Національний технічний університет України
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Кафедра
математичної фізики
та диференціальних
рівнянь

СПЕЦІАЛЬНІ ФУНКЦІЇ

Робоча програма навчальної дисципліни (Силабус)

Реквізити навчальної дисципліни

Рівень вищої освіти	***Перший (бакалаврський)***
Галузь знань	11 Математика та статистика
Спеціальність	111 Математика
Освітня програма	Страхова та фінансова математика
Статус дисципліни	Вибіркова
Форма навчання	Очна (денна)/дистанційна
Рік підготовки, семестр	3 курс, 5 (або 6) семестр
Обсяг дисципліни	4 кредити ЄКТС (120 годин), з них лекції 36 години, практичні заняття 36 годин, самостійна робота 48 годин
Семестровий контроль/ контрольні заходи	Залік / МКР / ДКР
Розклад занять	*http://roz.kpi.ua, https://schedule.kpi.ua*
Мова викладання	Українська
Інформація про керівника курсу / викладачів	Лектор: докт. фіз.-мат. наук, професор Герасимчук Віктор Семенович Практичні: докт. фіз.-мат. наук, професор Герасимчук Віктор Семенович viktor.gera@gmail.com
Розміщення курсу	платформа дистанційного навчання Sikorsky Distance, електронний кампус КПІ ecampus.kpi.ua, сайт кафедри, інформаційні ресурси бібліотеки, група в Telegram

Програма навчальної дисципліни

1. Опис навчальної дисципліни, її мета, предмет вивчання та результати навчання

1.1. Опис навчальної дисципліни

Метою викладання дисципліни є розкриття основних наукових понять та уявлень теорії спеціальних функцій, а також формування у студентів інтегральної компетентності — здатності до логічного мислення, формування особистості студентів; розвиток їх інтелекту і здібностей; здатності розв'язувати складні спеціалізовані задачі в галузі математики, механіки, фізики, економіки тощо.

Програмні компетентності:

Загальні компетентності (ЗК)

ЗК 1 Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.
ЗК 3 Знання й розуміння предметної області та професійної діяльності.
ЗК 7 Здатність учитися і оволодівати сучасними знаннями.
ЗК 8 Здатність до пошуку, обробки та аналізу інформації з різних джерел.
ЗК 12 Здатність працювати автономно.
ЗК 17 Здатність критично оцінювати результати своєї діяльності в професійній сфері, навчанні і нести відповідальність за вироблення та ухвалення рішень в навчальних контекстах та/або професійній діяльності з урахуванням наукових, соціальних, етичних, правових, економічних аспектів.

Фахові компетентності (ФК)

ФК 1 Здатність формулювати проблеми математично та в символьній формі з метою спрощення їхнього аналізу й розв'язання.

ФК 3 Здатність здійснювати міркування та виокремлювати ланцюжки міркувань у математичних доведеннях на базі аксіоматичного підходу, а також розташовувати їх у логічну послідовність, у тому числі відрізняти основні ідеї від деталей і технічних викладок.

ФК 4 Здатність конструювати формальні доведення з аксіом та постулатів і відрізняти правдоподібні аргументи від формально бездоганних.

ФК 5 Здатність до кількісного мислення.

ФК 6 Здатність розробляти і досліджувати математичні моделі явищ, процесів та систем.

ФК 8 Здатність до аналізу математичних структур, у тому числі до оцінювання обґрунтованості й ефективності використовуваних математичних підходів.

ФК 14. Здатність демонструвати математичну грамотність, послідовно пояснити іншим математичні теорії або їх складові частини, взаємозв'язок та відмінність між ними, навести приклади застосувань у природничих науках.

1.2. Предмет вивчення дисципліни

Предмет навчальної дисципліни – спеціальні функції: циліндричні, сферичні, еліптичні, класичні ортогональні многочлени.

У широкому розумінні *спеціальні функції* це – сукупність окремих класів функцій, що виникають при розв'язанні як теоретичних, так і прикладних задач у найрізноманітніших розділах математики. У вузькому значенні під *спеціальними функціями* маються на увазі *спеціальні функції* математичної фізики, які виникають при розв'язуванні диференціальних рівнянь у частинних похідних.

Дана дисципліна є теоретичною основою сукупності знань та вмінь, що формують сучасний математичний апарат, необхідний для розуміння та освоєння курсів з профільних дисциплін напряму Математика.

1.3. Результати навчання (РН)

Після засвоєння навчальної дисципліни студенти мають демонструвати **програмні результати навчання**:

РН 11 Вміти розв'язувати конкретні математичні задачі сформульовані у формалізованому вигляді; здійснювати базові перетворення із застосуванням спеціальних функцій;

РН 12 Відшуковувати потрібну науково-технічну інформацію у науковій літературі, базах даних та інших джерелах інформації.

РН 19 Знати теоретичні основи і застосовувати спеціальні функції для моделювання реальних фізичних, біологічних, екологічних, соціально-економічних та інших процесів і явищ.

2. Пререквізити та постреквізити дисципліни

Освітній компонент "Спеціальні функції" викладається у п'ятому (або шостому) семестрі і є одним із важливіших курсів професійної підготовки бакалаврів спеціальності "Математика". Цей курс дає систематизоване викладення основних спеціальних функцій, її численних теоретичних та практичних застосувань.

Ця дисципліна має глибокі логічні зв'язки з попередніми дисциплінами навчального плану математичної підготовки бакалаврів, оскільки спирається на апарат лінійної та векторної алгебри, математичного та функціонального аналізу, теорії диференціальних та інтегральних рівнянь, числових і функціональних рядів, ТФКЗ, перетворень Фур'є та інших дисциплін бакалаврського рівня вищої освіти і забезпечує основні дисципліни магістерського рівня.

3. Зміст навчальної дисципліни

Розділ 1. Гамма-функція

Тема 1.1. Гамма-функція. Функціональні співвідношення.

Тема 1.2. Логарифмічна похідна гамма-функції. Бета-функція.

Розділ 2. Спеціальні функції

Тема 2.1. Одновимірна задача Штурма-Ліувілля. Спектральні задачі.

Розділ 3. Циліндричні функції

Тема 3.1. Функції Бесселя першого роду.

Тема 3.2. Властивості функцій Бесселя.

Тема 3.3. Інші циліндричні функції.

Розділ 4. Класичні ортогональні поліноми

Тема 4.1. Ортогональні поліноми та їх загальні властивості.

Тема 4.2. Поліноми Лежандра та їх властивості.

Тема 4.3. Сферичні функції Лежандра та кульові функції Лапласа.

Тема 4.4. Розвинення функцій в ряди Фур'є за ортогональними поліномами.

Тема 4.5. Поліноми Чебишова-Ерміта та Чебишова-Лагерра. Поліноми Кравчука.

Розділ 5. Еліптичні функції

Тема 5.1. Еліптичні інтеграли.

Тема 5.2. Еліптичні функції Якобі.

4. Навчальні матеріали та ресурси

Базова література

1. *Temme N.M*. Special Functions: An Introduction to the Classical Functions of Mathematical Physics. – John Wiley & Sons, 2011. – 392 pp.
2. *Білоколос Є.Д., Юрачківський А.П., Шека Д.Д.* Спеціальні функції в задачах математичної фізики. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2000. – 92 с.
3. *Korenev B.G.* Bessel Functions and Their Applications. – Chapman & Hall/CRC, 2002. – viii+276 pp.
4. *Olver F.W.J.* Asymptotics and Special Functions. – Academic Press, 2014. – 588 pp.
5. *Nikiforov A.F., Uvarov V.B.* Special Functions of Mathematical Physics. – Birkhäuser Boston, 2013. – 445 pp.

Допоміжна

6. *Viola C.* An Introduction to Special Functions. – Springer, 2016. – 172 pp.
7. *Finn J.M*. Introduction to the special functions of mathematical physics with applications to the physical and applied sciences. – Courier Corporation, 2005. – 287 pp.
8. *Akhmedova V., Akhmedov E.T.* Selected Special Functions for Fundamental Physics. Springer eBooks 2019 (2005). – 116 pp.
9. *Hochstadt H*. The Functions of Mathematical Physics. – Courier Corporation, 2012. – 352 pp.
10. *Andrews G.E., Askey R., and Roy R.* Special Functions. Encyclopedia of Mathematics and its Applications 71 – Cambridge University Press, 2001. – 664 pp.
11. *Tigran Ishkhanyan*. Special Functions from Theory to Application: A Computational Approach. Wolfram Media, Inc., 2026.

Довідкова

12. *Abramowitz M., Stegun I.* Handbook of Mathematical Functions. With Formulas Graphs, and Mathematical Tables. – Government Printing Office, 1972. – 1060 c.
13. Encyclopedia of Special Functions - The Askey-Bateman project. – Cambridge University Press, 2020. – Vol. 1: Univariate Orthogonal Polynomials – 398 p.; Vol. 2: Multivariable Special Functions– 434 p.; Vol. 3: Hypergeometric and Basic Hypergeometric Functions.

Інформаційні ресурси

http://dlmf.nist.gov/5 http://dlmf.nist.gov/8 http://dlmf.nist.gov/10
http://dlmf.nist.gov/18 http://dlmf.nist.gov/19 http://dlmf.nist.gov/22
http://dlmf.nist.gov/30

Навчальний контент

5. Методика опанування навчальної дисципліни (освітнього компонента)

Лекційні заняття

Розділ 1. Гамма-функція

Тема 1.1. Гамма-функція. Функціональні співвідношення.

Лекція 1. Означення. Властивості гамма-функції, основна тотожність, формули доповнення та подвоєння.

Тема 1.2. Логарифмічна похідна гамма-функції. Бета-функція

Лекція 2. Псі-функція. Бета-функція. Зв'язок з гамма-функцією.

Розділ 2. Спеціальні функції

Тема 2.1. Одновимірна задача Штурма-Ліувілля. Спектральні задачі.

Лекція 3. Крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку. Самоспряжене рівняння 2-го порядку. Одновимірна задача Штурма-Ліувілля. Постановка спектральних задач. Властивості власних значень і власних функцій. Задача Штурма-Ліувілля без і з особливою точкою.

Розділ 3. Циліндричні функції

Тема 3.1. Функції Бесселя першого роду.

Лекція 4. Диференціальне рівняння Бесселя. Розв'язання у вигляді степеневого ряду. Функції Бесселя.

Тема 3.2. Властивості функцій Бесселя

Лекція 5. Властивості функцій Бесселя. Рекурентні співвідношення. Зображення функцій Бесселя напівцілого порядку.

Лекція 6. Умови ортогональності та нормування. Інтегральні співвідношення між функціями Бесселя. Інтегральне та асимптотичне зображення.

Тема 3.3. Інші циліндричні функції

Лекція 7. Циліндричні функції. Означення та класифікація циліндричних функцій. Повнота системи циліндричних функцій на відрізку. Співвідношення між циліндричними функціями Бесселя, Наймана, Ганкеля.

Розділ 4. Класичні ортогональні поліноми

Тема 4.1. Ортогональні поліноми та їх загальні властивості

Лекція 8. Задачі на власні значення, що приводять до класичних ортогональних поліномів. Розвинення функцій в ряди за ортогональними системами функцій. Найменше відхилення за нормою. Замкненість і повнота ортогональної системи функцій.

Тема 4.2. Поліноми Лежандра та їх властивості

Лекція 9. Рівняння Лежандра. Розв'язання у вигляді степеневого ряду: власні значення. Поліноми Лежандра.

Лекція 10. Властивості поліномів Лежандра: умови ортогональності та нормування; рекурентні співвідношення. Приєднані поліноми Лежандра.

Тема 4.3. Сферичні та кульові функції

Лекція 11. Загальний розв'язок рівняння Лапласа у сферичних координатах. Сферичні функції Лежандра.

Лекція 12. Кульові функції Лапласа. Ортогональність і повнота системи сферичних функцій. Розклад фундаментального розв'язку рівняння Лапласа в ряд за сферичними функціями: задача Дирихле про усталену температуру в кулі.

Тема 4.4. Розвинення функцій в ряди за ортогональними поліномами та функціями Бесселя.

Лекція 13. Розвинення функцій в ряди за ортогональними поліномами. Розвинення фундаментального розв'язку рівняння Лапласа в ряд за циліндричними функціями. Розвинення плоскої хвилі в ряд за поліномами Лежандра та функціями Бесселя.

Тема 4.5. Поліноми Чебишова-Ерміта та Чебишова-Лагерра. Поліноми Кравчука

Лекція 14. Розв'язання рівняння гармонічного осцилятору у вигляді степеневого ряду: власні значення. Поліноми Чебишова-Ерміта та їх властивості: ортогональність та норма, рекурентні співвідношення.

Лекція 15. Розв'язання рівняння руху електрона у кулонівському полі у вигляді степеневого ряду: власні значення. Поліноми Чебишова-Лагерра та їх властивості. Гіпергеометрична функція.

Розділ 5. Еліптичні функції

Тема 5.1. Еліптичні інтеграли

Лекція 16. Задачі, які приводять до еліптичних інтегралів: коливання маятника, довжина дуги еліпса. Еліптичні інтеграли Якобі.

Тема 5.2. Еліптичні функції Якобі

Лекція 17. Функції sn, cn, dn та їх властивості: періодичність, парність, формули "приведення". Диференціювання функцій Якобі.

Лекція 18. Формули додавання, віднімання, подвійного та половинного аргументів. Обчислення амплітуд.

Теорема Ейлера. Виродження еліптичних функцій. Повні еліптичні інтеграли.

Практичні заняття

Розділ 1. Гамма-функція

Тема 1.1. Гамма-функція. Функціональні співвідношення

Заняття 1. Гамма-функція та її властивості.

Розділ 3. Циліндричні функції

Тема 3.1. Функції Бесселя першого роду

Заняття 2. Ряди функцій Бесселя нульового, першого, напівцілого та від'ємного порядку.

Заняття 3. Інтегральне зображення функцій Бесселя. Твірна функція.

Тема 3.2. Властивості функцій Бесселя

Заняття 4. Рекурентні співвідношення між функціями Бесселя.

Розділ 4. Класичні ортогональні поліноми

Тема 4.2. Поліноми Лежандра та їх властивості

Заняття 5. Обчислення поліномів Лежандра. Формула Родріга. Властивості поліномів Лежандра.

Заняття 6. Рекурентні співвідношення між поліномами Лежандра. Інтегральні формули.

Тема 4.3. Сферичні та кульові функції

Заняття 7. Фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа у сферичній системі координат. Приєднані поліноми Лежандра. Сферичні функції Лежандра. Кульові функції.

Тема 4.4. Розвинення функцій в ряди за ортогональними поліномами та функціями Бесселя

Заняття 8. Розвинення функцій в ряди за ортогональними поліномами та сферичними функціями.

Розділ 5. Еліптичні функції

Тема 5.1. Еліптичні інтеграли

Заняття 9. Обчислення еліптичних інтегралів.

6. Самостійна робота студента

Самостійна робота студентів включає опрацювання лекційного матеріалу, підготовку до практичних занять, виконання домашніх завдань та індивідуального семестрового завдання. Індивідуальні завдання припускають комп'ютерне моделювання та побудову графіків спеціальних функцій.

Політика та контроль

7. Політика навчальної дисципліни (освітнього компонента)

7.1. Форми роботи

Навчальні заняття зазвичай проводяться у навчальних аудиторіях в off-line режимі; в умовах воєнного стану або карантину – в on-line режимі із застосуванням усіх доступних наочних засобів подання матеріалу (Zoom, Meet Google, Skype та інше). Додатково студенти отримують всі навчальні та методичні матеріали по e-mail, telegram-каналу або в електронному кампусі.

7.2. Правила відвідування занять

Заняття проводяться згідно з розкладом у навчальних аудиторіях; в умовах воєнного стану або карантину – в on-line режимі з використанням доступних засобів відео зв'язку за умови однозначної ідентифікації здобувача вищої освіти. Проведення занять в on-line режимі регламентується відповідним наказом по КПІ ім. Ігоря Сікорського.

За наявності поважних причин здобувач вищої освіти повинен завчасно (за 1 день) повідомити викладача про можливий пропуск контрольного заходу. Протягом наступного тижня здобувач вищої освіти має звернутися до викладача для погодження форми та порядку усунення заборгованості.

Якщо аудиторне заняття випадає на неробочий (святковий) день, то матеріал такого заняття частково переноситься в категорію «Самостійна робота студентів», а частково додається до наступного заняття.

7.3. Правила призначення заохочувальних та штрафних балів

Заохочувальні бали:

До 5 балів – за активну роботу щонайменше на 5-ти заняттях (обґрунтовані відповіді на запитання, самостійне розв'язування задач та їх аналіз, участь в обговореннях);

До 10 балів – студенту, який підготував і подав для у часті у студентській науковій конференції матеріал за тематикою навчальної дисципліни (за умови доповіді на конференції).

Штрафні бали:

Під час воєнного стану – не застосовуються.

8. Політика університету

8.1. Політика щодо академічної доброчесності

Безумовне дотримання положень «Кодексу честі КПІ ім. Ігоря Сікорського» (розділ 3).

Усі завдання мають виконуватися самостійно! Співпраця студентів дозволена лише при розв'язанні проблемних завдань, але свій розв'язок кожен студент захищає самостійно. Взаємодія студентів під час іспиту/ заліку категорично забороняється і будь-яка така діяльність вважається порушенням академічної доброчесності згідно принципів університету щодо академічної доброчесності. Політика та принципи академічної доброчесності, детальніше: https://kpi.ua/code

8.2. Норми етичної поведінки

Безумовне дотримання норм етичної поведінки, визначених у розділі 2 Кодексу честі Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»; детальніше: https://kpi.ua/code

Оцінювання та контрольні заходи

9. Види контролю та рейтингова система оцінювання результатів навчання (РСО)

9.1. Види контролю

Вид контролю	*Спосіб контролю*
Поточний контроль	Перевірка виконання індивідуальних завдань, опитування за темою заняття, модульні контрольні роботи
Календарний контроль	Проводиться двічі на семестр як моніторинг поточного стану виконання вимог силабусу
Семестровий контроль	Залік
Умови допуску до семестрового контролю	Семестровий рейтинг студента не менше 60 балів, за умови зарахування усіх індивідуальних завдань

9.2. Рейтингова система оцінювання результатів навчання

Головна частина рейтингу студента формується завдяки активній творчій праці на практичних заняттях, виконанні індивідуальних домашніх завдань та результатах модульної контрольної роботи.

Види контролю:

- поточний контроль: фронтальний (усний, письмовий);
- календарний контроль проводиться двічі на семестр як моніторинг поточного стану виконання вимог силабусу.

1. Поточний контроль

Включає: експрес-опитування, опитування за темою заняття, написання МКР, захист індивідуальних завдань.

1. **Робота на практичних заняттях**
   Ваговий бал – 2, якість роботи – 0 - 2 (відповідь: повна і своєчасна (до наступного практичного заняття) – 2; неповна, або несвоєчасна –1; відсутня – 0; бездоганна – 3).
   Максимальна кількість балів за роботу на практичних заняттях – не обмежена.
2. **Модульна контрольна робота**
   Складається з 2-х частин і виконується перед календарним контролем (атестацією) за пройденим на момент її написання матеріалом. Кожна частина модульної контрольної оцінюється в 14 балів.
   Максимальна кількість балів за МКР – 28.
   Переписування контрольної роботи з метою підвищення балу – не передбачене.
3. **Домашня контрольна робота**
   Ваговий бал – 4. Оцінюється кожне індивідуальне завдання ДКР у процентному відношенні до

правильно розв'язаних задач. Максимальна кількість балів за 8 індивідуальних завдань складає: 4 × 8 = 32 бали. Кожне індивідуальне завдання захищається особисто.

Загальний семестровий рейтинговий бал:

$$R = R_{ПЗ} + R_{МКР} + R_{ДКР} = R_{ПЗ} + 28 + 32,$$

де $R_{ПЗ}$ – максимальна кількість балів за роботу на практичних заняттях, $R_{МКР}$ – максимальна кількість балів за модульну контрольну роботу, $R_{ДКР}$ – максимальна кількість балів за індивідуальні завдання.

2. Календарний контроль

Проводиться двічі на семестр як моніторинг поточного стану виконання вимог силабусу, базується на поточній рейтинговій оцінці. Умовою позитивної атестації є значення поточного рейтингу студента не менше 50% від максимально можливого на час атестації. Бал, необхідний для отримання позитивного календарного контролю доноситься до студентів викладачем не пізніше ніж за 2 тижні до початку календарного контролю.

3. Семестровий контроль (залік)

Залік виставляється за результатами роботи в семестрі. За основу береться загальний семестровий рейтинговий бал.

Якщо на момент семестрового контролю, *за умови виконання всіх умов допуску до семестрового контролю*, здобувача вищої освіти не задовольняє набрана кількість балів за семестр, то результати рейтингової оцінки скасовуються і здобувач вищої освіти здає залік. У цьому разі він може бути оцінений від 0 до 100 балів.

4 Таблиця відповідності рейтингових балів оцінкам за університетською шкалою

Кількість балів	*Оцінка*
100-95	Відмінно
94-85	Дуже добре
84-75	Добре
74-65	Задовільно
64-60	Достатньо
Менше 60	Незадовільно
Не виконані умови допуску	Не допущено

Робочу програму навчальної дисципліни (силабус):

Складено професором кафедри математичної фізики та диференціальних рівнянь, доктором фіз.-мат. наук, професором Герасимчуком В.С.

Ухвалено кафедрою математичної фізики та диференціальних рівнянь ФМФ (протокол № 9 від 25.06.2025р.)

Погоджено Методичною комісією ФМФ (протокол № 10 від 27.06.2025р.)