



# Теорія міри та інтеграл Лебега

## Робоча програма навчальної дисципліни (Силабус)

### Реквізити навчальної дисципліни

| Рівень вищої освіти                         | Перший (бакалаврський)  |
|---|---|
| Галузь знань                                | 11 Математика та статистика   |
| Спеціальність                               | 111 Математика  |
| Освітня програма                            | «Страхова та фінансова математика»  |
| Статус дисципліни                           | Вибіркова   |
| Форма навчання                              | Очна (денна)/дистанційна  |
| Рік підготовки, семестр                     | 3 курс, осінній семестр   |
| Обсяг дисципліни                            | 120 годин (36 годин – Лекції, 36 години – Практичні, 48 годин – СРС)  |
| Семестровий контроль/ контрольні заходи     | Залік/модульна контрольна робота, розрахунково графічна робота  |
| Розклад занять                              | <a href="http://roz.kpi.ua/">http://roz.kpi.ua/</a>   |
| Мова викладання                             | Українська  |
| Інформація про керівника курсу / викладачів | Лектор: канд. фіз.-мат. наук, доцент, Боднарчук Семен Володимирович <a href="mailto:sem_bodn@ukr.net">sem_bodn@ukr.net</a><br>Практичні / Семінарські: канд. фіз.-мат. наук, доцент, Боднарчук Семен Володимирович <a href="mailto:sem_bodn@ukr.net">sem_bodn@ukr.net</a> |
| Розміщення курсу                            | <a href="https://campus.kpi.ua">https://campus.kpi.ua</a>   |

## Програма навчальної дисципліни

### 1. Опис навчальної дисципліни, її мета, предмет вивчення та результати навчання

|   |   |
|---|---|
| <p><b>Цілі дисципліни</b></p>               | <p>Дисципліна «Теорія міри та інтеграл Лебега» спрямована на засвоєння здобувачами бакалаврського рівня вищої освіти як абстрактного поняття міри множин, так і важливих прикладів міри Лебега та мір Лебега-Стільтьєса на відповідних <math>\sigma</math>-алгебрах вимірних множин у евклідових просторах. Крім вивчення основ теорії міри як важливого елемента математичної освіти, головна мета навчальної дисципліни полягає в тому, щоб ознайомити майбутніх фахівців-математиків з побудовою інтеграла Лебега від вимірних функцій, який є істотним розширенням класичного інтеграла Рімана та широко використовується для опису багатьох об'єктів у різних галузях сучасної математики. Так, теорія міри та інтеграла Лебега є основою сучасної теорії ймовірностей та математичної статистики, теорії випадкових процесів тощо.</p>  |
| <p><b>Предмет навчальної дисципліни</b></p> | <p>Предмет навчальної дисципліни - це основні поняття теорії множин, основні класи множин та їх властивості, основні властивості міри, зокрема, мір Лебега та Лебега-Стільтьєса, теорія продовження міри, основні властивості функцій обмеженої варіації, заряди, основні поняття теорії вимірних функцій, зокрема, збіжність майже скрізь та за мірою, основні властивості інтеграла Лебега, граничні теореми для інтеграла Лебега, поняття абсолютної неперервності та сингулярності мір, добутку мір, кратних та повторних інтегралів Лебега. Розглядаються також класичні теореми Лебега, Каратеодорі, Хана-Банаха, Єгорова, Лузіна, Радона-Нікодіма, Фубіні-Тонеллі тощо.</p>  |
| <p><b>Компетентності</b></p>                | <p>ЗК1 Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу.<br/> ЗК3 Знання й розуміння предметної області та професійної діяльності.<br/> ЗК7 Здатність учитися і оволодівати сучасними знаннями.<br/> ЗК8 Здатність до пошуку, обробки та аналізу інформації з різних джерел.<br/> ЗК12 Здатність працювати автономно.<br/> ЗК13 Визначеність і наполегливість щодо поставлених завдань і взятих обов'язків.<br/> ЗК16 Здатність проявляти творчий підхід та ініціативу.<br/> ФК1 Здатність формулювати проблеми математично та в символній формі з метою спрощення їхнього аналізу й розв'язання.<br/> ФК2 Здатність подавати математичні міркування та висновки з них у формі, придатній для цільової аудиторії, а також аналізувати та обговорювати математичні міркування інших осіб, залучених до розв'язання тієї самої задачі.<br/> ФК3 Здатність здійснювати міркування та виокремлювати ланцюжки міркувань у математичних доведеннях на базі аксіоматичного підходу, а також розташовувати їх у логічну послідовність, у тому числі відрізняти основні ідеї від деталей і технічних викладок.<br/> ФК4 Здатність конструювати формальні доведення з аксіом та постулатів і відрізняти правдоподібні аргументи від формально бездоганих.</p> |

|   |   |
|---|---|
|   | <p>ФК8 Здатність до аналізу математичних структур, у тому числі до оцінювання обґрунтованості й ефективності використовуваних математичних підходів.</p> <p>ФК14 Здатність демонструвати математичну грамотність, послідовно пояснити іншим математичні теорії або їх складові частини, взаємозв'язок та відмінність між ними, навести приклади застосувань у природничих науках.</p>   |
| <p><b>Програмні результати навчання</b></p> | <p>РН1 Знати основні етапи історичного розвитку математичних знань і парадигм, розуміти сучасні тенденції в математиці.</p> <p>РН3 Знати принципи <i>modus ponens</i> (правило виведення логічних висловлювань) та <i>modus tollens</i> (доведення від супротивного) і використовувати умови, формулювання, висновки, доведення та наслідки математичних тверджень.</p> <p>РН4 Розуміти фундаментальну математику на рівні, необхідному для досягнення інших вимог освітньої програми.</p> <p>РН7 Пояснювати математичні концепції мовою, зрозумілою для нефахівців у галузі математики.</p> <p>РН11 Розв'язувати конкретні математичні задачі, які сформульовано у формалізованому вигляді; здійснювати базові перетворення математичних моделей.</p> <p>РН12 Відшукувати потрібну науково-технічну інформацію у науковій літературі, базах даних та інших джерелах інформації.</p> <p>РН23 Знати міждисциплінарні зв'язки між математичною та іншими природничими та соціальними науками; основи міжнародного співробітництва в галузі науки та освіти; математичну мову як універсальний спосіб для моделювання природничих, технічних та соціальних процесів.</p> |

## 2. Пререквізити та постреквізити дисципліни (місце в структурно-логічній схемі навчання за відповідною освітньою програмою)

**Пререквізити:** У структурно-логічній схемі освітньої програми підготовки за даною спеціальністю вибіркової навчальній дисципліні «Теорія міри та інтеграл Лебега» передують нормативні компоненти «Математичний аналіз: функції однієї змінної» (ПО1), «Математичний аналіз: функції кількох змінних» (ПО2), «Вступ до теорії ймовірностей» (ПО9).

**Постреквізити:** Знання та вміння, отримані здобувачами під час вивчення цієї дисципліни, будуть потрібні їм для опанування нормативних компонент «Функціональний аналіз» (ПО10), «Методи математичної фізики» (ПО12), «Теорія ймовірностей» (ПО15), «Основи математичної статистики» (ПО17), «Основи теорії випадкових процесів» (ПО20).

## 3. Зміст навчальної дисципліни

| Назва розділів і тем  | Кількість годин |              |           |     |
|---|-----------------|--------------|-----------|-----|
|   | Всього          | у тому числі |           |     |
|   |                 | Лекції       | Практичні | СРС |
| 1   | 2               | 3            | 4         | 5   |
| <b>Розділ 1. Класи множин</b>                                   |                 |              |           |     |
| <i>Тема 1.1. Основні класи множин</i>                           | 6               | 2            | 2         | 2   |
| <i>Тема 1.2. Сигма-алгебра борелевих множин</i>                 | 6               | 2            | 2         | 2   |
| <b>Розділ 2. Функції множин. Міри та заряди</b>                 |                 |              |           |     |
| <i>Тема 2.1. Міра та її властивості</i>                         | 22              | 6            | 8         | 8   |
| <i>Тема 2.2. Зовнішня міра та продовження мір</i>               | 6               | 2            | 2         | 2   |
| <i>Тема 2.3. Заряди та їх властивості</i>                       | 6               | 2            | 2         | 2   |
| <b>Розділ 3. Вимірні відображення та функції</b>                |                 |              |           |     |
| <i>Тема 3.1. Вимірні відображення та функції</i>                | 6               | 2            | 2         | 2   |
| <i>Тема 3.2. Збіжність за мірою та майже скрізь</i>             | 12              | 4            | 4         | 4   |
| <i>Модульна контрольна робота</i>                               | 6               | -            | 2         | 4   |
| <b>Розділ 4. Інтеграл Лебега</b>                                |                 |              |           |     |
| <i>Тема 4.1. Означення інтеграла Лебега та його властивості</i> | 12              | 4            | 4         | 4   |
| <i>Тема 4.2. Граничний перехід під знаком інтеграла Лебега</i>  | 12              | 4            | 4         | 4   |
| <i>Тема 4.3. Інтеграл Лебега за мірою Лебега</i>                | 6               | 2            | 2         | 2   |
| <i>Розрахункова графічна робота</i>                             | 4               | -            | -         | 4   |
| <b>Розділ 5. Абсолютна неперервність та сингулярність мір</b>   |                 |              |           |     |
| <i>Тема 5.1. Похідна Радона-Нікодима</i>                        | 8               | 4            | 2         | 2   |
| <b>Розділ 6. Добуток мір та теорема Фубіні</b>                  |                 |              |           |     |
| <i>Тема 6.1. Теорема Фубіні</i>                                 | 4               | 2            | -         | 2   |
| Залік   | 4               | -            | -         | 4   |
| Всього годин  | 120             | 36           | 36        | 48  |

#### 4. Навчальні матеріали та ресурси

##### Базова література

1. Ю. М. Березанский, Г.Ф Ус., З.Г. Шефтель. Функціональний аналіз, Львів, Видавець І.Е. Чижигов, 2014. . – 560 с.
2. А.Я. Дороговцев, О.Ю. Константинов, О.О. Курченко, С.Д. Івасишен. Завдання для практичних і лабораторних занять з курсу “Теорія міри та інтеграла”, Київ, КДУ, 1991. - 76 с.

##### Додаткова література

3. В. М. Радченко. Теорія міри та інтеграла. – К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2012. – 144 с.

#### Навчальний контент

#### 5. Методика опанування навчальної дисципліни (освітнього компонента)

##### Очна/дистанційна форма

##### Лекційні заняття

| № з/п | Назва теми лекції та перелік основних питань (перелік дидактичних засобів, посилання на літературу та завдання на СРС)   |
|-------|--|
| 1     | <b>Основні класи множин.</b> Півкільця, півалгебри, кільця, алгебри, сигма-кільця, сигма-алгебри, монотонні класи. Кільця та алгебри, що породжуються сім'єю множин.<br><i>Рекомендована література:</i> [1], с. 21-25, [3], с. 1-6.   |
| 2     | <b>Сигма-алгебра борельових множин.</b> Теорема про структуру кільця (алгебри), породженого півкільцем. Сигма-алгебра борельових множин. Теорема про збіг сигма-алгебри борельових множин в $R_n$ з сигма-алгеброю, що породжується півкільцем інтервалів в $R_n$ .<br><i>Рекомендована література:</i> [1], с. 55-57, [3], с. 7-8.          |
| 3     | <b>Основні властивості мір.</b> Функції множин. Означення міри. Неперервність міри на кільці знизу та зверху. Монотонність, скінченна-півадитивність, сигма-півадитивність на кільці. Неперервність міри на кільці знизу та зверху. Загальна властивість неперервної міри.<br><i>Рекомендована література:</i> [1], с. 26-28, [3], с. 11-22. |
| 4     | <b>Міра Лебега.</b> Міра Лебега на півкільці в $R$ і $R_n$ . Продовження міри Лебега в $R_n$ з півкільця прямокутників на клас елементарних фігур. Інваріантність міри Лебега відносно зсуву. Лінійні перетворення борельових множин в $R_n$ та їх міра Лебега.<br><i>Рекомендована література:</i> [1], с. 50-67, [3], с. 32-36.            |
| 5     | <b>Міра Лебега-Стілтєса на прямій.</b> Визначення міри на півкільці інтервалів $R$ за допомогою функції розподілу та її продовження на кільце, породжене півкільцем інтервалів.<br><i>Рекомендована література:</i> [1], с. 76-84, [3], с. 37-38.  |
| 6     | <b>Теорема Каратеодорі.</b> Зовнішня міра та її властивості. Зовнішня міра, яка побудована за мірою на кільці. Теорема Каратеодорі та її наслідки (міра Лебега, міра Лебега-Стілтєса).<br><i>Рекомендована література:</i> [1], с. 28-49, [3], с. 23-31.   |
| 7     | <b>Заряди та їх властивості.</b> Заряди та їх розвинення за Ханом і Жорданом. Функції обмеженої варіації та їх зв'язок з зарядами. Теорема Жордана про представлення функції обмеженої варіації.<br><i>Рекомендована література:</i> [1], с. 85-98, [3], с. 41-44.   |
| 8     | <b>Вимірні відображення та функції.</b> Критерій вимірності. Борельові функції. Суперпозиція вимірних відображень. Властивості вимірних функцій. Прості  |

|    |  |
|----|--|
|    | функції. Теорема про наближення невід’ємної вимірної функції монотонною послідовністю невід’ємних простих функцій.<br><i>Рекомендована література:</i> [1], с. 100-121, [3], с. 45-55.   |
| 9  | <b>Збіжність майже скрізь.</b> Властивості, що мають місце майже скрізь відносно міри. Еквівалентні функції. Збіжність майже скрізь та її властивості. Теорема Егорова.<br><i>Рекомендована література:</i> [1], с. 112-121, [3], с. 56-59.  |
| 10 | <b>Збіжність за мірою.</b> Властивості збіжності за міри. Теорема Лебега та Рісса про взаємозв’язок збіжності майже скрізь та збіжності за мірою.<br><i>Рекомендована література:</i> [1], с. 112-121, [3], с. 59-65.  |
| 11 | <b>Означення інтеграла Лебега.</b> Інтеграл Лебега від невід’ємних простих функцій та його властивості. Інтеграл Лебега від невід’ємних вимірних функцій. Властивості цього інтеграла. Сигма-адитивність інтеграла відносно множини інтегрування. Монотонність інтеграла відносно підінтегральної функції.<br><i>Рекомендована література:</i> [1], с. 130-154, [3], с. 67-82. |
| 12 | <b>Подальші властивості інтеграла Лебега.</b> Теорема Лебега про монотонну збіжність для невід’ємних функцій. Лінійність інтеграла Лебега від невід’ємних функцій. Інтеграл Лебега від знакозмінних функцій. Інтегровні за Лебегом функції та критерій інтегровності.<br><i>Рекомендована література:</i> [1], с. 130-161, [3], с. 67-82.                                      |
| 13 | <b>Граничний перехід під знаком інтеграла Лебега.</b> Теорема Беппо Леві. Лема Фату. Теорема Лебега про мажоровану збіжність.<br><i>Рекомендована література:</i> [3], с. 101-105.   |
| 14 | <b>Інтеграл Лебега, що залежать від параметра.</b> Неперервна залежність від параметра. Диференціювання за параметром.<br><i>Рекомендована література:</i> [1], с. 130-161, [3], с. 67-82.   |
| 15 | <b>Інтеграл Лебега за мірою Лебега.</b> Порівняння інтегралів Рімана та Лебега на відрізку прямої. Критерій інтегровності функції за Ріманом на відрізку прямої. Порівняння невластивих інтегралів та інтеграла Лебега на прямій. Інтеграл Лебега-Стілтєса та їх зв’язок з інтегралами Рімана-Стілтєса.<br><i>Рекомендована література:</i> [1], с. 143-147, [3], с. 93-100.   |
| 16 | <b>Абсолютно неперервні міри та заряди.</b> Теорема Радона-Нікодима.<br><i>Рекомендована література:</i> [1], с. 202-210, [3], с. 108-113.   |
| 17 | <b>Похідна Радона-Нікодима.</b> Заміна змінної в інтегралі Лебега. Теорема Лебега про розклад функції розподілу.<br><i>Рекомендована література:</i> [1], с. 211-222, [3], с. 108-113.   |
| 18 | <b>Теорема Фубіні.</b> Прямий добуток вимірних просторів. Переріз множин та функцій. Добуток мір. Кратні інтеграли за добутком мір. Повторні інтеграли. Теорема Фубіні. Контрприклад до теореми Фубіні.<br><i>Рекомендована література:</i> [1], с. 184-199, [3], с. 115-125.  |

## Практичні заняття

| № з/п | Назва теми заняття та перелік основних питань<br>(перелік дидактичного забезпечення, посилання на літературу та завдання на СРС)       |
|-------|--|
| 1     | Основні класи множин та їх властивості. Класи множин породжені даною сім’єю множин.<br><i>Завдання для СРС:</i> [2], с. 5-7.           |
| 2     | Сигма-алгебра борелевих множин. Нижня та верхня границя послідовності множин.<br><i>Завдання для СРС:</i> [2], с. 8-11, [3], с. 12-13. |
| 3     | Адитивні функції множин.<br><i>Завдання для СРС:</i> [2], с. 8-11.   |
| 4     | Міра та її властивості.<br><i>Завдання для СРС:</i> [2], с. 12-15.   |

|       |   |
|-------|---|
| 5     | Зовнішня міра та теорема Каратеодорі.<br><i>Завдання для СРС:</i> [2], с. 16-20.  |
| 6     | Міра Лебега на прямій.<br><i>Завдання для СРС:</i> [2], с. 21-24.   |
| 7     | Канторова множина. Приклади множин, не вимірних за Жорданом, Лебегом.<br><i>Завдання для СРС:</i> [2], с. 21-24, [2], с. 37-39. |
| 8     | Міра Лебега в просторі.<br><i>Завдання для СРС:</i> [2], с. 25-28.  |
| 9     | Міра Лебега-Стілтьєса на прямій.<br><i>Завдання для СРС:</i> [2], с. 29-31.   |
| 10    | Вимірні функції та їх властивості.<br><i>Завдання для СРС:</i> [2], с. 32-35.   |
| 11    | Збіжність майже скрізь.<br><i>Завдання для СРС:</i> [2], с. 36-41.  |
| 12    | Збіжність за мірою.<br><i>Завдання для СРС:</i> [2], с. 36-45.  |
| 13    | Модульна контрольна робота.   |
| 14    | Означення інтеграла Лебега.<br><i>Завдання для СРС:</i> [2], с. 46-50.  |
| 15    | Властивості інтеграла Лебега.<br><i>Завдання для СРС:</i> [2], с. 51-56.  |
| 16-17 | Граничний перехід під знаком інтеграла Лебега.<br><i>Завдання для СРС:</i> [2], с. 57-68.                                       |
| 18    | Абсолютна неперервність і сингулярність мір та зарядів.<br><i>Завдання для СРС:</i> [2], с. 69-74.                              |

## 6. Самостійна робота студента/аспіранта

Вивчення дисципліни включає наступні види самостійної роботи:

- підготовка до лекційних та практичних занять, виконання домашніх завдань;
- виконання розрахунково графічної роботи;
- підготовка та виконання модульної контрольної роботи;
- підготовка до заліку.

## Політика та контроль

### 7. Політика навчальної дисципліни (освітнього компонента)

**Рекомендовані методи навчання:** вивчення основної та допоміжної літератури за тематикою лекцій, розв'язування задач на практичних заняттях та при виконанні домашніх робіт. Студенту рекомендується вести докладний конспект лекцій. Важливим аспектом якісного засвоєння матеріалу, відпрацювання методів та алгоритмів вирішення основних завдань дисципліни є самостійна робота. Вона містить читання літератури, огляд літератури за темою, підготовку до занять, виконання розрахунково графічної роботи, підготовку до МКР та іспиту.

#### Академічна доброчесність

Політика та принципи академічної доброчесності визначені у розділі 3 Кодексу честі Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». Детальніше: <https://kpi.ua/code>

#### Норми етичної поведінки

Норми етичної поведінки студентів і працівників визначені у розділі 2 Кодексу честі Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». Детальніше: <https://kpi.ua/code>



## 8. Види контролю та рейтингова система оцінювання результатів навчання (PCO) (очна\дистанційна форма)

Розподіл навчального часу за видами занять і завдань з дисципліни згідно з робочим навчальним планом.

| Семестр | Навч. час |            | Розподіл навчальних годин |           |     | Контрольні заходи |     |                 |
|---------|-----------|------------|---------------------------|-----------|-----|-------------------|-----|-----------------|
|         | Кредити   | Акад. год. | Лекції                    | Практичні | СРС | МКР               | РГР | Семестр. атест. |
| 5       | 4         | 120        | 36                        | 36        | 48  | 1                 | 1   | залік           |

На першому занятті здобувачі ознайомлюються із рейтинговою системою оцінювання (PCO) дисципліни, яка побудована на основі Положення про систему оцінювання результатів навчання [https://document.kpi.ua/files/2020\\_1-273.pdf](https://document.kpi.ua/files/2020_1-273.pdf).

Поточний контроль: фронтальний (усний, письмовий), МКР, РГР.

Календарний контроль: проводиться двічі на семестр як моніторинг поточного стану виконання вимог силабусу, результати якого відображаються в системі Електронний кампус <https://campus.kpi.ua>. Кожний студент отримує свій підсумковий рейтинг з дисципліни.

Рейтинг студента з кредитного модуля розраховується виходячи із 100-бальної шкали і складається з балів, які він отримує за:

- написання модульної контрольної роботи;
- виконання розрахунково графічної роботи;
- виконання домашніх завдань.

### Модульна контрольна робота

Ваговий бал - 30. У випадку дистанційної форми навчання модульна контрольна робота проводиться в синхронному режимі з використанням платформи Zoom.

### Розрахунково графічна робота

Ваговий бал - 40. Розрахунково графічна робота зараховується тільки за умови її захисту.

### Домашні завдання

Для оцінювання поточної успішності студенти мають виконувати домашні завдання за темою практичного заняття. Протягом семестру планується 15 домашніх завдань, кожне з яких оцінюється максимум в 2 бали. Тобто, максимальна кількість балів за домашні завдання -  $2 \cdot 15 = 30$ . Кожне домашнє завдання має бути виконане і надіслане викладачу до початку наступного практичного заняття. Інакше, домашні завдання будуть зараховуватись з коефіцієнтом 0.6.

### Заохочувальні бали

- за роботу на практичних заняттях. За умови гарної підготовки і активної роботи на практичному занятті студенту на кожному практичному занятті можуть бути добавлені заохочувальні бали.

- за призові місця у факультетських та університетських олімпіадах з математики.

Максимальна кількість заохочувальних балів одному студенту не може перевищувати 10% (10 балів)

### Форма семестрового контролю – залік

Якщо виконано усі передбачені види робіт, то залік виставляється «автоматом» згідно рейтингу здобувача, з переведенням в оцінку за університетською шкалою. В разі недостатньої кількості балів або з метою підвищення рейтингу, дозволяється написання залікової роботи, за результатами якої здобувач отримує остаточний рейтинговий бал.



### Умови позитивної проміжної атестації.

Для отримання “зараховано” з першої (8 тиждень) та другої проміжної атестації (14 тиждень) студент повинен мати не менше ніж 60% можливих балів на момент проведення календарного контролю.

Перескладання позитивної підсумкової семестрової атестації з метою її підвищення не допускається.

### Таблиця відповідності рейтингових балів оцінкам за університетською шкалою:

| Кількість балів | Оцінка       |
|-----------------|--------------|
| 100-95          | Відмінно     |
| 94-85           | Дуже добре   |
| 84-75           | Добре        |
| 74-65           | Задовільно   |
| 64-60           | Достатньо    |
| Менше 60        | Незадовільно |

### 9. Додаткова інформація з дисципліни (освітнього компоненту)

У випадку дистанційної форми навчання організація освітнього процесу здійснюється з застосуванням електронної пошти, Telegram, відео-конференцій в Zoom та освітньої платформи Moodle.

### Робочу програму навчальної дисципліни (силабус):

#### Складено:

Доцент кафедри МАтаТЙ, канд. фіз.-мат. наук, доцент Боднарчук С. В.

Ухвалено кафедрою МАтаТЙ (протокол № 13 від 11.06.2024 р.)

Погоджено Методичною комісією ФМФ (протокол № 10 від 25.06.2024 р.)