1$ для всех k, начиная с некоторого, то для бесконечного количества индексов k

$$|S_{n_k}(\omega)| \geq \sqrt{m_k/4} - U(\omega) - 1.$$

Значит $\limsup_{k\to\infty} |S_{n_k}(\omega)| = \infty$. $\boxed{\text{почему?}}$ Это противоречие доказывает, что $\Omega_0 \cap \Omega_1 = \varnothing$. Теперь легко получить противоречие предположению $\mathsf{P}(\Omega_0) > 0$:

$$1 \geq \mathsf{P}(\Omega_1 \cup \Omega_0) = \mathsf{P}(\Omega_1) + \mathsf{P}(\Omega_0) = 1 + \mathsf{P}(\Omega_0) > 1. \qquad \square$$