



Стохастичні диференціальні рівняння та їх застосування

Робоча програма кредитного модуля навчальної дисципліни (Силабус)

Реквізити навчальної дисципліни

Рівень вищої освіти	<i>Другий (магістерський)</i>
Галузь знань	<i>11 Математика та статистика</i>
Спеціальність	<i>111 Математика</i>
Освітня програма	<i>Страхова та фінансова математика</i>
Статус дисципліни	<i>Вибіркова</i>
Форма навчання	<i>очна(денна) /дистанційна/змішана</i>
Рік підготовки, семестр	<i>1 курс магістратури, весняний семестр</i>
Обсяг дисципліни	<i>5 кредити ECTS, 150 годин (36 лекції, 18 практичні заняття), 96 годин на самостійну роботу студентів</i>
Семестровий контроль/ контрольні заходи	<i>екзамен</i>
Розклад занять	<i>http://roz.kpi.ua/</i>
Мова викладання	<i>Українська</i>
Інформація про керівника курсу / викладачів	<i>Лектор: кандидат фізико-математичних наук Маловічко Тетяна Володимирівна Практичні: кандидат фізико-математичних наук Маловічко Тетяна Володимирівна</i>
Розміщення курсу	<i>https://campus.kpi.ua/</i>

Програма навчальної дисципліни

1. Опис навчальної дисципліни, її мета, предмет вивчення та результати навчання

1.1. Мета навчальної дисципліни.

Цей курс призначений для знайомства з основними поняттями стохастичних диференціальних рівнянь. До змісту входять поняття стохастичного інтегралу, формули Іто, теорем існування та єдиності стохастичних рівнянь, моментні оцінки розв'язків, неперервна залежність розв'язків від параметру.

В результаті вивчення курсу студенти повинні вміти застосовувати формулу Іто, знаходити розв'язки простіших стохастичних диференціальних рівнянь, формулювати та розв'язувати граничні задачі для рівнянь в частинних похідних, розв'язками яких є ймовірності виходу та досягнення розв'язком деякої множини, математичні сподівання моментів зупинки тощо, досліджувати стійкість розв'язків та граничну поведінку розв'язків на нескінчених проміжках часу.

Основні завдання навчальної дисципліни.

Знання:

- основних визначень щодо побудови та властивостей стохастичного інтегралу;
- теорем існування та єдиності стохастичних диференціальних рівнянь;

- властивостей розв'язків стохастичних рівнянь;
- взаємозв'язку теорії стохастичних рівнянь та рівнянь з частинними похідними.

Уміння:

- застосовувати формулу Іто;
- оцінювати моменти розв'язків стохастичних рівнянь;
- знаходити розв'язки розв'язків стохастичних рівнянь;
- досліджувати стійкість та граничну поведінку розв'язків стохастичних рівнянь;
- знаходити ймовірності виходу та досягнення розв'язком деякої множини.

Досвід:

- навчитися працювати самостійно з навчальними посібниками, довідниками та іншими інформаційними ресурсами;
- володіння методами сучасної теорії випадкових процесів для розв'язання типових математичних задач з відповідних розділів математики;
- бути спроможним розв'язати задачу, одержану в результаті математичного моделювання фізичного процесу.

Завданням навчальної дисципліни є формування у студентів компетентностей:

Загальні компетентності:

- здатність генерувати нові ідеї й нестандартні підходи до їх реалізації (ЗК5);
- здатність розробляти науково-інноваційні проекти та керувати ними (ЗК6);
- здатність до виконання дослідницької роботи з елементами наукової новизни (ЗК7).

Фахові компетентності:

- здатність до використання принципів, методів та організаційних процедур дослідницької та/або інноваційної діяльності (ФК3);
- спроможність розробляти математичну модель ситуації з реального світу та переносити математичні знання у нематематичні контексти (ФК5);
- здатність доводити знання та власні висновки до фахівців та нефахівців, зокрема до осіб які навчаються (ФК6);
- здатність до розвитку нових та удосконалення існуючих математичних методів аналізу, моделювання, прогнозування, розв'язування нових проблем у нових галузях знань (ФК8);
- здатність розв'язувати прикладні задачі аналізу даних математичними методами та методами комп'ютерної статистики і обирати для цього адекватні математичні засоби (ФК10);
- здатність відтворювати знання фундаментальних розділів математики й страхової та фінансової математики оцінюючи ризики в тих предметних областях, де проводяться дослідження (ФК11);
- здатність проводити обчислення в рамках математичних моделей та застосовувати для цього необхідні та адекватні математичні та комп'ютерні методи, здібність пояснювати у математичних термінах результати, отримані під час підрахунків, та інтерпретувати їх у рамках даної предметної області (ФК12);
- здатність формувати у слухачів уявлення про класичні та сучасні математичні теорії, взаємозв'язок та різницю між ними і застосування їх у природничих, економічних та технічних науках, в банківській та фінансовій сферах (ФК13);
- здатність застосовувати математичні методи до прогнозування економічних та соціальних процесів у сфері управління на підприємствах, в фінансових установах, в учбових закладах тощо (ФК14).

Програмні результати навчання:

- володіти основами математичних дисциплін і теорій, зокрема які вивчають моделі природничих і соціальних процесів (PH3);
- володіти знаннями грамотної побудови комунікації в освітньому і науковому процесі, відбору вихідних даних дослідження, складання списку використаних джерел, опису наукових результатів (PH5);
- інтегрувати знання з різних галузей для вирішення теоретичних та/або практичних задач і проблем (PH8);
- знати головні результати та сфери застосувань основних математичних теорій, що використовуються при математичному моделюванні: фінансової та актуарної математики, методів математичної економіки та імітаційного моделювання, комп'ютерної статистики (PH14);
- знати спеціальні математичні дисципліни для оцінки ризиків у банківській та фінансовій сферах і страхуванні: фінансову математику фондового ринку, стохастичні диференціальні рівняння, ланцюги та процеси Маркова, аналіз часових рядів, правильно змінні функцій у теорії ймовірностей, прикладні моделі нелінійного регресійного аналізу (PH15).

2. Пререквізити та постреквізити дисципліни (місце в структурно-логічній схемі навчання за відповідною освітньою програмою)

Пререквізити:

Дисципліна «Стохастичні диференціальні рівняння та їх застосування» викладається в другому семестрі першого курсу підготовки магістрів і базується на знаннях, отриманих при вивченні дисциплін «Математичний аналіз» (ПО1.1, ПО1.2, ПО2.1, ПО2.2), «Лінійна алгебра» (ПО3), «Теорія ймовірностей» (ПО15), «Диференціальні рівняння» (ПО8.1, ПО8.2), які вивчаються на бакалаврському рівні вищої освіти за освітньою програмою «Страхова та фінансова математика» та курсі «Ланцюги та процеси Маркова» (ПО5), який вивчається на магістерському рівні.

Постреквізити:

Дисципліна «Стохастичні диференціальні рівняння та їх застосування» передуватиме освітнім компонентам «Наукова робота за темою магістерської дисертації» (ПО7.1, ПО7.2), «Практика» (ПО8) і вивченню вибіркової дисципліни «Процеси Леві у моделях фінансової математики».

3. Зміст навчальної дисципліни

Назва розділів і тем	Кількість годин			
	Всього	у тому числі		
		Лекції	Практичні	СРС
<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>4</i>	<i>5</i>
Розділ 1. Стохастичний інтеграл Іто.				
Тема 1.1. Вінерів процес.	8	2	2	4
Тема 1.2. Стохастичний інтеграл.	26	10	4	12
МКР1	6	-	1	5
Разом за розділом 1	40	12	7	21
Розділ 2. Властивості розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь.				
Тема 2.1. Теорема існування та єдиності.	8	2	2	4

Тема 2.2. Властивості моментів.	18	8	2	8
Разом за розділом 2	26	10	4	12
Розділ 3. Зв'язок між стохастичними рівняннями і рівняннями математичної фізики.				
Тема 3.1. Зв'язок з параболічними рівняннями в частинних похідних.	5	2	1	2
Тема 3.2. Зв'язок з еліптичними рівняннями в частинних похідних.	5	2	1	2
МКР2	6	-	1	5
Разом за розділом 3	16	4	3	9
Розділ 4. Властивості розв'язків одновимірних стохастичних диференціальних рівнянь.				
Тема 4.1. Гранична поведінка розв'язків стохастичних диф. рівнянь.	16	6	2	8
Тема 4.2. Теореми про точний зріст розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь.	12	4	2	6
Разом за розділом 4	28	10	4	14
<i>Розрахункова робота</i>	10	-	-	10
<i>Екзамен</i>	30	-	-	30
Всього годин	150	36	18	96

4. Навчальні матеріали та ресурси

Базова література

1. Oksendal, B. (2013). Stochastic differential equations: an introduction with applications. Springer Science & Business Media.
2. Д.В. Гусак, О.Г. Кукуш, О.М. Кулик, Ю.С. Мішура, А.Ю. Пилипенко. Збірник задач з теорії випадкових процесів та її застосувань. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2008. – 398 с.
3. А.В. Скороход. Лекції з теорії випадкових процесів: Навч. Посібник. – К.: Либідь, 1990. – 168 с.
4. Gikhman, I. I., & Skorokhod, A. V. (1972). Stochastic differential equations. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Додаткова література

1. Ikeda, N., & Watanabe, S. (2014). Stochastic differential equations and diffusion processes. Elsevier.
2. Pilipenko, A. (2014). An introduction to stochastic differential equations with reflection (Vol. 1). Universitätsverlag Potsdam.

5. Методика опанування навчальної дисципліни (освітнього компонента)

Очна/дистанційна/змішана форма

Лекційні заняття

№ з/п	Назва теми лекції та перелік основних питань (перелік дидактичних засобів, посилання на літературу та завдання на СРС)
1.	Вінерів процес. Неперервність траєкторій. Необмеженість варіації. Недиференційованість траєкторій. Квадратична варіація. Рекомендована література: [4], с. 5-31.
2.	Умовне математичне сподівання (повторення). Стохастичний інтеграл Іто для простих процесів: конструкція, властивості. Рекомендована література: [4], с. 38-49.
3.	Прогресивно вимірні процеси. Розширення стохастичного інтегралу Іто на клас прогресивно вимірних процесів ξ , для яких $E \int_0^T \xi^2(t) dt < \infty$. Обчислення інтеграла $\int_0^1 w(t) dw(t)$. Локальність інтеграла Іто. Розширення стохастичного інтегралу Іто на клас прогресивно вимірних процесів ξ , для яких $\int_0^T \xi^2(t) dt < \infty$ м. н. Рекомендована література: [[4], с. 49-55.
4.	Стохастичний диференціал. Формула Іто. Узагальнення формули Іто. Рекомендована література: [1], с.163-181.
5.	Властивості стохастичного інтегралу як функції верхньої межі. Мартингальні нерівності, неперервність траєкторій. Рекомендована література: [1], с. 137-162.
6.	Моменти зупинки. Означення та властивості марківського моменту. Інтеграли вигляду $\int_0^\tau \xi(t) dw(t)$. Рекомендована література: [1], с.163-181.
7.	Означення сильного розв'язку стохастичного диференціального рівняння. Приклади розв'язків. Теорема існування та єдиності, якщо коефіцієнти задовольняють умову Ліпшиця. Лема Гронуола. Рекомендована література: : [1], с.223-250.
8.	Теорема про рівність розв'язків до моменту виходу з області, якщо коефіцієнти двох рівнянь співпадають в цій області. Теорема про існування та єдиність розв'язку, якщо коефіцієнти задовольняють умову лінійного росту та локальну умову Ліпшиця. Рекомендована література: [1], с. 250-261.
9.	Моментні оцінки розв'язків. Залежність від початкових даних: а) неперервність в середньому; б) диференційовність в середньому. Рекомендована література: [1], с.261-273.
10.	Граничні теореми для стохастичних диференціальних рівнянь: а) збіжність коефіцієнтів, б) апроксимації Ейлера. Теорема Колмогорова про неперервність траєкторій випадкового процесу та її застосування. Рекомендована література: [1], с.429-438.

11.	Багатовимірні стохастичні рівняння. Теореми існування та єдиності. Властивості розв'язків. Марківська властивість розв'язку стохастичних диференціальних рівнянь. Рекомендована література: [2], с.482-489.
12.	Рівняння Колмогорова. Зв'язок між розв'язками стохастичних диференціальних рівнянь та параболічними рівняннями. Формула Динкіна. Формула Фейнмана-Каца. Рекомендована література: [1], с.355-365; [2], с.230-240; [3], с.433-443.
13.	Зв'язок між розв'язками стохастичних диференціальних рівнянь та еліптичними рівняннями. Одновимірні стохастичні диференціальні рівняння: а) ймовірність потрапляння в ліву точку відрізка раніше, ніж в праву; б) рівняння для математичного сподівання та дисперсії часу до виходу з множини; в) формули для вінерового процесу. Рекомендована література: [1], с.365-376; [2], с.245-253, 355-375; [3], с.454-456, 469-474.
14.	Мартингальна характеристика вінерового процесу та наслідки з неї. Стохастичні рівняння для норми вінерового процесу в \mathbb{R}^n . Бесселівський процес. Ймовірність потрапляння в нуль. Рекомендована література: [1], с.385-394; [2], с. 295-309; [3], с.515-521.
15.	Потік $\varphi_t(x)$, породжений стохастичним диференціальним рівнянням. Існування а) неперервної м. н., б) диференційованої м. н. модифікації. Рекомендована література: [1], с.428-462.
16.	Властивості багатовимірного броунівського руху. Ймовірності виходу через ту чи іншу границю кільця для багатовимірного вінерівського процесу. Двовимірний вінерівський процес. Властивості траєкторій. Тривимірний вінерівський процес. Властивості траєкторій. Зображення неперервного мартингалу у вигляді стохастичного інтегралу. Рекомендована література: [1], с.376-385; [2], с.259-278.
17.	Строго марківська властивість розв'язків стохастичного диференціального рівняння. Обмеженість та необмеженість розв'язків стохастичного диференціального рівняння. Рекомендована література: [2], с.376-385; [1], с.259-278.
18.	Стійкість розв'язків стохастичного диференціального рівняння. Теореми про точний зріст розв'язків стохастичного диференціального рівняння. Ергодичні властивості розв'язків стохастичного диференціального рівняння. Рекомендована література: [1], с.125-146, 312-333.

6. Самостійна робота студента

Вивчення дисципліни включає наступні види самостійної роботи:

- підготовка до лекційних та практичних занять, виконання домашніх завдань;
- виконання розрахункової роботи;
- підготовка до модульної контрольної роботи;
- підготовка до екзамену.

7. Політика навчальної дисципліни (освітнього компонента)

Рекомендовані методи навчання: вивчення основної та допоміжної літератури за тематикою лекцій, розв'язування задач на практичних заняттях та при виконанні домашніх робіт.

Студенту рекомендується вести докладний конспект лекцій та практичних занять. Важливим аспектом якісного засвоєння матеріалу, відпрацювання методів та алгоритмів вирішення основних завдань дисципліни є самостійна робота. Вона містить читання літератури, огляд літератури за темою, підготовку до занять, виконання розрахункової роботи, підготовку до МКР та іспиту.

При переході на дистанційну форму навчання РСО залишається незмінним.

Академічна доброчесність

Політика та принципи академічної доброчесності визначені у розділі 3 Кодексу честі Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». Детальніше: <https://kpi.ua/code>

Норми етичної поведінки

Норми етичної поведінки студентів і працівників визначені у розділі 2 Кодексу честі Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». Детальніше: <https://kpi.ua/code>

8. Види контролю та рейтингова система оцінювання результатів навчання (РСО) (очна/дистанційна/змішана форма)

Розподіл навчального часу за видами занять і завдань з дисципліни згідно з робочим навчальним планом.

Семестр	Навч. час		Розподіл навчальних годин			Контрольні заходи		
	Кредити	акад. год.	Лекції	Практичні	СРС	МКР	РР	Семестр. атестація
2	5	150	36	18	96	1	1	Екзамен

На першому занятті здобувачі ознайомлюються із рейтинговою системою оцінювання (РСО) дисципліни, яка побудована на основі Положення про систему оцінювання результатів навчання https://document.kpi.ua/files/2020_1-273.pdf.

Поточний контроль: фронтальний (усний), МКР, розрахункова робота.

Календарний контроль: проводиться двічі на семестр як моніторинг поточного стану виконання вимог силабусу, результати якого відображаються в системі Електронний кампус <https://campus.kpi.ua>.

Рейтинг студента з дисципліни за I семестр складається з балів, що він отримує за:

- 1) відповіді на практичних заняттях;
- 2) модульну контрольну роботу;
- 3) розрахункову роботу;
- 4) відповідь на екзамені.

Робота на практичних заняттях:

За умови гарної підготовки і активної роботи на практичному занятті студент одержує 0,5 бали. Максимальна кількість балів на всіх практичних заняттях дорівнює 6 балів.

Модульний контроль:

Модульну контрольну розбито на 2 контрольні роботи:

МКР1: ваговий бал – 12 балів;

МКР2: ваговий бал – 12 балів.

Максимальна кількість балів за всі контрольні роботи дорівнює 24 бали.

МКР1 складається з 3 задач, МКР2 – з 3 задач. Ваговий бал кожної задачі залежить від її складності і дорівнює 4 бали. Розв’язок задачі оцінюється в 0-4 бали наступним чином:

якщо задача повністю розв’язана, то студент отримує 4 бали;

якщо відповідь правильна, але у розв’язку є неточності, то студент отримує від 0,5 до 4 балів;

якщо незадовільна відповідь, метод розв’язування задачі неправильний, то студент одержує 0 балів.

Розрахункова робота:

Ваговий бал – 20 балів.

Робота оцінюється у 20 балів з умови розв’язання 80% задач, або у 0 балів в іншому разі.

Штрафні та заохочувальні бали:

за несвоєчасне (пізніше, ніж на тиждень) подання розрахункової роботи нараховується один штрафний бал (за кожний тиждень запізнення);

за успішну участь у факультетських та інститутських олімпіадах з вищої математики нараховуються заохочувальні бали;

за доповіді на наукових конференціях з математики нараховуються заохочувальні бали;

Загальна кількість як заохочувальних, так і штрафних балів не перевищує 5 для кожного студента.

Умови позитивної проміжної атестації:

На першій атестації (8 тиждень) студент отримує «зараховано», якщо його поточний рейтинг не менше 50% можливих на даний момент балів.

На другій атестації (14 тиждень) студент отримує «зараховано», якщо його поточний рейтинг не менше 50% можливих на даний момент балів.

Розрахунок шкали (R) рейтингу:

Сума вагових балів контрольних заходів протягом семестру складає:

$$R_c = 5 + 5 + 30 + 10 = 50 \text{ балів.}$$

Екзаменаційна складова шкали дорівнює 50% від R , а саме

$$R_e = 50 \text{ балів.}$$

Таким чином, рейтингова шкала з дисципліни складає

$$R = R_c + R_e = 100 \text{ балів.}$$

Умови допуску до екзамену:

Необхідною умовою допуску до екзамену є стартовий рейтинг студента не менше 30 балів.

На екзамені студент за умовою очної форми навчання виконує письмову екзаменаційну роботу. Кожний білет складається з 1 теоретичного питання та 4 практичних. Перелік теоретичних питань видається екзаменатором на останньому занятті з дисципліни. Теоретичне питання оцінюється у 10 балів, а практичне – 10 балів.

Система оцінювання теоретичних питань:

- «відмінно», повна відповідь (не менше 90% потрібної інформації) – 9-10 балів;
- «добре», достатньо повна відповідь (не менше 75% потрібної інформації), або незначні неточності – 7-8 балів;

- «задовільно», неповна відповідь (не менше 60% потрібної інформації) та деякі помилки – 5-6 балів;
- «незадовільно», незадовільна відповідь – 0-4 бали.

Система оцінювання практичного питання:

- «відмінно», повне безпомилкове розв'язування задачі – 10 балів;
 - «добре», повне розв'язування задачі з несуттєвими недоліками – 8-9 балів;
 - «задовільно», завдання виконане з певними недоліками – 5-7 балів;
- «незадовільно», незадовільна відповідь, неправильний метод розв'язування – 0-4 бали.

Максимальний бал $10 \times 5 = 50$.

У випадку дистанційної форми навчання згідно наказу від 30.11.2020р. № НУ/22/2020 за умови, що здобувач вищої освіти виконав умови допуску до заходу семестрового контролю та набрав кількість балів, не меншу за 30, переведення балів за п. 3.15 здійснюється за формулою (з округленням результату до найближчого цілого):

$$R = 60 + 40 * (R_i - R_d) / (R_c - R_d),$$

де:

R – оцінка за 100-бальною шкалою;

R_i – сума балів, набраних здобувачем протягом семестру;

$R_c = 50$ – максимальна сума вагових балів контрольних заходів протягом семестру;

$R_d = 30$ – допусковий бал до екзамену.

Для отримання студентом відповідних оцінок (ECTS та традиційних) його рейтингова оцінка переводиться згідно з таблицею:

<i>Кількість балів</i>	<i>Оцінка</i>
95-100	Відмінно
85-94	Дуже добре
75-84	Добре
65-74	Задовільно
60-64	Достатньо
30-59	Незадовільно
0-29	Не допущено

9. Додаткова інформація з дисципліни (освітнього компоненту)

У випадку дистанційної форми навчання організація освітнього процесу здійснюється з застосуванням Telegram, відео-конференцій в Zoom.

Робочу програму навчальної дисципліни (силабус):

Складено:

Доцент кафедри МАтаТЙ, канд. фіз.-мат. наук Маловічко Т. В.

Ухвалено кафедрою МАтаТЙ (протокол №12 від 19.06.2023 р.)

Погоджено Методичною комісією ФМФ (протокол №10 від 27.06.2023 р.)