Лекция 3

ОБЩИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КОШИ

1. Теорема Штейнгауза

Теорема 1 (*Штейнгауз*). *Пусть A — измеримое подмножество в $\mathbf{R}$ ненулевой меры Лебега, то есть $|A| > 0$. Обозначим*

$$A - A = \{x : x = a - a',\ a, a' \in A\}.$$

Тогда множество $A - A$ содержит открытый интервал.

Доказательство. Будем считать, что $|A| < \infty$. Если же $|A| = \infty$, то выберем в A измеримое подмножество ненулевой меры и проведем доказательство для этого подмножества.

Задача 1. *Пусть $|A| = \infty$. Почему в A существует подмножество конечной ненулевой меры Лебега?*

Рассмотрим открытое множество G, содержащее A и такое, что $|A| > \frac{3}{4}|G|$.

Задача 2. *Пусть $0 < |A| < \infty$. Почему существует такое открытое множество G, что $A \subseteq G$ и $|A| > \frac{3}{4}|G|$?*

Множество G можно представить как счетное объединение непересекающихся открытых интервалов.

Задача 3. *Почему открытое множество можно представить в виде счетного объединения открытых интервалов?*

Один из этих интервалов, обозначим его I, имеет свойство

$$|A \cap I| > \frac{3}{4}|I|.$$

Задача 4. *Почему такой интервал I существует?*

Указание. Просуммировать.

Обозначим $\delta = \frac{1}{2}|I|$ и докажем, что $(-\delta, \delta) \subseteq A - A$. Для этого докажем, что $x \in A - A$ для любого $x \in (-\delta, \delta)$.

Зафиксируем $x \in (-\delta, \delta)$ и обозначим через $x + I$ интервал, получаемый из I сдвигом на x. Заметим, что $(x + I) \cup I$ — это интервал, длина которого меньше, чем $\frac{3}{2}|I|$, причем он содержит как $A \cap I$, так и $x + (A \cap I)$.

Задача 5. *Почему объединение $(x+I) \cup I$ — это интервал? Почему $|(x+I) \cup I| < \frac{3}{2}|I|$? Почему оно содержит как $A \cap I$, так и $x + (A \cap I)$?*

Указание. $I \supseteq A \cap I$ и $x + I \supseteq x + (A \cap I)$.

Поскольку

$$|x + (A \cap I)| = |A \cap I| > \frac{3}{4}|I|,$$

Задача 6. *Почему?*

то множества $A \cap I$ и $x + (A \cap I)$ пересекаются.

Задача 7. *Почему?*

Указание. Иначе мера их объединения больше, чем $\frac{3}{2}|I|$.

Поэтому существуют два числа $a, a' \in A \cap I$, для которых $a = x + a'$.

Задача 8. *Почему?*

Значит, $x \in A - A$. Так как x произвольно, то это означает, что $(-\delta, \delta) \subseteq A - A$. $\square$

2. Теорема Петтиса

Теорема 2 (*Петтис*). *Пусть A и B измеримые множества в $\mathbf{R}$, которые имеют ненулевую меру Лебега. Обозначим*

$$D = A - B = \{x : x = a - b,\ a \in A, b \in B\}.$$

Тогда D содержит открытый интервал.

Доказательство. Рассуждая так же, как и в доказательстве теоремы 1, находим интервал I, для которого $|A\cap I| > \frac{3}{4}|I|$. Аналогично этому доказываем, что существует интервал J, для которого $|B\cap J| > \frac{3}{4}|J|$.

Пусть m и n — некоторые натуральные числа, выбором которых распорядимся немного позднее. Разделим I на m подинтервалов одинаковой длины. Тогда один из них (обозначим его I') имеет свойство

$$|A\cap I'| > \frac{3}{4}|I'|. \tag{1}$$

Задача 9. *Почему?*

Разделив J на n подинтервалов одинаковой длины, аналогично найдем один из них (и обозначим его J'), такой, что $|B\cap J'| > \frac{3}{4}|J'|$. Подходящим выбором m и n можно добиться, чтобы

$$\frac{1}{2}|I'| \le |J'| < |I'|.$$

Задача 10. *Почему?*

Указание. Если $|J| < |I|$, то число $t = \frac{|J|}{|I|}$ принадлежит одному из интервалов $[a_k, b_k) = [\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k-1}})$, $k \ge 1$. Если же $t > 1$, то t принадлежит одному из интервалов $[a_k, b_k) = [2^{k-1}, 2^k)$, $k \ge 1$. В любом случае, если $t \in [a_k, b_k)$, то выберем рациональное число $q \in (t, b_k)$. Так как $\frac{1}{2}q < \frac{1}{2}b_k = a_k$, то $\frac{1}{2}q < t < q$. Если $q = \frac{n}{m}$, то последние неравенства означают, что

$$\frac{1}{2}\frac{n}{m} < \frac{|J|}{|I|} < \frac{n}{m} \iff \frac{1}{2}|I'| < |J'| < |I'|.$$

Наконец, если $|J| = |I|$, то можно выбрать $m = 1$, $n = 2$.

Значит существует открытый интервал Δ, длина которого равна $|I'| - |J'| > 0$ и для которого $x + J' \subset I'$ при любом $x \in \Delta$.

Задача 11. *Почему такой интервал Δ существует?*

__Указание__. Пусть $J' = (a, a + |J'|)$, $I' = (b, b + |I'|)$. Предположим, что $a + |J'| < b$. Тогда $\Delta = (b - a, b - a + |I'| - |J'|)$. Действительно, если $x \in \Delta$, то $x + a > b$ (левый конец $x + J'$ правее левого конца I') и $x + a + |J'| < b + |I'|$ (правый конец $x + J'$ левее правого конца I'). Другие соотношения между a и b рассматриваются аналогично.

Выберем произвольное $x \in \Delta$. Тогда

$$(2) \qquad |x + (B \cap J')| = |B \cap J'| > \frac{3}{4}|J'| \geq \frac{3}{8}|I'|.$$

Поэтому сумма мер Лебега множеств $A \cap I'$ и $x + (B \cap J')$ больше, чем $\frac{9}{8}|I'|$.

Задача 12. *Почему?* __Указание__. Сложить (1) и (2).

Заметим, что как $A \cap I'$ так и $x + (B \cap J')$ принадлежат интервалу I'.

Задача 13. *Почему?*

Отсюда вытекает, что множества $A \cap I'$ и $x + (B \cap J')$ пересекаются.

Задача 14. *Почему?* __Указание__. Иначе $\frac{9}{8}|I'| < |A \cap I'| + |x + (B \cap J')| = |(A \cap I') \cup (x + (B \cap J'))| \leq |I'|$.

Это, в свою очередь, означает, что существуют числа $a \in A$ и $b \in B$, для которых $a = x + b$. Поэтому $x = a - b \in D$. $\square$

Следствие 1. *Пусть S — такое подмножество $\mathbf{R}$, что существует $S_* \subset S$, для которого $|S_*| > 0$. Обозначим*

$$S + S = \{x : x = s + s', s \in S,\ s' \in S\}.$$

Тогда $S + S$ содержит открытый интервал.

Замечание 1. Множество S в следствии 1 не обязательно измеримо. Например, пусть $S = V \cup [2, 3]$, где V —

неизмеримое множество на интервале $[0,1]$. Тогда S — неизмеримо, но содержит интервал $S_* = [2,3]$ положительной меры.

Доказательство. Так как $A - B \subseteq S - S$, то следствие 1 вытекает из теоремы 2 для

$$A = S_*, \qquad B = \{x : x = -a, a \in A\}.$$

□

3. Теорема Островского

Лемма 1. *Пусть функция $k(\cdot)$ аддитивна, то есть*

$$k(x+y) = k(x) + k(y), \qquad x, y \in \mathbf{R}. \tag{3}$$

Если $k(\cdot)$ ограничена сверху на некотором множестве A положительной меры Лебега, тогда $k(\cdot)$ ограничена сверху в некоторой окрестности нуля. Кроме того, в этой окрестности функция $k(\cdot)$ ограничена также и снизу.

Доказательство. Предположим, что для некоторой константы M

$$k(x) \le M, \qquad x \in A.$$

Согласно следствию 1 множество $A+A$ содержит некоторый интервал $(y_0 - \delta, y_0 + \delta)$ (y_0 — центр этого интервала, а $\delta > 0$ — его радиус). Поэтому, для любого $|t| < \delta$ имеем $t + y_0 = a + a'$ при некоторых $a, a' \in A$.

Поскольку $k(t + y_0) = k(a + a')$, то из аддитивности вытекает, что

$$k(t) = k(a) + k(a') - k(y_0) \le 2M - k(y_0).$$

Таким образом, функция $k(\cdot)$ ограничена сверху константой $2M - k(y_0)$ на интервале $(-\delta, \delta)$.

Далее, так как $k(t) = -k(-t)$, то $-k(-t) \le 2M - k(y_0)$ или $k(-t) \ge k(y_0) - 2M$. Это и означает, что функция $k(\cdot)$ ограничена снизу константой $k(y_0) - 2M$ на интервале $(-\delta, \delta)$. $\square$

Теорема 3 (*Островский*). *Если функция $k(\cdot)$ аддитивна, то есть если выполнено условие* (3), *и ограничена сверху* (*или снизу*) *на множестве A положительной меры Лебега, то функция $k(\cdot)$ линейна, то есть*

$$k(x) = cx \tag{4}$$

для некоторой константы $c \in \mathbf{R}$.

Замечание 2. Из леммы 1 вытекает, что функция $k(\cdot)$ ограничена на некотором интервале. Поэтому теорема 3 сразу вытекает из теоремы 1.9. Тем не менее, ниже мы даем другое доказательство этого факта.

Доказательство. Пусть $k(\cdot)$ ограничена сверху на множестве A. Напомним одно из свойств аддитивных функций

$$k(rx) = rk(x), \qquad r \in \mathbf{Q}, \tag{5}$$

(см. теорему 1.1). Из леммы 1 вытекает, что существуют константы M и $\delta > 0$, для которых

$$|k(x)| \le M, \qquad x \in (-\delta, \delta).$$

Поэтому из аддитивности вытекает, что

$$|k(x)| \le \frac{M}{n}, \qquad \text{если} \qquad |x| < \frac{\delta}{n}$$

для всех $n \ge 1$.

Задача 15. *Почему?* **Указание**. $k(x) = nk(\frac{x}{n})$; $|x| < \delta \iff \frac{|x|}{n} < \frac{\delta}{n}$; поэтому $|k(\frac{x}{n})| < \frac{M}{n}$.

Рассмотрим произвольное $x \in \mathbf{R}$. Для каждого $n \geq 1$ найдем $r_n \in \mathbf{Q}$

$$|r_n - x| < \frac{\delta}{n}.$$

Задача 16. *Почему такое r_n существует?*

Из (5) вытекает, что для любого $n \geq 1$

$$|k(x) - xk(1)| = |k(x - r_n) + (r_n - x)k(1)| \leq \frac{M + \delta|k(1)|}{n}.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем равенство (4) с $c = k(1)$, что и заканчиваем доказательство.

□

4. Измеримые решения уравнения Коши

Теорема 4. *Если функция $k(\cdot)$ аддитивна и измерима, то она линейна, то есть равенство* (4) *выполнено для некоторого $c \in \mathbf{R}$.*

Доказательство. Множество $A_n = \{x : k(x) \leq n\}$ измеримо для любого $n \geq 1$. Кроме того, $A_n \subseteq A_{n+1}$ и

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbf{R}.$$

Значит, $|A_n| > 0$ для некоторого $n \geq 1$. Именно на этом множестве функция $k(\cdot)$ ограничена сверху. Поэтому теорема 4 вытекает из теоремы 3. □

5. Неизмеримая аддитивная функция

5.1. Базис Гамеля. Множество B называется базисом Гамеля, если любое действительное число можно представить единственным способом в виде линейной комбинации

$$x = \sum_{i=1}^{n} r_i b_i, \qquad r_i \in \mathbf{Q} \setminus \{0\}, \qquad b_1, \ldots, b_n \in B. \tag{6}$$

Заметим, что в базисе Гамеля хотя-бы одно из чисел иррационально.

Задача 17. *Почему в базисе Гамеля хотя-бы одно из чисел иррационально?*

5.2. Неизмеримая аддитивная функция. Выберем произвольное иррациональное число $b_0 \in B$ и определим функцию $k(\cdot)$ на B следующим образом:

$$k(b) = \begin{cases} b_0, & b = b_0, \\ 0, & b \neq b_0,\ b \in B. \end{cases}$$

Продолжим $k(\cdot)$ с множества B на все пространство $\mathbf{R}$, положив

$$k(x) = \sum_{i=1}^{n} r_i k(b_i), \qquad \text{если} \qquad x = \sum_{i=1}^{n} r_i b_i.$$

Таким образом, $k(x) = 0$, если в представлении Гамеля (6) числа x не встречается b_0. Если же в этом представлении (6) встречается b_0, то $k(x) = r_i b_0$, где r_i — коэффициент при b_0 в (6). Такая функция аддитивна.

Задача 18. *Почему функция $k(\cdot)$ является аддитивной?* Указание. Пусть $x = \sum_{i=1}^{n} r_i b_i$, $r_i \in \mathbf{Q} \setminus \{0\}$, $b_1, \ldots, b_n \in B$; $y = \sum_{j=1}^{m} q_j c_j$, $q_j \in \mathbf{Q} \setminus \{0\}$, $c_1, \ldots, c_m \in B$. Если $b_0 = b_i$ и $b_0 = c_j$ (то есть $b_0 \in \{b_1, \ldots, b_n\}$ и $b_0 \in \{c_1, \ldots, c_m\}$), то $k(x) = r_i b_0$, $k(y) = q_j b_0$ и $k(x+y) = (r_i + q_j) b_0$. Остальные варианты рассматриваются аналогично.

С другой стороны, такая функция не линейная.

Задача 19. *Почему такая функция не имеет вида $k(x) = cx$?* **Указание**. Пусть $k(x) = cx$, $x \in \mathbf{R}$, для некоторой константы $c \in \mathbf{R}$. Поскольку $k(b_0) = b_0$, то $c = 1$ и $k(1) = 1$. Рассмотрим разложение числа 1 в базисе Гамеля: $1 = \sum_{i=1}^{n} r_i b_i$, $r_i \in \mathbf{Q} \setminus \{0\}$, $b_1, \ldots, b_n \in B$. Ясно, что $b_0 \in \{b_1, \ldots, b_n\}$ (иначе бы $k(1) = 0$). Если $b_0 = b_i$, то $1 = k(1) = r_i b_0$, что невозможно, так как b_0 иррациональное число.

6. Структура открытого множества

6.1. Открытое множество. Множество $G \subset \mathbf{R}$ называется *открытым*, если для любого $x \in G$ существует $\delta > 0$, при котором $(x - \delta, x + \delta) \subset G$.

Теорема 5. *Пусть G — открытое множество. Тогда G представляет собой объединение не более, чем счетного количества открытых интервалов.*

Доказательство. В множестве G введем отношение между каждыми его двумя элементами, считая, что $x \sim y$, если существует открытый отрезок $(\alpha, \beta) \subset G$, для которого $x, y \in (\alpha, \beta)$. Отношение $\sim$ является эквивалентностью, то есть обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности. Свойства рефлексивности

$$x \sim x$$

и симметричности

$$x \sim y \implies y \sim x$$

понятны. Чтобы доказать транзитивность

$$x \sim y,\ y \sim z \implies x \sim z,$$

заметим, что из $x \sim y$ и $y \sim z$ вытекает, что существуют интервалы $(\alpha, \beta) \in G$ и $(\gamma, \delta) \in G$, для которых $x, y \in (\alpha, \beta)$

и $y, z \in (\gamma, \delta)$. Тогда $\gamma < \beta$, а интервал (α, δ) целиком лежит в G и содержит x и z.

Таким образом, множество G распадается на классы эквивалентности.

Классы не пересекаются. Предположим от противного, что существуют два класса C_1 и C_2, каждый из которых содержит некоторое действительное число $x \in A$. Тогда для любого $y \in C_1$ существует интервал $(\alpha, \beta) \in G$, для которого $x, y \in (\alpha, \beta)$. Это означает, что $y \in C_2$. Так как y произвольно, то $C_1 \subseteq C_2$. Аналогично доказываем, что $C_2 \subseteq C_1$, откуда $C_1 = C_2$.

Каждый класс является интервалом. Пусть C — один из классов. Обозначим $a = \inf C$, $b = \sup C$.

Задача 20. *Так как A открытое множество, то $a \neq b$.*

Задача 21. *Далее, ясно, что $C \subseteq (a, b)$.*

Задача 22. *С другой стороны, если $x, y \in C$, то по определению C интервал (x, y) принадлежит C.*

Задача 23. *В любой близости к a справа и к b слева есть точки из C.*

Задача 24. *Поэтому C содержит любой интервал (a', b'), концы которого принадлежат (a, b).*

Задача 25. *Отсюда вытекает, что $C = (a, b)$.*

Система таких интервалов не более, чем счетна, так как в каждом из них найдется хотя-бы одна рациональная точка. $\square$

7. Мера Лебега

7.1. Мера Лебега интервала. Пусть $E = (a, b)$. Мерой Лебега интервала E называется число $|E| = b - a$.

7.2. Мера Лебега открытого множества. Пусть G — открытое множество. Согласно теореме 5 его можно представить в виде $G = \bigcup C_i$, где C_i — непересекающиеся открытые интервалы, причем их количество не более, чем счетно. Мерой Лебега множества G назовем число

$$|G| = \sum_i |C_i|.$$

Задача 26. *Пусть E — открытое множество. Почему $|E|$ не зависит от представления в виде объединения открытых множеств?*

7.3. Мера Лебега замкнутого множества. Множество $F \in \mathbf{R}$ называется замкнутым, если его дополнение $F^c = \mathbf{R} \setminus F$ является открытым.

Теорема 6. *Пусть F — замкнутое множество. Тогда*

$$F = \bigcup I_k, \tag{7}$$

где I_k для любого k — либо одноточечное множество, либо замкнутый интервал $[a_k, b_k]$ (случаи $a_k = -\infty$ и $b_k = \infty$ также допускаются).

Доказательство. Согласно теореме 5 F^c можно представить в виде $\bigcup I_k$, где I_k — непустые открытые интервалы, $I_k = (a_k, b_k)$, $b_k \le a_{k+1}$.

Если $b_k = a_{k+1}$ для какого-то k, то F^c содержит только одну точку b_k между интервалами I_k и I_{k+1}. Если же $b_k < a_{k+1}$, то целый интервал $[b_k, a_{k+1}]$ принадлежит F^c.

Бесконечные интервалы в (7) получаются в том случае, когда $a_1 > -\infty$ или $\lim_{k\to\infty} b_k < \infty$. $\square$

Задача 27. *Пусть F — замкнутое множество, а $a = \inf F$, $b = \sup F$. Тогда $F \subseteq [a, b]$ и $G = (a, b) \setminus F$ является открытым множеством.* **Указание**. $G^c = F \cup (-\infty, a] \cup [b, \infty)$.

Пусть F — ограниченное замкнутое множество. Мерой Лебега множества F называется число

$$|F| = b - a - |G|, \qquad G = [a, b] \setminus F.$$

7.4. Внешняя мера ограниченного множества. Если E — ограниченное множество, то его внешней мерой называется число

$$|E|^* = \inf\{|G| : E \subseteq G,\ G \text{ — открытое множество}\}.$$

Задача 28. *Пусть $E = [a,b]$. Найти $|E|^*$.*

7.5. Внутреняя мера ограниченного множества. Если E — ограниченное непустое множество, то его внутренней мерой называется число

$$|E|_* = \sup\{|F| : E \supseteq F,\ F \text{ — замкнутое множество}\}.$$

Задача 29. *Почему для любого непустого множества E существует хотя-бы одно замкнутое множество F, такое, что $F \subseteq E$.*

Задача 30. *Пусть $E = (a,b)$. Найти $|E|_*$.*

7.6. Измеримое множество. Пусть E — ограниченное множество. Оно называется измеримым, если

$$|E|_* = |E|^*.$$