Національний технічний університет України
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Лінійний регресійний аналіз

Робоча програма навчальної дисципліни (Силабус)

Реквізити навчальної дисципліни

Рівень вищої освіти	*Перший (бакалаврський)*
Галузь знань	*11 Математика та статистика*
Спеціальність	*111 Математика*
Освітня програма	*Страхова та фінансова математика*
Статус дисципліни	*Нормативна*
Форма навчання	*очна(денна)*
Рік підготовки, семестр	*4 курс, весняний семестр*
Обсяг дисципліни	*5 кредитів (150 годин), з них аудиторні – 45 годин лекцій, 30 годин практичні заняття, СРС – 75 годин*
Семестровий контроль/ контрольні заходи	*Екзамен/МКР, РГР*
Розклад занять	http://rozklad.kpi.ua/Schedules/ScheduleGroupSelection.aspx
Мова викладання	*Українська*
Інформація про керівника курсу / викладачів	Лектор: *д.ф.-м. н., проф. Іванов Олександр Володимирович, e-mail: alexntuu@gmail.com, тел. моб. +38(067)966-84-21* *к.ф.-м.н., доц. Орловський Ігор Володимирович, e-mail: i.v.orlovsky@gmail.com*
Розміщення курсу	https://ecampus.kpi.ua

Програма навчальної дисципліни

1. Опис навчальної дисципліни, її мета, предмет вивчання та результати навчання

Цілі дисципліни	Дисципліна «Лінійний регресійний аналіз» спрямована на засвоєння здобувачами вищої освіти основних класичних методів та процедур лінійного регресійного аналізу, які широко застосовується у розв'язанні численних задач обробки статистичних даних, що виникають на кожному кроці у природничих та гуманітарних галузях знань. Мета навчальної дисципліни полягає в ознайомлені майбутніх фахівців-математиків з теорією кореляції випадкових величин та векторів, великим спектром статистичних задач стосовно простих

	та множинних моделей лінійної гауссівської регресії, однофакторним дисперсійним аналізом, щоб використовувати методи лінійного регресійного аналізу в теоретичних та прикладних дослідженнях.
Предмет навчальної дисципліни	Предмет навчальної дисципліни – основні поняття та задачі лінійного регресійного аналізу: основні розподіли математичної статистики; теорія кореляції; метод найменших квадратів оцінювання параметрів простої лінійної регресії, побудова надійних інтервалів та перевірка статистичних гіпотез значущості параметрів простої лінійної гауссівської регресії; оцінки найменших квадратів параметрів множинної лінійної регресії та їхні властивості, побудова надійних інтервалів для невідомих параметрів та перевірка гіпотез значущості параметрів гауссівської множинної лінійної моделі регресії; перевірка лінійних гіпотез щодо параметрів лінійної регресії, елементи дисперсійного аналізу; перевірка адекватності множинної лінійної моделі регресії та її модифікацій.
Компетентності	ЗК1 Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу ЗК2 Здатність використовувати у професійній діяльності знання з галузей математичних, природничих, соціально-гуманітарних та економічних наук ЗК3 Знання й розуміння предметної області та професійної діяльності ЗК7 Здатність учитися і оволодівати сучасними знаннями ЗК8 Здатність до пошуку, обробки та аналізу інформації з різних джерел ЗК9 Здатність приймати обґрунтовані рішення ЗК12 Здатність працювати автономно ЗК16 Здатність адаптуватися і діяти в нових умовах, проявляти творчій підхід та ініціативу ЗК17 Здатність вести дослідницьку діяльність, включаючи аналіз проблем, постановку цілей і завдань, вибір способу й методів дослідження ФК1 Здатність формулювати проблеми математично та в символьній формі з метою спрощення їхнього аналізу й розв’язання ФК2 Здатність подавати математичні міркування та висновки з них у формі, придатній для цільової аудиторії, а також аналізувати та обговорювати математичні міркування інших осіб, залучених до

	розв’язання тієї самої задачі ФК3 Здатність здійснювати міркування та виокремлювати ланцюжки міркувань у математичних доведеннях на базі аксіоматичного підходу, а також розташовувати їх у логічну послідовність, у тому числі відрізняти основні ідеї від деталей і технічних викладок ФК4 Здатність конструювати формальні доведення з аксіом та постулатів і відрізняти правдоподібні аргументи від формально бездоганних ФК6 Здатність розробляти і досліджувати математичні моделі явищ, процесів та систем ФК14 Здатність послідовно пояснити іншим математичні теорії або їх складові частини, взаємозв’язок та різницю між ними, навести приклади застосувань у природничих науках
Програмні результати навчання	РН9 Уміти працювати зі спеціальною літературою іноземною мовою РН10 Розв’язувати задачі придатними математичними методами, перевіряти умови виконання математичних тверджень, коректно переносити умови та твердження на нові класи об’єктів, знаходити й аналізувати відповідності між поставленою задачею й відомими моделями РН11 Розв’язувати конкретні математичні задачі, які сформульовано у формалізованому вигляді; здійснювати базові перетворення математичних моделей РН17 Знати теоретичні основи і застосовувати основні методи теорії ймовірностей, теорії випадкових процесів і математичної статистики для дослідження випадкових явищ, перевірки гіпотез, обробки реальних даних та аналізу тривалих випадкових явищ РН20 Розв’язувати основні математичні задачі аналізу даних; застосовувати базові загальні математичні моделі для специфічних ситуацій, мати навички управління інформацією, і застосування комп’ютерних засобів статистичного аналізу даних

2. Пререквізити та постреквізити дисципліни (місце в структурно-логічній схемі навчання за відповідною освітньою програмою)

Пререквізити

У структурно-логічній схемі освітньої програми підготовки з цієї спеціальності нормативної навчальної дисципліни «Лінійний регресійний аналіз» (ПО26) передують нормативні компоненти «Теорія ймовірностей» (ПО15), «Основи математичної статистики» (ПО17), «Основи теорії випадкових процесів» (ПО20).

Постреквізити

Дану навчальну дисципліну викладають в останньому, 8-му семестрі. І тому вона не має постреквізитів у бакалаврській ОП.

3. Зміст навчальної дисципліни

Розділ 1. Розподіли.

Тема 1.1. Класичні розподіли математичної статистики.

Тема 1.2. Квадратичні форми від гауссівських випадкових величин.

Розділ 2. Кореляція.

Тема 2.1. Вибірковий коефіцієнт кореляції.

Тема 2.2. Розподіл вибіркового коефіцієнта кореляції залежних гауссівських випадкових величин.

Розділ 3. Проста лінійна регресія.

Тема 3.1. Модель простої лінійної регресії та оцінка найменших квадратів її параметрів.

Тема 3.2. Перевірка статистичних гіпотез у простій лінійній моделі регресії.

Розділ 4. Множинна лінійна регресія: основні положення.

Тема 4.1. Оцінка найменших квадратів параметрів множинної лінійної регресії.

Тема 4.2. Деякі статистичні задачі для моделі множинної лінійної регресії.

Розділ 5. Елементи дисперсійного аналізу (ANOVA).

Тема 5.1. Лінійні гіпотези.

Тема 5.2. Однофакторний дисперсійний аналіз.

4. Навчальні матеріали та ресурси

1. *Базова література*
   1. *A.H. Kvanli, R.J. Pavur, C.S. Guynes. Introduction to Business Statistics, 5th ed., Cincinnati: South Western College Publishing, 2020, 930 p.*
   2. *В.М. Турчін. Теорія ймовірностей і математична статистика, 2-е видання, Дніпро. Ліра, 2018, 756 с.*
   3. *J.L. Devore, K.N. Berk. Modern Mathematical Statistics with Applications, 2nd Edition, Springer, 2012, 858 p.*
   4. *G.A.F. Seber, A.J. Lee. Linear Regression Analysis, 2nd Edition, Wiley, 2003, 583 p.*

2.Допоміжна література

5. Р.Є. Майборода. Регресія: лінійні моделі, Навчальний посібник.- К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2007.- 296 с.

Навчальний контент

5. Методика опанування навчальної дисципліни (освітнього компонента)

Лекції.

№ з/п	Назва теми лекції та перелік основних питань (перелік дидактичних матеріалів, посилання на літературу)

1.1.1	**Класичні розподіли математичної статистики - 1.** Нормальні розподіли, гамма розподіли та хі-квадрат розподіл Пірсона. Числові характеристики вказаних розподілів та таблиці квантилів *Рекомендована література*: [2], розділ 21; [4], розділ 2.
1.1.1	**Класичні розподіли математичної статистики - 2.** t-розподіл Стьюдента. F-розподіл Фішера. Числові характеристики вказаних розподілів та таблиці квантилів. *Рекомендована література* [2], розділи 21.2; [3], розділ 6.4 [5], глава 9.
1.2.1	**Квадратичні форми від гауссівських випадкових величин.** Ортогональні перетворення гауссівських випадкових векторів. Теорема Кохрена. Теорема Фішера про незалежність вибіркового середнього та вибіркової дисперсії для гауссівської вибірки. *Рекомендована література*: [4], розділ 2.4; [5], розділи 9.4, 9.5.
2.1.1	**Коефіцієнт кореляції як ознака залежності випадкових величин. Розподіл вибіркового коефіцієнта кореляції залежних гауссівських випадкових величин.** Коваріація і коефіцієнт кореляції. Вибірковий коефіцієнт кореляції. Коефіцієнт кореляції як ознака залежності випадкових величин. Теорема про сумісний розподіл випадкових дисперсій та вибіркового коефіцієнта кореляції у випадку двох незалежних гауссівських вибірок. Побудова статистики тесту про незалежність двох гауссівських випадкових величин, яка залежить тільки від вибіркового коефіцієнта кореляції та має розподіл Стьюдента. *Рекомендована література*: [1], глава 14; [3], глава 12.
2.2.1	**Перевірка гіпотези про незалежність двох гауссівських випадкових величин. Розподіл вибіркового коефіцієнта кореляції: залежні гауссівські вибірки.** Побудова статистики тесту про незалежність двох гауссівських випадкових величин, яка залежить тільки від вибіркового коефіцієнта кореляції та має розподіл Стьюдента. Сумісний розподіл вибіркових дисперсій та вибіркового коефіцієнта кореляції у випадку двох залежних гауссівських випадкових вибірок. Точний розподіл випадкового коефіцієнта кореляції двох залежних гауссівських випадкових величин. *Рекомендована література:* [1], глава 14; [3], глава 12.
2.2.2	**Допоміжне перетворення Фішера.** Допоміжне перетворення Фішера та статистичні задачі, які можна розв'язувати за його допомогою. *Рекомендована література*: [3], глава 12.
3.1.1	**Лінія найменших квадратів.** Побудова лінії найменших квадратів та її геометричних сенс. Співпадіння знаків кутового коефіцієнта лінії найменших квадратів та вибіркового коефіцієнта кореляції випадкових змінних. Залишкова сума квадратів. *Рекомендована література*: [1], розділи 14.1, 14.2.
3.1.2	**Модель простої лінійної регресії та оцінка найменших квадратів її параметрів.** Модель простої лінійної регресії. Вимоги до похибок спостережень. План активного регресійного експерименту. Обчислення оцінки найменших квадратів параметрів моделі. Незсуненість оцінки та її коваріаційна матриця.

	Рекомендована література: [1], розділ 14.2; [2], розділ 26.1.
3.2.1	**Принцип максимальної вірогідності в простій лінійній моделі регресії з гауссівскими похибками спостережень.** Симетричний план експерименту. Симетризація плану експерименту. Оцінювання невідомої дисперсії помилок спостережень з використанням залишкової суми квадратів. *Рекомендована література*: [1], розділ 14.2; [3], розділ 12.4.
3.2.1	**Статистики Стьюдента для розв'язання статистичних задач в простій лінійній моделі регресії.** Перетворення функціонала найменших квадратів для простої лінійної гауссівської моделі регресії з метою застосування теореми Кохрена і отримання корисних статистик Стьюдента. Побудова надійних інтервалів для невідомих параметрів простої лінійної регресії. *Рекомендована література*: [1], розділ 14.2; [3], розділ 12.4.
3.2.2	**Перевірка статистичних гіпотез у простій лінійній гауссівській регресії.** Перевірка гіпотез значущості кутового коефіцієнта та вільного члена лінії найменших квадратів при двобічній та однобічний альтернативах. Перевірка гіпотез щодо значення невідомої дисперсії похибки спостережень. Перевірка гіпотези значущості кореляції між змінними. *Рекомендована література*: [1], розділ 14.3; [2], розділ 26.1.
3.2.3	**Прогнозування залежної змінної з використанням лінії регресії.** Середнє квадратичне відхилення прогнозу. Надійні інтервали для ординати лінії регресії. *Рекомендована література*: [1], розділ 14.5; [2], розділ 26.1; [3], розділ 12.4.
4.1.1	**Оцінка найменших квадратів параметрів множинної лінійної регресії.** Статистична модель множинної лінійної регресії та методи оцінювання її параметрів. Оцінка найменших квадратів, її обчислення та найпростіші властивості. *Рекомендована література*: [1], розділ 15.1.
4.1.2	**Теорема Гаусса–Маркова для класичної лінійної регресії.** Лінійні незсунені оцінки параметрів регресії, їх властивості та поняття найкращої оцінки в цьому класі оцінок. Теорема Гаусса-Маркова. Геометричний зміст оцінювання за методом найменших квадратів. *Рекомендована література*: [3], розділ 12.7; [5], розділ 9.5.
4.1.3	**Принцип максимальної вірогідності в класичній множинній лінійній гауссівській регресії**. Рівність оцінки максимальної вірогідності і оцінки найменших квадратів у випадку незалежних гауссівських похибок спостережень. Усереднена залишкова сума квадратів як оцінка (максимальної вірогідності і найменших квадратів) невідомої дисперсії похибки спостережень. *Рекомендована література*: [5], розділ 9.3.
4.2.1	**Отримання статистик Стьюдента для розв'язання статистичних задач в множинній лінійній гауссівській моделі спостережень.** Застосування теореми Кохрена. Отримання корисних статистик Стьюдента. Розподіл хі-

	квадрат залишкової суми квадратів. Побудова надійних інтервалів для невідомих параметрів множинної лінійної гауссівської регресії. *Рекомендована література*: [1], розділ 15.2; [3], розділ 12.7; [5], розділ 9.5.
4.2.2	**Деякі статистичні задачі для моделі множинної лінійної гауссівської регресії.** Побудова надійних інтервалів для невідомої дисперсії похибки спостережень. Перевірка гіпотез значущості параметрів регресії. *Рекомендована література*: [1], розділ 15.2; [3], розділ 12.7; [5], розділ 9.5.
4.2.3	**Прогнозування функції регресії з використанням емпіричної функції регресії.** Середнє квадратичне відхилення прогнозу. Надійні інтервали для значення функції регресії в фіксованій точці. *Рекомендована література*: [5], розділ 9.5.
5.1.1	**Критерій Фішера перевірки лінійних гіпотез про параметри множинної лінійної гауссівської моделі регресії - 1.** Попередні поняття та обчислення. Технічні леми. Обрання критичної області відхилення нульової гіпотези в критерії Фішера. *Рекомендована література*: [1], розділ 11.1; [4], розділ 4.
5.1.2	**Критерій Фішера перевірки лінійних гіпотез про параметри множинної лінійної гауссівської моделі регресії - 2.** Формулювання основного результату. Таблиці ANOVA (дисперсійного аналізу). *Рекомендована література*: [1], розділ 11.2; [3], розділ 11.1.
5.2.1	**Однофакторний дисперсійний аналіз як частинний випадок перевірки лінійних гіпотез про параметри лінійної регресії.** Обчислення значень відповідних статистик, які мають хі-квадрат розподіли. Адаптація загальних таблиць дисперсійного аналізу до таблиць однофакторного дисперсійного аналізу. *Рекомендована література*: [1], розділи 11.1, 11.2; [3], розділи 11.2, 11.3.
5.2.2	**Критерії Стьюдента та Хартлі.** Критерій Стьюдента перевірки гіпотези про рівність середніх двох гауссівських сукупностей в однофакторному дисперсійному аналізі. Критерій Хартлі перевірки гіпотези про рівність дисперсій всіх гауссівських вибірок в однофакторному ANOVA. *Рекомендована література*: [1], розділи 11.1, 11.2; [5], розділ 9.5.
5.2.3	**Критерій перевірки гіпотези про відсутність корисних предикторів у моделі лінійної гауссівської регресії.** Нульова гіпотеза даного критерію як частинний випадок лінійної гіпотези про параметри лінійної моделі регресії. Сенс такого критерію. *Рекомендована література*: [3], розділ 12.7.

Практичні заняття.

№ з/п	Назва теми заняття та перелік основних питань (перелік дидактичних засобів, посилання на літературу та завдання на СРС)
1.	Класичні розподіли математичної статистики. Квадратичні форми від гауссівських випадкових величин. Завдання на СРС: [2], розділ 21.2; [3], розділ 6.4.
2.	Коефіцієнт кореляції як ознака залежності випадкових величин. Перевірка гіпотези про незалежність двох гауссівських випадкових величин. Завдання на СРС: [1], глава 14; [3], розділ 12.5.
3.	Перетворення Фішера та пов'язані з ним статистичні задачі. Завдання на СРС: [3], глава 12.
4.	Оцінка найменших квадратів параметрів простої лінійної регресії та побудова надійних інтервалів для невідомих параметрів. Завдання на СРС: [1], розділ 14.2; [3], розділ 12.4.
5.	Перевірка статистичних гіпотез у простій лінійній моделі регресії. Завдання на СРС: [1], розділ 14.3; [2], розділ 26.1.
6.	Оцінка найменших квадратів параметрів множинної лінійної регресії та її властивості. Завдання на СРС: [1], розділ 15.1.
7.	Принцип максимальної вірогідності в класичній множинній лінійній регресії ТА залишкова сума квадратів. Завдання на СРС: [5], розділ 9.3.
8.	Перевірка гіпотез значущості параметрів множинної лінійної регресії та надійні інтервали для них. Завдання на СРС: [1], розділ 15.2; [3], розділ 12.7; [5], розділ 9.5.
9.	Перевірка гіпотез про дисперсію похибки спостережень в множинній лінійній моделі регресії та надійні інтервали для неї. Завдання на СРС: [1], розділ 15.2; [3], розділ 12.7; [5], розділ 9.5.
10.	Надійні інтервали для значення функції регресії в фіксованій точці. Завдання на СРС: [5], розділ 9.5.
11.	Критерій Фішера перевірки лінійних гіпотез про параметри множинної лінійної регресії. Завдання на СРС: [1], розділ 11.1; [4], розділ 4.
12.	Таблиці дисперсійного аналізу (ANOVA). Завдання на СРС: [1], розділи 11.1, 11.2; [3], розділи 11.2, 11.3.
13.	Однофакторний ANOVA та відповідні таблиці. Завдання на СРС: [1], розділ 11.2; [5], розділ 3.5.

14.	Перевірка гіпотези про відсутність корисних предикторів у моделі лінійної регресії. Завдання на СРС: [3], розділ 12.7.
15.	Модульна контрольна робота.

6. Самостійна робота студента

Вивчення дисципліни включає наступні види самостійної роботи:

- *підготовка до лекційних та практичних занять, виконання домашніх завдань;*
- *підготовка та виконання модульної контрольної роботи;*
- *виконання розрахунково-графічної роботи;*
- *підготовка до екзамену.*

Політика та контроль

7. Політика навчальної дисципліни (освітнього компонента)

Рекомендовані методи навчання: вивчення основної та допоміжної літератури за тематикою лекцій, розв'язування задач на практичних заняттях. Здобувачу першого рівня вищої освіти рекомендується вести докладний конспект лекцій. Важливою частиною якісного засвоєння навчального матеріалу та відпрацювання методів розв'язання основних завдань дисципліни є самостійна робота. Крім вказаного вище, вона містить підготовку до МКР, РГР та єкзамену.

Академічна доброчесність

Політика та принципи академічної доброчесності визначені у розділі 3 Кодексу честі Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». Детальніше: https://kpi.ua/code

Норми етичної поведінки

Норми етичної поведінки студентів і працівників визначені у розділі 2 Кодексу честі Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». Детальніше: https://kpi.ua/code

8. Види контролю та рейтингова система оцінювання результатів навчання (РСО)

На першому занятті здобувачі ознайомлюються із рейтинговою системою оцінювання (РСО) дисципліни, яка побудована на основі Положення про систему оцінювання результатів навчання https://document.kpi.ua/files/2020_1-273.pdf.

Зокрема, рейтинг здобувача першого рівня вищої освіти з освітнього компонента формується як сума балів поточної успішності навчання – стартового рейтингу (максимально 50 балів) та балів за іспит (максимально 50 балів).

Поточний контроль: фронтальний (усний, письмовий), МКР.

Календарний контроль: проводиться двічі на семестр як моніторинг поточного стану виконання вимог силабусу.

Рейтингова система оцінювання включає якість виконання домашніх завдань МКР та РГР. Кожний здобувач першого рівня освіти отримує свій підсумковий рейтинг з дисципліни.

Рейтинг здобувача першого рівня освіти з кредитного модуля складається з балів, які він отримує за:

- виконання домашніх завдань;
- написання модульної контрольної роботи;
- виконання розрахунково-графічної роботи.

Система рейтингових (вагових) балів та критеріїв оцінювання:

Метод оцінювання	**Кількість**	**Мінімальна оцінка в балах**	**Максимальна оцінка в Балах**
Виконання домашніх завдань	5	10	20
Модульна контрольна робота	1	24	40
Розрахунково-графічна робота	1	26	40
Підсумковий рейтинг		60	100

Таблиця відповідності рейтингових балів оцінкам за університетською шкалою:

Кількість балів	*Оцінка*
100-95	Відмінно
94-85	Дуже добре
84-75	Добре
74-65	Задовільно
64-60	Достатньо
Менше 60	Незадовільно
Не виконані умови допуску	Не допущено

Робочу програму навчальної дисципліни (силабус):

Складено: проф. Іванов О.В.

Ухвалено кафедрою МАтаТЙ (протокол № 14 від 25.06.2025 р.)

Погоджено Методичною комісією ФМФ (протокол № 10 від 27.06.2025 р.)