3.3. Стандартная гауссовская случайная величина. Функция $\varphi(x) = (2\pi)^{-1/2}e^{-x^2/2}$ называется *стандартной гауссовской плотностью.* Эта функция уже встретилась нам в теореме Муавра–Лапласа (теорема 4.3). В лекции 15 мы докажем, что $\varphi(x)$ действительно является плотностью распределения, а сейчас вычислим математическое ожидание:

$$\mathsf{E}\,[\xi] = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)\,dx \overset{⑤}{=} 0 \tag{5}$$

поскольку φ — четная функция, а интеграл для четной функции по симметричному промежутку равен 0. ⑥

3.4. Случайная величина Коши. (см. определение 11.2). Плотность распределения Коши задается формулой (11.5). Поэтому

$$\mathsf{E}\,[\xi] = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \left[\begin{smallmatrix}\text{Замена:}\\ x^2=t\end{smallmatrix}\right] = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+t} \overset{⑦}{=} \infty.$$

Для случайной величины Коши математическое ожидание не существует.

Пример 2 (продолжение примера 11.1). Покажем, как вычисляется математическое ожидание случайной величины, которая не является ни дискретной, ни абсолютно непрерывной.

Напомним условия стохастического эксперимента из примера 11.1: подбрасывается симметричная монета. Если выпала “*решка*”, то производится еще одно действие: точка бросается на отрезок $[0, 1]$. Определим случайную величину ξ равной -1, если выпал “*герб*”; если же выпала “*решка*” и координата брошенной точки равна x, положим $\xi = x$. В примере 11.2 мы установили, что $F = \frac{1}{2}F_d + \frac{1}{2}F_c$, где F — функция распределения случайной величины ξ, а F_d и F_c — это дискретная и абсолютно непрерывная функции распределения, графики которых изображены на рис. 11.2 и 11.3.

Согласно определению (2)

$$\mathsf{E}\,[\xi] = \int_{-\infty}^{\infty} x\,dF(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x\,dF_d + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x\,dF_c = (-1)\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}.$$

Тут мы воспользовались аддитивностью интеграла Стильтьеса, эквивалентностью определений 12.1 и 12.4 для дискретных величин и равенством (3).

4. Свойства математического ожидания абсолютно непрерывных случайных величин

Математическое ожидание для абсолютно непрерывных случайных величин имеет те же свойства, что и для дискретных. Исключение составляет свойство (E_1), поскольку константа не является абсолютно непрерывной случайной величиной. ⑧

Теорема 1. *Пусть ξ и η — абсолютно непрерывные случайные величины. Тогда выполнены свойства (E_2)–(E_5) (лекция 12, стр. 89).*

Перед доказательством этой теоремы мы приведем несколько вспомогательных результатов, которые встречаются и в других вычислениях математических ожиданий.

4.1. Вспомогательные результаты.

Лемма 1. *Если случайная величина ξ абсолютно непрерывна и $a \neq 0$, то $a\xi$ также абсолютно непрерывная случайная величина, причем $f_{a\xi}(x) = f_\xi(x/a)/|a|$.*

Доказательство леммы 1. Согласно условию леммы $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x f_\xi(t)\,dt$ для любого $x \in \mathbf{R}$. Положим $\eta = a\xi$. В случае $a > 0$ имеем $F_\eta(x) = \mathsf{P}(\eta < x) = \mathsf{P}(\xi < x/a) = F_\xi(x/a)$ и поэтому

$$F_\eta(x) = F_\xi\left(\frac{x}{a}\right) = \int_{-\infty}^{x/a} f_\xi(t)\,dt = \left[\begin{smallmatrix}\text{Замена:}\\ at=s\end{smallmatrix}\right] = \int_{-\infty}^{x} \frac{f_\xi(s/a)}{a}\,ds,$$

то есть $\frac{1}{a} f_\xi(s/a)$ является плотностью случайной величины η.

Если же $a < 0$, то $F_\eta(x) \overset{⑨}{=} \mathsf{P}(\xi > x/a) \overset{⑨}{=} 1 - \mathsf{P}(\xi \le x/a) = 1 - \mathsf{P}(\xi < x/a)$ в силу свойства (f_6) теоремы 11.2. Поэтому из свойства (f_2) теоремы 11.1 вытекает

$$\begin{aligned} F_\eta(x) &= 1 - F_\xi\left(\frac{x}{a}\right) = 1 - \int_{-\infty}^{x/a} f_\xi(t)\,dt = \int_{x/a}^{\infty} f_\xi(t)\,dt = \int_{-x/|a|}^{\infty} f_\xi(t)\,dt \\ &= \left[\begin{smallmatrix}\text{Замена:}\\ |a|t=s\end{smallmatrix}\right] = \int_{-x}^{\infty} \frac{f_\xi(s/|a|)}{|a|}\,ds = \left[\begin{smallmatrix}\text{Замена:}\\ s=-v\end{smallmatrix}\right] \overset{⑩}{=} \int_{-\infty}^{x} \frac{f_\xi(-s/|a|)}{|a|}\,ds. \end{aligned}$$

Значит и в этом случае $\frac{1}{|a|} f(s/a) = \frac{1}{|a|} f(-s/|a|)$ является плотностью случайной величины η. $\square$

Лемма 2. *Каждая неотрицательная абсолютно непрерывная случайная величина ξ обладает версией плотности f^*, для которой $f^*(x) = 0$, $x \le 0$.*

Доказательство леммы 2. Пусть F и f — функция распределения и плотность случайной величины ξ. Тогда $F(x) \overset{⑪}{=} 0$ для $x \le 0$ в силу неотрицательности ξ и поэтому $\int_{-\infty}^x f(t)\,dt = 0$ для $x \le 0$. В частности, $\int_{-\infty}^0 f(t)\,dt = 0$. Рассмотрим теперь функцию

$$f^*(t) = \begin{cases} f(t), & t > 0, \\ 0, & t \le 0. \end{cases}$$

Тогда $F(x) \overset{⑫}{=} \int_{-\infty}^x f^*(t)\,dt$ для $x \le 0$. Кроме того, для $x > 0$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\,dt = \int_{-\infty}^0 f(t)\,dt + \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x f^*(t)\,dt = \int_{-\infty}^x f^*(t)\,dt,$$

то есть f^* действительно является плотностью величины ξ в этом случае. $\square$

Лемма 3. *Пусть ξ абсолютно непрерывная случайная величина. Тогда $|\xi|$ также абсолютно непрерывная случайная величина, причем*

$$f_{|\xi|}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ f_\xi(x) + f_\xi(-x), & x > 0. \end{cases} \tag{6}$$

Доказательство леммы 3. Через $g(x)$ обозначим функцию, которая определяется правой частью (6). Понятно, что $F_{|\xi|}(x) \overset{⑬}{=} \int_{-\infty}^{0} g(t)\,dt$ для $x \le 0$. Для $x > 0$ имеем

$$F_{|\xi|}(x) = \mathsf{P}(|\xi| < x) \overset{⑭}{=} \mathsf{P}(-x < \xi < x) \overset{⑭}{=} \mathsf{P}(-x \le \xi < x) = \int_{-x}^{x} f_\xi(t)\,dt$$

в силу свойств (f_5) и (f_6) теоремы 11.2. Поэтому

$$\begin{aligned} F_{|\xi|}(x) &= \int_{-x}^{0} f_\xi(t)\,dt + \int_{0}^{x} f_\xi(t)\,dt = \int_{0}^{x} f_\xi(-t)\,dt + \int_{0}^{x} f_\xi(t)\,dt \\ &\overset{⑮}{=} \int_{0}^{x} g(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} g(t)\,dt, \end{aligned}$$

то есть $|\xi|$ — действительно абсолютно непрерывная случайная величина, а $g(t)$ — ее плотность. □

Доказательство теоремы 1. Докажем свойство (E_2). Если $a = 0$, то $a\xi$ является константой и (E_2) вытекает из свойства (E_1) для дискретных случайных величин (раздел 12.3). В случае $a \ne 0$ воспользуемся определением (1) и леммой 1:

$$\mathsf{E}\,[a\xi] = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{f_\xi(x/a)}{|a|}\,dx.$$

Если $a > 0$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \frac{f_\xi(x/a)}{|a|}\,dx = \left[\begin{smallmatrix}\text{Замена:}\\ x=av\end{smallmatrix}\right] = a \int_{-\infty}^{\infty} v f_\xi(v)\,dv = a\mathsf{E}\,[\xi]\,.$$

Если же $a < 0$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \frac{f_\xi(x/a)}{|a|}\,dx = \left[\begin{smallmatrix}\text{Замена:}\\ x=av\end{smallmatrix}\right] = \frac{a^2}{|a|} \int_{\infty}^{-\infty} v f_\xi(v)\,dv = a\mathsf{E}\,[\xi]\,.$$

Докажем теперь свойство (E_3). Выберем такую же версию f^* плотности случайной величины ξ, как в лемме 2. Тогда

$$\mathsf{E}\,[\xi] = \int_{-\infty}^{\infty} t f_\xi^*(t)\,dt = \int_{0}^{\infty} t f_\xi^*(t)\,dt \ge 0,$$

так как $f^*(t) \ge 0$ в силу свойства (f_1) теоремы 11.1.

Докажем (E_4). В силу свойств интеграла Римана

$$\begin{aligned} |\mathsf{E}\,[\xi]\,| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} t f_\xi(t)\,dt \right| \le \int_{-\infty}^{\infty} |t| f_\xi(t)\,dt = -\int_{-\infty}^{0} t f_\xi(t)\,dt + \int_{0}^{\infty} t f_\xi(t)\,dt \\ &\overset{⑯}{=} \int_{0}^{\infty} t f_\xi(-t)\,dt + \int_{0}^{\infty} t f_\xi(t)\,dt = \int_{0}^{\infty} t(f_\xi(t) + f_\xi(-t))\,dt. \end{aligned} \tag{7}$$

Из леммы 3 вытекает, что правая часть (7) равна $\mathsf{E}\,[|\xi|]$, что и доказывает (E_4).

Свойство (E_5) мы докажем для общих случайных величин в теореме 2, свойство (E_5^*) (см. также теорему 19.2). □

5. Свойства математического ожидания в общем случае

Все свойства (E_1)–(E_5) справедливы не только для дискретных или абсолютно непрерывных случайных величин, но и в общем случае. Доказательства в общем случае основаны на свойствах интеграла Стильтьеса.

Теорема 2. *Пусть ξ — случайная величина. Предположим, что математическое ожидание $\mathsf{E}[\xi]$ существует в смысле определения 2.*

(E_0) *Имеет место равенство*

$$\mathsf{E}[\xi] = -\int_{-\infty}^{0} F_\xi(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} (1 - F_\xi(x))\,dx. \tag{8}$$

(E_{12}) *Математическое ожидание $\mathsf{E}[a\xi + b]$ существует для любых $a, b \in \mathbf{R}$, причем $\mathsf{E}[a\xi + b] = a\mathsf{E}[\xi] + b$.*

(E_3^*) *Пусть η — случайная величина, причем $\xi \le \eta$. Если математическое ожидание $\mathsf{E}[\eta]$ существует, то $\mathsf{E}[\xi] \le \mathsf{E}[\eta]$.*

(E_4) $|\mathsf{E}[\xi]\,| \le \mathsf{E}[|\xi|]$.

(E_5^*) *Пусть η — случайная величина, причем математическое ожидание $\mathsf{E}[\eta]$ существует. Тогда $\mathsf{E}[\xi + \eta]$ также существует, причем*

$$\mathsf{E}[\xi + \eta] = \mathsf{E}[\xi] + \mathsf{E}[\eta]\,. \tag{9}$$

Доказательство свойства (E_0). Определение (2) можно переписать в следующем виде

$$\mathsf{E}[\xi] \overset{⑰}{=} \int_{-\infty}^{0} x\,dF_\xi - \int_{0}^{\infty} x\,d(1 - F_\xi). \tag{10}$$

Каждый из интегралов в правой части сходится абсолютно, так как абсолютно сходится интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} x\,dF_\xi$. Интегрируя по частям каждый из них (Фихтенгольц, т. III, глава XV, § 577, стр. 97), доказываем свойство (E_0). Например, для первого интеграла в (10) рассуждаем следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{0} x\,dF_\xi = xF_\xi(x)\Big|_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} F_\xi(x)\,dx = -\int_{-\infty}^{0} F_\xi(x)\,dx,$$

так как $xF_\xi(x) \to 0$, $x \to -\infty$. Последнее свойство выполнено в силу

$$0 \le |x|F_\xi(x) \le \int_{-\infty}^{x} |t|\,dF_\xi \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0.$$

Рассуждение для второго интеграла в (10) аналогично. ⑱ □

Доказательство свойства (E_{12}). Достаточно доказать, что $\mathsf{E}[\xi + b] = \mathsf{E}[\xi] + b$ и $\mathsf{E}[a\xi] = a\mathsf{E}[\xi]$. ⑲ Для доказательства первого из этих равенств заметим, что $F_{\xi+b}(x) = F_\xi(x - b)$. Поэтому

$$\mathsf{E}[\xi] = \int_{-\infty}^{\infty} x\,dF_{\xi+b}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,dF_\xi(x - b) = \int_{-\infty}^{\infty} (x + b)\,dF_\xi(x) = \mathsf{E}[\xi] + b$$

в силу линейности интеграла Стильтьеса и теоремы 11.3.

Докажем теперь равенство $\mathsf{E}[a\xi] = a\mathsf{E}[\xi]$. Если $a = 0$, то это свойство вытекает из (E_1) (лекция 12, стр. 89). Если $a < 0$, то $F_{a\xi}(x) = \mathsf{P}\left(\xi > \frac{x}{a}\right)$ и из (E_0) вытекает, что

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}[a\xi] &= \int_{-\infty}^{\infty} x\,dF_{a\xi}(x) = -\int_{-\infty}^{0} F_{a\xi}(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} (1 - F_{a\xi}(x))\,dx \\
&= -\int_{-\infty}^{0} \mathsf{P}\left(\xi > \frac{x}{a}\right)\,dx + \int_{0}^{\infty} \mathsf{P}\left(\xi \le \frac{x}{a}\right)\,dx \\
&= -a\int_{\infty}^{0} \mathsf{P}(\xi > v)\,dv + a\int_{0}^{-\infty} \mathsf{P}(\xi \le v)\,dv \\
&= a\left[\int_{0}^{\infty} \mathsf{P}(\xi > v)\,dv - \int_{-\infty}^{0} \mathsf{P}(\xi \le v)\,dv\right] \\
&= a\left[\int_{0}^{\infty} \mathsf{P}(\xi \ge v)\,dv - \int_{0}^{\infty} \mathsf{P}(\xi = v)\,dv\right. \\
&\qquad\left. - \int_{-\infty}^{0} \mathsf{P}(\xi < v)\,dv - \int_{-\infty}^{0} \mathsf{P}(\xi = v)\,dv\right].
\end{aligned}$$

Сумма первого и третьего интегралов в правой части равна $\mathsf{E}[\xi]$ согласно свойству (E_0). Поэтому

$$\mathsf{E}[a\xi] = a\left[\mathsf{E}[\xi] - \int_{-\infty}^{\infty} \mathsf{P}(\xi = v)\,dv\right]. \tag{11}$$

Последний интеграл равен 0, [20] так как $\mathsf{P}(\xi = v)$ — это скачок функции распределения в точке v (см. свойство (PF_5) в теореме 10.7), а множество скачков функция распределения не более, чем счетно (см. теорему 10.6). [21] Случай $a > 0$ рассматривается аналогично, но проще. [22] □

Доказательство свойства (E_3^*). Поскольку $\xi \le \eta$, то

$$\mathsf{P}(\xi < x) \overset{[23]}{\ge} \mathsf{P}(\eta < x) \quad \text{и} \quad \mathsf{P}(\xi \ge x) \overset{[23]}{\le} \mathsf{P}(\eta \ge x) \tag{12}$$

для всех $x \in \mathbf{R}$. Поэтому (E_3^*) вытекает из (E_0). [24] □

Доказательство свойства (E_4). Так как $\xi \le |\xi|$ и $-\xi \le |\xi|$, то (E_3^*) влечет $\mathsf{E}[\xi] \le \mathsf{E}[|\xi|]$ и $\mathsf{E}[-\xi] \le \mathsf{E}[|\xi|]$. Согласно свойству (E_{12}) с $a = -1$ и $b = 0$ из последнего неравества вытекает $-\mathsf{E}[\xi] \le \mathsf{E}[|\xi|]$. Следовательно,

$$|\mathsf{E}[\xi]| = \max\{-\mathsf{E}[\xi], \mathsf{E}[\xi]\} \le \mathsf{E}[|\xi|].$$

□

Доказательство свойства (E_5^*). Зафиксируем $\delta > 0$ и рассмотрим интервалы $I_k \overset{\text{def}}{=} [(k-1)\delta, k\delta)$, $-\infty < k < \infty$. Введем случайные величины

$$\xi' = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (k-1)\mathbb{1}_{\{\xi \in I_k\}}, \qquad \eta' = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (k-1)\mathbb{1}_{\{\eta \in I_k\}}.$$

Непосредственно из этого определения вытекает, что

$$\xi' = (k-1)\delta, \quad \text{если} \quad \xi \in I_k; \qquad \eta' = (k-1)\delta, \quad \text{если} \quad \eta \in I_k.$$

Ясно, что $\xi' \leq \xi \leq \xi' + \delta$ и $\eta' \leq \eta \leq \eta' + \delta$. Поэтому математические ожидания $\mathsf{E}\,[\xi']$ и $\mathsf{E}\,[\eta']$ существуют в силу свойства (E_3^*), причем $\mathsf{E}\,[\xi'] \leq \mathsf{E}\,[\xi]$ и $\mathsf{E}\,[\eta'] \leq \mathsf{E}\,[\eta]$. Из свойства (E_{12}) теперь вытекает, что математические ожидания $\mathsf{E}\,[\xi' + \delta]$ и $\mathsf{E}\,[\eta' + \delta]$ также существуют, причем $\mathsf{E}\,[\xi'] \geq \mathsf{E}\,[\xi] - \delta$ и $\mathsf{E}\,[\eta'] \geq \mathsf{E}\,[\eta] - \delta$.

Кроме того, случайные величины ξ' и η' дискретные, поэтому для них выполнено свойство (E_5) (лекция 12, стр. 89), то есть $\mathsf{E}\,[\xi' + \eta']$ существует и равно $\mathsf{E}\,[\xi'] + \mathsf{E}\,[\eta']$. Аналогичные рассуждения справедливы и для случайных величин $\xi' + \delta$ и $\eta' + \delta$. Таким образом

$$\mathsf{E}\,[\xi'] + \mathsf{E}\,[\eta'] = \mathsf{E}\,[\xi' + \eta'] \leq \mathsf{E}\,[\xi + \eta]\,,$$
$$\mathsf{E}\,[\xi + \eta] \leq \mathsf{E}\,[\xi' + \eta' + 2\delta] = \mathsf{E}\,[\xi'] + \mathsf{E}\,[\eta'] + 2\delta.$$

Используя соотношения между $\mathsf{E}\,[\xi']$ и $\mathsf{E}\,[\xi]$, а также между $\mathsf{E}\,[\eta']$ и $\mathsf{E}\,[\eta]$, получаем

$$\mathsf{E}\,[\xi] + \mathsf{E}\,[\eta] - 2\delta \leq \mathsf{E}\,[\xi + \eta] \leq \mathsf{E}\,[\xi] + \mathsf{E}\,[\eta] + 2\delta. \tag{13}$$

Поскольку δ произвольно, то (E_5^*) доказано. ㉕ $\square$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

Вопрос 1. Почему справедливо равенство $\mathsf{P}(\xi > b - x) = \mathsf{P}(\xi \geq b - x)$, которое использовано в примере 1?

Вопрос 2. Почему справедливо равенство $\int_{-\infty}^{\infty} (x - a)\, dF_\xi(x) = \frac{a+b}{2} - a$, которое использовано в примере 1?

Вопрос 3. Почему справедливо равенство $\int_{-\infty}^{\infty} x\, d[1 - F_\xi(b - x)] = -\int_{\infty}^{-\infty} (b - x)\, dF_\xi(x)$, которое использовано в примере 1?

Вопрос 4. Почему справедливо равенство $-xe^{-\lambda x}\Big|_{x=0}^{\infty} + \int_0^\infty e^{-\lambda x}\, dx = \frac{1}{\lambda}$, которое использовано в примере 1?

Вопрос 5. Объяснить равенство $\int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)\, dx = 0$ в разделе §3.3.

Вопрос 6. Доказать, что интеграл в (5) сходится абсолютно.

Вопрос 7. Объяснить равенство $\int_0^\infty \frac{dt}{1+t} = \infty$ в разделе §3.4.

Вопрос 8. В разделе 4 утверждается, что константа не является абсолютно непрерывной случайной величиной. Почему это так?

Вопрос 9. Почему справедливы равенства $\mathsf{P}(\xi > x/a) = 1 - \mathsf{P}(\xi \leq x/a) = 1 - \mathsf{P}(\xi < x/a)$, которые мы использовали в доказательстве леммы 1 при $a < 0$.

Вопрос 10. Почему справедливо равенство $\int_{-x}^{\infty} \frac{1}{|a|} f_\xi(s/|a|)\, ds = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{|a|} f_\xi(-s/|a|)\, ds$, которое мы использовали в доказательстве леммы 1 при $a < 0$.

Вопрос 11. В доказательстве леммы 2 утверждается, что $F(x) = 0$ для $x \leq 0$. Почему это так?

Вопрос 12. В доказательстве леммы 2 утверждается, что $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f^*(t)\, dt$. Почему это так?