Національний технічний університет України
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Кафедра
математичного аналізу
та теорії ймовірностей

Теорія алгебр Лі та її застосування

Робоча програма навчальної дисципліни (Силабус)

1. Реквізити навчальної дисципліни

Рівень вищої освіти	***Перший (бакалаврський)***
Галузь знань	*11 – Математика та статистика*
Спеціальність	*111 Математика*
Освітня програма	*Страхова та фінансова математика*
Статус дисципліни	*Вибіркова*
Форма навчання	*очна(денна)/змішана*
Рік підготовки, семестр	*4 курс, осінній семестр*
Обсяг дисципліни	*4 кредити ЄКТС; 120 годин (36 лекційних, 18 практичних, 66 СРС)*
Семестровий контроль/ контрольні заходи	*Залік / контрольна робота, домашня контрольна робота*
Розклад занять	*rozklad.kpi.ua*
Мова викладання	*Українська*
Інформація про керівника курсу / викладачів	Лектор: *доктор філософії Чаповський Євгеній Юрійович, safemacc@gmail.com* Практичні: *доктор філософії Чаповський Євгеній Юрійович, safemacc@gmail.com*
Розміщення курсу	campus.kpi.ua

2. Програма навчальної дисципліни

1. Опис навчальної дисципліни, її мета, предмет вивчення та результати навчання

Мета дисципліни	Метою навчальної дисципліни є формування у здобувачів освіти здібностей: • до логічного мислення, розвиток їх інтелекту і здібностей; • до необхідної інтуїції та ерудиції у питаннях застосування математики, виховання у студентів прикладної математичної культури; • використовувати методи математичного аналізу в інженерних розрахунках; • доводити розв’язок задачі до практично

	прийнятного результату – числа, графіка, точного якісного висновку із застосуванням для цього адекватних обчислювальних засобів, таблиць і довідників; • уміння аналізувати одержані результати, самостійно використовувати і вивчати літературу з математики
Предмет навчальної дисципліни	Основні поняття та твердження теорії алгебр Лі, класифікація напівпростих алгебр Лі.
Компетентності	Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу (ЗК1). Здатність учитися і оволодівати сучасними знаннями (ЗК7). Здатність до пошуку, обробки та аналізу інформації з різних джерел (ЗК8). Здатність працювати автономно (ЗК12). Здатність критично оцінювати результати своєї діяльності в професійній сфері, навчанні і нести відповідальність за вироблення та ухвалення рішень в навчальних контекстах та/або професійній діяльності з урахуванням наукових, соціальних, етичних, правових, економічних аспектів (ЗК17). Здатність формулювати проблеми математично та в символьній формі з метою спрощення їхнього аналізу й розв'язання (ФК1). Здатність здійснювати міркування та виокремлювати ланцюжки міркувань у математичних доведеннях на базі аксіоматичного підходу, а також розташовувати їх у логічну послідовність, у тому числі відрізняти основні ідеї від деталей і технічних викладок (ФК3). Здатність конструювати формальні доведення з аксіом та постулатів і відрізняти правдоподібні аргументи від формально бездоганних (ФК4).
Програмні результати навчання	Знати принципи modus ponens (правило виведення логічних висловлювань) та modus tollens (доведення від супротивного) і використовувати умови, формулювання, висновки, доведення та наслідки математичних тверджень (РН3). Розуміти фундаментальну математику на рівні, необхідному для досягнення інших вимог освітньої програми (РН4). Розв'язувати задачі придатними математичними методами, перевіряти умови виконання математичних тверджень, коректно переносити умови та твердження на нові класи об'єктів, знаходити й аналізувати

	відповідності між поставленою задачею й відомими моделями (РН10). Розв'язувати конкретні математичні задачі, які сформульовано у формалізованому вигляді; здійснювати базові перетворення математичних моделей (РН11). Відшуковувати потрібну науково-технічну інформацію у науковій літературі, базах даних та інших джерелах інформації (РН12). Знати теоретичні основи і застосовувати алгебраїчні методи для вивчення математичних структур (РН15).

2. Пререквізити та постреквізити дисципліни (місце в структурно-логічній схемі навчання за відповідною освітньою програмою)

Пререквізити: «Лінійна алгебра», «Математичний аналіз», «Теорія диференціальних рівнянь».

Постреквізити: «Математична фізика», «Об'єктно-орієнтоване програмування», «Розвиток класичних ідей в сучасній математиці».

3. Зміст навчальної дисципліни

Розділ 1. Вступ до теорії алгебр Лі

Тема 1.1. Алгебри Лі.

Початкові означення і приклади. Гомоморфізми, підалгебри та ідеали. Означення центра. Асоціативні алгебри, похідні та структурні сталі. Конструкції з ідеалами. Фактор-алгебри. Розв'язні та нільпотентні алгебри Лі. Теорема та характеризація Енгеля. Радикал алгебри та напівпрості алгебри.

Тема 1.2. Зв'язок з групами Лі та класифікація.

Групи точкових перетворень, інфінітезимальні генератори. Ідеал і критерій інваріантності. Побудова алгебри Лі векторних полів. Класифікація низькорозмірних алгебр над полем комплексних чисел.

Розділ 2. Зображення, реалізації та контракції алгебр Лі

Тема 2.1. Зображення та реалізації.

Представлення алгебр Лі. Реалізації алгебр Лі диференціальними операторами першого порядку. Матричні зображення алгебр Лі. Модулі, підмодулі та фактор-модулі алгебр Лі. Незвідні та нерозкладні модулі. Лема Шура. Зображення sl(2,C). Теорема Вейля.

Тема 2.2. Ваги і вагові простори.

Підалгебри gl(V) та Критерій Картана. Ваги, вагові простори. Лема про інваріантність. Теорема Лі про розв'язні алгебри. Розклад Жордана. Форма кілінга. Похідні напівпростих алгебр. Критерії розв'язності.

Розділ 3. Напівпрості алгебри Лі

Тема 3.1. Кореневі простори.

Означення кореневого простору та підалгебри Картана. Кореневі системи і їх групи Вейля. Матриці Картана та Діаграми Динкіна. Класичні алгебри Лі.

Тема 3.2. Властивості напівпростих алгебр Лі.

Теорема Серра. Незвідні зображення напівпростих алгебр Лі. Універсальна обгортуюча алгебри Лі. Модулі Верма.

4. Навчальні матеріали та ресурси

Основні:

1. K. Erdmann, M. J. Wildon, Introduction to Lie Algebras, Springer, 2006, 254 p.
2. Нестеренко М., Реалізації та контракції алгебр Лі, орбіт-функції та квазікристали, Дисертація докт. фіз.-мат. наук, Інститут математики, 2021, URL:https://events.imath.kiev.ua/event/753/attachments /59/177/ dis_Nesterenko.pdf
3. V. Kac, Introduction to Lie Algebras, Course notes for MIT 18.745, 2010.
4. N. Jacobson, Lie algebras, Dover, 1979, 331 p.
5. 7. Hrivnák, J., Motlochová, L., Dual-Root Lattice Discretization of Weyl Orbit Functions. J Fourier Anal Appl., 2019, V.25, 2521–2569.

Додаткові:

6. Дрозд Ю., Вступ до теорії зображень, лекції https://imath.kiev.ua/~drozd/Lectures.pdf
7. Нестеренко М., Контракції та реалізації алгебр Лі, Дисертація канд. фіз.-мат. наук, Інститут математики, 2006, URL: https://www.imath.kiev.ua/~maryna/MAINFILE.pdf
8. Nesterenko M., Popovych R., Contractions of Low-dimensional Lie Algebras, J. Math. Phys. 2006, V.47, 123515, 45 pages.
9. Popovych R., Boyko V., Nesterenko M., Lutfullin M., Realizations of Real Low-Dimensional Lie Algebras, J. Phys. A., 2003, V. 36, № 26, P. 7337–7360. 2005; math-ph/0301029-V7, 39 pages (extended and revised version).
10. Moody R.V., Nesterenko M., Patera J., Computing with almost periodic functions, Acta Crystallographica A, 2008, A64, 654–669.

11. Навчальний контент

12. Методика опанування навчальної дисципліни (освітнього компонента)

Лекції:

1. Означення Алгебр Лі, приклади. Гомоморфізми, підалгебри та ідеали. Асоціативні алгебри, похідні та структурні сталі.
   Рекомендована література: [1], [4].
   Рекомендована література: [1].
2. Конструкції з ідеалами. Фактор-алгебри. Розв’язні та нільпотентні алгебри Лі. Означення центра.
   Рекомендована література: [1].
3. Групи точкових перетворень, інфінітезимальні генератори. Ідеал і критерій інваріантності. Побудова алгебри Лі векторних полів.
4. Прості та напівпрості алгебри Лі. Радикал та нільрадикал. Теорема Леві-Мальцева.
   Рекомендована література: [1].
5. Класифікація низькорозмірних алгебр Лі над полем комплексних чисел.

6. Представлення алгебр Лі. Реалізації алгебр Лі диференціальними операторами першого порядку. Матричні зображення алгебр Лі. Теорема Адо.
   Рекомендована література: [3], [4], [9].
7. Диференціальні інваріанти. Базис диференціальних інваріантів та оператор інваріантного диференціювання.
   Рекомендована література: [9].
8. Означення та найпростіші типи контракцій: Контракції Іньоню-Вігнера та Салетана.
   Рекомендована література: [8].
9. Необхідні умови існування контракцій. Контракції низькорзмірних алгебр Лі.
   Рекомендована література: [8].
10. Кореневі системи і їх групи Вейля. Матриці Картана та Діаграми Динкіна.
    Рекомендована література: [1], [3].
11. Означення орбіт-функцій. Їх ортогональність і симетричність. Розклад функцій за орбіт-функціями.
    Рекомендована література: [5].
12. Орбіт-функції як власні функції та відповідні власні значення. Дискретизація орбіт-функцій та зв’язок з ортогональними поліномами.
    Рекомендована література: [5].
13. Конструкція одновимірного квазікристалу. Застосування зв’язку між фізичним та внутрішнім просторами квазікристалу для шифрування інформації.
    Рекомендована література: [10].
14. Означення модельної множини та майжеперіодичної функції. Високорозмірні квазікристали.
    Рекомендована література: [10].
15. Ваги, вагові простори. Лема про інваріантність. Теорема Лі про розв’язні алгебри.
    Рекомендована література: [1].
16. Розклад Жордана. Форма Кілінга. Похідні напівпростих алгебр Лі. Критерії розв’язності.
    Рекомендована література: [1], [3].
17. Модулі, підмодулі та фактор-модулі алгебр Лі. Незвідні та нерозкладні модулі. Незвідні зображення sl(2,C). Теорема Вейля.
    Рекомендована література: [1].
18. Незвідні зображення класичних алгебр Лі. Універсальна обгортуюча алгебри Лі.
    Рекомендована література: [1].

Практичні заняття:

1. Означення алгебри Лі, центр, ідеал, перетворення ізоморфізму.
2. Оператори приєднаних диференціювань, дослідження нільпотентності та розв’язності.
3. Алгебри Лі векторних полів, продовження диференціальних операторів та знаходження інваріантів.
4. МКР-1. Аналіз задач.

5. Контракції, перевірка необхідних умов та побудова контракцій Іньоню-Вігнера.
6. Кореневі системи, група Вейля, матриця Картана.
7. Орбіт-функції, побудова та зведення до поліноміального вигляду.
8. МКР-2. Аналіз задач.
9. Квазікристали. Проєкції двовимірих сіток цілих чисел.

13. Самостійна робота студента/аспіранта

Розділ 1.

Матричні групи та алгебри Лі над полями дійсних та комплексних чисел.

Рекомендована література: [1], розділ 12.

Алгебри Каца-Муді.

Рекомендована література: [1], розділ 15.

Групи Вейля.

Рекомендована література: [1], розділ 19.

Розділ 2.

Незвідні зображення скінчених груп. Доведення теореми Машке і леми Шура.

Рекомендована література: [6], розділ 1.

Компактні групи і топологічні групи.

Рекомендована література: [6], розділ 2.

Напівпрості модулі. Теорема Веддерберна-Артіна

14. Політика та контроль

15. Політика навчальної дисципліни (освітнього компонента)

Рекомендовані методи навчання: вивчення основної та допоміжної літератури за тематикою лекцій, розв'язування задач на практичних заняттях та при виконанні домашніх робіт.
Студенту рекомендується вести докладний конспект лекцій. Важливим аспектом якісного засвоєння матеріалу, відпрацювання методів та алгоритмів вирішення основних завдань дисципліни є самостійна робота. Вона містить читання літератури, огляд літератури за темою, підготовку до занять, виконання домашньої контрольної роботи, підготовку до МКР та іспиту.

Академічна доброчесність

Політика та принципи академічної доброчесності визначені у розділі 3 Кодексу честі Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». Детальніше: https://kpi.ua/code

Норми етичної поведінки

Норми етичної поведінки студентів і працівників визначені у розділі 2 Кодексу честі Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». Детальніше: https://kpi.ua/code

На занятті схвалюється пошук додаткової інформації та активна участь у обговоренні.

Атестація виставляється за домашніми роботами та модульними контрольними роботами.

16. Види контролю та рейтингова система оцінювання результатів навчання (РСО)

1. Модульний контроль

Модульну контрольну роботу розбито на дві контрольні роботи:

- МКР-1: ваговий бал – 20 балів;
- МКР-2: ваговий бал – 20 балів;

Максимальна кількість балів за всі контрольні роботи дорівнює

Uk = 20 балів х 2 = 40 балів.

Кожна контрольна робота складається з 5 задач. Ваговий бал кожної задачі – 4 бали. Роз'язок задачі оцінюється в 0-4 бали наступним чином:

- якщо задача повністю розв'язана, то студент отримує 4 балів;
- якщо відповідь правильна, але у розв'язку є неточності, або ж задача розв'язана частково, студент отримує кількість балів, що розраховується за формулою:

  Ni = 4***Pi**/100,

  де **Pi –** відсоток виконання певної задачі;
- якщо відповідь незадовільна, метод розв'язування задачі неправильний – 0 балів.

2. Індивідуальна робота

Ваговий бал: **Ui** = 20 балів.

Індивідуальна робота складається з 4 домашніх завдань. Кожне завдання оцінюється в 5 балів. Кількість балів, що зараховується пропорційна відсотку виконаного завдання (аналогічно до МКР).

Семестровий рейтинг складається з балів модульного контролю та балів за індивідуальну роботу.

Умови допуску до семестрового контролю:

Семестровий рейтинг не менше 35 балів.

Загальний рейтинг підраховується за формулою:

Rs = 10/6*(Uk** + **Ui) *= 10/6 * (40+20) = 100 балів*

Залікова робота

Рейтинговий бал, отриманий студентом протягом семестру, виставляється як залікова оцінка за курс.

У разі, якщо студент не згодний зі своєю семестровою оцінкою, і має допуск до семестрового контролю, він має право виконати письмову залікову роботу. У такому разі семестровий рейтинг на залікову оцінку не впливає, а залікова оцінка виставляється за результатом залікової роботи.

Кожен білет залікової роботи складається з 2 теоретичних питань та 2 задач. Перелік как відповідності рейтингових балів оцінкам за університетською шкалою:

Кількість балів	*Оцінка*
100-95	Відмінно
94-85	Дуже добре
84-75	Добре
74-65	Задовільно
64-60	Достатньо
Менше 60	Незадовільно
Не виконані умови допуску	Не допущено

Виконання і оцінювання ***контрольної роботи або домашнього завдання.***
Розв'язок отриманного завдання здійснюється самостійно. Виконане завдання контрольного заходу надсилається як відповідь на отримане завдання у вигляді одного файлу в форматі pdf, який містить фотографії рукописного тексту, і розмір якого не перевищує 10 Mb. Текст має бути розбірливим і фотографії тексту якісні.
Перша сторінка роботи має містити ПІБ та групу виконавця роботи. Робота, що не містить будь-яких з цих даних не перевіряється і оцінюється в 0 балів.
Робота має бути надіслана не пізніше вказаної в умовах дати. Максимальний бал за роботу зменшується на 10% за один день запізнення. У разі запізнення на два чи більше днів робота оцінюється в 0 балів.

17. Додаткова інформація з дисципліни (освітнього компонента)

Перелік питань до екзамену

1. Означення Алгебри Лі, гомоморфізми, підалгебри та ідеали.
2. Асоціативні алгебри і алгебра диференціювання, внутрішні диференціювання.
3. Похідна алгебри Лі та структурні сталі.
4. Фактор-алгебра та пряма сума алгебр Лі.
5. Класи ізоморфізму низькорозмірних алгебр Лі.
6. Розв'язні та нільпотентні алгебри Лі, центр алгебри.
7. Теорема та характеризація Енгеля.
8. Радикал алгебри та напівпрості алгебри.
9. Групи точкових перетворень, інфінітезимальні генератори.
10. Ідеал і критерій інваріантності. Побудова алгебри Лі векторних полів.
11. Реалізація алгебр Лі диференціальними операторами першого порядку.
12. Лінійні зображення алгебр Лі, незвідність та цілкомзвідність.
13. Модулі, підмодулі та фактор-модулі алгебр Лі.
14. Зображення алгебри sl(2,C) та теорема Вейля (без доведення).
15. Ваги, вагові простори. Лема про інваріантність.
16. Теорема Лі про розв'язні алгебри.
17. Розклад Жордана і форма Кілінга.

18. Критерії розв’язності алгебр Лі.
19. Означення кореневого простору та підалгебри Картана.
20. Кореневі системи і їх групи Вейля.
21. Матриці Картана та діаграми Динкіна.

Робочу програму навчальної дисципліни (силабус):

Складено: доктор філософії., ст. викл. Чаповський Євгеній Юрійович

Ухвалено кафедрою МАтаТЙ (протокол №14 від 25.06.2025)

Погоджено Методичною комісією ФМФ (протокол №10 від 27.06.2025)