Національний технічний університет України
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Теорія міри та інтеграл Лебега

Робоча програма навчальної дисципліни (Силабус)

Реквізити навчальної дисципліни	
Рівень вищої освіти	**Перший (бакалаврський)**
Галузь знань	11 Математика та статистика
Спеціальність	111 Математика
Освітня програма	«Страхова та фінансова математика»
Статус дисципліни	Нормативна
Форма навчання	Очна (денна)/дистанційна
Рік підготовки, семестр	2 курс, весняний семестр
Обсяг дисципліни	120 годин (36 годин – Лекції, 36 години – Практичні, 48 годин – СРС)
Семестровий контроль/ контрольні заходи	Залік/модульна контрольна робота, домашня контрольна робота
Розклад занять	https://schedule.kpi.ua/
Мова викладання	Українська
Інформація про керівника курсу / викладачів	Лектор: канд. фіз.-мат. наук, доцент, Боднарчук Семен Володимирович sem_bodn@ukr.net Практичні / Семінарські: канд. фіз.-мат. наук, доцент, Боднарчук Семен Володимирович sem_bodn@ukr.net
Розміщення курсу	https://do.ipo.kpi.ua/course/view.php?id=8174

Програма навчальної дисципліни

1. Опис навчальної дисципліни, її мета, предмет вивчання та результати навчання

Цілі дисципліни	Дисципліна «Теорія міри та інтеграл Лебега» спрямована на засвоєння здобувачами бакалаврського рівня вищої освіти як абстрактного поняття міри множин, так і важливих прикладів міри Лебега та мір Лебега-Стільтьєса на відповідних σ-алгебрах вимірних множин у евклідових просторах. Крім вивчення основ теорії міри як важливого елемента математичної освіти, головна мета навчальної дисципліни полягає в тому, щоб ознайомити майбутніх фахівців-математиків з побудовою інтеграла Лебега від вимірних функцій, який є істотним розширенням класичного інтеграла Рімана та широко використовується для опису багатьох об'єктів у різних галузях сучасної математики. Так, теорія міри та інтеграла Лебега є основою сучасної теорії ймовірностей та математичної статистики, теорії випадкових процесів тощо.
Предмет навчальної дисципліни	Предмет навчальної дисципліни - це основні поняття теорії множин, основні класи множин та їх властивості, основні властивості міри, зокрема, мір Лебега та Лебега-Стільтьєса, теорія продовження міри, основні властивості функцій обмеженої варіації, заряди, основні поняття теорії вимірних функцій, зокрема, збіжність майже скрізь та за мірою, основні властивості інтеграла Лебега, граничні теореми для інтеграла Лебега, поняття абсолютної неперервності та сингулярності мір, добутку мір, кратних та повторних інтегралів Лебега. Розглядаються також класичні теореми Лебега, Каратеодорі, Хана-Банаха, Єгорова, Лузіна, Радона-Нікодима, Фубіні-Тонеллі тощо.
Компетентності	ЗК 01 Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу. ЗК 03 Знання й розуміння предметної області та професійної діяльності. ЗК 07 Здатність учитися і оволодівати сучасними знаннями. ФК 01 Здатність формулювати проблеми математично та в символьній формі з метою спрощення їхнього аналізу й розв'язання. ФК 03 Здатність здійснювати міркування та виокремлювати ланцюжки міркувань у математичних доведеннях на базі аксіоматичного підходу, а також розташовувати їх у логічну послідовність, у тому числі відрізняти основні ідеї від деталей і технічних викладок. ФК 04 Здатність конструювати формальні доведення з аксіом та постулатів і відрізняти правдоподібні аргументи від формально бездоганних. ФК 08 Здатність до аналізу математичних структур, у тому числі до оцінювання обґрунтованості й ефективності використовуваних математичних підходів.
Програмні результати навчання	ПРН 03 Знати принципи modus ponens (правило виведення логічних висловлювань) та modus tollens (доведення від супротивного) і використовувати умови, формулювання, висновки, доведення та наслідки математичних тверджень. ПРН 09 Уміти працювати зі спеціальною літературою іноземною мовою. ПРН 10 Розв'язувати задачі придатними математичними методами, перевіряти умови виконання математичних

	тверджень, коректно переносити умови та твердження на нові класи об’єктів, знаходити й аналізувати відповідності між поставленою задачею й відомими моделями. ПРН 11 Розв’язувати конкретні математичні задачі, які сформульовано у формалізованому вигляді; здійснювати базові перетворення математичних моделей. ПРН 12 Відшуковувати потрібну науково-технічну інформацію у науковій літературі, базах даних та інших джерелах інформації. ПРН 13 Знати теоретичні основи і застосовувати методи математичного аналізу для дослідження функцій однієї та багатьох дійсних змінних. ПРН 16 Знати теоретичні основи і застосовувати методи топології, функціонального аналізу й теорії диференціальних рівнянь для дослідження динамічних систем.

2. Пререквізити та постреквізити дисципліни (місце в структурно-логічній схемі навчання за відповідною освітньою програмою)

Пререквізити: У структурно-логічній схемі освітньої програми підготовки за даною спеціальностю вибірковій навчальній дисципліні «Теорія міри та інтеграл Лебега» передує нормативна компонента «Математичний аналіз: функції однієї змінної» (ПО1).

Постреквізити: Знання та вміння, отримані здобувачами під час вивчення цієї дисципліни, будуть потрібні їм для опанування нормативної компоненти «Теорія ймовірностей» (ПО15).

3. Зміст навчальної дисципліни

Назва розділів і тем	Кількість годин			
	Всього	у тому числі		
		Лекції	Практичні	СРС
1	2	3	4	5
Розділ 1. ***Класи множин***				
Тема 1.1. Основні класи множин	6	2	2	2
Тема 1.2. Сигма-алгебра борелевих множин	6	2	2	2
Розділ 2. ***Функції множин. Міри та заряди***				
Тема 2.1. Міра та її властивості	22	6	8	8
Тема 2.2. Зовнішня міра та продовження мір	6	2	2	2
Модульна контрольна робота	6	-	2	4
Розділ 3. ***Вимірні відображення та функції***				
Тема 3.1. Вимірні відображення та функції	6	2	2	2
Тема 3.2. Збіжність за мірою та майже скрізь	12	4	4	4
Розділ 4. ***Інтеграл Лебега***				
Тема 4.1. Означення інтеграла Лебега та його властивості	12	4	4	4
Тема 4.2. Граничний перехід під знаком інтеграла Лебега	12	4	4	4
Тема 4.3. Інтеграл Лебега за мірою Лебега	6	2	2	2
Розрахункова графічна робота	4	-	-	4
Розділ 5. ***Абсолютна неперервність та сингулярність мір***				
Тема 5.1. Заряди та їх властивості	6	2	2	2
Тема 5.2. Похідна Радона-Нікодима	6	2	2	2
Розділ 6. ***Добуток мір та теорема Фубіні***				
Тема 6.1. Теорема Фубіні	6	4	-	2
Залік	4	-	-	4
Всього годин	120	36	36	48

4. Навчальні матеріали та ресурси

<u>Базова література</u>

1. В. М. Радченко. Теорія міри та інтеграла. – К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2012. – 144 с.
2. А.Я. Дороговцев, С. Д. Івасишен, О.Ю. Константинов, О. Г. Кукуш, О.О. Курченко, О. Н. Нестеренко, Т. О. Петрова, А. В. Чайковський. Завдання для практичних занять з курсу «Теорія міри та інтеграла». – К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2003. – 89 с.

Додаткова література

3. Ю. М. Березанский, Г.Ф Ус., З.Г. Шефтель. Функціональний аналіз. – Л.: Видавець І.Е. Чижиков, 2014. – 560 с.
4. B. R. Gelbaum, J. M. H. Olmsted. Counterexamples in analysis. – NY: Dover Publications, Inc., 1964. – 194 p.

Навчальний контент

5. Методика опанування навчальної дисципліни (освітнього компонента)

Очна/дистанційна форма

Лекційні заняття

№ з/п	Назва теми лекції та перелік основних питань (перелік дидактичних засобів, посилання на літературу та завдання на СРС)
1	**Основні класи множин.** Півкільця, півалгебри, кільця, алгебри, сигма-кільця, сигма-алгебри, монотонні класи. Кільця та алгебри, що породжуються сім'єю множин. *Рекомендована література:* [1], с. 7-11.
2	**Сигма-алгебра борельових множин.** Теорема про структуру кільця (алгебри), породженого півкільцем. Сигма-алгебра борельових множин. Теорема про збіг сигма-алгебри борельових множин в Rn з сигма-алгеброю, що породжується півкільцем інтервалів в Rn. *Рекомендована література:* [1], с. 12-17.
3	**Означення міри та її властивості.** Функції множин. Неперервність міри на кільці знизу та зверху. *Рекомендована література:* [1], с. 18-21.
4	**Міра Лебега.** Міра Лебега на півкільці підмножин в R та Rn. Міра Лебега-Стілтьєса на прямій. Продовження міри Лебега з півкільця на породжене кільце. *Рекомендована література:* [1], с. 25-27.
5	**Теорема Каратеодорі.** Зовнішня міра та її властивості. Зовнішня міра, яка побудована за мірою на кільці. Теорема Каратеодорі та її наслідки (міра Лебега, міра Лебега-Стілтьєса). *Рекомендована література:* [1], с. 28-35.
6	**Властивості міри Лебега та Лебега-Стілтьєса.** Інваріантність міри Лебега відносно зсуву. Лінійні перетворення борелевих множин в R та їх міра Лебега. *Рекомендована література:* [1], с. 36-43.
7	**Вимірні відображення та функції.** Критерій вимірності. Борельові функції. Суперпозиція вимірних відображень. Властивості вимірних функцій. Прості функції. Теорема про наближення невід'ємної вимірної функції монотонною послідовністю невід'ємних простих функцій. *Рекомендована література:* [1], с. 44-51.
8	**Збіжність майже скрізь.** Властивості, що мають місце майже скрізь відносно міри. Еквівалентні функції. Збіжність майже скрізь та її властивості. Теорема Егорова. *Рекомендована література:* [1], с. 52-55.
9	**Збіжність за мірою.** Властивості збіжності за міри. Теорема Лебега та Ріса про взаємозв'язок збіжності майже скрізь та збіжності за мірою.

	Рекомендована література: [1], с. 56-61.
10	**Означення інтеграла Лебега.** Найпростіші властовості інтеграла Лебега. Сигма-адитивність інтеграла Лебега відносно множини інтегрування. *Рекомендована література:* [1], с. 62-65.
11	**Подальші властивості інтеграла Лебега.** Теорема Лебега про монотонну збіжність для невід'ємних функцій. Лінійність інтеграла Лебега. *Рекомендована література:* [1], с. 66-75.
12	**Граничний перехід під знаком інтеграла Лебега.** Теорема Беппо Леві. Лема Фату. Теорема Лебега про мажоровану збіжність. *Рекомендована література:* [1], с. 76-79.
13	**Інтеграли Лебега, що залежать від параметра.** Неперервна залежність від параметра. Диференціювання за параметром. *Рекомендована література:* [3], с. 87-91.
14	**Інтеграл Лебега за мірою Лебега.** Порівняння інтегралів Рімана та Лебега на відрізку прямої. Критерій інтегровності функції за Ріманом на відрізку прямої. Порівняння невласних інтегралів та інтеграла Лебега на прямій. Інтеграли Лебега-Стілтьєса та їх зв'язок з інтегралами Рімана-Стілтьєса. *Рекомендована література:* [1], с. 80-86.
15	**Заряди та їх властивості.** Розклади Гана і Жордана. Абсолютно неперервні міри та заряди. Теорема Радона-Нікодима. *Рекомендована література:* [1], с. 92-101.
16	**Похідна Радона-Нікодима.** Еквівалентні та сингулярні міри. *Рекомендована література:* [1], с. 102-105.
17	**Декартів добуток вимірних просторів.** Переріз множин та функцій. Добуток мір. *Рекомендована література:* [1], с. 106-121.
18	**Теорема Фубіні.** Кратні інтеграли за добутком мір. Повторні інтеграли. *Рекомендована література:* [1], с. 122-123.

Практичні заняття

№ з/п	Назва теми заняття та перелік основних питань (перелік дидактичного забезпечення, посилання на літературу та завдання на СРС)
1	Основні класи множин та їх властивості. Класи множин породжені даною сім'єю множин. *Завдання для СРС:* [2], с. 5-7.
2	Сигма-алгебра борелевих множин. Нижня та верхня границя послідовності множин. *Завдання для СРС:* [2], с. 8-11.
3	Адитивні функції множин. *Завдання для СРС:* [2], с. 8-11.
4	Міра та її властивості. *Завдання для СРС:* [2], с. 12-15.
5	Зовнішня міра та теорема Каратеодорі. *Завдання для СРС:* [2], с. 16-20.
6	Міра Лебега на прямій. *Завдання для СРС:* [2], с. 21-24.
7	Канторова множина. Приклади множин, не вимірних за Жорданом, Лебегом. *Завдання для СРС:* [1], с. 39-40, [2], с. 21-24, [4], с. 92-93.
8	Міра Лебега в просторі. *Завдання для СРС:* [2], с. 25-28.
9	Міра Лебега-Стілтьєса на прямій. *Завдання для СРС:* [2], с. 29-31.
10	Модульна контрольна робота.

11	Вимірні функції та їх властивості. *Завдання для СРС:* [2], с. 32-35.
12	Збіжність майже скрізь. *Завдання для СРС:* [2], с. 36-41.
13	Збіжність за мірою. *Завдання для СРС:* [2], с. 36-45.
14	Означення інтеграла Лебега. *Завдання для СРС:* [2], с. 46-50.
15	Властивості інтеграла Лебега. *Завдання для СРС:* [2], с. 51-56.
16-17	Граничний перехід під знаком інтеграла Лебега. *Завдання для СРС:* [2], с. 57-68.
18	Абсолютна неперервність і сингулярність мір та зарядів. *Завдання для СРС:* [2], с. 69-74.

6. Самостійна робота студента/аспіранта

Вивчення дисципліни включає наступні види самостійної роботи:

- підготовка до лекційних та практичних занять, виконання домашніх завдань;
- виконання домашньої контрольної роботи;
- підготовка та виконання модульної контрольної роботи;
- підготовка до заліку.

Політика та контроль

7. Політика навчальної дисципліни (освітнього компонента)

Рекомендовані методи навчання: вивчення основної та допоміжної літератури за тематикою лекцій, розв'язування задач на практичних заняттях та при виконанні домашніх робіт.

Студенту рекомендується вести докладний конспект лекцій. Важливим аспектом якісного засвоєння матеріалу, відпрацювання методів та алгоритмів вирішення основних завдань дисципліни є самостійна робота. Вона містить читання літератури, огляд літератури за темою, підготовку до занять, виконання домашньої контрольної роботи, підготовку до МКР та заліку.

Відвідування занять

Відвідування лекцій та практичних занять, а також відсутність на них, не оцінюється. Однак, студентам рекомендується відвідувати заняття, оскільки на них викладається теоретичний матеріал та розвиваються навички, необхідні для виконання практичних завдань та успішного написання МКР, виконання ДКР.

Пропущені контрольні заходи

Результат модульної контрольної роботи для студента(-ки), який не з'явився на контрольний захід, є нульовим. За наявності неявки з поважних причин, студент(-ка) має можливість написати МКР на повний бал. В іншому разі, студент(-ка) має можливість написати МКР, але максимальний бал за неї буде дорівнювати 60% від загальної кількості балів.

Академічна доброчесність

Політика та принципи академічної доброчесності визначені у розділі 3 Кодексу честі Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». Детальніше: https://kpi.ua/code

Роботи, в яких виявлено ознаки академічної недоброчесності – анулюються.

Норми етичної поведінки

Норми етичної поведінки студентів і працівників визначені у розділі 2 Кодексу честі Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». Детальніше: https://kpi.ua/code

Політика використання штучного інтелекту.

Використання штучного інтелекту регламентується «Політикою використання штучного інтелекту для академічної діяльності в КПІ ім. Ігоря Сікорського» (https://osvita.kpi.ua/node/1225). Усі навчальні завдання з дисципліни мають бути результатом власної оригінальної роботи здобувача. Використання штучного інтелекту для автоматичної генерації відповідей без подальшого їх аналізу та доопрацювання заборонено. Здобувачам не рекомендується покладатися на штучний інтелект, як на єдине джерело інформації. Важливо перевіряти та аналізувати отримані дані з наукових джерел. Усі випадки використання штучного інтелекту для виконання завдань мають бути чітко вказані та задокументовані. Це стосується як використання текстових генераторів, так й інших інструментів штучного інтелекту. Використання штучного інтелекту має відповідати принципам академічної доброчесності. Недотримання цього положення розглядатиметься як порушення академічної етики.

У межах цього курсу використання інструментів штучного інтелекту під час виконання робіт поточного та підсумкового контролю (МКР, ДКР, залікові роботи) заборонене та розглядається як порушення принципів академічної доброчесності.

8. Види контролю та рейтингова система оцінювання результатів навчання (РСО) (очна\дистанційна форма)

Розподіл навчального часу за видами занять і завдань з дисципліни згідно з робочим навчальним планом.

Семестр	Навч. час		Розподіл навчальних годин			Контрольні заходи		
	Кредити	Акад. год.	Лекції	Практичні	СРС	МКР	ДКР	Семестр. атест.
4	4	120	36	36	48	1	1	залік

На першому занятті здобувачі ознайомлюються із рейтинговою системою оцінювання (РСО) дисципліни, яка побудована на основі Положення про систему оцінювання результатів навчання https://osvita.kpi.ua/sites/default/files/downloads/Pologennia_RSO_2022.pdf

Поточний контроль: фронтальний (усний, письмовий), МКР, ДКР. Результати поточного контролю, відповідно до Положення про поточний, календарний та семестровий контроль результатів навчання в КПІ ім. Ігоря Сікорського https://osvita.kpi.ua/node/32, викладач регулярно заносить в модуль «Поточний контроль» системи Електронний кампус https://ecampus.kpi.ua/uk. Результати поточного контролю відображаються в особистому кабінеті студента в системі Електронний кампус.

Календарний контроль: проводиться двічі на семестр як моніторинг поточного стану виконання вимог силабусу, результати якого відображаються в системі Електронний кампус.

Умовою отримання позитивної оцінки з календарного контролю з навчальної дисципліни (освітнього компонента) є значення поточного рейтингу здобувача не менше, ніж 50% від максимально можливого на час проведення такого контролю.

Рейтингова система оцінювання включає всі види семестрових завдань: роботу на практичних заняттях, виконання модульної контрольної роботи, якість виконання домашньої контрольної роботи, складання заліку. Кожний студент отримує свій підсумковий рейтинг з дисципліни. На першому занятті здобувачі ознайомлюються із рейтинговою системою оцінювання (РСО) дисципліни, яка побудована на основі Положення про систему оцінювання результатів навчання https://document.kpi.ua/files/2020_1-273.pdf.

Рейтинг студента з кредитного модуля розраховується виходячи із 100-бальної шкали і складається з балів, які він отримує за:

- написання модульної контрольної роботи;
- виконання домашньої контрольної роботи;
- виконання домашніх завдань.

Модульна контрольна робота

Ваговий бал - 30. У випадку дистанційної форми навчання модульна контрольна робота проводиться в синхронному режимі з використанням платформи Zoom.

Домашня контрольна робота

Ваговий бал - 40. Домашня контрольна робота зараховуються тільки за умови її захисту.

Домашні завдання

Для оцінювання поточної успішності студенти мають виконувати домашні завдання за темою практичного заняття. Протягом семестру планується 15 домашніх завдань, кожне з яких оцінюється максимум в 2 бали. Тобто, максимальна кількість балів за домашні завдання - 2*15=30. Кожне домашнє завдання має бути виконане і надіслане викладачу до початку наступного практичного заняття. Інакше, домашні завдання будуть зараховуватись з коефіцієнтом 0.6.

Заохочувальні бали

- за роботу на практичних заняттях. За умови гарної підготовки і активної роботи на практичному занятті студенту на кожному практичному занятті можуть бути добавлені заохочувальні бали.
- за призові місця у факультетських та університетських олімпіадах з математики.

Максимальна кількість заохочувальних балів одному студенту не може перевищувати 10% (10 балів)

Форма семестрового контролю – залік

Якщо виконано усі передбачені види робіт, то залік виставляється «автоматом» згідно рейтингу здобувача, з переведенням в оцінку за університетською шкалою.

Умови позитивної проміжної атестації.

Для отримання “зараховано” з першої (8 тиждень) та другої проміжної атестації (14 тиждень) студент повинен мати не менше ніж 50% можливих балів на момент проведення календарного контролю.

Перескладання позитивної підсумкової семестрової атестації з метою її підвищення не допускається.

Таблиця відповідності рейтингових балів оцінкам за університетською шкалою:

Кількість балів	Оцінка
100-95	Відмінно
94-85	Дуже добре
84-75	Добре
74-65	Задовільно
64-60	Достатньо
Менше 60	Незадовільно

9. Додаткова інформація з дисципліни (освітнього компоненту)

У випадку дистанційної форми навчання організація освітнього процесу здійснюється з застосуванням електронної пошти, Telegram, відео-конференцій в Zoom та освітньої платформи Moodle.

Робочу програму навчальної дисципліни (силабус):

Складено:

Доцент кафедри МАтаТЙ, канд. фіз.-мат. наук, доцент Боднарчук С. В.

Ухвалено кафедрою МАтаТЙ (протокол № 14 від 25.06.2025 р.)

Погоджено Методичною комісією ФМФ (протокол № 10 від 27.06.2025 р.)