Національний технічний університет України
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Кафедра
математичного аналізу
та теорії ймовірностей

Стохастичні диференціальні рівняння та їх застосування

Робоча програма навчальної дисципліни (Силабус)

● Реквізити навчальної дисципліни

Рівень вищої освіти	Другий (магістерський)
Галузь знань	Е Природничі науки, математика та статистика
Спеціальність	Е7 Математика
Освітня програма	Страхова та фінансова математика
Статус дисципліни	Вибіркова
Форма навчання	*Очна (денна)*
Рік підготовки, семестр	*1, весняний семестр*
Обсяг дисципліни	5 кредитів ЄКТС, 150 годин (30 годин – лекції, 16 години – практичні, 104 годин – СРС)
Семестровий контроль/ контрольні заходи	Екзамен/модульна контрольна робота, розрахункова робота
Розклад занять	https://schedule.kpi.ua
Мова викладання	*Українська*
Інформація про керівника курсу / викладачів	Лектор: д.ф.-м.н. *Арясова О. В.* *oariasova@gmail.com* Практичні / Семінарські: д.ф.-м.н. *Арясова О. В.* *oariasova@gmail.com*
Розміщення курсу	https://uni-jena-de.zoom-x.de/j/66505010312

● Програма навчальної дисципліни

1. Опис навчальної дисципліни, її мета, предмет вивчання та результати навчання

1.1. Мета навчальної дисципліни.

Цей курс призначений для знайомства з основними поняттями стохастичних диференціальних рівнянь. До змісту входять поняття стохастичного інтегралу, формули Іто, теорем

існування та єдиності стохастичних рівнянь, моментні оцінки розв’язків, неперервна залежність розв’язків від параметру.

В результаті вивчення курсу студенти повинні вміти застосовувати формулу Іто, знаходити розв’язки простіших стохастичних диференціальних рівнянь, формулювати та розв’язувати граничні задачі для рівнянь в частинних похідних, розв’язками яких є ймовірності виходу та досягнення розв’язком деякої множини, математичні сподівання моментів зупинки і т.п., досліджувати стійкість розв’язків та граничну поведінку розв’язків на нескінчених проміжках часу.

1.2. Основні завдання навчальної дисципліни.

Згідно з вимогами освітньо-професійної програми студенти після засвоєння навчальної дисципліни мають продемонструвати такі результати навчання

знання:

- основних визначень щодо побудови та властивостей стохастичного інтегралу;
- теорем існування та єдиності стохастичних диференціальних рівнянь;
- властивостей розв’язків стохастичних рівнянь;
- взаємозв’язку теорії стохастичних рівнянь та рівнянь з частинними похідними.

уміння:

- застосовувати формулу Іто;
- оцінювати моменти розв’язків стохастичних рівнянь;
- знаходити розв’язки розв’язків стохастичних рівнянь;
- досліджувати стійкість та граничну поведінку розв’язків стохастичних рівнянь;
- знаходити ймовірності виходу та досягнення розв’язком деякої множини.

досвід:

- навчитися працювати самостійно з навчальними посібниками, довідниками та іншими інформаційними ресурсами;
- володіння методами сучасної теорії випадкових процесів для розв’язання типових математичних задач з відповідних розділів математики;
- бути спроможнім розв’язати задачу, одержану в результаті математичного моделювання технічного процесу.

Метою навчальної дисципліни є формування у студентів компетентностей:

Загальні компетентності	
ЗК5	Здатність генерувати нові ідеї й нестандартні підходи до їх реалізації
ЗК6	Здатність розробляти науково-інноваційні проєкти та керувати ними
ЗК7	Здатність до виконання дослідницької роботи з елементами наукової новизни
Фахові компетентності	
ФК3	Здатність до використання принципів, методів та організаційних процедур дослідницької та/або інноваційної діяльності
ФК5	Спроможність розробляти математичну модель ситуації з реального світу та переносити математичні знання у нематематичні контексти

ФК6	Здатність доводити знання та власні висновки до фахівців та нефахівців
ФК8	Здатність до розвитку нових та удосконалення існуючих математичних методів аналізу, моделювання, прогнозування, розв’язування нових проблем у нових галузях знань
ФК10	Здатність розв’язувати прикладні задачі аналізу даних математичними методами та методами комп‘ютерної статистики і обирати для цього адекватні математичні засоби
ФК11	Здатність відтворювати знання фундаментальних розділів математики й страхової та фінансової математики оцінюючи ризики в тих предметних областях, де проводяться дослідження
ФК12	Здатність проводити обчислення в рамках математичних моделей та застосовувати для цього необхідні та адекватні математичні та комп‘ютерні методи, здібність пояснювати у математичних термінах результати, отримані під час підрахунків, та інтерпретувати їх у рамках даної предметної області
ФК13	Здатність формувати у слухачів уявлення про класичні та сучасні математичні теорії, взаємозв’язок та різницю між ними і застосування їх у природничих, економічних та технічних науках, в банківській та фінансовій сферах
ФК14	Здатність застосувати математичні методи до прогнозування економічних та соціальних процесів у сфері управління на підприємствах, в фінансових установах, в учбових закладах тощо
Програмними результатами навчання є наступні:	
РН3	Володіти основами математичних дисциплін і теорій, зокрема які вивчають моделі природничих і соціальних процесів
РН5	Володіти знаннями грамотної побудови комунікації в освітньому і науковому процесі, відбору вихідних даних дослідження, складання списку використаних джерел, опису наукових результатів
РН8	Інтегрувати знання з різних галузей для вирішення теоретичних та/або практичних задач і проблем
РН14	Знати головні результати та сфери застосувань основних математичних теорій, що використовуються при математичному моделюванні: фінансової та актуарної математики, методів математичної економіки та імітаційного моделювання, комп‘ютерної статистики
РН15	Знати спеціальні математичні дисципліни для оцінки ризиків у банківській та фінансовій сферах і страхуванні: фінансову математики фондового ринку, стохастичні диференціальні рівняння, ланцюги та процеси Маркова, аналіз часових рядів, правильно змінні функцій у теорії ймовірностей, прикладні моделі нелінійного регресійного аналізу

2. Пререквізити та постреквізити дисципліни (місце в структурно-логічній схемі навчання за відповідною освітньою програмою)

Пререквізити: Дисципліна «Стохастичні диференціальні рівняння та їх застосування» викладається в другому семестрі першого курсу підготовки магістрів і базується на знаннях, отриманих при вивченні дисциплін «Математичний аналіз», «Лінійна алгебра», «Теорія ймовірностей», «Диференціальні рівняння», які вивчаються на бакалаврському рівні вищої освіти за освітньою програмою «Страхова та фінансова математика» та курсі «Ланцюги та процеси Маркова», який вивчається на магістерському рівні.

Постреквізити: Дисципліна «Стохастичні диференціальні рівняння та їх застосування» передує освітнім компонентам «Наукова робота за темою магістерської дисертації» (ПО7), «Практика» (ПО8) і вивченню вибіркових дисциплін «Процеси Леві у моделях фінансової математики».

3. Зміст навчальної дисципліни

Назва розділів і тем	Кількість годин			
	Всього	у тому числі		
		Лекції	Практичні	СРС
1	*2*	*3*	*4*	*5*
Розділ 1. Стохастичний інтеграл Іто.				
Тема 1.1. Вінеровський процес	14	4	2	8
Тема 1.2. Стохастичний інтеграл	16	6	2	8
Разом за розділом 1	**30**	**10**	**4**	**16**
Розділ 2. Властивості розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь				
Тема 2.1. Теореми існування та єдиності	14	4	2	8
Тема 2.2. Властивості моментів	12	2	2	8
Разом за розділом 2	**26**	**6**	**4**	**16**
Розділ 3. Зв'язок між стохастичними рівняннями і рівняннями математичної фізики				
Тема 3.1. Зв'язок з параболічними рівняннями в частинних похідних	14	4	2	8
Тема 3.2. Зв'язок з еліптичними рівняннями в частинних похідних	16	6	2	8
Разом за розділом 3	**30**	**10**	**4**	**16**
Розділ 4. Властивості розв'язків одновимірних стохастичних диференціальних рівнянь.				
Тема 4.1. Гранична поведінка розв'язків с.д.р.	20	4	4	10
Разом за розділом 4	**18**	**4**	**4**	**10**
МКР				
РГР	16			16
Екзамен	30			30
Всього годин	**150**	**30**	**16**	**104**

4. Навчальні матеріали та ресурси

Базові

1. Evans, L. C. (2014) An Introduction to Stochastic Differential Equations. American Mathematical Society.
2. Gikhman, I. I., & Skorokhod, A. V. (1972). Stochastic differential equations. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
3. А.В. Скороход. Лекції з теорії випадкових процесів: Навч. Посібник. – К.: Либідь, 1990. – 168 с.
4. Oksendal, B. (2013). Stochastic differential equations: an introduction with applications. Springer Science & Business Media.
5. Д.В. Гусак, О.Г. Кукуш, О.М. Кулик, Ю.С. Мішура, А.Ю. Пилипенко Збірник задач з теорії випадкових процесів та її застосувань. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2008. – 398 с.

Допоміжні

6. Ikeda, N., & Watanabe, S. (2014). Stochastic differential equations and diffusion processes. Elsevier.
7. Pilipenko, A. (2014). An introduction to stochastic differential equations with reflection (Vol. 1). Universitätsverlag Potsdam.

8. Gikhman, I. I., & Skorokhod, A. V. (2007). Stochastic differential equations. In The Theory of Stochastic Processes III. Springer, Berlin, Heidelberg..

● Навчальний контент

5. Методика опанування навчальної дисципліни (освітнього компонента)

№ з/п	Назва теми лекції/практичного заняття та перелік основних питань (перелік дидактичних засобів, посилання на літературу та завдання на СРС)
1	Вінерів процес. Недиференційованість траєкторій. Квадратична варіація. Необмеженість варіації. *Рекомендована література:* [4], с. 5-31.
2	Стохастичний інтеграл Іто. а) Конструкція. Властивості. б) Локальність. *Рекомендована література:* [4], с. 38-49
3	Розширення стохастичного інтегралу на клас узгоджених процесів з інтегрованими з квадратом траєкторіями. Інтеграл для неперервних процесів, як границя інтегральних сум. Обчислення інтегралу *Рекомендована література:* [4], с. 49-55.
4	Властивості стохастичного інтегралу як функції верхньої межі. Мартингальні нерівності, неперервність траєкторій. *Рекомендована література:* [2], с. 137-162.
5	Формула Іто. Приклади обчислення стохастичних інтегралів та диференціалів. Моментні оцінки стохастичних інтегралів. *Рекомендована література:* [2], с.163-181.
6	Моменти зупинки. Означення та властивості марковського моменту. Інтеграли вигляду . *Рекомендована література:* [2], с.163-181.
7	Означення сильного розв’язку стохастичного диференціального рівняння. Приклади розв’язків. *Рекомендована література:* [2], с.223-231. Теорема існування та єдиності, якщо коефіцієнти задовольняють умову Ліпшиця. Лема Гронуола. *Рекомендована література:* [2], с.231-250.
8	Теорема про рівність розв'язків до моменту виходу з області, якщо коефіцієнти двох рівнянь співпадають в цій області. Теорема про існування та єдиність розвязку, якщо коефіцієнти задовольняють умову лінійного росту та локальну умову Ліпшиця. *Рекомендована література:* [2], с. 250-261.
9	Моментні оцінки розв’язків. Залежність від початкових даних: а) неперервність в середньому; б) диференційовність в середньому. *Рекомендована література:* [2], с.261-273. Граничні теореми для с.д.р. а) збіжність коефіцієнтів, б) апроксимації Ейлера. Теорема Колмогорова про неперервність траєкторій випадкового процесу та її застосування. *Рекомендована література:* [8], с.429-438.
11	Багатовимірні стохастичні рівняння. Теореми існування та єдиності. Властивості розв’язків. Марковська властивість розв’язку с.д.р. *Рекомендована література:* [8], с.482-489.
12	Рівняння Колмогорова. Зв’язок між розв’язками стохастичних диференціальних рівнянь та параболічними рівняннями. *Рекомендована література:* [8], с.234-240; [3], с.433-437. Формула Динкіна. Формула Фейнмана-Каца.

	Рекомендована література: [2], с.355-365; [8], с.230-240;[3], с.437-443.
13	Зв'язок між розв'язками стохастичних диференціальних рівнянь та еліптичними рівняннями. *Рекомендована література:* [2], с.355-375. Одновимірні с.д.р. а) Ймовірність потрапляння в ліву точку відрізку раніше, ніж в праву. б) Рівняння для математичного сподівання та в) дисперсії часу до виходу з множини. г) Формули для вінерового процесу. *Рекомендована література:* [1], с.365-376; [2], с.245-253.
14	Мартингальна характеризація вінерового процесу та наслідки з неї. Стохастичні рівняння для норми вінерового процесу в R^n. Бєсселівський процес. Ймовірність потрапляння в нуль. *Рекомендована література:* [1], с.385-394; [2], с. 295-309.
15	Властивості багатовимірного броунівського руху. Ймовірності виходу через ту чи іншу границі кільця для багатовимірного вінерівського процесу. Двовимірний вінерівський процес. Властивості траєкторій. Трьохвимірний вінерівський процес. Властивості траєкторій. Зображення неперервного мартингалу у вигляді стохастичного інтегралу. *Рекомендована література:* [2], с.376-385; [8], с.259-278.

6. Самостійна робота студента/аспіранта

Вивчення дисципліни включає наступні види самостійної роботи:

- підготовка до лекційних та практичних занять, виконання домашніх завдань;
- виконання розрахункової роботи;
- підготовка та виконання модульної контрольної роботи;
- підготовка презентацій доповідей;
- підготовка до екзамену.

● Політика та контроль

7. Політика навчальної дисципліни (освітнього компонента)

Рекомендовані методи навчання: вивчення основної та допоміжної літератури за тематикою лекцій, розв'язування задач на практичних заняттях та при виконанні домашніх робіт.

Студенту рекомендується вести докладний конспект лекцій. Важливим аспектом якісного засвоєння матеріалу, відпрацювання методів та алгоритмів вирішення основних завдань дисципліни є самостійна робота. Вона містить читання літератури, огляд літератури за темою, підготовку до занять, виконання домашньої контрольної роботи, підготовку до МКР, ділової гри та заліку/екзамену.

- правила відвідування занять (як лекцій, так і практичних/лабораторних): студент має відвідувати всі заняття
- правила поведінки на заняттях: на практичне заняття студент має зробити домашню роботу та вивчити матеріал лекції;
- правила призначення заохочувальних та штрафних балів: викладач може додавати заохочувальні бали на свій розсуд за активність студента;

- політика дедлайнів та перескладань: завдання, які здані після дедлайнів, не приймаються, перескладання таких завдань не передбачені.

Академічна доброчесність

Політика та принципи академічної доброчесності визначені у розділі 3 Кодексу честі Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» (детальніше: https://kpi.ua/code) та Положенні про систему забезпечення академічної доброчесності (https://document.kpi.ua/files/2026_HOD-623a.pdf)

Норми етичної поведінки

Норми етичної поведінки студентів і працівників визначені у розділі 2 Кодексу честі Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». Детальніше: https://kpi.ua/code

8. Види контролю та рейтингова система оцінювання результатів навчання (РСО)

Контрольний захід	Ваговий бал
Модульна контрольна робота	25
Розрахункова робота	25
Бонуси за роботу на заняттях	5
Залік	50
Всього за семестр	100

Для допуску до заліку поточний рейтинг повинен бути не меншим за 30 балів. Кожний із видів поточного контролю (МКР, РР) має бути виконаний не менш ніж на 30 %. У протилежному разі студент повинен набрати додаткові бали. У цьому випадку викладач має право не ставити оцінку вище ніж «Достатньо» за предмет.

В деяких випадках викладач має право, але не зобов’язаний, запропонувати студентам оцінки за предмет по результатам семестрового контролю.

Викладач має право вимагати захисту модульної контрольної роботи і розрахункової роботи у вигляді співбесіди.

Викладач також має право вимагати додаткову здачу окремих або всіх домашніх завдань на оцінку «зараховано». Оцінка «зараховано» виставляється за 70 % і більше правильно виконаного домашнього завдання.

Остаточний рейтинг не може перевищувати 100 балів.

Довідка про відсутність має бути надана викладачу не пізніше ніж за 2 тижні після відповідного заняття. Якщо студент не може бути присутнім на практичних заняттях чи контрольних заходах з інших поважних причин, це має бути погоджено з викладачем заздалегідь. У цьому випадку викладач та студент узгоджують окремі дати складання контрольних заходів, але не пізніше ніж за 2 тижні від дати відповідного заходу для всієї групи.

Таблиця відповідності рейтингових балів оцінкам за університетською шкалою:

Кількість балів	*Оцінка*
100-95	Відмінно
94-85	Дуже добре
84-75	Добре
74-65	Задовільно

64-60	Достатньо
Менше 60	Незадовільно
Не виконані умови допуску	Не допущено

9. Додаткова інформація з дисципліни (освітнього компонента)

У випадку дистанційної форми навчання організація освітнього процесу здійснюється з застосуванням електронної пошти, Telegram, відео-конференцій в Zoom.

Робочу програму навчальної дисципліни (силабус):

Складено професором кафедри МАтаТЙ, доктором фіз.-мат. наук Арясовою О. В.

Ухвалено кафедрою МАтаТЙ (протокол №16 від 17.06.2026 р.)

Погоджено Методичною комісією ФМФ (протокол № 10 від 26.06.2026 р.)