Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

Методичні вказівки

до типової розрахункової роботи

з математичного аналізу

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ТА ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ.

Київ - 2013

1. МНОЖИНИ ТА ДІЇ НАД НИМИ

Основні поняття

Поняття множини є одним з найбільш важливих первісних, не означуваних понять математики. Для раціонального аналізу навколишнього світу його уявляють складеним із окремих «об'єктів». Виділення цих об'єктів та зібрань є природнім способом організації математичного мислення.

Під множиною A ми розуміємо довільне зібрання визначених же різних об'єктів, що розглядаються як єдине ціле. Об'єкти, з яких складається множина, називаються її елементами. Поняття елемента теж є первісним.

Той факт, що об'єкт x є елементом множини A, позначається символом $x \in A$ (читається «x належить A»). Якщо x не є елементом A, це позначається $x \notin A$ (читається «x не належить A»). Множина, що не має елементів, називається порожньою і позначається символом $\varnothing$.

Таким чином, множина A вважається заданою, якщо про кожний «об'єкт», що розглядається, можна сказати, що він або належить множині A, або ні.

Отже, кожна множина характеризується певною ознакою, згідно якої довільний елемент належить чи не належить даній множині.

Приклади множин:

1. Множина S всіх символів цієї сторінки.
2. Множина $\mathbb{N}$ натуральних чисел (позначається $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$).
3. Множина $\mathbb{Z}$ цілих чисел (позначається $\mathbb{Z} = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$).
4. Множина $\mathbb{R}$ дійсних чисел.

Звичайно в конкретних міркуваннях елементи всіх множин, що розглядаються в даній математичній теорії, вибирають із деякої широкої множини Ω (своєї для кожного випадку), яка називається універсальною множиною, або універсумом.

Щоб задати множину, потрібно вказати, які елементи їй належать. Це можна зробити двома способами:

1. Прямим перечисленням елементів множини.

Якщо множина A складається з елементів $a, b, \ldots, c$, це позначається як $A = \{a, b, \ldots, c\}$.

2. Характеристичною властивістю (ознакою) елементів множини.

Якщо A — множина всіх елементів x універсуму, що мають дану властивість $P(x)$, це позначається:

$$A = \{x \in \Omega \mid P(x)\}, \text{ або } A = \{x \mid P(x)\}, \text{ чи } A = \{x : P(x)\}.$$

Приклади множин:

1. Множина M парних цілих чисел запишеться как

$$M = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2n, n \in \mathbb{Z}\}.$$

2. Множина $\mathbb{Q}$ раціональних чисел:

$$\mathbb{Q} = \left\{x \mid x = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Дві множини A і B називаються рівними, якщо кожний елемент множини A є елементом множини B і навпаки. Рівність множин A і B позначається як $A = B$.

З означення рівності випливає, що рівні множини складаються з одних і тих же елементів, причому порядок розміщення елементів множин неістотний, наприклад, $\{a, b\} = \{b, a\}$.

Дії над множинами

1. Включення.

Множина A називається підмножиною множини B, якщо кожний елемент множини A є елементом множини B. Символічно:

$$x \in A \quad \Rightarrow \quad x \in B.$$

Це позначають як $A \subset B$ або $B \supset A$. Порожня множина $\varnothing$ вважається підмножиною будь-якої множини:

$$\varnothing \subset A, \quad A \subset \Omega.$$

Зауважимо, що множини рівні тоді і тільки тоді, коли $A \subset B$ і $B \subset A$.

Операції над множинами можна символічно задати геометричними фігурами на площині.

Зображення включення $A \subset B$.

2. Об'єднання.

Об'єднанням множин A і B називається множина, що складається з тих елементів, які належать принаймні одній із множин A або B (позначають $A \cup B$), тобто

$$A \cup B = \left\{ x \in \Omega \,|\, \left(x \in A \right) чи \left(x \in B \right) \right\}.$$

Зображення об'єднання $A \cup B$.

Властивості операції об'єднання:

1. $A \cup B = B \cup A$ (комутативність),

2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (асоціативність),

3. $A \cup \varnothing = A$,

де A, B, C — довільні множини з універсуму Ω.

3. Перетин.

Перетином множин A і B називається множина, що складається із спільних елементів множин A і B (позначають $A \cap B$), тобто

$$A \cap B = \{x \in \Omega \,|\, (x \in A)\, i\, (x \in B)\}.$$

Зображення перетину $A \cap B$.

Властивості операції перетину:

1. $A \cap B = B \cap A$ (комутативність),

2. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (асоціативність),

3. $A \cap \varnothing = \varnothing$,

де A, B, C — довільні множини з універсуму Ω.

Операції об'єднання та перетину пов'язані між собою двома дистрибутивними законами:

1. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$,

2. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$,

де A, B, C — довільні множини з універсуму Ω.

4. Різниця.

Різницею множин A і B називається множина, що складається з усіх тих елементів множини A, що не належать множині B (позначають $A \setminus B$), тобто

$$A \setminus B = \left\{ x \in \Omega \mid \left(x \in A \right) i \left(x \notin B \right) \right\}.$$

Зображення різниці $A \setminus B$.

5. Доповнення.

Доповненням до множини A називається множина $\Omega \setminus A$ (позначають $\overline{A}$), тобто

$$\overline{A} = \left\{ x \in \Omega \mid x \notin A \right\}.$$

Зображення доповнення $\overline{A}$.

Властивості операції доповнення:

1) $\overline{\varnothing} = \Omega$,

2) $A \cap \overline{A} = \varnothing$,

3) $A \cup \overline{A} = \Omega$,

4) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (перший закон двоїстості),

5) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (другий закон двоїстості).

6. Симетрична різниця.

Симетричною різницею множин A і B називається множина

$$A \vartriangle B = \left(A \setminus B \right) \cup \left(B \setminus A \right).$$

Зображення симетричної різниці $A \vartriangle B$.

Властивості симетричної різниці:

1) $A \vartriangle B = B \vartriangle A$ (комутативність),

2) $A \vartriangle A = \varnothing$,

3) $A \triangle \varnothing = A$.

7. Прямий добуток.

Впорядкованою парою елементів a і b називається множина

$$(a,b) = \{a, \{a, b\}\}.$$

Елемент a називається першим елементом пари, а елемент b — другим. Спорядковані пари (a,b) і (c,d) рівні тоді і тільки тоді, коли рівні їх відповідні елементи $a = c$ і $b = d$:

$$(a,b) = (c,d) \quad \Leftrightarrow \quad a = c \; i \; b = d.$$

Зауважимо, що при $a \neq b$ маємо, що

$$(a,b) \neq (b, a).$$

Прямим добутком множин A і B називається множина відповідних пар, в яких перший елемент належить множині A, а другий — множині B (позначають $A \times B$), тобто

$$A \times B = \{(a, b) | (a \in A) \, i \, (b \in B)\}.$$

Приклади прямого добутку:

1. Нехай

$$A = \{1, 2, 3\}, \; B = \{0, 1\}.$$

Тоді

$$A \times B = \{(1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1), (3, 0), (3, 1)\}.$$

2. Нехай $A = B = \mathbb{R}$. Тоді прямий добуток $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ є множиною всіх впорядкованих пар дійсних чисел і позначається $\mathbb{R}^2$. Отже $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. Відомо, що вибравши систему координат на площині, можна кожну

точку площини задати впорядкованою парою чисел. Метод координат застосував у XVII ст. французький математик і філософ Рене Декарт, тому прямий добуток іноді називають декартовим.

Зауважимо, що для прямого добутку, взагалі кажучи,

$$A \times B \neq B \times A.$$

За аналогією з впорядкованою парою можна ввести поняття впорядкованої трійки (a, b, c) елементів множин $a \in A, b \in B, c \in C.$

За означенням впорядкована трійка

$$(a, b, c) = ((a, b), c).$$

Дві впорядковані трійки (a, b, c) і (a_1, b_1, c_1) рівні тоді і тільки тоді, коли

$$a = a_1, \quad b = b_1, \quad c = c_1.$$

Множина всіх впорядкованих трійок елементів множин A, B, C називається прямим (декартовим) добутком цих множин і позначається $A \times B \times C$. Тобто

$$A \times B \times C = \{(a, b, c) \mid (a \in A)\, i\, (b \in B)\, i\, (c \in C)\}.$$

Зауважимо, що взагалі кажучи,

$$(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C).$$

Відношення та функції

Нехай A, B — дві непорожні множини із універсальної множини Ω.

Відношенням між елементами множин A і B називається будь-яка підмножина ρ множини $A \times B$. Якщо впорядкована пара (x, y) є елементом ρ (тобто $(x, y) \in \rho$), то кажуть, що x та y знаходяться у відношенні ρ, і часто позначають це $x\rho y$. Якщо $A=B$, то відношення $\rho\subset A\times A$ називається відношенням на A.

Приклад. Відношення "$<$":

$$m\rho n \Leftrightarrow m<n$$

є відношенням на множині натуральних чисел.

Нехай $\rho\subset A\times B$ — відношення між елементами множин A і B.

Областю визначення відношення ρ називається множина перших елементів пар, що входять в дане відношення

$$\operatorname{dom}\rho=\left\{x\mid\exists y\ \left(x,y\right)\in\rho\right\}.$$

Областю значень відношення ρ називається множина других елементів пар, що входять в дане відношення

$$\operatorname{im}\rho=\left\{y\mid\exists x\ \left(x,y\right)\in\rho\right\}.$$

Приклад. Для віношення $\rho=$"$<$" на множині натуральних чисел $\operatorname{dom}\rho=\mathbb{N}$, оскільки для довільного натурального числа n можна вказати більше натуральне число, наприклад $n<n+1$. А $\operatorname{im}\rho=\mathbb{N}\setminus\left\{1\right\}$, оскільки для довільного натурального числа n, за винятком 1, можна вказати менше натуральне число.

Відношення f між елементами множин A і B називається функцією з A в B, якщо $\operatorname{dom} f=A$, $\operatorname{im} f\subset B$, а для кожного першого елемента пари відношеня існує єдиний другий елемент. Тобто для всіх $x\in\operatorname{dom} f$ і $y_1,y_2\in\operatorname{im} f$ з $\left(x,y_1\right)\in f$ та $\left(x,y_2\right)\in f$ випливає, що $y_1=y_2$.

Функція f із A в B позначається символом $f:A\to B$. При цьому замість $(x,y)\in f$ пишемо $y=f(x)$ і називаємо y значенням функції f при значенні аргумента x.

Функцію $f:A\to B$ також називають відображенням множини A в множину B і значення $y=f(x)$ називають образом елемента x при відображенні f. При цьому пишуть $x\mapsto y$.

Якщо $f:A\to B$ функція з A в B, то множину $\operatorname{dom} f=A$ називають областю визначення функції f і позначають $D(f)=A$, а множину $\operatorname{im} f\subset B$ називають областю значень функції f і позначають $E(f)\subset B$.

В елекментарній математиці функцією $f:A\to B$ називають закон відповідності між елементами множин A і B, що ставить у відповідність кожному елементу множини A рівно один елемент множини B.

Дві функції $f:A\to B$ та $f_1:A_1\to B_1$ називаються рівними, якщо $A=A_1$, $B=B_1$ і для всіх $x\in A$ $f(x)=f_1(x)$.

Індикатори множин

Нехай Ω — універсальна множина. Для довільної множини $A\subset\Omega$ визначимо функцію $I_A(x):\Omega\to\mathbb{R}$ правилом:

$$I_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A,\\ 0, & x\in\Omega\setminus A.\end{cases}$$

Функція $I_A(x)$ називається індикатором множини A. Зауважимо, що

$$I_\varnothing(x)\equiv 0,\quad I_\Omega(x)\equiv 1.$$

Для індикаторів множин справедливі наступні властивості:

1. $\forall x\in\Omega\quad I_A(x)=I_B(x)\quad\Leftrightarrow\quad A=B.$

2. $\forall x\in\Omega \quad I_A(x)\le I_B(x) \quad \Leftrightarrow \quad A\subset B.$

3. $\forall x\in\Omega \quad I_A^2(x)=I_A(x).$

4. $\forall x\in\Omega \quad I_{A\cap B}(x)=I_A(x)I_B(x).$

5. $\forall x\in\Omega \quad I_{A\cup B}(x)=I_A(x)+I_B(x)-I_A(x)I_B(x).$

6. $\forall x\in\Omega \quad I_{\overline{A}}(x)=1-I_A(x).$

7. $\forall x\in\Omega \quad I_{A\backslash B}(x)=I_A(x)\big(1-I_B(x)\big).$

8. $\forall x\in\Omega \quad I_{A\vartriangle B}(x)=\left|I_A(x)-I_B(x)\right|.$

9. $\forall x,y\in\Omega \quad I_{A\times B}(x)=I_A(x)I_B(y).$

Властивості 1-8 використовуються для доведення різноманітних тотожностей між множинами.

Приклад 1. Множина А складається з елементів $a=4n+2$, де $n\in\mathbb{N}$, множина B — із елементів $b=3n,\ n\in\mathbb{N}$. Знайти $A\cap B$.

Розв’язання. Нехай $a=b$ — спільний елемент множин A і B. Тоді справедлива рівність

$$4n+2=3n, \text{ де } n,m\in\mathbb{N}.$$

Звідки маємо

$$3n+n+2=3m,$$

$$n+2=3(m-n),$$

отже $n+2$ має ділитися на 3 без остачі. Позначивши різницю $m-n$ через к, маємо

$$n+2=3k,$$

$$n = 3k - 2.$$

Звідки

$$a = 4n + 2 = 4(3k - 2) + 2 = 12k - 6 = 6(2k - 1), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Отже

$$A \cap B = \{6, 18, 30, \ldots, 6(2k-1), \ldots\} = \{12k - 6 \mid k \in \mathbb{N}\}. \quad \square$$

Приклад 2. Довести рівність $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (перший закон двоїстості).

Розв'язання.

I спосіб. Доведемо, що кожний елемент лівої частини рівності є елементом правої. Для довільного $x \in \overline{A \cup B}$ маємо

$$x \in \overline{A \cup B} \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow (x \notin A)\, i\, (x \notin B) \Rightarrow (x \in \overline{A})\, i\, (x \in \overline{B}) \Rightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Отже $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

З іншого боку, для довільного $y \in \overline{A} \cap \overline{B}$ маємо

$$y \in \overline{A} \cap \overline{B} \Rightarrow (y \in \overline{A})\, i\, (y \in \overline{B}) \Rightarrow (y \notin A)\, i\, (y \notin B) \Rightarrow y \notin (A \cup B) \Rightarrow y \in \overline{A \cup B}.$$

Отже $\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.

З отриманих двох включень випливає, що $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}. \quad \square$

II спосіб. Доведемо рівність методом індикаторів. Для цього встановимо тотожність індикаторів лівої та правої частин. Маємо

$$I_{\overline{A \cup B}}(x) = 1 - I_{A \cup B}(x) = 1 - I_A(x) - I_B(x) + I_A(x) I_B(x),$$

$$I_{\overline{A} \cap \overline{B}}(x) = I_{\overline{A}}(x) \cdot I_{\overline{B}}(x) = (1 - I_A(x))(1 - I_B(x)) = 1 - I_A(x) - I_B(x) + I_A(x) I_B(x).$$

Праві частини рівностей однакові, отож

$$\forall x \in \Omega \quad I_{\overline{A\cup B}}(x) = I_{\bar{A}\cap\bar{B}}(x),$$

тобто $\overline{A\cup B} = \bar{A}\cap\bar{B}$. □

Приклад 3. Довести рівність множин

$$A\setminus(B\setminus C) = (A\setminus B)\cup(A\cap C).$$

Розв'язання.

I спосіб. Обчислимо індикатори лівої та правої частин рівності (аргументи x для скорочення записів не пишемо):

$$I_{A\setminus(B\setminus C)} = I_A\left(1 - I_{B\setminus C}\right) = I_A\left(1 - I_B\left(1 - I_C\right)\right) = I_A - I_A I_B + I_A I_B I_C.$$

$$I_{(A\setminus B)\cup(A\cap C)} = I_{A\setminus B} + I_{A\cap C} - I_{(A\setminus B)\cap(A\cap C)} = I_A\left(1 - I_B\right) + I_A I_C - I_A\left(1 - I_B\right) I_A I_C =$$

$$= I_A - I_A I_B + I_A I_C - I_A^2 I_C + I_A^2 I_B I_C = I_A - I_A I_B + I_A I_B I_C$$

в силу рівності $I_A^2 = I_A$.

Праві частини двох останніх рівностей однакові, отже

$$I_{A\setminus(B\setminus C)} \equiv I_{(A\setminus B)\cup(A\cap C)},$$

тобто $A\setminus(B\setminus C) = (A\setminus B)\cup(A\cap C)$. □

II спосіб. Скористаємось відомими фактами алгебри множин. Маємо $A\setminus B = A\cap\bar{B}$, отже

$$A\setminus(B\setminus C) = A\cap\overline{(B\setminus C)} = A\cap\overline{B\cap\bar{C}} = \text{(другий закон двоїстості)} =$$

$$= A\cap\left(\bar{B}\cup\bar{\bar{C}}\right) = A\cap\left(\bar{B}\cup C\right) = \text{(дистрибутивний закон)} =$$

$$= \left(A\cap\bar{B}\right)\cup(A\cap C) = (A\setminus B)\cup(A\cap C). \quad \square$$

Завдання 1

Задати наступні множини через їх елементи:

1. $A = \{x \mid x \in \mathbb{R},\quad x^4 - 3x^3 + 5x^2 = 0\}.$

2. $A = \{x \mid x \in \mathbb{N},\quad x^4 - 3x^3 - 4x^2 \le 0\}.$

3. $A = \{x \mid x \in \mathbb{R},\quad (x^5 - x^2)\sin 2\pi x = 0,\quad -\pi < x < \pi\}.$

4. $A = \{x \mid x \in \mathbb{N},\quad x^4 - 6x^3 + 5x^2 \le 0\}.$

5. $A = \{x \mid x \in \mathbb{R},\quad \sin \pi\sqrt{x} \cdot (x^2 - 3x + 2) = 0,\quad 0 < x < 4\pi\}.$

6. $A = \{x \mid x \in \mathbb{N},\quad x^5 \sin 3x = 0\}.$

7. $A = \left\{x \mid x \in \mathbb{R},\quad x + \dfrac{1}{x} \le 2,\quad x \ne 0\right\}.$

8. $A = \left\{x \mid x \in \mathbb{Z},\quad \dfrac{1}{27} < 3^x \le 81\right\}.$

9. $A = \left\{x \mid x \in \mathbb{N},\quad (x-2)^2 \cos\dfrac{\pi x}{2} = 0\right\}.$

10. $A = \{x \mid x \in \mathbb{R},\quad \operatorname{tg} 2x = 1,\quad 0 < x < 2\pi\}.$

11. $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z},\quad 2^{|x-1|} < 7\}.$

12. $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z},\quad 3^{|x+1|} < 10\}.$

13. $A = \{x \mid x \in \mathbb{R},\quad \operatorname{tg} 2x = -1,\quad 0 < x < 2\pi\}.$

14. $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z},\quad 2^{|x+1|+|x-1|} < 3\}.$

15. $A=\left\{x \mid x\in\mathbb{N},\quad (x-1)^3\cos\dfrac{\pi x}{6}=0\right\}.$

16. $A=\left\{x \mid x\in\mathbb{Z},\quad 2\le\log_2|x|\le 3\right\}.$

17. $A=\left\{x \mid x\in\mathbb{Z},\quad \log_3\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|\le 1,\quad x\ne -1\right\}.$

18. $A=\left\{x \mid x\in\mathbb{R},\quad |\sin 2\pi x|=1,\quad 0<x<2\pi\right\}.$

19. $A=\left\{x \mid x\in\mathbb{R},\quad |\cos 5\pi x|=1,\quad -2\pi<x<2\pi\right\}.$

20. $A=\left\{x \mid x\in\mathbb{N},\quad (x-2)^5\cos\dfrac{3\pi x}{2}=0\right\}.$

21. $A=\left\{x \mid x\in\mathbb{Z},\quad 2^{|x|+|x-1|}<3\right\}.$

22. $A=\left\{x \mid x\in\mathbb{Z},\quad \log_2\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|\le 2\right\}.$

23. $A=\left\{x \mid x\in\mathbb{R},\quad \sin\pi\sqrt[3]{x}\cdot\left(x^4-3x^3+2x^2\right)=0,\quad |x|<100\right\}.$

24. $A=\left\{x \mid x\in\mathbb{R},\quad \mathrm{tg}|2x|=1,\quad -2\pi<x<2\pi\right\}.$

25. $A=\left\{x \mid x\in\mathbb{N},\quad (x-3)^3\sin 4\pi x=0,\quad 0<x<2\pi\right\}.$

Знайти перетин множин $A\cap B$:

26. $A=\left\{x \mid x=4n+1,\, n\in\mathbb{N}\right\},\quad B=\left\{x \mid x=3n,\, n\in\mathbb{N}\right\}.$

27. $A=\left\{x \mid x=4n-1,\, n\in\mathbb{N}\right\},\quad B=\left\{x \mid x=3n,\, n\in\mathbb{N}\right\}.$

28. $A=\left\{x \mid x=4n,\, n\in\mathbb{N}\right\},\quad B=\left\{x \mid x=3n+1,\, n\in\mathbb{N}\right\}.$

29. $A=\left\{x \mid x=4n,\, n\in\mathbb{N}\right\},\quad B=\left\{x \mid x=3n-1,\, n\in\mathbb{N}\right\}.$

30. $A=\{x \mid x=4n+1, n\in\mathbb{N}\}, \quad B=\{x \mid x=3n+1, n\in\mathbb{N}\}.$

Завдання 2

Довести рівності між множинами двома способами: методом двох включень та методом індикаторів:

1. $A\cup(A\cap B)=A=A\cap(A\cup B).$

2. $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C).$

3. $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C).$

4. $A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus(A\cap C).$

5. $(A\setminus C)\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus C.$

6. $(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C).$

7. $(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\cup C).$

8. $A\vartriangle B=(A\cup B)\setminus(A\cap B).$

9. $A\vartriangle(B\vartriangle C)=(A\vartriangle B)\vartriangle C.$

10. $A\cap(B\vartriangle C)=(A\cap B)\vartriangle(A\cap C).$

11. $(A\setminus B)\cap(C\setminus D)=(A\cap C)\setminus(B\cup D).$

12. $\overline{A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n}=\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\ldots\cap\overline{A_n}, \quad n\in\mathbb{N}.$

13. $\overline{A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n}=\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\ldots\cup\overline{A_n}, \quad n\in\mathbb{N}.$

14. $A\cup(B\setminus C)=(A\cup B)\cap(A\cup\overline{C}).$

15. $(A\setminus\overline{B})\cup(\overline{A}\setminus B)=(A\cup\overline{B})\cap(\overline{A}\cup B).$

16. $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$.

17. $(A\setminus B)\cup B=A \quad\Leftrightarrow\quad B\subset A$.

18. $A\cup B\subset C \quad\Leftrightarrow\quad A\subset C \text{ i } B\subset C$.

19. $C\subset A\cap B \quad\Leftrightarrow\quad C\subset A \text{ i } C\subset B$.

20. $A\subset B \quad\Leftrightarrow\quad \overline{B}\subset\overline{A}$.

21. $A\cap B=\varnothing \quad\Leftrightarrow\quad A\subset\overline{B} \quad\Leftrightarrow\quad B\subset\overline{A}$.

22. $A\vartriangle(A\vartriangle B)=B$.

23. $A_1\times B_1\subset A\times B \quad\Leftrightarrow\quad A_1\subset A,\ B_1\subset B$.

24. $A\times B=C\times D \quad\Leftrightarrow\quad A=C,\ B=D$.

25. $(A\times B)\cap(A_1\times B)=(A\cap A_1)\times B$.

26. $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$.

27. $(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$.

28. $(A\times B)\subset(C\times D) \quad\Leftrightarrow\quad A\subset C,\ B\subset D \quad (A,B,C,D\neq\varnothing)$.

29. $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$.

30. $A\times(B\setminus C)=(A\times B)\setminus(A\times C)$.

2. МАТЕМАТИЧНА ІНДУКЦІЯ

Принцип математичної індукції:

Нехай M — така множина, що

1. $1 \in M$;
2. $\forall n \in \mathbb{N} \quad (n \in M) \Rightarrow (n+1 \in M)$.

Тоді $\mathbb{N} \subset M$.

Цей принцип є аксіомою натуральних чисел, а також основою методу математичної індукції.

Метод математичної індукції:

1. Перевіряємо, що деяке твердження справджується для початкового номеру n_0 (база індукції).
2. Припускаємо, що це твердження вірне або для деякого номера n, або для всіх натуральних чисел, починаючи з n_0, які не перевищують n (припущення індукції).
3. Аналізуючи припущення індукції, доводимо, що наше твердження вірне й для наступного номера $n+1$ (індукційний крок).
4. Робимо висновок, що дане твердження вірне для всіх натуральних чисел, починаючи з n_0.

Приклад 1. Методом математичної індукції довести, що для всіх натуральних чисел має місце рівність

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

Доведення.

1. Рівність вірна при $n=1$. Дійсно,

$$1^2=\frac{1}{6}\cdot 1\cdot(1+1)\cdot(2+1).$$

2. Припустимо, що рівність виконується для деякого натурального n.

3. Доведемо рівність для $n+1$, тобто

$$1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3).$$

Дійсно,

$$1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(n+1)^2=$$

$$=\frac{1}{6}(n+1)\left[n(2n+1)+6(n+1)\right]=\frac{1}{6}(n+1)\left(2n^2+7n+6\right)=$$

$$=\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3).$$

Згідно з принципом математичної індукції рівність виконується для всіх натуральних чисел. □

Приклад 2. Довести методом математичної індукції, що число $5\cdot 2^{3n-2}+3^{3n-1}$ ділиться на 19 для будь-якого $n\in\mathbb{N}$.

Доведення.

1. Твердженя вірне при $n=1$. Дійсно,

$$5\cdot 2^{3\cdot 1-2}+3^{3\cdot 1-1}=5\cdot 2+9=19.$$

2. Припустимо, що твердження виконується для деякого натурального n.

3. Доведемо твердження для $n+1$, тобто перевіримо, що вираз $5\cdot 2^{3(n+1)-2}+3^{3(n+1)-1}$ ділиться на 19. Дійсно,

$$5\cdot 2^{3(n+1)-2}+3^{3(n+1)-1}=5\cdot 2^{3n+1}+3^{3n+2}=8\left(5\cdot 2^{3n-2}+3^{3n-1}\right)+3^{3n+2}-8\cdot 3^{3n-1}=$$

$$=8\left(5\cdot 2^{3n-2}+3^{3n-1}\right)+19\cdot 3^{3n-1}$$

Перший доданок ділиться на 19 за припущеннням, другий доданок теж ділиться на 19. Отже твердження має місце для $n+1$.

За принципом математичної індукції твердження виконується для всіх натуральних чисел. □

Приклад 3 (нерівність Бернуллі). Довести, що при $\alpha>-1$ та довільному $n\in\mathbb{N}$

$$(1+\alpha)^n\geq 1+n\alpha.$$

Доведення.

1. Нерівність справджується при $n=1$. Дійсно,

$$(1+\alpha)^1=1+\alpha.$$

2. Припустимо, що нерівність виконується для деякого натурального n.

3. Доведемо нерівність для $n+1$, тобто

$$(1+\alpha)^{n+1}\geq 1+(n+1)\alpha.$$

$$(1+\alpha)^{n+1}=(1+\alpha)(1+\alpha)^n\geq(1+\alpha)(1+n\alpha)=1+\alpha+n\alpha+n\alpha^2=$$

$$=1+(1+n)\alpha+n\alpha^2\geq 1+(1+n)\alpha.$$

Таким чином, нерівність доведена для всіх натуральних чисел. □

Завдання 1

Довести методом математичної індукції рівності:

1. $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2, \quad n\in\mathbb{N}.$

2. $1\cdot 2+2\cdot 5+\ldots+n\cdot(3n-1)=n^2\cdot(n+1), \quad n\in\mathbb{N}.$

3. $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\dfrac{1}{3}n\cdot\left(4n^2-1\right), \quad n\in\mathbb{N}.$

4. $1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+(n-1)\cdot n=\dfrac{1}{3}\left(n^3-n+6\right), \quad n\geq 2.$

5. $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}, \quad n\in\mathbb{N}.$

6. $1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{n-1}=2^n-1, \quad n\in\mathbb{N}.$

7. $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}, \quad n\in\mathbb{N}.$

8. $\dfrac{1}{1\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 9}+\dfrac{1}{9\cdot 13}+\ldots+\dfrac{1}{(4n-3)\cdot(4n+1)}=\dfrac{n}{4n+1}, \quad n\in\mathbb{N}.$

9. $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(3k-1)\cdot(3k+2)}=\dfrac{n}{2(3n+2)}, \quad n\in\mathbb{N}.$

10. $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(3k+1)\cdot(3k+4)}=\dfrac{n}{4(3n+4)}, \quad n\in\mathbb{N}.$

11. $1\cdot 2+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\ldots+n\cdot 2^n=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2, \quad n\in\mathbb{N}.$

12. $\dfrac{1^2}{1\cdot 3}+\dfrac{2^2}{3\cdot 5}+\dfrac{3^2}{5\cdot 7}+\ldots+\dfrac{n^2}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}, \quad n\in\mathbb{N}.$

13. $1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n+1}n^2=(-1)^{n+1}\dfrac{n(n+1)}{2}, \quad n\in\mathbb{N}.$

14. $1\cdot 1!+2\cdot 2!+\ldots+n\cdot n!=(n+1)!-1, \quad n\in\mathbb{N}.$

15. $1\cdot 4+2\cdot 7+\ldots+n\cdot(3n+1)=n\cdot(n+1)^2, \quad n\in\mathbb{N}.$

16. $\frac{1}{2\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 12}+\ldots+\frac{1}{(5n-3)\cdot(5n+2)}=\frac{n}{10n+4}, \quad n\in\mathbb{N}.$

17. $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\ldots+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}, \quad n\in\mathbb{N}.$

18. $\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{k^2\cdot(k+1)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}, \quad n\in\mathbb{N}.$

19. $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{n+2}{2n+2}, \quad n\in\mathbb{N}.$

20. $1+3+6+10+\ldots+\frac{(n-1)n}{2}+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}, \quad n\in\mathbb{N}.$

21. $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}, \quad n\in\mathbb{N}.$

22. $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}, \quad n\in\mathbb{N}.$

23. $1\cdot 3+2\cdot 5+\ldots+n\cdot(2n+1)=\frac{n(n+1)(4n+5)}{3}, \quad n\in\mathbb{N}.$

24. $5+9\cdot 5+13\cdot 5^2+\ldots+(4n+1)\cdot 5^{n-1}=n\cdot 5^n, \quad n\in\mathbb{N}.$

25. $4\cdot 2+7\cdot 2^3+\ldots+(3n+1)\cdot 2^{2n-1}=n\cdot 2^{2n+1}, \quad n\in\mathbb{N}.$

26. $1+6+\ldots+(2n-1)\cdot 2^{n-1}=3+2^n\cdot(2n-3), \quad n\in\mathbb{N}.$

27. $\left(1-\frac{4}{1}\right)\left(1-\frac{4}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{4}{(2n-1)^2}\right)=\frac{1+2n}{1-2n}, \quad n\in\mathbb{N}.$

28. $\dfrac{1\cdot 4}{2\cdot 3}+\dfrac{2\cdot 5}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{n(n+1)}{n+2},\quad n\in\mathbb{N}.$

29. $\dfrac{1}{1^2\cdot 3^2}+\dfrac{2}{3^2\cdot 5^2}+\ldots+\dfrac{n}{(2n-1)^2\cdot(2n+1)^2}=\dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)^2},\quad n\in\mathbb{N}.$

30. $\dfrac{1\cdot 2^1}{3!}+\dfrac{2\cdot 2^2}{4!}+\ldots+\dfrac{n\cdot 2^n}{(n+2)!}=1-\dfrac{2^{n+1}}{(n+2)!},\quad n\in\mathbb{N}.$

Завдання 2

Довести методом математичної індукції, що для всіх натуральних n

1. n^5-5n^3+4n ділиться на 15.
2. 5^n+2^{n+1} ділиться на 3.
3. $2^{4n+1}-2$ ділиться на 30.
4. $2n^3+3n^2+7n$ ділиться на 6.
5. n^5-n ділиться на 5.
6. n^3+35n ділиться на 6.
7. $7^{2n}-1$ ділиться на 24.
8. n^3+5n ділиться на 6.
9. 13^n+5 ділиться на 6.
10. 15^n+6 ділиться на 7.
11. 9^n+3 ділиться на 4.
12. 7^n+3n-1 ділиться на 9.
13. $5^n+2\cdot 3^n+5$ ділиться на 4.

14. $5^n - 3^n + 2n$ ділиться на 4.

15. $7^n + 5$ ділиться на 6.

16. $3 \cdot 3^n + 2n^2 - 3$ ділиться на 8.

17. $7^n + 12n + 17$ ділиться на 18.

18. $2^{2n+1} + 1$ ділиться на 3.

19. $4^n + 15n - 1$ ділиться на 9.

20. $10^{n+2} + 18n + 8$ ділиться на 27.

21. $6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$ ділиться на 11.

22. $n^3 + 11n$ ділиться на 6.

23. $7^n - 6n + 8$ ділиться на 9.

24. $6^n + 20n + 24$ ділиться на 25.

25. $3^{2n+2} - 8n - 9$ ділиться на 16.

26. $8^n + 7n - 1$ ділиться на 7.

27. $7^n - 4^n$ ділиться на 3.

28. $n^3 + 2 \cdot 3^n - n$ ділиться на 6.

29. $7^n - 3 \cdot 5^n + 8$ ділиться на 6.

30. $5^n - 4^n + 4 \cdot 3^n - 1$ ділиться на 4.

Завдання 3

Довести методом математичної індукції нерівності:

1. $2! \cdot 4! \cdot \ldots \cdot (2n)! \geq \left((n+1)!\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$

2. $\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} > \frac{n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$

3. $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}, \quad n \geq 2.$

4. $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$

5. $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$

6. $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}, \quad n \geq 2.$

7. $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2, \quad n \in \mathbb{N}.$

8. $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$

9. $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$

10. $\sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k} \leq n, \quad n \in \mathbb{N}.$

11. $3^n > 2^n + 3n, \quad n \geq 3.$

12. $\sum_{k=n+1}^{3n+1} \frac{1}{k} > 1, \quad n \in \mathbb{N}.$

13. $\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} < \frac{5n-2}{2n}, \quad n \in \mathbb{N}.$

14. $\frac{4^n}{n+1} \leq \frac{(2n)!}{(n!)^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$

15. $4^n > 3^n + 2^n, \quad n \geq 2.$

16. $n! > 2^n, \quad n \geq 4.$

17. $3^n + 4^n \leq 5^n, \quad n \geq 2.$

18. $1 + (n+1) \cdot 2^n > 2^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$

19. $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \geq \frac{1}{2\sqrt{n}}, \quad n \in \mathbb{N}.$

20. $3^n - 2^n \geq n, \quad n \in \mathbb{N}.$

21. $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2\left(\sqrt{n+1} - 1\right), \quad n \geq 2.$

22. $n^{n+1} > (n+1)^n, \quad n \geq 3.$

23. $(1+1)\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$

24. $\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \geq 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$

25. $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^n+1} < 1 - \frac{1}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$

26. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} > \frac{2n}{n+1}, \quad n \geq 2.$

27. $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} > \frac{3n}{2n+1}, \quad n \geq 2.$

28. $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{n} > n, \quad n \geq 2.$

29. $\sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{2k+1} < \frac{n}{2}, \quad n \geq 2.$

30. $5^n + 12^n \leq 13^n, \quad n \geq 2.$

3. БІНОМ НЬЮТОНА

Факторіалом натурального числа n називається добуток

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

За означенням приймають, що $0! = 1$.

Теорема 1. Кількість усіх k-елементних підмножин множини з n елементів (кількість комбінацій з n елементів по k), яка позначається C_n^k, дорівнює

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Теорема 2 (біном Ньютона). Для будь-яких дійсних чисел a і b та для довільного натурального числа n

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

Зауважимо, що також

$$(a+b)^n = (b+a)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k b^k a^{n-k}.$$

Числа C_n^k називаються біноміальними коефіцієнтами.

Властивості біноміальних коефіцієнтів:

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$.
2. $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$.

Друга властивість дозволяє записати біноміальні коефіцієнти у вигляді так званого трикутника Паскаля, де в n-ому рядку стоять коефіцієнти розкладу $(a+b)^n$. Кожний коефіцієнт за винятком крайніх, які рівні одиниці, дорівнює сумі коефіцієнтів над ним з попереднього рядка.

$$\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\ 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\ 1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \end{array}$$

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$C_{x+1}^{x-1} + C_x^{x-2} = 9x + 10.$$

Розв'язання.

$$\frac{(x+1)!}{(x-1)!2!} + \frac{x!}{(x-2)!2!} = 9x + 10,$$

$$\frac{x(x+1)}{2} + \frac{x(x-1)}{2} = 9x + 10,$$

$$x^2 + x + x^2 - x = 18x + 20,$$

$$2x^2 - 18x - 20 = 0,$$

$$x^2 - 9x - 10 = 0.$$

Останнє рівняння має два розв'язки, а саме $x = -1$ та $x = 10$. Проте розв'язок $x = -1$ є стороннім.

Відповідь: $x = 10$. □

Приклад 2. Довести, що

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n.$$

Доведення.

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n. \qquad \square$$

Приклад 3. Довести, що

$$C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + nC_n^n = n2^{n-1}.$$

Доведення.

$$C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + nC_n^n = \sum_{k=0}^{n} k\, C_n^k = \sum_{k=0}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} = \sum_{k=1}^{n} n \frac{(n-1)!}{(k-1)!\big(n-1-(k-1)\big)!} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} n \frac{(n-1)!}{i!(n-1-i)!} = n \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i = n2^{n-1}. \qquad \square$$

Завдання 1

1. Розв’язати рівняння

$$C_{x+2}^4 = x^2 - 1.$$

2. Знайти член розкладу

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)^{10},$$

   що не містить x.

3. Знайти член розкладу

$$\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x}\right)^{8},$$

   що не містить x.

4. Розв’язати рівняння

$$\frac{1}{C_4^x}-\frac{1}{C_5^x}=\frac{1}{C_6^x}.$$

5. Знайти члени розкладу

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}\right)^5,$$

які є цілими числами.

6. Знайти члени розкладу

$$\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt{2}\right)^8,$$

які є цілими числами.

7. Довести, що $C_n^{k+1}>C_n^k$ при $k<\dfrac{n-1}{2}$ та $C_n^{k+1}<C_n^k$ при $k>\dfrac{n-1}{2}$.

8. Скільки раціональних членів містить розклад

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt[4]{3}\right)^{100}?$$

9. Знайти число n, якщо відомо, що в розкладі $\left(1+x\right)^n$ коефіцієнти при x^5 та x^{12} рівні.

10. Довести, що

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot\frac{1}{k+1}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

11. Довести, що

$$\sum_{k=0}^{n}\left(-1\right)^{k-1}k\,C_n^k=0.$$

12. Розв’язати рівняння

$$C_x^1+6C_x^2+6C_x^3=9x^2-14x.$$

13.Розв’язати рівняння

$$C_{x+1}^{x-2}+2C_{x-1}^3=7\left(x-1\right).$$

14.Довести, що при довільному натуральному k сума

$$C_{n+k}^2+C_{n+k+1}^2$$

є точним квадратом.

15.Розв’язати рівняння

$$5C_x^3=C_{x+2}^4.$$

16.Розв’язати рівняння

$$C_x^3+C_x^2=15\left(x-1\right).$$

17.Довести, що

$$\sum_{k=2}^{n}k\left(k-1\right)C_n^k=n\left(n-1\right)2^{n-2},\quad n\geq 2.$$

18.Розв’язати рівняння

$$C_x^3-C_x^2=x-1.$$

19.Знайти кількість раціональних членів в розкладі

$$\left(\sqrt[3]{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{20},$$

не виписуючи ірраціональних членів.

20.Розв’язати рівняння

$$C_x^4+\frac{1}{3}C_x^2=C_x^3.$$

21.Розв’язати рівняння

$$6C_x^4=C_x^2\cdot C_{x-1}^3.$$

22.Довести, що

$$\sum_{k=1}^{n-1}k\left(n-k\right)C_n^k=n\left(n-1\right)2^{n-2},\quad n\geq 2.$$

23.Розв’язати рівняння

$$7C_{x+1}^3\cdot C_x^2=8C_{x+1}^2\cdot C_x^3.$$

24.Довести, що

$$n\left(C_{2n}^n-C_{2n}^{n+1}\right)=C_{2n}^{n+1}.$$

25.Знайти член розкладу

$$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^n,$$

який містить x у першому степені, якщо сума всіх біноміальних коефіцієнтів дорівнює 512.

26.Довести, що

$$C_n^k+3C_n^{k-1}+3C_n^{k-2}+C_n^{k-3}=C_{n+3}^k.$$

27.Довести, що

$$C_n^k+2C_n^{k+1}+C_n^{k+2}=C_{n+2}^{k+2}.$$

28.Довести, що

$$C_n^0 + 2C_n^1 + \ldots + (n+1)C_n^n = (n+2)2^{n-1}.$$

29.Обчислити

$$\frac{C_{21}^4}{C_9^3 + C_{19}^4 + C_{20}^3}.$$

30.Обчислити

$$\frac{C_{15}^8 + 2C_{15}^9 + C_{15}^{10}}{C_{17}^{10}}.$$

4. ТОЧНІ ВЕРХНЯ І НИЖНЯ МЕЖІ ЧИСЛОВИХ МНОЖИН

Розглянемо числову множину $X \in \mathbb{R}$. Якщо існує $a \in \mathbb{R}$ таке, що для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ має місце нерівність $x \leq a$, то множина X називається обмеженою зверху, а число a — верхнею межею множини X. Аналогічно, якщо $b \in \mathbb{R}$ таке, що для будь-якого $x \in X$ має місце нерівність $x \geq b$, то множина X називається обмеженою знизу, а число b — нижня межа множини X.

Число $A \in \mathbb{R}$, яке є найменшим серед усіх верхніх меж множини X, називається точною верхнею межею множини X: $A = \sup X$. Число $B \in \mathbb{R}$, яке є найбільшим серед усіх нижніх меж множини X, називається точною нижнею межею множини X: $B = \inf X$.

Теорема (Про існування точних меж) Непорожня обмежена зверху(знизу) множина дійсних чисел має точну верхню (нижню) межу.

Теорема (Критерій існування точних меж) Число $A = \sup X$ тоді і тільки тоді, коли:

1) A є верхня межа X, тобто $\forall x \in X: \quad x \leq A$;

2) для довільного числа $a < A$ існує $x' \in X$ таке, що $x' > a$.

Для того, щоб число $B = \inf X$ необхідно і достатньо, щоб:

1) B є нижня межа X, тобто $\forall x \in X: \quad x \geq B$;

2) для довільного числа $b > B$ існує $x' \in X$ таке, що $x' < b$.

Приклад 1. Знайти точні межі множини

$$X = \left\{ x_n : \ x_n = n^2 + \frac{4}{n^2} \right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Зауважимо, що для $\forall n \in \mathbb{N}$ справедлива нерівність

$$x_{n+1}-x_n=(n+1)^2+\frac{4}{(n+1)^2}-n^2-\frac{4}{n^2}=(2n+1)\frac{(n+1)^2n^2-4}{(n+1)^2n^2}\geq 0.$$

Тобто

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad x_n<x_{n+1}.$$

З іншої сторони, для

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad x_n=n^2+\frac{4}{n^2}>n^2>n.$$

Таким чином, множина X обмежена знизу числом $x_1=5,$ яке співпадає з $\inf X=5$ і необмежена зверху, тобто $\sup X=+\infty.$

Приклад 2. Знайти точні межі множини

$$X=\left\{x_n:\ x_n=1+2^{(-1)^n n}\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Для всіх парних значень $n=2k$ справджуються оцінки

$$x_{2k}=1+2^{2k}>2^{2k}>2k.$$

Таким чином, можна стверджувати, що множина X необмежена зверху, отже $\sup X=+\infty.$

Для всіх непарних значень $n=2k-1$ виконується нерівність

$$x_{2k}=1+\frac{1}{2^{2k-1}}>1.$$

Покажемо, що $\inf X=1.$ Згідно з критерієм існування точної нижньої межі, для цього досить показати, що

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists n\in\mathbb{N}\quad x_n<1+\varepsilon.$$

Дійсно, замість x_n можна взяти довільний елемент множини з непарним номером $n = 2k - 1$ такий, що $x_n < 1 + \varepsilon$ і $\varepsilon > \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{2k-1}}$. Знайдемо k.

$$\log_2 \varepsilon > -\log_2 2^{2k-1} \Rightarrow -\log_2 \varepsilon < \log_2 2^{2k-1} \Rightarrow 2k - 1 > -\log_2 \varepsilon \Rightarrow k > \frac{1 + \log_2 \varepsilon}{2}.$$

Таким чином, $\inf X = \inf x_n = 1$.

Завдання 1

Знайти точні межі множини $X = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

1. $x_n = (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{100 + n}$.
2. $x_n = n^2 - 9n - 100$.
3. $x_n = n + \frac{100}{n}$.
4. $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2}$.
5. $x_n = (-1)^n \left(2 + \frac{3}{n}\right)$.
6. $x_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{\pi n}{2}$.
7. $x_n = 1 + 2 \cdot (-1)^{n-1} + 3 \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.
8. $x_n = \frac{n-1}{n+1} \cos \frac{2\pi n}{3}$.
9. $x_n = \frac{n}{n+1} \sin^2 \frac{\pi n}{4}$.
10. $x_n = n^{(-1)^n}$.
11. $x_n = \frac{n-1}{n+2} \cos^2 \frac{\pi n}{2}$.

12. $x_n = (-1)^n \left(1 + \frac{2}{n}\right).$

13. $x_n = (-1)^{n-1} \left(1 + \frac{2}{n}\right).$

14. $x_n = n^2 - 2n + 3.$

15. $x_n = \frac{n}{n+1} \sin \frac{\pi n}{2}.$

16. $x_n = \frac{n}{n+1} \cos \pi n.$

17. $x_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}.$

18. $x_n = n + \frac{25}{n}.$

19. $x_n = (n!)^{(-1)^n}.$

20. $x_{mn} = \frac{mn}{4m^2 + n^2}, \quad m, n \in \mathbb{N}.$

21. $x_n = 3 - \frac{1}{n} \sin^2 \frac{\pi n}{3}.$

22. $x_n = \frac{3+n}{2n} \sin \frac{\pi n}{2}.$

23. $x_n = \frac{5-n}{n} \cos \frac{\pi n}{2}.$

24. $x_{mn} = \frac{m}{|m| + n}, \quad m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}.$

25. $x_n = \frac{n+2}{2n+1} \sin \frac{\pi n}{3}.$

26. $x_n = (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{2n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$

27. $x_n = \dfrac{n+1}{n+2}\sin\dfrac{\pi n}{2}.$

28. $x_n = \dfrac{8m}{n} + \dfrac{n}{2m}, \quad n, m \in \mathbb{N}.$

29. $x_n = \dfrac{n}{3n+5}\operatorname{sgn}(\sin n).$

30. $x_n = \dfrac{n}{2n+3}\operatorname{sgn}(\sin n).$

5. ГРАНИЦЯ ПОСЛІДОВНОСТІ

Відображення множини натуральних чисел у множину дійсних чисел називається числовою послідовністю, тобто $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, при цьому пишуть $f(n)=x_n$. Вживають також позначення: $\{x_1,x_2,\ldots\}=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}=\{x_n : n\geq 1\}$.

Число x_n називають членом послідовності, а n — номером цього члена. Послідовність $\{x_n\}$ називається обмеженою, якщо множина $X=\{x_1,x_2,\ldots\}$ обмежена. Тобто $\exists M>0$ таке, що

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad |x_n|\leq M .$$

Послідовність x_n необмежена, якщо множина $X=\{x_1,x_2,\ldots\}$ необмежена, або

$$\forall M>0 \quad \exists n\in\mathbb{N} \quad |x_n|>M.$$

<u>Означення </u>(границі послідовності за Коші)

Число a називається границею послідовності $\{x_n\}$, якщо

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N} \quad \forall n>n_0 \quad |x_n-a|<\varepsilon.$$

При цьому записують $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ або $x_n\to a$ при $n\to\infty$.

З геометричної точки зору це означає, що довільний ε-окіл точки a

$$B(\varepsilon,a)=\{x:|x-a|<\varepsilon\}$$

містить безліч членів послідовності, а зовні цього околу лежить хіба що скінченне число членів послідовності.

Послідовність, яка має скінченну границю називається збіжною, і розбіжною в протилежному випадку.

<u>Означення </u>(фундаментальної послідовності).

Послідовність $\{x_n\}$ називається фундаментальною, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0 \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \left| x_n - x_{n+p} \right| < \varepsilon.$$

Теорема. (Критерій Коші збіжності послідовності).

Для того, щоб послідовність була збіжною необхідно і достатньо, щоб вона була фундаментальною.

Зауваження. При розв'язанні наступних задач часто буде використовуватися поняття цілої частини числа x, що позначається $[x] = E(x)$ – найбільше ціле число, яке не перевищує x.

Приклад1. Користуючись означенням границі послідовності за Коші довести, що $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5 \cdot 3^n}{3^n - 2} = 5.$

Виберемо довільне $\varepsilon > 0$ і розглянемо модуль різниці між n-им членом послідовності і числом $a = 5$:

$$\left| \frac{5 \cdot 3^n}{3^n - 2} - 5 \right| = \frac{10}{3^n - 2}.$$

Згідно з означенням границі послідовності ми повинні вказати номер n_0 (залежний від ε) такий, що $\forall n > n_0$ виконується нерівність

$$\frac{10}{3^n - 2} < \varepsilon \Leftrightarrow \log_3 \left(\frac{10}{\varepsilon} + 2 \right) < n.$$

Для того, щоб вказати номер n_0 досить взяти цілу частину числа $\log_3 \left(\dfrac{10}{\varepsilon} + 2 \right)$, тобто $n_0 = \left[\log_3 \left(\dfrac{10}{\varepsilon} + 2 \right) \right]$. Дійсно, якщо $n > n_0$, то

$$n \geq \left[\log_3 \left(\frac{10}{\varepsilon} + 2 \right) \right] + 1 > \log_3 \left(\frac{10}{\varepsilon} + 2 \right).$$

Таким чином, для довільного $\varepsilon > 0$ існує номер $n_0 = \left[\log_3\left(\frac{10}{\varepsilon} + 2\right)\right]$ такий, що для всіх номерів $n > n_0$ виконується нерівність $\left|\frac{5 \cdot 3^n}{3^n - 2} - 5\right| < \varepsilon.$

Приклад 2. Користуючись критерієм Коші довести збіжність послідовності $\{x_n\}$, де $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{k^2}.$

Згідно з критерієм Коші збіжності послідовності досить показати, що послідовність є фундаментальною. Оцінимо $\left|x_n - x_{n+p}\right| = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\sin k}{k^2}.$

Оскільки

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k},$$

то

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^2} \le$$
$$\le \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right) =$$
$$= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}\right) < \frac{1}{n}.$$

Таким чином для довільних $n, p \in \mathbb{N}$ маємо $\left|x_n - x_{n+p}\right| < \frac{1}{n}.$

Виберемо довільне $\varepsilon > 0$ і за n_0 виберемо цілу частину числа $\frac{1}{\varepsilon}$, тобто $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$. Тоді для всіх

$$n \geq \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$$

маємо $\frac{1}{n} < \varepsilon.$ Отже для довільного $n > n_0$ і довільного $p \in \mathbb{N}$ виконується нерівність

$$\left|x_n - x_{n+p}\right| < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Приклад 3. Користуючись критерієм Коші довести, що послідовність $\{x_n\}$, де $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ є розбіжною.

Доведемо, що послідовність не є фундаментальною.

Розглянемо

$$\left|x_n - x_{n+p}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{\sqrt{k}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+p}} \geq \frac{p}{\sqrt{n+p}}.$$

Кожен з доданків оцінено найменшим за величиною останнім доданком.

Покладемо $n = p \in \mathbb{N}$, тоді

$$\left|x_n - x_{2n}\right| \geq \frac{n}{\sqrt{2n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Остання оцінка показує, що при $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}$ яке б не було $n_0 \in \mathbb{N}$, для всіх $n > n_0$ і виконується нерівність $\left|x_n - x_{2n}\right| \geq \varepsilon,$ тобто послідовність не є фундаментальною, а отже є розбіжною.

Послідовність $\{x_n\}$ називається нескінченно малою (НМ), якщо

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Послідовність $\{x_n\}$ називається нескінченно великою (НВ), якщо

$$\forall M > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0 \quad |x_n| > M.$$

При цьому записують

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

При розв'язуванні задач використовуються наступні властивості НМ, НВ, а також збіжних послідовностей:

1. Алгебраїчна сума скінченного числа НМ послідовностей є НМ послідовність
2. Добутком НМ послідовності на обмежену послідовність є НМ послідовність
3. Якщо $\{x_n\}$ — НВ (НМ) послідовність, а також $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \neq 0$, то послідовність $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ є НМ(НВ) послідовністю. Зокрема, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ тощо.
4. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ і $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то
   a) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = a + b$;

   b) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b$;

   c) якщо $b \neq 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$$

Наведемо також три теореми.

Теорема 1 (про проміжну послідовність). Якщо

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = a$$

і, починаючи з певного номера, виконується нерівність $x_n \le z_n \le y_n$, тоді

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a.$$

Теорема (Штольца). Якщо послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ і $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ задовольняють умовам:

1) $y_n < y_{n+1}, \quad n \ge 1;$
2) $y_n \to \infty, n \to \infty;$
3) $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a$ (значення a може дорівнювати ∞).

Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = a.$

Теорема (друга важлива границя).

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

де e — це деяке число, яке наближено дорівнює

$$e \approx 2,718281828459045\ldots$$

Приклад 5 . Обчислити

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\cos n}{n+1}.$$

Послідовність $\{\cos n\}_{n=1}^{\infty}$ обмежена, а оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n+1} = 0,$ то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\cos n}{n+1}=0.$$

Приклад 6. Обчислити $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, де

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}.$$

Запишемо оцінку

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2}}=1.$$

Оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=1,$$

то згідно з теоремою про проміжну послідовність $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1.$

Приклад 7. Обчислити

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^m+2^m+\ldots+n^m}{n^{m+1}},\quad m\in\mathbb{N}.$$

Застосуємо теорему Штольца, зауваживши, що $\left\{y_n=n^{m+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ монотонно зростає для $m\in\mathbb{N}$ і $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\infty$. При цьому

$$x_n-x_{n-1}=\left(1^m+2^m+\ldots+n^m\right)-\left(1^m+2^m+\ldots+(n-1)^m\right)=n^m$$

і

$$y_n - y_{n-1} = n^{m+1} - (n-1)^{m+1} =$$

$$= \left(n - (n-1)\right) \cdot \left(n^m + n^{m-1}(n-1) + \ldots + (n-1)^m\right) =$$

$$= n^m \left(1 + \frac{n-1}{n} + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^m\right).$$

За теоремою Штольца

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{1}{m+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}.$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^m + 2^m + \ldots + n^m}{n^{m+1}} = \frac{1}{m+1}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Приклад 8. Обчислити

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n}, \text{ де } \alpha > 0, \ a > 1.$$

Оскільки α-фіксоване, то існує натуральне число k таке, що $k-1 \le \alpha < k$. Розглянемо послідовність $a^{\frac{n}{k}}$ і застосуємо для неї нерівність Бернуллі.

$$a^{\frac{n}{k}} = \left(a^{\frac{1}{k}}\right)^n = (1+x)^n \ge 1 + nx,$$

де $x = \sqrt[k]{a} - 1 > 0$. Звідси $a^n > (nx)^k$. Тоді

$$\frac{n^\alpha}{a^n} < \frac{n^{k-1}}{a^n} < \frac{n^{k-1}}{n^k x^k} = \frac{1}{n \cdot x^k}.$$

Розглянемо довільне $\varepsilon > 0$. Розв'яжемо нерівність $\frac{1}{n \cdot x^k} < \varepsilon$ відносно n. Одержимо $n > \frac{1}{\varepsilon \cdot x^k}$. Таким чином,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon \cdot x^k} \right] \quad \forall n > n_0 \quad \frac{n^\alpha}{a^n} < \varepsilon.$$

За означенням границі послідовності це означає, що

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0.$$

Приклад 9. Обчислити

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a^n}{n!}, \text{ де } a > 1.$$

Для фіксованого $a > 1$ існує натуральне число k таке, що $k \le a < k+1$. Тоді

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a^k}{k!} \cdot \frac{a}{k+1} \cdot \frac{a}{k+2} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{n}, \text{ де } n > k.$$

Звідси одержуємо, що

$$\frac{a^n}{n!} < \frac{a^k}{k!} \cdot \left(\frac{a}{k+1} \right)^{n-k}.$$

Оскільки $\frac{a}{k+1} < 1$, то

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{a}{k+1} \right)^{n-k} = 0.$$

Відповідь: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$

Приклад 10. Обчислити

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\ln n}{n}.$$

Для довільного $\varepsilon > 0$ нерівність $\frac{\ln n}{n} < \varepsilon$ еквівалетна нерівності $\frac{n}{\left(e^{\varepsilon}\right)^n} < 1,$ що виконується для досить великих номерів n, оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\left(e^{\varepsilon}\right)^n} = 0,$ як показано в прикладі 8.

Відповідь: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0.$

Приклад 11. Обчислити $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}.$

Розглянемо n чисел:

$$a_1 = a_2 = \sqrt{n}, \quad a_3 = a_4 = \ldots = a_n = 1.$$

Запишемо для них нерівність Коші

$$\sqrt[n]{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1} \le \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n} + 1 + 1 + \ldots + 1}{n}.$$

Звідси одержимо, що

$$0 < \sqrt[n]{n} \le \frac{2\sqrt{n} + n - 2}{n} \le \frac{2\sqrt{n} + n}{n} = 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} \to 0, \quad n \to \infty.$$

За теоремою про проміжну послідовність одержимо, що $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

Відповідь: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

Завдання 1

Користуючись означенням границі послідовності за Коші довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a.$

1. $x_n = \dfrac{3n^2 - 2}{2n^2 - 3}, \quad a = \dfrac{3}{2}.$

2. $x_n = \dfrac{5n + 4}{2n + 3}, \quad a = \dfrac{5}{2}.$

3. $x_n = \dfrac{4n^2 - 1}{2n^2 + 1}, \quad a = 2.$

4. $x_n = \dfrac{2n - 5}{3n + 1}, \quad a = \dfrac{2}{3}.$

5. $x_n = \dfrac{7n^3 - 1}{3n^3 + 1}, \quad a = \dfrac{7}{3}.$

6. $x_n = \dfrac{9 - n^3}{2n^3 + 1}, \quad a = -\dfrac{1}{2}.$

7. $x_n = \dfrac{4n^2 + 1}{3n^2 + 2}, \quad a = \dfrac{4}{3}.$

8. $x_n = \dfrac{4n^2 - 3}{2n^2 + 1}, \quad a = 2.$

9. $x_n = \dfrac{1 - 2n^2}{4n^2 + 2}, \quad a = -\dfrac{1}{2}.$

10. $x_n = \dfrac{3n^3 - 1}{2n^3 + 1}, \quad a = \dfrac{3}{2}.$

11. $x_n = \dfrac{n^2 + 1}{1 - 2n^2}, \quad a = -\dfrac{1}{2}.$

12. $x_n = \dfrac{2n^3 + 1}{3n^3 - 5}, \quad a = \dfrac{2}{3}.$

13. $x_n = \dfrac{1 - 2n^2}{n^2 + 3}, \quad a = -2.$

14. $x_n = \dfrac{3n^2}{2 - n^2}, \quad a = -3.$

15. $x_n = \dfrac{n^2}{3n^2 - 1}, \quad a = \dfrac{1}{3}.$

16. $x_n = \dfrac{3n^3}{n^3 - 1}, \quad a = 3.$

17. $x_n = \dfrac{4 + 2n^2}{1 - 3n^2}, \quad a = -\dfrac{2}{3}.$

18. $x_n = \dfrac{5n^3 + 15}{6 - 2n^3}, \quad a = -\dfrac{5}{2}.$

19. $x_n = \dfrac{3 - n^2}{1 + 2n^2}, \quad a = -\dfrac{1}{2}.$

20. $x_n = \dfrac{2n - 1}{2 - 3n}, \quad a = -\dfrac{2}{3}.$

21. $x_n = \dfrac{3n^2 + 1}{5n^2 + 1}, \quad a = \dfrac{3}{5}.$

22. $x_n = \dfrac{4n^3 - 3}{n^3 + 1}, \quad a = 4.$

23. $x_n = \dfrac{1 - 2n^2}{2 + 4n^2}, \quad a = -\dfrac{1}{2}.$

24. $x_n = \dfrac{5n^2 + 1}{10n^2 - 3}, \quad a = \dfrac{1}{2}.$

25. $x_n = \dfrac{2 - 2n^3}{3 + 4n^3}, \quad a = -\dfrac{1}{2}.$

26. $x_n = \dfrac{3 - 4n^2}{2 - 3n^2}, \quad a = \dfrac{4}{3}.$

27. $x_n = \dfrac{1+3n^2}{6-2n^2}, \quad a = -\dfrac{3}{2}.$

28. $x_n = \dfrac{2n^3+3}{3n^3+5}, \quad a = \dfrac{2}{3}.$

29. $x_n = \dfrac{3n^2+2}{4n^2-1}, \quad a = \dfrac{3}{4}.$

30. $x_n = \dfrac{2-3n^2}{4+5n^2}, \quad a = -\dfrac{3}{5}.$

Завдання 2

Користуючись критерієм Коші збіжності послідовності, довести збіжність наступних послідовностей $\{x_n\}$, або користуючись запереченням критерію Коші збіжності послідовності, довести розбіжність послідовності $\{x_n\}$.

1. $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k!}.$

2. $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\cos(k!)}{k(k+1)}.$

3. $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\sin k}{2^k}.$

4. $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\cos k}{2^k}.$

5. $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)}.$

6. $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k q^k$, де $|q|<1$, $|a_k| \le c$.

7. $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$

8. $x_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\ln k}.$

9. $x_n = 0,2^{(-1)^n n}.$

10. $x_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$

11. $x_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n.$

12. $x_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)^2}.$

13. $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$

14. $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$

15. $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos k}{k(k+2)}.$

16. $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k!)}{k(k+3)}.$

17. $x_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}.$

18. $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$

19. $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$

20. $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)^2}.$

21. $x_n = \sum_{k=1}^{n} a_k q^k$, де $|q| > 1$, $|a_k| > M$.

22. $e^{(-1)^n n}.$

23. $x_n = \sum_{k=2n}^{3n} \frac{1}{k}.$

24. $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}.$

25. $x_n = \frac{n\cos(\pi n) - 1}{2n}.$

26. $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \operatorname{arctg} k.$

27. $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \arccos \frac{1}{k^2}.$

28. $x_n = \sin n.$

29. $x_n = \cos n.$

30. $x_n = \operatorname{tg} n.$

Завдання 3

Знайти границю:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+2)!-n(n+1)!}{(n+3)!}.$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!}.$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+3+\ldots+(2n-1)}{n+1}-\dfrac{2n+1}{2}\right).$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\ldots+n}{\sqrt{9n^4+1}}.$

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+\ldots+(2n-1)}{\sqrt{4n^4+3}}.$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+\ldots+(2n-1)}{1+2+\ldots+n}.$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+3+\ldots+(2n-1)}{n+3}-n.\right)$

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+4+\ldots+(3n-2)}{\sqrt{5n^4+n+1}}-n\right).$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+4)!-(n+2)!}{(n+3)!}.$

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n-1)!+(3n+1)!}{(3n)!\cdot(n-1)}.$

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^2\left(2^{-1}+2^{-2}+\ldots+2^{-n}\right)}{1+3+\ldots+(2n-1)}.$

12. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{5^n}}$.

13. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n+1}}$.

14. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+\ldots+(2n-1)+2n}{\sqrt{n^2+3}}$.

15. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^3+5}-\sqrt{3n^4+2}}{1+3+\ldots+(2n-1)}$.

16. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3n)!+(3n-1)!}{(3n-1)!\cdot(3n-2)}$.

17. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+2}{1+2+\ldots+n}-\dfrac{2}{3}\right)$.

18. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{5}{6}+\dfrac{13}{36}+\ldots+\dfrac{3^n+2^n}{6^n}\right)$.

19. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+5+\ldots+2n+(2n+3)}{n(n+3)}$.

20. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!-(2n+2)!}$.

21. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+\ldots+n}{n-n^2+3}$.

22. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+\sqrt{n}-1}{2+7+\ldots+(5n-3)}$.

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{16}+\ldots+\frac{1+2^n}{4^n}\right).$

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+4+\ldots+2n}{1+3+\ldots+(2n-1)}.$

25. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+5+\ldots+(4n-3)}{n+1}-\frac{4n+1}{2}\right).$

26. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\ldots+n}{\sqrt[3]{n^6+2n^4+2}}.$

27. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(2n)!-(2n+1)!}{n(2n-1)!+(2n)!}.$

28. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!+(n+2)!}{(n-1)!-(n+2)!}.$

29. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3+6+9+\ldots+3n}{n^2+4}.$

30. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7}{10}+\frac{29}{100}+\ldots+\frac{2^n+5^n}{10^n}\right).$

Завдання 4

Знайти границі:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\sqrt[3]{5n^2}+\sqrt[8]{9x^8+1}}{(n+\sqrt{n})\sqrt{7-n+n^2}}.$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt[3]{3n^3+3}+\sqrt[4]{n^5+1}}.$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n-1}}{\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt{n-1}}$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2-1}+7n^3}{\sqrt[4]{n^{12}+n+1}-n}$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{3n-1}-\sqrt[3]{125n^3+n}}{\sqrt[5]{n}-n}$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sqrt[5]{n}-\sqrt[3]{27n^6+n^2}}{\left(n+\sqrt[4]{n}\right)\sqrt{9+n^2}}$.

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n^2+2}}{\sqrt[4]{4n^4+1}-\sqrt[3]{n^4-1}}$.

8. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^4+2}-\sqrt{n-2}}{\sqrt[4]{n^4+2}-\sqrt{n-2}}$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6n^3-\sqrt{n^5+1}}{\sqrt{4n^6+3}-n}$.

10. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{5n+2}-\sqrt[3]{8n^3+5}}{\sqrt[4]{n+7}-n}$.

11. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sqrt[4]{3n+1}+\sqrt{81n^4-n^2+1}}{\left(n+\sqrt[3]{n}\right)\sqrt{5-n+n^2}}$.

12. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n^2-3}}{\sqrt[3]{n^5-4}-\sqrt[4]{n^4+1}}$.

13. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^5+3}-\sqrt{n-3}}{\sqrt[5]{n^5+3}+\sqrt{n-3}}$.

14. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n}-9n^2}{3n-\sqrt[4]{9n^8+1}}.$

15. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{4n+1}-\sqrt[3]{27n^3+4}}{\sqrt[4]{n}-\sqrt[3]{n^5+n}}.$

16. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sqrt[3]{7n}-\sqrt{81n^8-1}}{\left(n+4\sqrt{n}\right)\sqrt{n^2-5}}.$

17. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^3-7}+\sqrt[3]{n^2+4}}{\sqrt[4]{n^5+5}+\sqrt{n}}.$

18. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^6+4}+\sqrt{n-4}}{\sqrt[5]{n^6+4}-\sqrt{n-6}}.$

19. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2-\sqrt[4]{n^3}}{\sqrt[3]{n^6+n^3+1}-5n}.$

20. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sqrt[4]{11n}+\sqrt{25n^4-81}}{\left(n-7\sqrt{n}\right)\sqrt{n^2-n+1}}.$

21. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+3}-\sqrt[3]{8n^3+3}}{\sqrt[4]{n+4}-\sqrt[5]{n^5+5}}.$

22. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2}-\sqrt{n^2+5}}{\sqrt[5]{n^7}-\sqrt{n+1}}.$

23. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^7+5}-\sqrt{n-5}}{\sqrt{n^7+5}+\sqrt{n-5}}.$

24. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2+2}-5n^2}{n-\sqrt{n^4-n+1}}.$

25. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt[3]{n^3+2}}{\sqrt[7]{n+2}-\sqrt[5]{n^5+2}}.$

26. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sqrt{71n}-\sqrt[3]{64n^6+9}}{\left(n-\sqrt[3]{n}\right)\sqrt{11+n^2}}.$

27. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+6}-\sqrt{n^2-5}}{\sqrt[3]{n^3+3}+\sqrt[4]{n^3+1}}.$

28. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^8+6}-\sqrt{n-6}}{\sqrt[8]{n^8+6}+\sqrt{n-6}}.$

29. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-\sqrt{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^6+2}-n}.$

30. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt[4]{n+1}-\sqrt[5]{n^5+1}}.$

Завдання 5

Знайти границі:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right).$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n(n-2)}-\sqrt{n^2-3}\right).$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} n\sqrt{n}\left(n-\sqrt[3]{n^3-5}\right).$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{\left(n^2+1\right)\left(n^2-4\right)}-\sqrt{n^4-9}\right).$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^5-8}-\sqrt{n\left(n^2-5\right)}}{\sqrt{n}}.$

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-3n+2}-n\right).$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n+\sqrt[3]{4-n^3}\right).$

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n(n+2)}-\sqrt{n^2-2n+3}\right).$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n+2)(n+1)}-\sqrt{(n-1)(n+3)}\right).$

10. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt{n\left(n^4-1\right)}-\sqrt{n^5-8}\right).$

11. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[3]{5+8n^3}-2n\right).$

12. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[3]{5+n^3}-\sqrt[3]{3+n^3}\right).$

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{(n+2)^2}-\sqrt[3]{(n-3)^2}\right).$

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{(n+1)^3}-\sqrt{n(n-1)(n-3)}}{\sqrt{n}}.$

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n-2}-\sqrt{n^2-3}\right).$

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-3}\right).$

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n\left(n^5+9\right)}-\sqrt{\left(n^4-1\right)\left(n^2+5\right)}}{n}.$

18. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n(n+5)}-n\right).$

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^3+8}\left(\sqrt{n^3+2}-\sqrt{n^3-1}\right).$

20. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{\left(n^3+1\right)\left(n^2+3\right)}-\sqrt{n\left(n^4+2\right)}}{2\sqrt{n}}$.

21. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+3n^2}-\sqrt{\left(n^2-1\right)\left(n^2-2\right)}\right)$.

22. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{\left(n^5+1\right)\left(n^2-1\right)}-n\sqrt{n\left(n^4+1\right)}}{n}$.

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{\left(n^4+1\right)\left(n^2-1\right)}-n\sqrt{n^6-1}}{n}$.

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n(n-1)}\right)$.

25. $\lim\limits_{n\to\infty}n^3\left(\sqrt[3]{n^2\left(n^6+4\right)}-\sqrt[3]{n^8-1}\right)$.

26. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sqrt{n}-\sqrt{n(n+1)(n+2)}\right)$.

27. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n}\left(\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{n(n+1)}\right)$.

28. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n+2}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-4}\right)$.

29. $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt{n^4+3}-\sqrt{n^4-2}\right)$.

30. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n(n+1)(n+2)}\left(\sqrt{n^3-3}-\sqrt{n^3-2}\right)$.

Завдання 6

Знайти границю:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5+\sqrt{n}}{3+\sqrt{n}}\right)^{2n+1}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5+2n^3}{2n^3-1}\right)^{3n^3+1}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n^2+1}{5n^2-3}\right)^{3n^2}$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5-2n}{3-2n}\right)^{5n-3}$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+5}{3n-2}\right)^{2n+1}$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+1}{2n^2-3}\right)^{3n^2+1}$.

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2+\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n}+3}\right)^{\sqrt{n}+1}$.

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+1}{5+3n^2}\right)^{2n^2}$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3-n\sqrt{n}}{2-n\sqrt{n}}\right)^{n^2+5}$.

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5-n^3}{3-n^3}\right)^{n^2-1}$.

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n^3-1}{5n^3+2}\right)^{3n^2+1}$.

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3-n^2}{5-n^2}\right)^{2n^2-3}$.

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{2n+3}\right)^{3n-1}$.

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7-3n}{2-3n}\right)^{2n+1}$.

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n\sqrt{n}+3}{5+n\sqrt{n}}\right)^{n^2+1}$.

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+1}\right)^{2\sqrt{n}+3}$.

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5-2n}{3-2n}\right)^{\sqrt{n}+100}$.

18. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n-1}{3n+2}\right)^{2n^2+n}$.

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3-2n}{5-2n}\right)^{7n}$.

20. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{n}+5}{\sqrt{n}+7}\right)^{2\sqrt{n}+1}$.

21. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1-n\sqrt{n}}{2-n\sqrt{n}}\right)^{2n+7}$.

22. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+1}{3n^2+2}\right)^{5n^2}$.

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+3n+5}{n^2+2n+7}\right)^{8n+1}$.

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[3]{n}+3}{\sqrt[3]{n}+5}\right)^{\sqrt{2n}+1}$.

25. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^5+3n}{n^5+n^2+7}\right)^{3n^2+2}$.

26. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+8}{n+1}\right)^{3n+\sqrt{n}}$.

27. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2\sqrt{n}+1}{3n^2\sqrt{n}+n}\right)^{n\sqrt{n}+3n}$.

28. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^3+5n}{2n^3+10}\right)^{7n^2+1}$.

29. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^4-n^2}{n^4+n^2}\right)^{3n^2+n}$.

30. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2+3n^3}{3n^3+1}\right)^{5n^3+n}$.

Завдання 7

Знайти границі:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n+3^n}{2^n-a^n}$, де $0<a<2$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{2^n+7^n+1}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n+7^n}{5^n+2\cdot a^n}$, де $5<a<7$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n+2^n}{a^n-3^n}$, де $a>3$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n-1}$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^{2n}+3^{2n}}$.

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+100}$.

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n!+(n+1)!}$.

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+n^2}$.

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n]{2^n+3^n}$.

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n+5}$.

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n^3}$.

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+n^3}$.

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n]{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}$.

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n!+5}$.

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}$.

18. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n^2]{n^2+1}$.

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n+2^n}{3\cdot a^n+5^n}$, де $2<a<5$.

20. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{2(n+2)!+(n+1)!}$.

21. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{(n+1)!}}{3n^4}$.

22. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{2n^2+1}$.

23. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n + 3^n}{a^n - 5^n}$, де $3 < a < 5$.

24. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 10}$.

25. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{n \cdot 7^n + 3^n + 1}$.

26. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3n]{6^n + 7^n + 8^n}$.

27. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{5^n + n^2 + 6^n}$.

28. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{4^n + n^4}$.

29. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3 + \ln n}$.

30. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{n! + 3^n}$.

Завдання 8

Знайти границю:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2^n}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2^{k-1}}{k} \right)$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2\sqrt{n}} \sum\limits_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \right)$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^3} \sum\limits_{k=1}^{n} (2k+1)^2 \right)$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k k}{k+1} \right)$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{k} \right)$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}k^2(k+1)}{\sum\limits_{k=1}^{n}k(k+3)(2k+1)}\right).$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(k+1)!}{k!}\right).$

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^3}\sum\limits_{k=1}^{n}(2k+1)^2\right).$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^2}-\dfrac{n}{3}\right).$

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1}}\right).$

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2+3-4+\ldots+(2n-1)-2n}{\sqrt{n^2+1}}.$

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n\cdot 2^n}\sum\limits_{k=1}^{n}k\cdot 2^k\right).$

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}\right).$

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}.$

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right).$

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}k(k+1)}{n^3}.$

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{2k+1}}}{\sqrt{n}}.$

18. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} k\cdot k!}{(n+1)!}$.

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\cdot k^2}{(-1)^{n-1}n^2}$.

20. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)}{(n+1)^3}$.

21. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)}{(n+2)^4}$.

22. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^4}{n^5+7}$.

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^5}{(n+1)^6}$.

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^3+2^3+\ldots+n^3}{n^3}-\dfrac{n}{4}\right)$.

25. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^3+3^3+\ldots+(2n-1)^3}{n^4}$.

26. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)^2}{(n+1)^4}$.

27. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+2)(2k+3)}{\sum\limits_{k=1}^{n} k^2(k+4)}$.

28. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{2^n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2^k}{k}\right).$

29. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt[3]{k}}}{\sqrt[3]{n^2}}.$

30. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\left(3^k+(-2)^k\right)}{\sum\limits_{k=1}^{n}\left(3^{k+1}+(-2)^{k+1}\right)}.$

6. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ

Дійсне число a називається граничною точкою множини $A \subset \mathbb{R}$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists y \in A \setminus \{a\} \quad |y - a| < \varepsilon.$$

Кажуть, що $+\infty$ є граничною точкою множини A, якщо

$$\forall C \in \mathbb{R} \quad \exists y \in A \quad y > C.$$

Кажуть, що $-\infty$ є граничною точкою множини A, якщо

$$\forall C \in \mathbb{R} \quad \exists y \in A \quad y < C.$$

Нехай $\forall \varepsilon > 0$, а $x \in \mathbb{R}$. Інтервал $(x - \varepsilon; x + \varepsilon)$ називається ε-околом точки x і позначається $U(x, \varepsilon)$. Множина

$$\dot{U}(x, \varepsilon) = (x - \varepsilon; x) \cup (x; x + \varepsilon) = U(x, \varepsilon) \setminus \{x\}$$

називається проколеним ε-околом точки x.

Надалі будемо припускати, що точка a є граничною точкою області визначення D_f функції f.

Означення (Коші). Число $A \in \mathbb{R}$ називають границею функції f в точці a, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in D_f \cap \dot{U}(a, \delta) \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Означення (Гейне). Число $A \in \mathbb{R}$ називають границею функції f в точці a, якщо для довільної послідовності $\{x_n\}$, що задовольняє умовам

1. $\forall n \geq 1 \quad x_n \in D_f, \quad x_n \neq a,$

2. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a,$

виконується співвідношення

$$\lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right) = A.$$

Позначення: $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right) = A$ або $f\left(x\right) \to A,\ x \to a.$

Ці означення рівносильні. Означенням границі функції за Гейне зручно користуватись у тому випадку, коли потрібно довести, що функція не має границі в точці. Для цього досить довести, що існують дві послідовності $\left\{x_n'\right\}$ та $\left\{x_n''\right\}$, які задовольняють умовам означення, але відповідні послідовності значень функції $\left\{f\left(x_n'\right)\right\}$ та $\left\{f\left(x_n''\right)\right\}$ не мають однакових границь.

Кажуть, що

$$\lim_{x\to a} f\left(x\right) = +\infty,$$

якщо

$$\forall C \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \cap \dot{U}\left(a,\delta\right) \quad f\left(x\right) > C,$$

та

$$\lim_{x\to a} f\left(x\right) = -\infty,$$

якщо

$$\forall C \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \cap \dot{U}\left(a,\delta\right) \quad f\left(x\right) < C.$$

Число $A \in \mathbb{R}$ називають границею функції f при $x \to +\infty$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists C \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D_f \cap \left(C;+\infty\right) \quad \left|f\left(x\right) - A\right| < \varepsilon.$$

Позначення: $\lim\limits_{x\to +\infty} f\left(x\right) = A.$

Число $A \in \mathbb{R}$ називають границею функції f при $x \to -\infty$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists C \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D_f \cap \left(-\infty;C\right) \quad \left|f\left(x\right) - A\right| < \varepsilon.$$

Позначення: $\lim\limits_{x\to -\infty} f\left(x\right) = A.$

Всі властивості границь послідовностей легко переносяться на границі функцій в точці.

Запишемо дві важливі границі, які часто використовують при обчисленні інших границь функцій:

I. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 0$ — перша визначна (важлива) границя;

II. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x} = e$ — друга визначна (важлива) границя.

Введемо поняття односторонніх границь.

Число $A\in\mathbb{R}$ називають границею справа функції f в точці a, якщо

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta = \delta\left(\varepsilon\right) > 0 \quad \forall x\in D_f \cap\left(a, a+\delta\right) \quad \left|f\left(x\right) - A\right| < \varepsilon.$$

Позначення: $\lim\limits_{x\to a+0} f\left(x\right) = \lim\limits_{x\to a+} f\left(x\right) = f\left(a+0\right).$

Число $A\in\mathbb{R}$ називають границею зліва функції f в точці a, якщо

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta = \delta\left(\varepsilon\right) > 0 \quad \forall x\in D_f \cap\left(a-\delta; a\right) \quad \left|f\left(x\right) - A\right| < \varepsilon.$$

Позначення: $\lim\limits_{x\to a-0} f\left(x\right) = \lim\limits_{x\to a-} f\left(x\right) = f\left(a-0\right).$

Для того, щоб $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right) = A$, необхідно і достатньо, щоб

$$\lim_{x\to a+0} f\left(x\right) = \lim_{x\to a-0} f\left(x\right) = A.$$

Функція f називається нескінченно малою (НМ) при $x\to a$ (або в точці a), якщо

$$\lim_{x\to a} f\left(x\right) = 0.$$

Функція f називається нескінченно великою (НВ) при $x \to a$ (або в точці a), якщо

$$\forall C > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f \cap \dot{U}(a,\delta) \quad |f(x)| > C.$$

Властивості нескінченно малих функцій:

1. Сума скінченного числа нескінченно малих є нескінченно малою.
2. Добуток скінченного числа нескінченно малих є нескінченно малою.
3. Добуток нескінченно малої функції та обмеженої функції є нескінченно малою.
4. Якщо функція f є нескінченно малою при $x \to a$, але відмінна від нуля в околі точки a, то $\dfrac{1}{f}$ є нескінченно великою в цій точці.

Для того, щоб $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, необхідно і достатньо, щоб мало місце представлення

$$f(x) = A + \alpha(x),$$

де $\alpha(x)$ — нескінченно мала функція при $x \to a$.

Якщо $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ є нескінченно малими при $x \to a$, то при

1. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0$ вони називаються нескінченно малими одного порядку малості при $x \to a$;
2. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ вони називаються еквівалентними нескінченно малими при $x \to a$;

3. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$ функція $\alpha(x)$ називається нескінченно малою вищого порядку малості при $x\to a$ ніж $\beta(x)$, що позначають $\alpha(x)=o(\beta(x))$ ($\alpha(x)$ дорівнює «о мале» від $\beta(x)$ при $x\to a$);

4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$ функція $\alpha(x)$ називається нескінченно малою нижчого порядку малості при $x\to a$ ніж $\beta(x)$, що позначають $\beta(x)=o(\alpha(x))$ при $x\to a$;

5. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k}=C\neq 0$ функція $\alpha(x)$ має порядок малості k відносно $\beta(x)$ при $x\to a$;

6. якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не існує, то нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються непорівнюваними при $x\to a$.

Якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k}=C\neq 0$, то функція $C(\beta(x))^k$ називається головною частиною нескінченно малої $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to a$.

Якщо $f(x)$ і $g(x)$ є нескінченно великими при $x\to a$, то при

1. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=C\neq 0$ вони називаються нескінченно великими одного порядку росту при $x\to a$;

2. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$ функція $f(x)$ називається нескінченно великою нижчого порядку росту при $x\to a$ ніж $g(x)$;

3. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$ функція $f(x)$ називається нескінченно великою вищого порядку росту при $x\to a$ ніж $g(x)$;

4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{(g(x))^k}=C\neq 0$ функція $f(x)$ має порядок ростуі k відносно $g(x)$ при $x\to a$;

5. якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ не існує, то нескінченно великі $f(x)$ і $g(x)$ називаються непорівнюваними при $x\to a$.

Якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{(g(x))^k}=C\neq 0$, то функція $C(g(x))^k$ називається головною частиною нескінченно великої $f(x)$ відносно $g(x)$ при $x\to a$.

Для того, щоб нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ були еквівалентними при $x\to a$, необхідно і достатньо, щоб $\alpha(x)=\beta(x)+o(\beta(x))$ при $x\to a$.

Границя добутку (відношення) функцій не змінюється, якщо в ньому замінити нескінченно малу на еквівалентну нескінченно малу функцію.

Таблиця еквівалентних нескінченно малих:

$x\sim\sin x\sim \operatorname{tg} x\sim\arcsin x\sim \operatorname{arctg} x\sim e^x-1\sim\ln(1+x)$ при $x\to 0$;

$a^x-1\sim x\ln a$ при $x\to 0$;

$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$ при $x\to 0$;

$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$ при $x\to 0$.

Приклад 1. Довести за означенням, що границя

$$\lim_{x\to+\infty}\sin x$$

не існує.

Доведення. Доведемо, що ця функція не задовольняє означенню границі функції за Гейне при $x\to+\infty$. Для цього розглянемо послідовності $\{x_n'\}$ та $\{x_n''\}$, де

$$x_n'=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\quad x_n''=2\pi n.$$

Тоді

$$\lim_{n\to\infty}x_n'=+\infty,\quad \lim_{n\to\infty}x_n''=+\infty,\quad \lim_{n\to\infty}f\left(x_n'\right)=\lim_{n\to\infty}1=1,\quad \lim_{n\to\infty}f\left(x_n''\right)=\lim_{n\to\infty}0=0,$$

А оскільки $\left\{f\left(x_n'\right)\right\}$ та $\left\{f\left(x_n''\right)\right\}$ мають різні границі, то границя

$$\lim_{x\to+\infty}\sin x$$

не існує. □

Приклад 2. Довести за означенням, що границя

$$\lim_{x\to0}5^{\frac{1}{x}}$$

не існує.

Доведення. Розглянемо послідовності $\{x_n'\}$ та $\{x_n''\}$, де

$$x_n'=\frac{1}{n},\quad x_n''=-\frac{1}{n}.$$

Тоді

$$\lim_{n\to\infty}x_n'=\lim_{n\to\infty}x_n''=0,\quad \lim_{n\to\infty}f\left(x_n'\right)=\lim_{n\to\infty}5^{n}=+\infty,\quad \lim_{n\to\infty}f\left(x_n''\right)=\lim_{n\to\infty}5^{-n}=0,$$

А оскільки $\left\{ f\left(x'_n\right)\right\}$ та $\left\{ f\left(x''_n\right)\right\}$ мають різні границі, то границя

$$\lim_{x\to 0} 5^{\frac{1}{x}}$$

не існує. $\square$

У найпростіших випадках обчислення границі $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ зводиться до підстановки у функцію $f(x)$ граничного значення аргумента, наприклад,

$$\lim_{x\to \pi} \cos x = \cos\pi = -1.$$

Проте часто така підстановка приводить до невизначених виразів, зокрема, таких:

1) невизначеність типу $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ (відношення двох нескінченно великих величин);

2) невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$ (відношення двох нескінченно малих величин);

3) невизначеність типу $\left[0\cdot\infty\right]$ (добуток нескінченно малої величини на нескінченно велику);

4) невизначеність типу $\left[\infty-\infty\right]$ (різниця двох нескінченно великих величин);

5) невизначеності типу $\left[0^0\right]$, $\left[\infty^0\right]$, $\left[1^\infty\right]$.

Операцію обчислення границі у цих випадках називають розкриттям невизначеності. Розглянемо деякі способи розкриття невизначеності.

1. Невизначеність типу $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ задана відношенням двох многочленів. Такі невизначеності можна розкривати за правилом:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}=\begin{cases}0, & n<m,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & n=m,\\ \infty, & n>m.\end{cases}$$

Приклад 3.Обчислити границі:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+4}{2x^2+7x-9}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4}{2x^2+7x-9}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4}{2x^2+7x-9}$.

Розв'язання. Користуючись наведеним вище правилом, легко знаходимо:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+4}{2x^2+7x-9}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=0$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4}{2x^2+7x-9}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\dfrac{3}{2}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4}{2x^2+7x-9}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\infty$.

Відповідь: а) 0; б) $\dfrac{3}{2}$; в) ∞. □.

2. Невизначеність типу $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ задана відношенням двох многочленів.

Приклад 4. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-4}{x^2+x-2}$.

Розв'язання. Оскільки

$$\lim_{x\to-2}(x^2-4)=0, \qquad \lim_{x\to-2}(x^2+x-2)=0,$$

то маємо невизначеність типуу $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Щоб її розкрити, розкладемо чисельник і знаменник на множники:

$$x^2-4=(x+2)(x-2), \qquad x^2+x-2=(x+2)(x-1).$$

Скорочуючи на $(x+2)$, маємо:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x^2+x-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(x-1)}=\lim_{x\to -2}\frac{x-2}{x-1}=\frac{-2-2}{-2-1}=\frac{4}{3}.$$

Відповідь: $\frac{4}{3}$. □

Множник $(x-a)$, через який чисельник і знаменник прямують до нуля, називають критичним множником. Отже, щоб розкрити невизначеність виду $\left[\frac{0}{0}\right]$, задану відношенням двох многочленів, треба скоротити дріб на критичний множник.

3. Невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$ задана ірраціональними виразами.

Приклад 5. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x^2-2x-3}$.

Розв’язання. Для обчислення границі помножимо й поділимо дріб на вираз, спряжений з чисельником, а потім розкладемо на множники знаменник і чисельник і скоротимо на критичний множник:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x^2-2x-3}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{n\to 3}\frac{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)}{(x-3)(x+1)(\sqrt{x+6}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x+6-9}{(x-3)(x+1)(\sqrt{x+6}+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+6}+3)}=$$

$$=\frac{1}{(3+1)(\sqrt{3+6}+3)}=\frac{1}{4\cdot 6}=\frac{1}{24}.$$

Відповідь: $\frac{1}{24}$. □

У випадку, коли корені кубічні, вираз доповнюють не до різниці квадратів, а до різниці кубів.

4. Невизначеність задана трансцендентними виразами.

У випадку, коли невизначеність задана тригонометричними виразами тощо, користуються еквівалентністю нескінченно малих функцій.

Приклад 6. Обчислити границю

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}^2 3x}{\sin 2x\cdot \mathrm{arctg}\,6x}.$$

Розв'язання. При $x\to 0$ $\mathrm{tg}\,3x \sim 3x$, $\sin 2x \sim 2x$, $\mathrm{arctg}\,6x \sim 6x$. Замінюючи нескінченно малі величини еквівалентними їм величинами, дістанемо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}^2 3x}{\sin 2x\cdot \mathrm{arctg}\,6x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(3x)^2}{2x\cdot 6x}=\frac{3}{4}.$$

Відповідь: $\frac{3}{4}$. □

Якщо границю потрібно обчислити не в точці $x=0$, то часто використовують заміни.

Приклад 7. Обчислити границю

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{6}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{3}-2\cos x}..$$

Розв’язання. Маємо невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$. Зробимо заміну $z = x - \frac{\pi}{6}$, тоді при $x \to \frac{\pi}{6}$ $z \to 0$.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{3} - 2\cos x} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{\sqrt{3} - 2\cos\left(z + \frac{\pi}{6}\right)} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{\sqrt{3} - 2\cos z \cos\frac{\pi}{6} + 2\sin z \sin\frac{\pi}{6}} =$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{\sqrt{3} - \sqrt{3}\cos z + \sin z} = \lim_{z\to 0} \frac{2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}}{2\sqrt{3}\sin^2\frac{z}{2} + 2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}} = \lim_{z\to 0} \frac{\cos\frac{z}{2}}{\sqrt{3}\sin\frac{z}{2} + \cos\frac{z}{2}} = 1.$$

Відповідь: 1. □

5. Невизначеність типу $\left[1^{\infty}\right]$.

Її розкривають за допомогою другої визначної границі.

Приклад 8. Обчислити границю

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x+3}\right)^{3x+2}.$$

Розв’язання. Використовуючи другу визначну границю, дістанемо:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x+3}\right)^{3x+2} = \left[1^{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1 + \frac{2}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{2}}\right]^{\frac{2(3x+2)}{x+3}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x+4}{x+3}} = e^{6}.$$

Відповідь: e^{6}. □

Завдання 1

Довести за означенням, що границя не існує:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sgn}\left(\sin\dfrac{1}{x}\right)$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}2^{\frac{1}{x}}$.

4. $\lim\limits_{x\to 1}(-1)^{[x]}$, де $[x]$ — ціла частина x.

5. $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-\left[x^2\right]\right)$, де $[x]$ — ціла частина x.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+x^3}}{x}$.

7. $\lim\limits_{x\to 2}x[x]$, де $[x]$ — ціла частина x.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4x^2+x^4}}{x}$.

9. $\lim\limits_{x\to 1}\sin\dfrac{1}{x-1}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}$.

11. $\lim\limits_{x\to 1}\cos\dfrac{1}{x-1}$.

12. $\lim\limits_{x\to 2}2^{\frac{1}{x-2}}$.

13. $\lim\limits_{x\to 3}e^{\frac{1}{x-3}}$.

14. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{[x]}{x}$, де $[x]$ — ціла частина x.

15. $\lim\limits_{x\to 0} 3^{-\frac{1}{x}}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0} [x]$, де $[x]$ — ціла частина x.

17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0} 2^{x-\frac{1}{x}}$.

20. $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn}(\operatorname{tg} x)$.

21. $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}\right)$.

22. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt[4]{x^4+x^5}}$.

23. $\lim\limits_{x\to 0} e^{x+\frac{1}{x}}$.

24. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \operatorname{sgn}(\cos x)$.

25. $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$.

26. $\lim\limits_{x\to 2} \left[\dfrac{1}{x}\right]$, де $[x]$ — ціла частина x.

27. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|\sin x|}{x}$.

28. $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn}(\sin x)$.

29. $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$.

30. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{|x|}$.

Завдання 2

Обчислити границі:

1. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

3. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)}{x}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$.

6. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3-3x-2}{x+x^2}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}$.

8. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+5x^2+8x+4}{x^3+3x^2-4}$.

9. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}$.

10. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{4x}-4}{\sqrt{4+x}-\sqrt{2x}}$.

11. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-2x^2-2x-3}{x^3-3x^2+2x-6}$.

12. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$.

13. $\lim\limits_{x\to 81}\dfrac{3-\sqrt[4]{x}}{9-\sqrt{x}}$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2-x^3}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt[3]{2+x}-\sqrt[3]{2-x}}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{x+x^2}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{25+x}-5}{\sqrt[3]{27+x}-3}$.

18. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+x}-2}{\sqrt[3]{7+x}-2}$.

19. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-2x^2-4x+8}$.

20. $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{2-\sqrt[4]{x}}{4-\sqrt{x}}$.

21. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-3x^2+2}$.

22. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^2+5x+6}$.

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{8+x}-2}$.

24. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+2}{x^3-3x^2+2}$.

25. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt[3]{4+x}-2}$.

26. $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}$.

27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1}$.

28. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2+x-2}$.

29. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2x^2-11x-21}{x^2-9x+14}$.

30. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$.

Завдання 3

Обчислити границі:

1. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$.

2. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{1-2\cos x}{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)}.$

4. $\lim\limits_{x\to 1} \left(1-x^2\right)\log_x 5.$

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}.$

6. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg} x.$

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos x}{\ln\cos 3x}.$

8. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg} 2x \operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right).$

9. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin 7\pi x}{\sin 2\pi x}.$

10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^{\sin x}-1}{\sin 2x}.$

11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos x}{x^2}.$

12. $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sin x}{\pi^2-x^2}.$

13. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\sec x.$

14. $\lim\limits_{x\to 1} \left(1-x^3\right)\log_x 3.$

15. $\lim\limits_{x\to\infty} x^4\left(\ln\left(1+x^4\right)-\ln\left(x^4\right)\right).$

16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\ln\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{tg}\left(x^2\right)}{1-\operatorname{tg}\left(x^2\right)}}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0}x\left(\ln\left(2+x\right)-\ln x\right)$.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sin 6x-\sin 7x}$.

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 2x}{\ln\cos 3x}$.

21. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin x-\sin 2}{x-2}$.

22. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}3}{x-3}$.

23. $\lim\limits_{x\to \infty}x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 7x}{x^2}$.

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$.

26. $\lim\limits_{x\to \infty}x\left(\dfrac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+1}\right)$.

27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos\left(x^2\right)}}{1-\cos x}$.

28. $\lim\limits_{x\to \infty}x\left(2^{\frac{1}{x}}-1\right)$.

29. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\sqrt{\frac{1+\sin\left(x^2\right)}{1-\sin\left(x^2\right)}}.$

30. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x^3-1}{\sin^6 2x}.$

Завдання 4

Обчислити границі:

1. $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\operatorname{ctg}\pi x}.$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}.$

3. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{\sin x}{\sin 3}\right)^{\frac{1}{x-3}}.$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$

5. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}.$

6. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}.$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}.$

8. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x}.$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)^{\operatorname{ctg}x}.$

10. $\lim\limits_{x\to\infty} \cos^x \frac{1}{\sqrt{x}}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1+x\cdot 2^x}{1+x\cdot 3^x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$.

12. $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{tg}^x \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{x} \right)$.

13. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1+\sin x \cos 2x}{1+\sin x \cos 3x} \right)^{\operatorname{ctg}^3 x}$.

14. $\lim\limits_{x\to 0} \left(2e^{\frac{x}{x+1}} - 1 \right)^{\frac{x^2+1}{x}}$.

15. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\ln^{-1}\left(1+\sin^2 x\right)}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0} \left(3 - \frac{2}{\cos x} \right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

17. $\lim\limits_{x\to 1} (3-2x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\left(e^{x^2}-1\right)^{-1}}$.

19. $\lim\limits_{x\to -4} (4+3x)^{\frac{2x-1}{x+1}}$.

20. $\lim\limits_{x\to \pi} (1+3\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$.

21. $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+\operatorname{tg}^2 \sqrt{x}\right)^{\frac{3}{x}}$.

22. $\lim\limits_{x\to 1} (7-6x)^{\frac{x}{3x-3}}$.

23. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}-1}}$.

24. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-3^{\operatorname{arctg}^2\sqrt{x}}\right)^{\frac{2}{\sin x}}$.

25. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$.

26. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin^2\sqrt{x}\right)^{\frac{5}{x}}$.

27. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x+e^x\right)^{\frac{1}{x}}$.

28. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x+\operatorname{arctg}^2 x\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

29. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2+x}{x-2}\right)^{x}$.

30. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)^{x}$.

Завдання 5

Знайти порядок малості і виділити головну частину нескінченно малої функції $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to x_0$.

1. $\alpha(x)=\sin\sqrt{x},\quad \beta(x)=\sqrt[3]{x},\quad x_0=0.$

2. $\alpha(x)=e^{x^2}-1,\quad \beta(x)=\sin x,\quad x_0=0.$

3. $\alpha(x)=\ln\left(1+\sqrt{x}\right),\quad \beta(x)=\sqrt[4]{x},\quad x_0=0.$

4. $\alpha(x)=\operatorname{tg}\sqrt{x},\quad \beta(x)=\sin\sqrt[3]{x},\quad x_0=0.$

5. $\alpha(x)=\arcsin\left(\sqrt{x}-2\right),\quad \beta(x)=x-4,\quad x_0=4.$

6. $\alpha(x)=x+x^2-\sqrt{x},\quad \beta(x)=\sin x,\quad x_0=0.$

7. $\alpha(x)=e^{x^2}-e^{x},\quad \beta(x)=x,\quad x_0=0.$

8. $\alpha(x)=\ln\left(1+\sqrt{x^2+3x+2}\right),\quad \beta(x)=x+1,\quad x_0=-1.$

9. $\alpha(x)=\operatorname{tg}\sqrt[3]{x},\quad \beta(x)=\sin x,\quad x_0=0.$

10. $\alpha(x)=\dfrac{1}{x^2-x+7},\quad \beta(x)=\dfrac{1}{x},\quad x_0=\infty.$

11. $\alpha(x)=10x^3-3x,\quad \beta(x)=\sin x,\quad x_0=0.$

12. $\alpha(x)=\sqrt[3]{x}+2,\quad \beta(x)=x+8,\quad x_0=-8.$

13. $\alpha(x)=e^{x^2}-\cos x,\quad \beta(x)=x,\quad x_0=0.$

14. $\alpha(x)=\arcsin\left(\sqrt{x^2+9}-3\right),\quad \beta(x)=x,\quad x_0=0.$

15. $\alpha(x)=\operatorname{arctg}\left(\sqrt[3]{27-2x^2-3x}-3\right),\quad \beta(x)=x,\quad x_0=0.$

16. $\alpha(x)=\operatorname{tg}\left(\sqrt{x}-2x\right),\quad \beta(x)=\sin x,\quad x_0=0.$

17. $\alpha(x)=\sqrt[3]{\left(e^{x}-1\right)^2},\quad \beta(x)=\sin x,\quad x_0=0.$

18. $\alpha(x)=1-\sqrt{\cos x},\quad \beta(x)=\sqrt[3]{x},\quad x_0=0.$

19. $\alpha(x)=\dfrac{x(x+1)}{\sin x+\sqrt{x}},\quad \beta(x)=\operatorname{tg} x,\quad x_0=0.$

20. $\alpha(x)=\sqrt[3]{x}-\sqrt{x^5},\quad \beta(x)=\sin x,\quad x_0=0.$

21. $\alpha(x)=\sqrt{1+3x}-1-\sqrt{x},\quad \beta(x)=\operatorname{tg}x,\quad x_0=0.$

22. $\alpha(x)=\ln\left(1+\sqrt{x\operatorname{tg}x}\right),\quad \beta(x)=x,\quad x_0=0.$

23. $\alpha(x)=\sqrt{1+2x}-1-\sqrt[3]{x},\quad \beta(x)=\sin x,\quad x_0=0.$

24. $\alpha(x)=\sin\left(\sqrt[3]{1+x}-1\right),\quad \beta(x)=\sin x,\quad x_0=0.$

25. $\alpha(x)=\sin^2\sqrt{x},\quad \beta(x)=\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x},\quad x_0=0.$

26. $\alpha(x)=\arcsin^2\sqrt{x},\quad \beta(x)=\sin x,\quad x_0=0.$

27. $\alpha(x)=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right),\quad \beta(x)=4x-\pi,\quad x_0=\dfrac{\pi}{4}.$

28. $\alpha(x)=\sqrt{8+x^2}-3,\quad \beta(x)=\sin(x-1),\quad x_0=1.$

29. $\alpha(x)=\sqrt{1+x^2}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2},\quad \beta(x)=x,\quad x_0=0.$

30. $\alpha(x)=2^{\sqrt{x}}-\cos\sqrt[4]{x},\quad \beta(x)=x,\quad x_0=0.$

Завдання 6

Знайти порядок росту і виділити головну частину нескінченно великої функції $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$ при $x\to x_0$.

1. $\alpha(x)=2x+\sqrt{x}+\sin x,\quad \beta(x)=x,\quad x_0=+\infty.$

2. $\alpha(x)=\sin\sqrt{x}+2^{x+1},\quad \beta(x)=2^x,\quad x_0=+\infty.$

3. $\alpha(x)=\sqrt{x^4+3x^3+1}-x^2,\quad \beta(x)=\sqrt[3]{x},\quad x_0=+\infty.$

4. $\alpha(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^5},\quad \beta(x)=\dfrac{1}{x},\quad x_0=0.$

5. $\alpha(x)=\sqrt{x^2+\sqrt{x^3+\sqrt{x^5}}},\quad \beta(x)=x,\quad x_0=+\infty.$

6. $\alpha(x)=\dfrac{3x^5}{x^2-3x+1},\quad \beta(x)=x,\quad x_0=\infty.$

7. $\alpha(x)=\sqrt[3]{x^2-x}+\sqrt{x},\quad \beta(x)=x,\quad x_0=+\infty.$

8. $\alpha(x)=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}},\quad \beta(x)=x,\quad x_0=+\infty.$

9. $\alpha(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1},\quad \beta(x)=\dfrac{1}{x-1},\quad x_0=1.$

10. $\alpha(x)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}},\quad \beta(x)=\dfrac{1}{1-x},\quad x_0=1.$

11. $\alpha(x)=\dfrac{\ln x}{(1-x)^2},\quad \beta(x)=\dfrac{1}{1-x},\quad x_0=1.$

12. $\alpha(x)=x+x^2-\sqrt{x},\quad \beta(x)=\sqrt[5]{x},\quad x_0=+\infty.$

13. $\alpha(x)=\sqrt[3]{\dfrac{1+x}{1-x}},\quad \beta(x)=\dfrac{1}{1-x},\quad x_0=1.$

14. $\alpha(x)=\dfrac{1}{\sin\pi x},\quad \beta(x)=\dfrac{1}{1-x},\quad x_0=1.$

15. $\alpha(x)=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{x^5}}},\quad \beta(x)=x,\quad x_0=+\infty.$

16. $\alpha(x)=x^2+\sin^2\sqrt{x},\quad \beta(x)=\sqrt[3]{x},\quad x_0=+\infty.$

17. $\alpha(x)=2x+\operatorname{arctg}x,\quad \beta(x)=\sqrt[3]{x},\quad x_0=+\infty.$

18. $\alpha(x)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{1-x}},\quad \beta(x)=\dfrac{1}{1-x},\quad x_0=1.$

19. $\alpha(x)=\sqrt[3]{x^8-5x^5}-x^4, \quad \beta(x)=x, \quad x_0=+\infty.$

20. $\alpha(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x-3}, \quad \beta(x)=\dfrac{1}{x-1}, \quad x_0=1.$

21. $\alpha(x)=\dfrac{1-2x}{x^2-2x-3}, \quad \beta(x)=\dfrac{1}{x+1}, \quad x_0=-1.$

22. $\alpha(x)=\cos\sqrt{x}+3^{x+2}, \quad \beta(x)=3^x, \quad x_0=+\infty.$

23. $\alpha(x)=\ln(10x)+\sin x, \quad \beta(x)=\ln^2 x, \quad x_0=+\infty.$

24. $\alpha(x)=\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}, \quad \beta(x)=\sqrt{x}, \quad x_0=+\infty.$

25. $\alpha(x)=3^{x+1}+2^x, \quad \beta(x)=3^x, \quad x_0=+\infty.$

26. $\alpha(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}, \quad \beta(x)=\dfrac{1}{x-2}, \quad x_0=2.$

27. $\alpha(x)=\dfrac{x+1}{x^3-1}, \quad \beta(x)=\dfrac{1}{x-1}, \quad x_0=1.$

28. $\alpha(x)=\dfrac{x^2}{x^3+8}, \quad \beta(x)=\dfrac{1}{x+2}, \quad x_0=-2.$

29. $\alpha(x)=2^{2x}+2^{x+2}, \quad \beta(x)=2^x, \quad x_0=+\infty.$

30. $\alpha(x)=2^{-2x}+2^{x+2}, \quad \beta(x)=2^x, \quad x_0=+\infty.$

7. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ

Функція $y = f(x)$ називається неперервною в точці $x = a$, якщо вона визначена в деякому околі точки $x = a$ і

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Згідно з означенням границі функції за Коші означення неперервності можна сформулювати так.

Функція $y = f(x)$ називається неперервною в точці $x = a$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що $f(x)$ визначена в δ-околі $U(a;\delta) = (a-\delta, a+\delta)$ і для всіх $x \in U(a;\delta)$ виконується нерівність

$$\left| f(x) - f(a) \right| < \varepsilon.$$

Символічно

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \quad |x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| f(x) - f(a) \right| < \varepsilon.$$

Якщо функція $f(x)$ визначена на $[a, a+\delta)$ (відповідно на $(a-\delta, a]$) і $f(a+0) = f(a)$ (відповідно $f(a-0) = f(a)$), тоді $f(x)$ називається неперервною справа (відповідно зліва) в точці $x = a$.

Для того, щоб $f(x)$ була неперервною в точці $x = a$, необхідно і достатньо, щоб

$$f(a-0) = f(a) = f(a+0),$$

тобто щоб $f(x)$ була неперервною в цій точці справа і зліва.

Властивості неперервних функцій в точці.

1. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні в точці $x = a$, то

a. $f(x) \pm g(x)$,

b. $f(x) g(x)$,

c. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ при $g(a) \neq 0$

неперервні в точці $x = a$.

2. Композиція функцій $h(x) = (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$ неперервна в точці $x = a$, якщо $f(x)$ неперервна в точці $x = a$, а $g(y)$ неперервна в точці $y = f(a)$.

3. Кожна елементарна функція, що визначена в околі точки $x = a$, є неперервною в цій точці.

Приклад 1. Довести неперервність функції $y = \sqrt{x}$ в точці $x = a > 0$ за означенням неперервності.

Розв'язання. Маємо

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| = \left|\frac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{a}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{a}\right)}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}\right| = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} < \frac{|x - a|}{\sqrt{a}}.$$

Нехай $\varepsilon > 0$ довільне. Нерівність $\dfrac{|x - a|}{\sqrt{a}} < \varepsilon$ рівносильна нерівності $|x - a| < \varepsilon\sqrt{a}$. Приймемо $\delta(\varepsilon) = \varepsilon\sqrt{a}$. Тоді

$$|x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\sqrt{x} - \sqrt{a}\right| < \frac{|x - a|}{\sqrt{a}} < \varepsilon,$$

що й доводить неперервність функції $y = \sqrt{x}$ в точці $x = a$. □

Точки розриву функції

Окіл точки a, з якого вилучено саму точку a, називається проколеним околом точки a і позначається символом $\dot{U}(a)$. Таким чином,

$$\dot{U}(a)=U(a)\setminus\{a\},\quad \dot{U}(a;\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta).$$

Припустимо, що функція $f(x)$ визначена в проколеному околі точки $x=a$ і, можливо, в самій цій точці. Якщо точка $x=a$ не є точкою неперервності функції $f(x)$, то вона називається точкою розриву функції $f(x)$.

1. При цьому, якщо існує $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, але $f(x)$ невизначена в точці $x=a$, або $f(a)\neq A$, тоді $x=a$ називається точкою усувного розриву функції $f(x)$.

(Зауважимо, що якщо покласти $f(a)=A$, то функція $f(x)$ стане неперервною в точці $x=a$, тобто розрив буде усунуто.)

2. Якщо існують скінченні $f(a+0)$ та $f(a-0)$, але не виконується одна з умов рівності $f(a-0)=f(a)=f(a+0)$, тоді $x=a$ називається точкою розриву I роду.

(При цьому кажуть, що функція $f(x)$ в точці $x=a$ має стрибок.)

3. В точці $x=a$ не існує принаймні одна з границь $f(a+0)$, $f(a-0)$ або хоча б одна з них нескінченна. Тоді точка $x=a$ називається точкою розриву II роду.

Неперервні функції на множині

Функція $f(x)$ називається неперервною на множині A, якщо вона неперервна в кожній точці цієї множини.

Якщо не всі точки $x\in A$ входять у множину A разом з деяким околом, то означення трохи змінюється.

Функція $f(x)$, визначена на відрізку $[a,b]$, називається неперервною на $[a,b]$, якщо вона неперервна в кожній точці інтервала (a,b), неперервна справа в точці $x=a$ і неперервна зліва в точці $x=b$.

Клас неперервних на множині A функцій позначається $C(A)$, тобто запис $f \in C(A)$ означає, що функція $f(x)$ неперервна на множині A.

Нагадаємо основні властивості неперервних функцій на відрізку.

Теорема 1 (Вейєрштрасса). Якщо функція неперервна на відрізку, то вона обмежена на ньому.

Теорема 2 (Вейєрштрасса). Якщо функція неперервна на відрізку, то вона приймає на ньому найбільше та найменше значення.

Теорема 3 (Больцано-Коші). Якщо функція неперервна на відрізку і на його кінцях приймає значення протилежного знаку, то існує точка всередині цього відрізку, в якій функція дорівнює нулю.

Теорема 4 (Коші). Якщо функція неперервна на відрізку, то вона приймає всі проміжні значення між значеннями функції в кінцях цього відрізка.

Функція називається рівномірно неперервною на множині A, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх $x_1, x_2 \in A$ таких, що $|x_1 - x_2| < \delta$, виконується нерівність

$$\left| f(x_1) - f(x_2) \right| < \varepsilon.$$

Теорема 5 (Кантора). Якщо функція неперервна на відрізку, то вона також рівномірно неперервна на ньому на ньому.

Кажуть, що функція $f(x)$ строго зростає (відповідно строго спадає) на множині A, якщо для довільних $a,b \in A$ таких, що $a < b$, маємо $f(a) < f(b)$ (відповідно $f(a) > f(b)$).

Функції, що строго зростають чи спадають на множині A, називають строго монотонними на множині A.

Теорема 6 (про існування оберненої функції). Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ та строго монотонна на ньому (наприклад, зростає). Тоді існує єдина функція $x = g(y)$, яка визначена, строго зростає і неперервна на відрізку $[f(a), f(b)]$ така, що $g(f(x)) = x$ для всіх $x \in [a,b]$ і $f(g(y)) = y$ для всіх $y \in [f(a), f(b)]$, тобто $g = f^{-1}$.

Зауважимо, що для строго спадної функції $y = f(x)$ обернена функція $x = g(y)$ визначена на відрізку $[f(b), f(a)]$.

Приклад 2. Довести, що рівняння $x2^x - 1 = 0$ має додатний корінь, менший за одиницю.

Розв’язання. Функція $f(x) = x2^x - 1$ неперервна на всій числовій осі, зокрема і на відрізку $[0,1]$. Оскільки $f(0) = -1 < 0$, а $f(1) = 2 - 1 = 1 > 0$, то за теоремою Больцано-Коші існує така точка $x_0 \in (0,1)$, що $f(x_0) = x_0 2^{x_0} - 1 = 0$, тобто x_0 — потрібний нам корінь. □

Приклад 3. Дослідити на неперервність функцію

$$f(x) = \frac{\sqrt{7+x} - 3}{x^2 - 4}.$$

Розв’язання. Область визначення функції

$$D(f) = [-7,-2) \cup (-2,2) \cup (2,+\infty).$$

При $x \neq \pm 2$ функція неперервна на $D(f)$ як відношення двох неперервних функцій $y_1 = \sqrt{7+x} - 3.$ і $y_2 = x^2 - 4$, які є елементарними. Функція $f(x)$ визначена в проколеному околі кожної з точок $x = 2$ та $x = -2$, а в самих точках не визначена, тому ці точки є точками розриву. Вкажемо характер точок розриву. Обчислимо

$$f(-2-0)=\lim_{x\to-2-0}\frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}=\lim_{x\to-2-0}\frac{\sqrt{7+x}-3}{x-2}\cdot\lim_{x\to-2-0}\frac{1}{x+2}=\frac{\sqrt{5}-3}{-4}\lim_{x\to-2-0}\frac{1}{x+2}=-\infty.$$

Аналогічно

$$f(-2+0)=\lim_{x\to-2+0}\frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}=\lim_{x\to-2+0}\frac{\sqrt{7+x}-3}{x-2}\cdot\lim_{x\to-2+0}\frac{1}{x+2}=\frac{\sqrt{5}-3}{-4}\lim_{x\to-2+0}\frac{1}{x+2}=+\infty.$$

Отже, точка $x=-2$ є точкою розриву другого роду.

Обчислимо тепер

$$f(2-0)=\lim_{x\to2-0}\frac{\left(\sqrt{7+x}-3\right)\left(\sqrt{7+x}+3\right)}{\left(x^2-4\right)\left(\sqrt{7+x}+3\right)}=\lim_{x\to2-0}\frac{x-2}{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{7+x}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to2-0}\frac{1}{(x+2)\left(\sqrt{7+x}+3\right)}=\frac{1}{24}.$$

Аналогічно отримаємо

$$f(2+0)=\lim_{x\to2+0}\frac{1}{(x+2)\left(\sqrt{7+x}+3\right)}=\frac{1}{24}.$$

Отже, оскільки $f(x)$ не визначена в точці $x=2$, ця точка є точкою розриву першого роду (усувний розрив). □

Приклад 4. Дослідити на неперервність функцію

$$f(x)=e^{-\frac{1}{x}}\operatorname{arctg}\frac{1}{x-1}.$$

Розв’язання. Область визначення функції

$$D(f)=(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty).$$

На області визначення функція неперервна, оскільки є елементарною. Функція $f(x)$ визначена в проколених околах точок $x=0$ і $x=1$ і не визначена в самих цих точках, тому ці точки є точками розриву. Обчислимо

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0-0} e^{-\frac{1}{x}}\operatorname{arctg}\frac{1}{x-1}=\lim_{x\to 0-0} e^{-\frac{1}{x}}\cdot\lim_{x\to 0-0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x-1}=\lim_{x\to 0-0} e^{-\frac{1}{x}}\cdot\operatorname{arctg}(-1)=$$

$$=-\frac{\pi}{4}\lim_{x\to 0-0} e^{-\frac{1}{x}}=\left|-\frac{1}{x}\to+\infty,\quad x\to 0-0,\quad e^{-\frac{1}{x}}\to+\infty,\quad x\to 0-0\right|=-\infty.$$

Аналогічно

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0+0} e^{-\frac{1}{x}}\operatorname{arctg}\frac{1}{x-1}=\lim_{x\to 0+0} e^{-\frac{1}{x}}\cdot\lim_{x\to 0+0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x-1}=\lim_{x\to 0+0} e^{-\frac{1}{x}}\cdot\operatorname{arctg}(-1)=$$

$$=-\frac{\pi}{4}\lim_{x\to 0+0} e^{-\frac{1}{x}}=\left|-\frac{1}{x}\to-\infty,\quad x\to 0+0,\quad e^{-\frac{1}{x}}\to 0,\quad x\to 0+0\right|=-\frac{\pi}{4}\cdot 0=0.$$

Таким чином, точка $x=0$ є точкою розриву другого роду.

Знайдемо

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1-0} e^{-\frac{1}{x}}\cdot\lim_{x\to 1-0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x-1}=e^{-1}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2e}.$$

Аналогічно

$$f(1+0)=\lim_{x\to 1+0} e^{-\frac{1}{x}}\cdot\lim_{x\to 1+0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x-1}=e^{-1}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2e}.$$

Таким чином, точка $x=1$ є точкою розриву першого роду (не усувного). Величина стрибка функції $f(x)$ в точці $x=1$ дорівнює

$$f(1+0)-f(1-0)=\frac{\pi}{2e}-\left(-\frac{\pi}{2e}\right)=\frac{\pi}{e}. \qquad \square$$

Приклад 5. Дослідити на рівномірну неперервність функцію $f\left(x\right)=e^x\sin\frac{1}{x}$ на інтервалі $\left(0,1\right)$.

Розв’язання. Рівномірна неперервність функції на множині означає, що малому приросту аргумента в довільній точці $x\in\left(0,1\right)$ відповідає малий приріст функції. Однак, для функції $\sin\frac{1}{x}$ це не так. Дійсно, достатньо взяти $x_{n1}=\frac{1}{2\pi n}$ та $x_{n2}=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$. Тоді

$$\left|x_{n1}-x_{n2}\right|=\left|\frac{1}{2\pi n}-\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}\right|=\frac{\frac{\pi}{2}}{2\pi n\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)}\to 0,\quad n\to\infty,$$

Але $\sin x_{n1}=0$, а $\sin x_{n2}=1$. Отже, не слід очікувати рівномірної неперервності $f\left(x\right)$ на $\left(0,1\right)$.

Доведемо строго, що $f\left(x\right)$ не буде рівномірно неперервною на інтервалі $\left(0,1\right)$. Побудуємо заперечення до означення рівномірної неперервності: існує $\varepsilon>0$ таке, що для довільного $\delta>0$ можна вказати $x_1,x_2\in\left(0,1\right)$ такі, що $\left|x_1-x_2\right|<\delta$, але $\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|\ge\varepsilon$.

Візьмемо дві послідовності, вказані вище, а саме $x_{n1}=\frac{1}{2\pi n}$, $x_{n2}=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$, $n\in\mathbb{N}$. Ясно, що $x_{n1},x_{n2}\in\left(0,1\right)$. Оскільки

$$\left|x_{n1}-x_{n2}\right|\to 0,\quad n\to\infty,$$

то $\left|x_{n1}-x_{n2}\right|<\delta$ при достатньо великому $n\in\mathbb{N}$ для довільного $\delta>0$. Але

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left| f\left(x_{n1}\right) - f\left(x_{n2}\right) \right| = \left| e^{\frac{1}{2\pi n}} \sin 2\pi n - e^{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \right| = e^{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}} > 1.$$

Отже, при $\varepsilon = 1$ умова рівномірної неперервності не виконується. Таким чином, $f(x)$ не буду рівномірно неперервною на інтервалі $(0,1)$. □

Завдання 1

Довести неперервність функції в точці $x = x_0$ за "$\varepsilon - \delta$" означенням:

1. $f(x) = x^2 - x, \quad x_0 = 2.$
2. $f(x) = x^2 + 4x, \quad x_0 = 2.$
3. $f(x) = x^3 + x, \quad x_0 = 1.$
4. $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0.$
5. $f(x) = \dfrac{x-3}{2x-1}, \quad x_0 = 1.$
6. $f(x) = \begin{cases} x \cos \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0.$
7. $f(x) = \dfrac{x}{x+2}, \quad x_0 = 1.$
8. $f(x) = x^3 - 3x, \quad x_0 = 1.$
9. $f(x) = \cos 2x, \quad x_0 = 0.$
10. $f(x) = x^3 + 3x, \quad x_0 = -1.$

11. $f(x)=\dfrac{x+3}{4-x},\quad x_0=3.$

12. $f(x)=\dfrac{x-1}{2x+3},\quad x_0=-3.$

13. $f(x)=\sin x,\quad x_0=\dfrac{\pi}{2}.$

14. $f(x)=x^3-2x,\quad x_0=1.$

15. $f(x)=\sqrt{x+1},\quad x_0=3.$

16. $f(x)=x^2-4x,\quad x_0=1.$

17. $f(x)=\sqrt[3]{x+7},\quad x_0=1.$

18. $f(x)=\cos x,\quad x_0=\pi.$

19. $f(x)=\sin 3x,\quad x_0=\dfrac{\pi}{3}.$

20. $f(x)=\sqrt[3]{2-x},\quad x_0=1.$

21. $f(x)=\dfrac{4x+1}{3x-2},\quad x_0=2.$

22. $f(x)=x^2+x,\quad x_0=-2.$

23. $f(x)=\dfrac{1}{x},\quad x_0=4.$

24. $f(x)=2x^3+3,\quad x_0=-1.$

25. $f(x)=3x^2-1,\quad x_0=1.$

26. $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+3},\quad x_0=1.$

27. $f(x)=\sqrt{x-1}, \quad x_0=5.$

28. $f(x)=\dfrac{1}{x+1}, \quad x_0=2.$

29. $f(x)=x^3+2x, \quad x_0=1.$

30. $f(x)=\sin 2x, \quad x_0=\dfrac{\pi}{4}.$

Завдання 2

Дослідити на неперервність і зобразити схематичні графіки функції в околі точок розриву:

1. $f(x)=\dfrac{x}{\sin x}.$

2. $f(x)=\dfrac{1}{\cos x}.$

3. $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x(x+1)}.$

4. $f(x)=\dfrac{|x+2|}{x(x+1)}.$

5. $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x^2-x^3}.$

6. $f(x)=2^{\frac{1}{|x+2|}}-1.$

7. $f(x)=\dfrac{1}{2^{\frac{1}{x+1}}+3}.$

8. $f(x)=x[x]$, де $[x]$ — ціла частина x.

9. $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}.$

10. $f(x)=\dfrac{2}{x\left(1-3^{x+3}\right)}.$

11. $f(x)=\dfrac{1}{\log_2|x+1|-1}.$

12. $f(x)=\dfrac{2}{\lg|2x-3|}-1.$

13. $f(x)=\dfrac{1}{x-1}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}.$

14. $f(x)=\dfrac{1}{2^{\frac{1}{x^2-x}}+1}.$

15. $f(x)=\dfrac{2}{2^{\frac{x}{1-x}}-4}.$

16. $f(x)=x-[x]$, де $[x]$ — ціла частина x.

17. $f(x)=\dfrac{1}{2-2^{\frac{1}{2x+1}}}.$

18. $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2+x}.$

19. $f(x)=e^{\frac{1}{\sin x}}.$

20. $f(x)=\dfrac{1-x^2}{1-x}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}.$

21. $f(x)=e^{\frac{1}{\cos x}}.$

22. $f(x)=\dfrac{1}{\log_2|x-1|-1}.$

23. $f(x)=\dfrac{1-e^{-\frac{1}{x^2}}}{1-x}.$

24. $f(x)=\sqrt{x}-\left[\sqrt{x}\right],$ де $[x]$ — ціла частина x.

25. $f(x)=\left|\dfrac{\sin x}{x(x-1)}\right|.$

26. $f(x)=\dfrac{\sin x}{\left|x^2+x\right|}.$

27. $f(x)=\dfrac{x}{x-1}\sin\dfrac{1}{x}.$

28. $f(x)=[x]\sin\pi x,$ де $[x]$ — ціла частина x.

29. $f(x)=\dfrac{x}{x+1}\cos\dfrac{1}{x}.$

30. $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x+1}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}.$

Завдання 3

Обчислити ліву і праву границі функції в точках її розриву та вказати тип точок розриву.

1. $f(x)=\dfrac{x^2}{1+3^{\frac{1}{1-x}}}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}.$

2. $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}\dfrac{\ln(1+x)}{x^2-3x}.$

3. $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x+1}.$

4. $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}.$

5. $f(x)=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{1+x}}}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-1}.$

6. $f(x)=e^{-\frac{1}{(x-2)^2}}\dfrac{x}{\ln|x-3|}.$

7. $f(x)=e^{-\frac{1}{x+2}}\dfrac{\sin x}{x}.$

8. $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\ln|x+2|}.$

9. $f(x)=e^{\frac{1}{x+1}}\dfrac{x^2-1}{x^3-1}.$

10. $f(x)=e^{\frac{1}{x-2}}\dfrac{x}{\sin x}.$

11. $f(x)=2^{\frac{1}{x-3}}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x+2}.$

12. $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}\dfrac{x+2}{\ln(x+3)}.$

13. $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}\dfrac{1}{\ln(2-x)}.$

14. $f(x)=\dfrac{1+2^{\frac{1}{x}}}{1-2^{\frac{1}{x}}}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x(1-x)}.$

15. $f\left(x\right)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{1}{2-x}}}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^{2}-1}.$

16. $f\left(x\right)=e^{x^{2}+\frac{1}{x}}\dfrac{x+1}{\ln\left|x+2\right|}.$

17. $f\left(x\right)=e^{\frac{1}{1-x}}\dfrac{\left|x+1\right|}{x^{3}+x^{2}}.$

18. $f\left(x\right)=e^{\frac{1}{3-x}}\dfrac{x}{\ln\left|x+1\right|}.$

19. $f\left(x\right)=e^{\frac{x}{x-2}}x\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}.$

20. $f\left(x\right)=\dfrac{1}{1-3^{x-3}}\cdot\dfrac{\sin x}{\operatorname{tg}x}\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-2}.$

21. $f\left(x\right)=e^{x^{2}+\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{\cos x}{\operatorname{ctg}x}\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x+1}.$

22. $f\left(x\right)=e^{\frac{1}{x-3}}\cdot\dfrac{\sin x}{\operatorname{tg}x}\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x+2}.$

23. $f\left(x\right)=e^{x+\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{1}{\ln\left|x-2\right|}.$

24. $f\left(x\right)=2^{-\frac{1}{(x-1)^{2}}}\cdot\dfrac{x\ln\left|x+3\right|}{\operatorname{arctg}x}.$

25. $f\left(x\right)=\dfrac{\sin x}{1-2^{\frac{1}{x-1}}}\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2-x}.$

26. $f\left(x\right)=\dfrac{x+1}{\left|x^{3}+1\right|}\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}.$

27. $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{x}{\ln|x-2|}$.

28. $f(x)=e^{\frac{1}{3-x}}\cdot\frac{x}{\ln|x+1|}$.

29. $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{\ln(x+1)}{x^2-3x}$.

30. $f(x)=e^{x^2+\frac{1}{x}}\cdot\frac{x+1}{\ln|x+2|}$.

Завдання 4

Довести, що рівняння $f(x)=0$ має корінь $x_0\in[a,b]$.

1. $f(x)=\sin x-x+1,\quad [a,b]=\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$.

2. $f(x)=x^5-x-3,\quad [a,b]=[0,2]$.

3. $f(x)=3\sin x-2x,\quad [a,b]=\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$.

4. $f(x)=x3^{x^2}-4\cos x,\quad [a,b]=[0,2]$.

5. $f(x)=3\ln x-x,\quad [a,b]=[1,e]$.

6. $f(x)=x-e^{\frac{x}{3}},\quad [a,b]=[1,e]$.

7. $f(x)=x^5-3x-1,\quad [a,b]=[1,2]$.

8. $f(x)=\mathrm{tg}\,x+\sin x-1,\quad [a,b]=\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.

9. $f(x)=x^5-6x^2+3x-7,\quad [a,b]=[0,2]$.

10. $f(x)=3\sin^3 x-5\sin x+1, \quad [a,b]=\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right].$

Довести, що криві $y=f(x)$ і $y=g(x)$ мають спільну точку на відрізку $[a,b]$.

11. $f(x)=x^5+1, \quad g(x)=3x+2, \quad [a,b]=[1,2].$

12. $f(x)=\arcsin x, \quad g(x)=1-x, \quad [a,b]=[0,1].$

13. $f(x)=\cos 2x, \quad g(x)=x, \quad [a,b]=\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right].$

14. $f(x)=\cos x, \quad g(x)=\operatorname{tg} x, \quad [a,b]=\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right].$

15. $f(x)=x^5-x, \quad g(x)=2x-1, \quad [a,b]=[1,2].$

Знайти кількість усіх дійсних коренів наступних рівнянь.

16. $x^3+3x-7=0.$

17. $x+\sin x=0.$

18. $x+\cos x=0.$

19. $x^5+x-5=0.$

20. $x^3+\operatorname{arctg} x=0.$

Дослідити на рівномірну неперервність функції на заданих множинах (для $\varepsilon>0$ знайти відповідне $\delta(\varepsilon)>0$).

21. $f(x)=x^2, \quad x\in(-1,1).$

22. $f(x)=x^3, \quad x\in(-1,1).$

23. $f(x)=\sin x^2, \quad x\in(-2,3).$

24. $f(x)=x^2, \quad x\in(-\infty,\infty).$

25. $f(x)=\sin x^2, \quad x\in(-\infty,\infty).$

26. $f(x)=2\sin x-\cos x, \quad x\in(-\infty,\infty).$

27. $f(x)=\sin x+2\cos x, \quad x\in(-\infty,\infty).$

28. $f(x)=x^2-2x-1, \quad x\in(-2,5).$

29. $f(x)=x^3+3x-2, \quad x\in(-1,2).$

30. $f(x)=\cos x-3\sin x, \quad x\in(-\infty,\infty).$

Додаткові завдання

теоретичного характеру

1. Довести, що функція

$$f(x)=\begin{cases} 2^x+1, & x\in[-1,0), \\ 1, & x=0, \\ 2^x-1, & x\in(0,1] \end{cases}$$

визначена та обмежена на відрізку $[-1,1]$, не має на ньому ні найбільшого, ні найменшого значення.

2. Довести, що функція Рімана

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \text{якщо } x=\dfrac{m}{n}, \text{ де } m \text{ і } n \text{ взаємно прості}, \\ 0, & \text{якщо } x \text{ ірраціональне} \end{cases}$$

неперервна в кожній ірраціональній точці і розривна в кожній раціональній точці.

3. Довести, що функція Діріхле

$$D(x)=\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\cos^n(\pi m!x)\right)$$

розривна при кожному дійсному значенні x.

4. Знайти точки неперервності функції

$$f(x)=xD(x),$$

де $D(x)$ — функція Діріхле (задача 3).

5. Дано, що $f(x)$ неперервна, а $g(x)$ має розрив у точці $x=x_0$. Чи завжди буде розривною в точці $x=x_0$ сума $f(x)+g(x)$? Навести приклади.

6. Функції $f(x)$ і $g(x)$ мають розрив у точці $x=x_0$. Чи завжди буде розривною в точці $x=x_0$ сума $f(x)+g(x)$? Навести приклади.

7. Чи можна стверджувати, що квадрат розривної функції є завжди розривна функція? Навести приклади.

8. Довести, що модуль неперервної функції є неперервною функцією.

9. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$. Довести, що функція

$$m(x)=\inf_{t\in[a,x]} f(t)$$

теж неперервна на відрізку $[a,b]$.

10. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$. Довести, що функція

$$M(x)=\sup_{t\in[a,x]} f(t)$$

теж неперервна на відрізку $[a,b]$.

11. Чи можливо, щоб для немотонної функції $y=f(x)$, $x\in(-\infty,+\infty)$, існувала обернена? Розглянути приклад

$$f(x)=\begin{cases} x, & \text{якщо } x \text{ раціональне,} \\ -x, & \text{якщо } x \text{ ірраціональне.} \end{cases}$$

12. Довести, що функція

$$f(x)=\cos\frac{\pi}{x}$$

неперервна і обмежена на інтервалі $(0,1)$, але не є рівномірно неперервною на ньому.

13. Довести, що функція

$$f(x)=\ln x$$

неперервна і обмежена на інтервалі $(0,1)$, але не є рівномірно неперервною на ньому.

14. Дослідити на рівномірну неперервність функцію

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}$$

на інтервалі $(0,\pi)$.

15. Дослідити на рівномірну неперервність функцію

$$f(x)=e^x\cos\frac{1}{x}$$

на інтервалі $(0,1)$.

16. Числова множина $A\subset\mathbb{R}$ називається відкритою, якщо кожна точка із A має окіл, що входить в A.

Довести, що кожний інтервал (a,b) є відкритою множиною.

17. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, $f(a) \neq f(b)$ і число C знаходиться між $f(a)$ та $f(b)$. Довести, що множина

$$A = \{x \in (a,b) \mid \quad f(x) < C\}$$

є відкритою.

18. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, $f(a) \neq f(b)$ і число C знаходиться між $f(a)$ та $f(b)$. Довести, що множина

$$B = \{x \in (a,b) \mid \quad f(x) > C\}$$

є відкритою.

19. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, $f(a) \neq f(b)$ і число C знаходиться між $f(a)$ та $f(b)$. Довести, що множина

$$S = \{x \in [a,b] \mid \quad f(x) = C\}$$

має найбільший та найменший елементи.

20. Числова множина $B \subset \mathbb{R}$ називається замкнутою, якщо її доповнення $\mathbb{R} \setminus B$ — відкрита множина (задача 16).

Нехай функція $f(x)$ неперервна при всіх $x \in \mathbb{R}$, множина $B \in E(f)$,

$$f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} \mid \quad f(x) \in B\} \text{ —}$$

прообраз множини B. Довести, що якщо B — замкнута множини, то її прообраз $f^{-1}(B)$ теж є замкнутою множиною.

21. Нехай функція $f(x)$ неперервна при всіх $x \in \mathbb{R}$, множина $B \in E(f)$,

$$f^{-1}(B)=\{x\in\mathbb{R} \mid \quad f(x)\in B\} \text{ — }$$

прообраз множини B. Довести, що якщо B — відкрита множини, то її прообраз $f^{-1}(B)$ теж є відкритою множиною.

22. Довести критерій неперервності функції $f(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Для того, щоб функція $f(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ була неперервною на $\mathbb{R}$, необхідно і достатньо, щоб прообраз кожної відкритої множини в $\mathbb{R}$ був відкритою множиною.

23. Чи існує неперервне відображення

   a. відрізка на інтервал;

   b. інтервала на відрізок?

побудувати взаємно однозначне відображення відрізка на інтервал.

24. Функція $f(x)$ неперервна на інтервалі (a,b). Довести, що для довільних чисел $x_1<x_2<\ldots<x_n$ із інтервала (a,b) і довільних чисел $\alpha_i\ge 0,\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1,$ існує число c, $x_1\le c\le x_n$, таке, що

$$f(c)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i).$$

25. 1) Довести, що існує нескінченно багато функцій $y=\varphi(x)$, $\varphi:(a,b)\to\mathbb{R},$ які задовольняють рівняння

$$y^2=1.$$

2) Нехай $f(x)$ — неперервна і додатна на інтервалі (a,b) функція. Довести, що існує єдина неперервна на (a,b) функція $y=\varphi(x)$, що задовольняє рівняння

$$y^2 = f(x)$$

і умову $\varphi(x_0) > 0$ для деякої точки $x_0 \in (a,b)$.

26. Знайти всі неперервні на числовій прямій $\mathbb{R}$ функції такі, що для довільного $x \in \mathbb{R}$ справедлива рівність

$$f\left(\frac{x}{3}\right) + f\left(\frac{2x}{3}\right) = x.$$

27. Знайти всі неперервні на числовій прямій $\mathbb{R}$ функції такі, що для довільного $x \in \mathbb{R}$ справедлива рівність

$$f(x) + f(3x) = x.$$

28. Знайти всі неперервні на числовій прямій $\mathbb{R}$ функції такі, що для довільного $x \in \mathbb{R}$ справедлива рівність

$$f(x^2) + f(x) = x^2 + x.$$

29. Знайти всі неперервні на числовій прямій $\mathbb{R}$ функції такі, що для довільних $x, y \in \mathbb{R}$ задовольняють рівність

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

30. Знайти всі неперервні на числовій прямій $\mathbb{R}$ функції такі, що для довільних $x, y \in \mathbb{R}$ задовольняють рівність

$$f(x+y) = f(x)\,f(y).$$