8. ПОХІДНА

Нехай функція f визначена в деякому околі точки x_0.

Приростом аргумента називається різниця

$$\triangle x = x - x_0,$$

де $x \neq x_0$, $x \in D_f$.

Приростом функції називається вираз

$$\triangle y(x_0) = \triangle f(x_0) = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0).$$

Якщо існує скінченна границя

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle f(x_0)}{\triangle x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x},$$

то ця границя називається похідною функції f в точці x_0 та позначається

$$f'(x_0) = \dot{f}(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0).$$

Операція знаходження похідної називається диференціюванням.

Приклад 1. Знайти за означенням похідну від функції $y = \sin x$.

Розв'язання. Розглянемо границю відношення приросту нашої функції до приросту агрумента при $\triangle x \to 0$. Для довільної точки $x_0 \in \mathbb{R}$ маємо

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\sin(x_0 + \triangle x) - \sin(x_0)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{2\sin\frac{\triangle x}{2}\cos\left(x_0 + \frac{\triangle x}{2}\right)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \cos\left(x_0 + \frac{\triangle x}{2}\right) = \cos x_0,$$

оскільки косинус є неперервною функцією. Таким чином,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\sin x)' = \cos x.$$

Відповідь: $(\sin x)' = \cos x.$ □

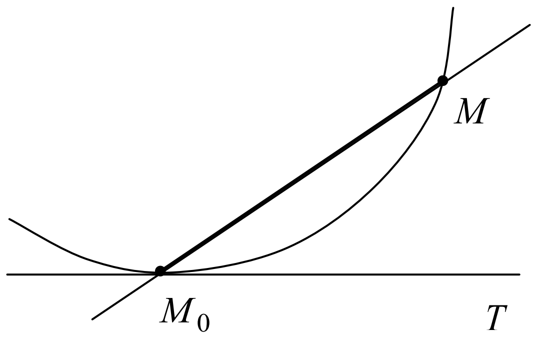
Приклад 2. Довести за означенням, що похідна функції $y=|x|$ в точці $x=0$ не існує.

Доведення. Розглянемо односторонні границі даної функції в точці $x=0$. Тоді

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{|x|-|0|}{x}=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{-x}{x}=-1,$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{|x|-|0|}{x}=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{x}{x}=1.$$

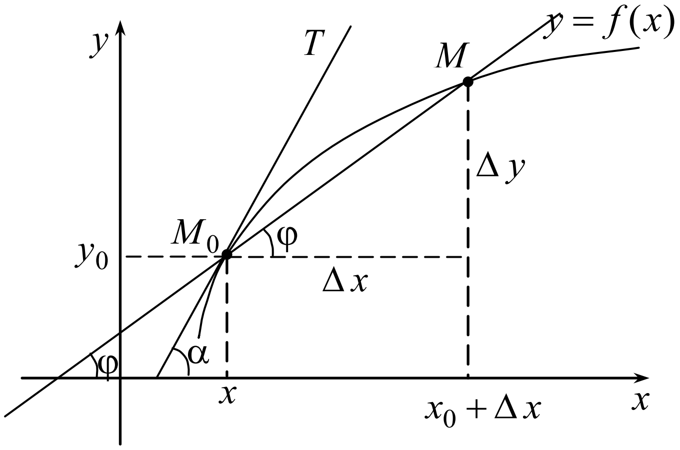
Оскільки між односторонніми границями немає рівності, відповідна границя в точці $x=0$ не існує, тобто не існує похідна. □



Візьмемо на кривій точки M_0 і M і проведемо січну M_0M. Коли точка M буде рухатись вздовж кривої, ця січна буде обертатись навколо точки M_0.

Дотичною до кривої в точці M_0 називається граничне положення M_0T січної M_0M, якщо воно існує, коли точка M вздовж кривої наближається до точки M_0.

Розглянемо графік функції $y=f(x)$. Нехай $M_0(x_0;y_0)$та $M(x_0+\Delta x;\ y_0+\Delta y)$. Позначимо через φ кут між січною M_0M і віссю Ox. Очевидно, що $\operatorname{tg}\varphi=\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Якщо $\Delta x\to 0$, то $M\to M_0$ і кут φ буде змінюватися. Якщо існує границя $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varphi=\alpha$, то пряма M_0T, що утворює з віссю Ox кут α, буде дотичною до кривої $y=f(x)$ у точці M_0. Тоді



$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

,

тобто

$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha .$$

Геометричний зміст похідної: похідна функції f в точці x_0 дорівнює тангенсу кута між дотичною до графіка функції f в точці $\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$ та віссю абсцис, тобто кутовому коефіцієнту дотичної.

Пряма, що проходить через точку $\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$ перпендикулярно дотичній до графіка функції f у цій точці, називається нормаллю.

Рівняння дотичної до графіка функції f в точці $\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$:

$$y = f\left(x_0\right) + f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right).$$

Рівняння нормалі до графіка функції f в точці $\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$:

$$y = f\left(x_0\right) - \frac{1}{f'\left(x_0\right)}\left(x - x_0\right).$$

Якщо функція має похідну в точці, то вона й неперервна і цій точці.

Таблиця похідних.

1. $C' = 0.$
2. $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha - 1},$ $\quad a)\ \left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2},$ $\quad б)\ (\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad в)\ (\sqrt[n]{x})' = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$
3. $(\sin x)' = \cos x.$
4. $(\cos x)' = -\sin x.$

11. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$
12. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$

5. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

6. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

7. $(a^x)' = a^x \ln a$.

8. $(e^x)' = e^x$.

9. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$.

10. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

13. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

14. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

15. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$.

16. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.

17. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

18. $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Правила диференціювання

Якщо $u(x)$, $v(x)$ мають похідні, а C — довільна стала, то

1. $C' = 0$.
2. $(Cu)' = Cu'$.
3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$.
4. $(uv)' = u'v + uv'$.
5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}, \quad (v \neq 0)$.

Приклад 3. Знайти похідну функції

$$y = \frac{\sqrt{x}}{\operatorname{arcctg} x}.$$

Розв’язання. Користуючись правилом диференціювання частки

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

і таблицею похідних, дістанемо:

$$y' = \frac{\left(\sqrt{x}\right)' \operatorname{arcctg} x - \sqrt{x}\,(\operatorname{arcctg} x)'}{(\operatorname{arcctg} x)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \operatorname{arcctg} x - \sqrt{x}\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)}{\operatorname{arcctg}^2 x} =$$

$$= \frac{(1+x^2)\operatorname{arcctg} x + 2x}{2\sqrt{x}\,(1+x^2)\operatorname{arcctg}^2 x}.$$

Відповідь: $y' = \dfrac{(1+x^2)\operatorname{arcctg} x + 2x}{2\sqrt{x}\,(1+x^2)\operatorname{arcctg}^2 x}$. □

Теорема (похідна складеної функції).

Якщо функція $y = f(x)$ має похідну $f'(x_0)$ в точці x_0, а функція $g(y)$ має похідну $g'(y_0)$ у відповідній точці $y_0 = f\left(x_0\right)$, то складена функція $g(f(x))$ в цій точці x_0 має похідну $g'(f(x_0))f'(x_0)$, тобто похідна складеної функції дорівнює добутку похідної даної функції по проміжному аргументу y на похідну проміжного аргумента по x.

За допомогою методу математичної індукції це правило диференціювання складеної функції можна узагальнити на ланцюжок із довільного скінченного числа функцій.

Приклад 4. Знайти похідну функції

$$y = 2^{\arccos(\ln x)}.$$

Розв'язання. Користуючись правилом диференціювання складеної функції й таблицею похідних, дістанемо:

$$y' = 2^{\arccos(\ln x)} \cdot \ln 2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}}\right) \cdot \frac{1}{x} = -\frac{2^{\arccos(\ln x)} \cdot \ln 2}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}.$$

Відповідь: $y' = -\dfrac{2^{\arccos(\ln x)} \cdot \ln 2}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$. □

Теорема (похідна оберненої функції).

Нехай $f:(a,b)\to\mathbb{R},$ де $-\infty\le a<b\le+\infty,$ а також

1. $f\in C\big((a,b)\big);$

2. f строго зростає на $(a,b).$

Позначимо

$$(c,d)=\{f(x),\,x\in(a,b)\}.$$

Нехай функція $g:(c,d)\to(a,b)$ — обернена функція до f. Якщо функція f має похідну в точці $x_0\in(a,b)$, причому $f'(x_0)\ne0$, то існує похідна функції g в точці $y_0=f(x_0)$, причому

$$g'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}=\frac{1}{f'\big(g(y_0)\big)}.$$

Приклад 5. Знайти похідну функції

$$y=\arcsin x.$$

Розв'язання. Оберненою до функції $f(x)=\arcsin x$ є функція $g(y)=\sin x$. Отже,

$$\forall x\in(-1,1)\quad f'(x)=\frac{1}{g'(y)}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Знак перед квадратним коренем обумовлений тим, що $\cos y=\cos(\arcsin x)$, $\arcsin x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, а косинус на цьому проміжку додатний.

Відповідь: $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$ □

Якщо обидві змінні x та y є функціями від деякого параметра t, та кажуть, що функція $y(x)$ задана параметрично.

Теорема (похідна параметрично заданої функції).

Нехай

$$\begin{cases} y = \psi(t), \\ x = \varphi(t), \end{cases} \quad t \in (a,b),$$

причому на інтервалі існують похідні (a,b) φ' та ψ' , а також φ строго монотонна на (a,b). Тоді існує похідна

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Приклад 6. Знайти похідну функції

$$\begin{cases} y = \sin^3 t, \\ x = \cos^3 t. \end{cases}$$

Розв’язання. Оскільки

$$y' = \left(\sin^3 t\right)' = 3\sin^2 t \cos t, \quad x' = \left(\cos^3 t\right)' = -3\cos^2 t \sin t,$$

то за правилом диференціювання параметрично заданої функції одержимо

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{3\sin^2 t \cos t}{-3\cos^2 t \sin t} = -\frac{\sin t}{\cos t} = -\mathrm{tg}\, t.$$

Відповідь: $y'_x = -\mathrm{tg}\, t, \quad x = \cos^3 t.$ □

Під неявним заданням функції розуміють задання функції у вигляді рівняння $F(x,y) = 0,$ не розв’язаного відносно залежної змінної y. Це рівняння задає функцію лише тоді, коли множина його розв'язків (x, y) така, що кожному значенню x відповідає тільки одне значення y.

Щоб знайти похідну від неявно заданої функції $F(x, y)=0$, потрібно взяти похідну по x від обох частин рівності, вважаючи y функцією від x, та розв'язати одержане рівняння відносно похідної y'.

Похідна неявної функції виражається через незалежну змінну x і саму функцію y.

Приклад 7. Знайти похідну функції

$$y + x\ln y = 5.$$

Розв'язання. Функція задана у неявному вигляді. Щоб її продиференціювати, треба взяти похідну по x від обох частин рівності $y + x\ln y = \; = 5$, вважаючи y функцією від x, і одержане рівняння розв'язати відносно y':

$$y' + \ln y + \frac{x}{y}y' = 0, \qquad \left(1 + \frac{x}{y}\right)y' = -\ln y, \qquad y' = -\frac{y\ln y}{x + y}.$$

Відповідь: $-\dfrac{y\ln y}{x + y}$. □

Диференціал.

Фукція f називається диференційовною в точці x_0, якщо існує така константа $L \in \mathbb{R}$, що приріст функції має вигляд

$$f(x) - f(x_0) = L(x - x_0) + o(x - x_0), \quad x \to x_0.$$

Для диференційовної функції f лінійна функція $L(x - x_0)$ називається диференціалом в точці x_0 і позначається $df(x_0)$.

Тоді

$$dx = x - x_0 = \vartriangle x.$$

Функція f диференційовна в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли в точці x_0 існує похідна $f'(x_0)$, причому

$$df(x_0) = f'(x_0)dx.$$

Остання формула дає змогу розглядати похідну як відношення диференціала функції до диференціала незалежної змінної: $f'(x) = \frac{df}{dx}$.

Форма запису диференціала функції не залежить від того, чи є змінна x незалежною змінною чи функцією від іншої змінної t. Ця властивість називається інваріантність форми диференціала.

Правило Лопіталя.

Розглянемо відношення $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, де функції $u(x)$ і $v(x)$ визначені і диференційовні в деякому околі точки $x = a$ (крім, можливо, самої точки a). Якщо при $x \to a$ функція $f(x)$ має невизначеність типу $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, то розкрити її можна, користуючись таким правилом:

Теорема (правило Лопіталя). Границя відношення двох нескінченно малих або нескінченно великих функцій дорівнює границі відношення їх похідних, якщо вона існує, тобто

$$\lim_{x \to a} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x \to a} \frac{u'(x)}{v'(x)}.$$

Приклад 8. Обчислити границі, користуючись правилом Лопіталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{e^x-x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$.

Розв'язання.

а) Застосовуючи правило Лопіталя, маємо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{e^x-x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln(1+x)-x)'}{(e^x-x-1)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{(1+x)(e^x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{e^x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=-\lim_{x\to 0}\frac{x'}{(e^x-1)'}=-\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^x}=-1.$$

б) Використовуючи правило Лопіталя, маємо:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2}{x^2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2}{x^4}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin^2 x-x^2)'}{(x^4)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x-2x}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-2x}{4x^3}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 2x-2x)'}{(4x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x-2}{12x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-1}{6x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos 2x-1)'}{(6x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 2x}{12x}=-\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=-\frac{1}{3}.$$

Відповідь: а) -1; б) $-\frac{1}{3}$. □

Розкриття невизначеностей інших типів за допомогою правила Лопіталя.

1. Невизначеність $[0\cdot\infty]$ зводиться до $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Нехай $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, а $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$. Тоді

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x)=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{(g(x))^{-1}}=\left[\frac{0}{0}\right],$$

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x)=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{(f(x))^{-1}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Приклад 9. Обчислити границю, користуючись правилом Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0+} x^3\ln x.$$

Розв’язання. За правилом Лопіталя

$$\lim_{x\to 0+} x^3\ln x=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{x^{-3}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to 0+}\frac{x^{-1}}{-3x^{-4}}=-\lim_{x\to 0+}\frac{x^3}{3}=0.$$

Відповідь: 0. □

2. Невизначеність $[\infty-\infty]$ зводиться до $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Нехай $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$. Тоді

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)-g(x)\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{f^{-1}(x)}-\frac{1}{g^{-1}(x)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{g^{-1}(x)-f^{-1}(x)}{f^{-1}(x)\cdot g^{-1}(x)}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Приклад 10. Обчислити границю

$$\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x-x^{-1}\right).$$

Розв’язання. За правилом Лопіталя

$$\lim_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg} x - x^{-1}\right) = [\infty - \infty] = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x - \operatorname{tg} x}{x \operatorname{tg} x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\left(x\cos x - \sin x\right)'}{\left(x\sin x\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{\sin x + x\cos x} =$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\sin x + x\cos x} = -\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\dfrac{\sin x}{x} + \cos x} = -\frac{0}{2} = 0.$$

Відповідь: 0. □

3. Невизначеності $\left[1^{\infty}\right]$, $\left[0^{0}\right]$, $\left[\infty^{0}\right]$ розкриваються за допомогою формули

$$\left(f(x)\right)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)},$$

якщо функція $f(x)$ додатна.

Приклад 11. Обчислити границю

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}.$$

Розв’язання. Перейдемо до неперервної змінної та обчислимо

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{-1}}{1}} = e^{0} = 1.$$

Відповідь: 1. □

Теореми про диференційовні функції.

Теорема (Ферма). Нехай $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, а в точці $x_0\in(a,b)$ досягається найбільше або найменше значення на інтервалі (a,b). Якщо в точці x_0 існує похідна функції f, то

$$f'(x_0)=0.$$

Теорема (Ролль). Нехай $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ та виконуються такі умови:

1) $f\in C([a,b])$;

2) $\forall x\in(a,b)\quad \exists f'(x)$;

3) $f(a)=f(b)$.

Тоді

$$\exists c\in(a,b)\quad f'(c)=0.$$

Теорема (Лагранж). Нехай $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ та виконуються такі умови:

1) $f\in C([a,b])$;

2) $\forall x\in(a,b)\quad \exists f'(x)$.

Тоді

$$\exists c\in(a,b)\quad f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$

Наслідок 1. Якщо функція f має тотожно рівну нулю похідну на інтервалі, то на цьому проміжку функція f є сталою.

Наслідок 2. Якщо функції f і g мають тотожно рівні нулю похідні на інтервалі, то на цьому проміжку дані функції відрізняються лише на сталу.

Теорема (Коші). Нехай $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ та виконуються такі умови:

1) $f,g\in C([a,b])$;

2) $\forall x\in(a,b)\quad \exists f'(x),\, g'(x)$;

3) $\forall x \in (a,b) \quad g'(x) \neq 0.$

Тоді

$$\exists c \in (a,b) \quad \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Приклад 12. Довести, що

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad |\sin x_1 - \sin x_2| \leq |x_1 - x_2|.$$

Доведення. Нехай для визначеності $x_1 < x_2$. За теоремою Лагранжа

$$\exists x_0 \in (x_1, x_2) \quad \sin x_2 - \sin x_1 = \cos x_0 \cdot (x_2 - x_1),$$

$$|\sin x_1 - \sin x_2| = |\cos x_0| \cdot |x_1 - x_2| \leq |x_1 - x_2|,$$

що й треба було довести. □

Похідні та диференціали вищих порядків.

Похідна диференційовної функції в свою чергу теж є функцією і може мати похідну, яку називають похідною другого порядку або другою похідною.

Дамо означення похідних вищих порядків за індукцією.

Похідна f' диференційовної функції f називається похідною першого порядку функції f. Якщо існує похідна порядку $n \in \mathbb{N}$, то похідна від неї називається похідною порядку $n+1$, тобто

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)'.$$

За означенням вважають похідною нульового порядку саму функцію f.

Теорема (Лейбніц). Нехай функції f та g мають похідні порядку $n \in \mathbb{N}$. Тоді існує похідна порядку n їхнього добутку і

$$(fg)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(k)}g^{(n-k)}.$$

Виведемо формулу для другої похідної параметрично заданої функції. Нехай

$$\begin{cases} y=\psi(t), \\ x=\varphi(t), \end{cases} \quad t\in(a,b).$$

Нагадаємо, що $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\dfrac{\psi'_t}{\varphi'_t}$. Тоді функцію

$$\begin{cases} y=\dfrac{\psi'_t}{\varphi'_t}, \\ x=x(t), \end{cases} \quad t\in(a,b)$$

можна розглядати як нову функцію, від якої можна брати похідну.

$$y''_{xx}=\frac{\left(y'_x\right)'_x}{x'_t}=\frac{1}{x'_t}\cdot\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t=\frac{1}{x'}\cdot\frac{y''_{tt}\cdot x'_t-y'_t\cdot x''_{tt}}{\left(x'_t\right)^2}=\frac{y''_{tt}\cdot x'_t-y'_t\cdot x''_{tt}}{\left(x'_t\right)^3}.$$

Таким чином,

$$y''_{xx}=\frac{y''_{tt}\cdot x'_t-y'_t\cdot x''_{tt}}{\left(x'_t\right)^3}.$$

Приклад 12. Знайти другу похідну функції

$$\begin{cases} y=\sin t, \\ x=\cos t, \end{cases} \quad t\in(0,2\pi).$$

Розв’язання. Оскільки

$$x'_t=-\sin t,\quad x''_{tt}=-\cos t,\quad y'_t=\cos t,\quad y''_{tt}=-\sin t,$$

одержимо

$$y''_{xx} = \frac{y''_{tt} \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_{tt}}{\left(x'_t\right)^3} = \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{-\sin^3 t} = -\frac{1}{\sin^3 t} = -\frac{1}{y^3}.$$

Відповідь: $y''_{xx} = -\frac{1}{y^3}$. □

Диференціал df диференційовної функції f називається диференціалом першого порядку функції f. Якщо існує диференціал порядку $n \in \mathbb{N}$, то диференціал від нього називається диференціалом порядку $n+1$, тобто

$$d^{(n+1)} f = d\left(d^{(n)} f\right).$$

При обчисленні диференціалів вищих порядків важливо пам’ятати, що dx не залежить від x, а отже, при диференціюванні його слід розглядати як постійний множник.

Методом математичної індукції легко доводиться, що

$$d^{(n)} f = f^{(n)} dx^n.$$

Диференціали вищих порядків не мають інваріантності форми.

Завдання 1

Знайти похідні функцій:

1. $y = x^{\arcsin x}$.

2. $y = (\ln x)^{\sin x}$.

3. $y = (\cos x)^{\operatorname{tg} x}$.

4. $y = (\operatorname{arcctg} x)^{\operatorname{tg} x}$.

5. $y = x^{\operatorname{arcctg} x}$.

6. $y = (\ln x)^{x+3}$.

7. $y = (\mathrm{arcctg} x)^{x^2}$.

8. $y = x^{\mathrm{ctg}\, x}$.

9. $y = (\cos x)^{2x}$.

10. $y = (\mathrm{ctg} x)^{e^x}$.

11. $y = (\cos x)^{\sin x}$.

12. $y = (\mathrm{ctg} x)^{\sqrt{x}}$.

13. $y = (\ln x)^{\sqrt{x+3}}$.

14. $y = (\ln(x+1))^{\mathrm{tg} x}$.

15. $y = (\mathrm{ctg} x)^{\lg x}$.

16. $y = (1+\sqrt{x})^{x}$.

17. $y = (\ln x)^{1+\sin x}$.

18. $y = (\mathrm{arctg} x)^{x^2}$.

19. $y = x^{\arccos x}$.

20. $y = (\mathrm{arctg} x)^{\sqrt{x}}$.

21. $y = x^{\sin x}$.

22. $y = (\log_4 x)^{\sin x}$.

23. $y = (\mathrm{arctg} x)^{\sqrt{x+1}}$.

24. $y = x^{\ln^2 x}$.

25. $y = (\lg x)^{\operatorname{tg} x}$.

26. $y = (\sin x)^{\operatorname{arcctg} x}$.

27. $y = (\operatorname{tg} x)^{\log_4 x}$.

28. $y = \left(\sqrt{x}\right)^{\sin x}$.

29. $y = (3x)^{\operatorname{arcctg} 3x}$.

30. $y = (\cos 2x)^{\operatorname{arctg} 5x}$.

Завдання 2

Знайти похідні y'_x функцій:

1. $xy = x + e^y$.

2. $\sqrt{y} = e^{xy} + 3$.

3. $xy = \operatorname{tg}\ x + y\ $.

4. $x + y = \ln\ x - y\ $.

5. $y = \sin\ xy\ $.

6. $\cos\ xy\ = x - 2y$.

7. $xy^2 = x^2 + y + 1$.

8. $y = \operatorname{ctg}\ x + y\ $.

9. $y^2 = x \sin y$.

10. $y = x^2 \operatorname{tg}(x + y)$.

11. $\arcsin y = x + y$.

12. $\operatorname{tg} y = x - y^2$.

13. $y = x^2 + \cos y$.

14. $x^2 + y^2 + xy = 0$.

15. $x + y^3 - x^2 y = 0$.

16. $y = x \operatorname{tg} y$.

17. $y = e^{xy}$.

18. $y^2 = \sin(x^2 + y)$.

19. $x + \dfrac{1}{y} = xy^2$.

20. $x^3 - y^3 = x^2 y$.

21. $x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = xy$.

22. $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \sin y$.

23. $x^2 + y^2 = \cos(x + y)$.

24. $x^2 y = y^4 - x^2$.

25. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = y^2$.

26. $y^3 + xy + x^3 = 0$.

27. $\operatorname{ctg}(x + y) = y^2$.

28. $\ln(x+y)=x-y.$

29. $y=\operatorname{ctg}(x^2+y^2).$

30. $e^{x+y}=xy^2.$

Завдання 3

Обчислити знайти похідні першого та другого порядку параметрично заданих функцій:

1. $\begin{cases} x=\dfrac{\ln t}{t}, \\ y=t^3\ln t. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x=2\cos^2 t, \\ y=3\sin^2 t. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x=\sqrt{1-t^2}, \\ y=\operatorname{tg}\sqrt{1+t}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x=6\cos^3 t, \\ y=2\sin^3 t. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x=e^t\cos t, \\ y=e^t\sin t. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x=\dfrac{1}{t+2}, \\ y=\dfrac{t^2}{(t+2)^2}. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x=\operatorname{sh}^2 t, \\ y=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 t}. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x = e^{-2t}, \\ y = e^{4t}. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x = t + \sin t, \\ y = 2 - \cos t. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \sqrt[5]{t}. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x = \operatorname{arcctg} t, \\ y = e^{t}. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \sec t. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x = t^3 - 3t, \\ y = 5t^3 - 3t^2. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t, \\ y = \dfrac{1}{\sin^2 t}. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x = e^{t} \cos t, \\ y = e^{t} \sin t. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x = \sqrt{t-1}, \\ y = \dfrac{t}{\sqrt{t-1}}. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x = t^3 \ln t, \\ y = t^2 \ln t. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \ln \sin t. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x = \arccos t, \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x = \cos t + t \sin t, \\ y = \sin t - t \cos t. \end{cases}$

21. $\begin{cases} x = e^t, \\ y = \arcsin e^t. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin^4 \dfrac{t}{2}. \end{cases}$

23. $\begin{cases} x = 5 \sin^3 t, \\ y = 3 \cos^3 t. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x = e^{-3t}, \\ y = \ln(1+e^t). \end{cases}$

25. $\begin{cases} x = \operatorname{ch}^2 t, \\ y = \sqrt[3]{\operatorname{sh}^2 t}. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \dfrac{1}{2} t^2. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 4(2 + \cos t). \end{cases}$

28. $\begin{cases} x = \ln^2 t, \\ y = t + \ln t. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x = e^t, \\ y = te^{-t}. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x = \sin t - t\cos t, \\ y = \cos t + t\sin t. \end{cases}$

Завдання 4

Обчислити границі, користуючись правилом Лопіталя:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{1 - e^{4x}}$;

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\ln\cos x}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2} - x^2 - 1}{1 - \cos x}$;

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$;

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{7^x - 1}{6^x - 1}$;

6. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{7x^4 - 8x^3 + 3x - 2}{x^5 - 4x^3 + 3}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{tg}x}{x^2}$;

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos 2x)}$;

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x-\operatorname{tg}x}$;

10. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln\left(1+x^3\right)}{x}$;

11. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-x^3-8}{x^3-3x-2}$;

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$;

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arcsin x}{x}$;

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{e^{x^2}-1}$;

15. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^4}{e^x}$;

16. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^5-3x^3+x-1}{x^4+3x^2-x-5}$;

17. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln^2 x}{x}$;

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg}x}{x^2}$;

19. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1}$;

20. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^x - 1}{e^{2x} - 1}$;

21. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{3^x - 3^{-x}}$;

22. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^9 + x^5 - 2}{x^4 - x^3}$;

23. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^5 - 3x}{x^3 - \sin x}$;

24. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^2}$;

25. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos x}{\sin x}$;

26. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\pi - 2\operatorname{arctg} x}{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$;

27. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin 2x}$;

28. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^4 + x^3 + x - 26}{x^4 - x^2 - 12}$;

29. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{e^{x^2} - 1}$;

30. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Завдання 5

Обчислити границі, користуючись правилом Лопіталя:

1. $\lim\limits_{x\to\infty} x\,\mathrm{tg}\frac{3}{x}.$

2. $\lim\limits_{x\to 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}.$

3. $\lim\limits_{x\to 0} x^3 \ln x^2.$

4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (2x-\pi)\,\mathrm{tg}\,x.$

5. $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}.$

6. $\lim\limits_{x\to 0} \sin^2 x\cdot\ln x^2.$

7. $\lim\limits_{x\to 1} (x-1)\,\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}.$

8. $\lim\limits_{x\to\infty} x \arcsin\frac{4}{x}.$

9. $\lim\limits_{x\to 1} \left(1-x^2\right)\mathrm{ctg}\,\pi x.$

10. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right).$

11. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x}\right).$

12. $\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{tg}\,x \ln x^2.$

13. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$.

14. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-4x^2+5x-2}{x^3-5x^2+7x-3}$.

15. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right)\ln x$.

16. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 e^{-x}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{arctg} x}\right)$.

18. $\lim\limits_{x\to \infty} x \operatorname{arctg}\frac{2}{x}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}^2 x-\frac{1}{x^2}\right)$.

20. $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{ctg} x\cdot\ln\cos x$.

21. $\lim\limits_{x\to 0} x^2\ln x^2$.

22. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}\right)$.

23. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)$.

24. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$.

25. $\lim\limits_{x\to +0} x\ln\frac{1}{x}$.

26. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$.

27. $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x^2$.

28. $\lim\limits_{x\to +0} \sin x \ln \operatorname{ctg} x$.

29. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{tg} 2x$.

30. $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{tg} x^{\sin x}$.

Завдання 6

Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої у заданій точці:

1. $y=\dfrac{3x-2x^3}{3}, x_0=1.$

2. $x=t^3+1, y=t^2, t_0=-2.$

3. $y=\dfrac{x^2}{10}+3, x_0=2.$

4. $x=\sin t, y=a^t, t_0=0.$

5. $y=\dfrac{x^2-2x-3}{4}, x_0=4.$

6. $x=\sin t, y=\cos 2t, t_0=\dfrac{\pi}{6}.$

7. $y=x^2-7x+3, x_0=1.$

8. $x=a\sin^3 t, y=a\cos^3 t, t_0=\dfrac{\pi}{3}.$

9. $y=x^2-16x+7, x_0=1.$

10. $x=\sqrt{3}\cos t, y=\sin t, t_0=\frac{\pi}{3}.$

11. $y=\sqrt{x-4}, x_0=8.$

12. $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t), t_0=\frac{\pi}{3}.$

13. $y=\sqrt{x+4}, x_0=-3.$

14. $x=2t-t^2, y=3t-t^3, t_0=1.$

15. $y=x^3-2x^2+4x-7, x_0=2.$

16. $x=\frac{2t+t^2}{1+t^3}, y=\frac{2t-t^2}{1+t^3}, t_0=1.$

17. $y=x^3-5x^2+7x-2, x_0=1.$

18. $x=\arcsin\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, y=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad t_0=-1.$

19. $y=\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}, x_0=4.$

20. $x=t\cos t-2\sin t, y=t\sin t+2\cos t, \quad t_0=\frac{\pi}{4}.$

21. $y=\sqrt{x+4}, x_0=-3.$

22. $x=2t-t^2, y=3t-t^3, t_0=1.$

23. $y=2x^2-3x+1, x_0=1.$

24. $x=2\ln \operatorname{ctg} t+1, y=\operatorname{tg} t+\operatorname{ctg} t, t_0=\frac{\pi}{4}.$

25. $y = 1 - \frac{3}{x} + \frac{6}{x^2}, x_0 = 3.$

26. $x = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}t^4, y = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3, t_0 = 0.$

27. $y = \frac{x^3 + 2}{x^3 - 2}, x_0 = 2.$

28. $x = \sin^2 t, y = \cos^2 t, t_0 = \frac{\pi}{6}.$

29. $y = 2x^2 + 3, x_0 = -1.$

30. $x = \arcsin \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}, y = \arccos t, t_0 = 1.$

9. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНИХ

Формула Тейлора.

Дуже часто при дослідженні функції виникає потреба наблизити її більш простою функцією, наприклад, многочленом, тобто представити функцію у вигляді

$$f(x)=P(x)+r(x),$$

де $P(x)$ — многочлен, а доданок $r(x)$, який називається залишковим членом, можна зробити як завгодно малим. Формула Тейлора дає таке наближення.

Теорема (формула Тейлора з залишковим членом у формі Пеано). Нехай $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$ та $n\in\mathbb{N}$. Якщо виконуються умови

1) $\forall x\in(a,b)\quad \exists f^{(n)}(x)$;

2) $\exists f^{(n)}(x_0)$,

то для довільного $x\in(a,b)$ має місце представлення

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o\Big((x-x_0)^n\Big),\quad x\to x_0.$$

Теорема (формула Тейлора з залишковим членом у формі Лагранжа). Нехай $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$ та $n\in\mathbb{N}$. Якщо виконується умова

$$\forall x\in(a,b)\quad \exists f^{(n+1)}(x),$$

то для довільного $x\in(a,b)$ має місце представлення

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

де ξ — деяка середня точка між x та x_0.

Формула Тейлора при $x_0 = 0$ також називається формулою Маклорена.

Формули Маклорена для деяких елементарних функцій:

1) $$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o\left(x^n\right) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right), \quad x \to 0;$$

2) $$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right) =$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right), \quad x \to 0;$$

3) $$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n+2}\right) =$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+2}\right), \quad x \to 0;$$

4) $$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k!} + o\left(x^n\right) =$$

$$= x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right), \quad x \to 0$$

при $x > -1$;

5) $$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \ldots + \sum_{k=1}^{n} C_\alpha^k x^k + o\left(x^n\right) =$$

$$= \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2) \cdot \ldots \cdot (\alpha-n+1)}{n!} x^n + o\left(x^n\right),$$

при $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall x > -1$, де

$$C_\alpha^k = \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!}.$$

6) $\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right) =$

$$= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right), \quad x \to 0;$$

7) $\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n+2}\right) =$

$$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+2}\right), \quad x \to 0.$$

Застосування формули Тейлора.

Формула Тейлора широко використовується при знаходженні границь та у наближених обчисленнях.

Приклад 1. Обчислити границю

$$\lim_{x\to\infty}\left(x - x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right).$$

Розв’язання. За формулою Маклорена

$$\lim_{x\to\infty}\left(x - x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x\to\infty}\left(x - x^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(x - x + \frac{1}{2} + \frac{o\left(x^{-2}\right)}{x^{-2}}\right) = \frac{1}{2}.$$

Відповідь: $\frac{1}{2}$. □

Приклад 2. Обчислити границю

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^3}.$$

Розв'язання. За формулою Маклорена

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)\left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^4\right)\right)-x-x^2}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x+x^2+\frac{x^3}{2}-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)-x-x^2}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

Відповідь: $\frac{1}{3}$. □

Приклад 3. Знайти, для яких значень x справедлива з точністю до $0,001$ наближена формула

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Розв'язання. Використаємо формулу Маклорена для косинуса з залишковим членом у формі Лагранжа:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + r(x),$$

де

$$r(x) = -\frac{\cos\xi}{4!}x^4 = \frac{1}{24}x^4.$$

Похибка буде менше $0,001$, якщо

$$|r(x)| = \frac{1}{24}x^4 < 0,001,$$

тобто при $|x| < \sqrt[4]{0,024} \approx 0,39$.

Відповідь: $x \in (-0{,}39; 0{,}39)$. □

Монотонність функцій. Екстремуми.

Теорема.

1. Якщо диференційовна функція зростає на деякому проміжку, то її похідна на цьому проміжку невід’ємна. Якщо диференційовна функція спадає на деякому проміжку, то її похідна на цьому проміжку недодатна.

2. Якщо функція має додатну похідну в кожній точці деякого проміжку, то функція на цьому проміжку зростає. Якщо функція має від’ємну похідну в кожній точці деякого проміжку, то функція на цьому проміжку спадає.

Геометричне пояснення цієї теореми досить просте, якщо пригадати, що $f'(x) = \mathrm{tg}\,\alpha$.

Кажуть, що

1) функція $f(x)$ в точці $x = x_0$ має строгий локальний максимум, якщо $f(x) < f(x_0)$ в деякому досить малому проколеному околі точки x_0.

2) функція $f(x)$ в точці $x = x_0$ має строгий локальний мінімум, якщо $f(x) > f(x_0)$ в деякому досить малому проколеному околі точки x_0;

3) функція $f(x)$ в точці $x = x_0$ має локальний максимум, якщо $f(x) \le f(x_0)$ в деякому досить малому околі точки x_0;

4) функція $f(x)$ в точці $x = x_0$ має локальний мінімум, якщо $f(x) \ge f(x_0)$ в деякому досить малому околі точки x_0.

Максимуми й мінімуми функції називають екстремумами, або екстремальними значеннями функції.

Зауваження. З означення екстремумів випливає, що функція, визначена на проміжку, може досягати екстремальних значень тільки всередині проміжку, але не на його кінцях.

Зауваження. Не слід вважати, що максимум і мінімум функції є відповідно її найбільшим і найменшим значенням на проміжку.

Теорема Ферма (необхідна умова існування екстремуму). Якщо диференційовна функція $y = f(x)$ має в точці $x = x_0$ максимум або мінімум, то її похідна в цій точці дорівнює нулю:

$$f'(x_0) = 0.$$

Зауваження. Якщо в деякій точці похідна функції дорівнює нулю, то це ще не означає, що функція в цій точці обов'язково має екстремум, тобто теорема Ферма дає тільки необхідну умову існування екстремуму, але не достатню. Наприклад, функція $y = x^3$ екстремуму не має, хоча її похідна в точці $x = 0$ дорівнює нулю.

Зауваження. У точках, в яких похідна функції не існує, функція може мати максимум або мінімум, а може не мати ані того, ані іншого.

Значення аргументу, для яких похідна дорівнює нулю або не існує, називаються критичними точками. Значення аргументу, для яких похідна дорівнює, називаються стаціонарними точками.

Зі сказаного вище випливає, що екстремальні значення функція може приймати лише в критичних точках, проте не в кожній критичній точці функція приймає екстремальне значення.

Теорема (перша достатня умова існування екстремуму). Нехай функція $f(x)$ неперервна на деякому проміжку, що містить критичну точку x_0. Тоді якщо при переході зліва направо через точку x_0 похідна $f'(x)$ змінює знак з "+" на "–", то в точці x_0 функція має максимум;

якщо при переході зліва направо через точку x_0 похідна $f'(x)$ змінює знак з "–" на "+", то в точці x_0 функція має мінімум, тобто

$$\begin{cases} f'(x)>0, & \text{при} \quad x<x_0, \\ f'(x)<0, & \text{при} \quad x>x_0 \end{cases} \Rightarrow \text{в точці } x_0 \text{ — максимум;}$$

$$\begin{cases} f'(x)<0, & \text{при} \quad x<x_0, \\ f'(x)>0, & \text{при} \quad x>x_0 \end{cases} \Rightarrow \text{в точці } x_0 \text{ — мінімум.}$$

Теорема (друга достатня умова існування екстремуму). Нехай

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(m-1)}(x_0)=0, \quad f^{(m)}(x_0)\neq 0.$$

Тоді

1) якщо число m парне і $f^{(m)}(x_0)<0$, то x_0 — точка строгого локального максимума;

2) якщо число m парне і $f^{(m)}(x_0)>0$, то x_0 — точка строгого локального мінімума;

3) якщо число m непарне, то в точці x_0 немає екстремуму.

Приклад 4. Дослідити на екстремум функцію

$$f(x)=e^x+e^{-x}+2\cos x$$

в точці $x_0=0$.

Розв'язання. Представимо функцію у вигляді

$$f(x)=2\left(\operatorname{ch} x+\cos x\right)$$

та дослідимо похідні вищих порядків в точці $x_0=0$:

$f'(0)=2\left(\operatorname{sh} x-\sin x\right)\big|_{x=0}=0,$

$$f''(0) = 2\left(\operatorname{ch} x - \cos x\right)\Big|_{x=0} = 0,$$

$$f'''(0) = 2\left(\operatorname{sh} x + \sin x\right)\Big|_{x=0} = 0,$$

$$f^{(4)}(0) = 2\left(\operatorname{ch} x + \cos x\right)\Big|_{x=0} = 4 > 0.$$

Отже, точка $x_0 = 0$ є точкою локального мінімуму.

Відповідь: $f_{\min}(0) = 4.$ □

Найбільше та найменше значення функції.

Зі сказаного вище випливає, що неперервна на відрізку $[a; b]$ функція $y = f(x)$ може досягати своїх найбільших і найменших на цьому відрізку значень лише на кінцях відрізка або в критичних точках, які належать інтервалу $(a; b)$. Тому, щоб знайти найбільші і найменші значення функції, яка неперервна на відрізку $[a; b]$, треба:

1) знайти критичні точки функції, які належать інтервалу $(a; b)$;
2) обчислити значення функції у знайдених критичних точках і в точках $x = a$, $x = b$;
3) серед обчислених значень вибрати найбільші і найменші.

Опуклість графіків функцій. Точки перегину.

Функція називається опуклою донизу на проміжку (a,b), якщо для довільного числа $\alpha \in [0;1]$

$$\forall x_1, x_2 \in (a;b) \quad f\left(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2\right) \le \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2).$$

Функція називається строго опуклою донизу на проміжку (a,b), якщо для довільного числа $\alpha \in (0;1)$

$$\forall x_1, x_2 \in (a;b),\, x_1 \neq x_2 \quad f\left(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2\right) < \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2).$$

Функція $y = f(x)$ є строго опуклою донизу на деякому інтервалі тоді і тільки тоді, коли всі її точки, крім точки дотику, лежать вище довільної її дотичної на цьому інтервалі.

Функція називається опуклою вгору на проміжку (a,b), якщо для довільного числа $\alpha \in [0;1]$

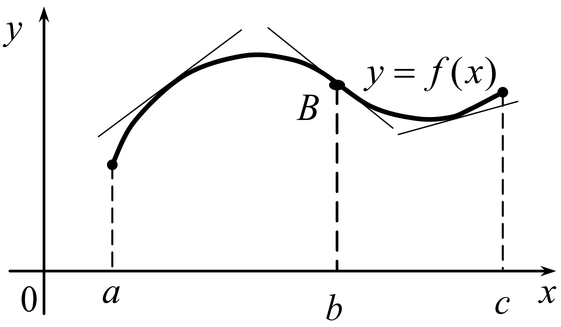
$$\forall x_1, x_2 \in (a;b) \quad f\left(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2\right) \geq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2).$$

Функція називається строго опуклою вгору на проміжку (a,b), якщо для довільного числа $\alpha \in (0;1)$

$$\forall x_1, x_2 \in (a;b),\, x_1 \neq x_2 \quad f\left(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2\right) > \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2).$$

Функція $y = f(x)$ є строго опуклою вгору на деякому інтервалі тоді і тільки тоді, коли всі її точки, крім точки дотику, лежать нижче довільної її дотичної на цьому інтервалі.

Точка неперервності функції, яка відділяє опуклу вгору частину графіка функції від опуклої донизу, називається точкою перегину.



На рисунку функція $y = f(x)$ опукла на інтервалі $(a;b)$, вгнута на інтервалі $(b;c)$ і точка $B(b;f(b))$ — точка перегину.

Теорема. Якщо в усіх точках інтервалу $(a;b)$ $f''(x) < 0$, то функція $y = f(x)$ на цьому інтервалі опукла; якщо ж в усіх точках інтервалу $(a;b)$ $f''(x) > 0$, то функція $y = f(x)$ на цьому інтервалі вгнута.

Точки, в яких $f''(x)=0$ або не існує, називаються критичними точками другого роду.

Теорема. Нехай x_0 — критична точка другого роду функції $y=f(x)$. Якщо при переході через точку x_0 похідна $f''(x)$ змінює знак, то точка $(x_0; f(x_0))$ є точкою перегину функції $y=f(x)$.

Теорема. Нехай

$$f''(x_0)=f'''(x_0)=\ldots=f^{(m-1)}(x_0)=0, \quad f^{(m)}(x_0)\neq 0.$$

Тоді

1) якщо число m непарне, то x_0 — точка перегину функції f;

2) якщо число m парне, то x_0 не є точкою перегину функції f.

Асимптоти

Пряма l називається асимптотою кривої, якщо відстань від змінної точки $M(x;y)$ кривої до прямої l прямує до нуля, коли точка $M(x;y)$, рухаючись по кривій, віддаляється на нескінченність.

Розрізняють вертикальні й невертикальні (похилі) асимптоти (горизонтальні асимптоти розглядають як окремі випадки похилих асимптот).

Для існування похилої асимптоти $x=x_0$ графіка функції f необхідно і достатньо, щоб хоча б одна з границь $f\left(x_0-0\right)$, $f\left(x_0+0\right)$ дорівнювала нескінченності.

Похилу асимптоту $y=kx+b$ графіка функції можна знайти, користуючись формулами:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}, \quad b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right).$$

Якщо хоча б одна з указаних границь не існує або дорівнює нескінченності, то графік функції похилих асимптот не має.

Зауваження. Асимптоти кривої при $x \to +\infty$ і $x \to -\infty$ можуть бути різні. У цьому випадку відповідні границі потрібно обчислювати окремо при $x \to +\infty$ і $x \to -\infty$.

Побудова графіків функцій.

Дослідити функцію та побудувати її графік можна за такою схемою:

1) знайти область визначення функції;
2) дослідити функцію на парність та непарність;
3) дослідити функцію на періодичність;
4) знайти (якщо це можливо) точки перетину графіка з координатними осями;
5) дослідити функцію на неперервність (знайти та дослідити точки розриву функції);
6) знайти інтервали монотонності, точки локальних екстремумів та значення функції в цих точках;
7) знайти інтервали опуклості, точки перегину;
8) знайти асимптоти графіка функції;
9) побудувати графік функції, враховуючи результати досліджень, проведених у п. 1–8;
10) знайти область значень функції.

Якщо функція парна (або непарна), то достатньо побудувати її графік лише для $x \geq 0$, а потім відобразити його симетрично відносно осі Oy (або відносно початку координат).

Приклад 5. Провести повне дослідження функції $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ та побудувати її графік.

Розв'язання.

1) Область визначення функції. Знаменник дробу повинен бути відмінним від нуля, тому

$$x^2 - 1 \neq 0,\ x \neq \pm 1,$$

$$D_f = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty).$$

2) Парність, непарність функції. Оскільки

$$y(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 - 1} = -\frac{x}{x^2 - 1} = -y(x),$$

то дана функція непарна. Зазначимо, що графік непарної функції симетричний відносно початку координат.

3) Періодичність функції. Функція неперіодична.

4) Точки перетину графіка функції з координатними осями.

$$Ox\ :\ y = 0, \quad \frac{x}{x^2 - 1} = 0, \quad x = 0, \quad (0; 0);$$

$$Oy\ :\ x = 0, \quad y = \frac{0}{0^2 - 1} = 0, \quad (0; 0).$$

5) Неперервність функції (треба знайти та дослідити точки розриву функції).

Функція неперервна в усіх точках, які належать області визначення функції, і має розриви в точках $x = \pm 1$. Дослідимо характер розриву в точках $x = \pm 1$.

$x = -1$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1-0}\dfrac{x}{x^2-1}=\left\{\dfrac{-1}{+0}\right\}=-\infty,\\ \lim\limits_{x\to -1+0}\dfrac{x}{x^2-1}=\left\{\dfrac{-1}{-0}\right\}=+\infty,\end{array}\right|\Rightarrow\begin{array}{l}x=-1 \text{ – точка розриву другого роду,}\\ x=-1 \text{ – вертикальна асимптота графіка.}\end{array}$$

$x=1$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{x}{x^2-1}=\left\{\dfrac{1}{-0}\right\}=-\infty,\\ \lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{x}{x^2-1}=\left\{\dfrac{1}{+0}\right\}=+\infty,\end{array}\right|\Rightarrow\begin{array}{l}x=1 \text{ – точка розриву другого роду,}\\ x=1 \text{ – вертикальна асимптота графіка.}\end{array}$$

6) Монотонність, екстремуми, опуклість, вгнутість точки перегину.

Знайдемо критичні точки 1-го і 2-го роду, тобто точки, в яких дорівнює нулю або не існує відповідна перша чи друга похідна даної функції. Маємо:

$$y'=\frac{1\cdot(x^2-1)-x\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2}=-\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2},$$

$$y''=-\frac{2x(x^2-1)^2-(x^2+1)2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4}=\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}.$$

Похідні y' і y'' не існують лише при $x=\pm 1$, тобто тільки в тих точках, які не належать області визначення функції. Тому критичними точками будуть лише ті точки, де похідні y' і y'' дорівнюють нулю.

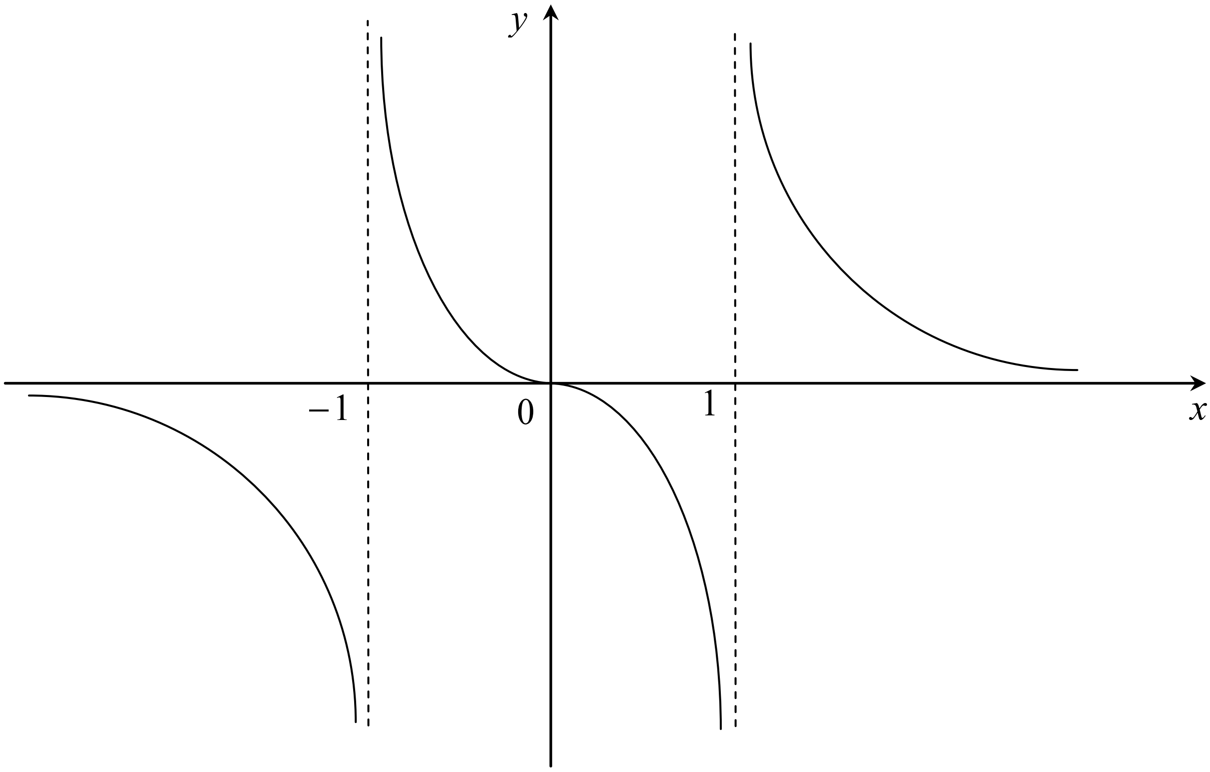
Оскільки $y' \neq 0$, то критичних точок 1-го роду немає. Похідна y'' дорівнює нулю при $x=0$, тому $x=0$ — критична точка 2-го роду.

Таким чином, y' зберігає сталий знак у кожному з інтервалів $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$, $(1; +\infty)$, а y'' — у кожному з інтервалів $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; 1)$, $(1; +\infty)$.

Щоб визначити знаки похідних y', y'' у кожному з указаних інтервалів, достатньо визначити знаки похідних у якій-небудь точці кожного інтервалу. Результати такого дослідження зручно звести в таблицю.

x	(–∞; –1)	(–1; 0)	0	(0; 1)	(1; +∞)
y'	–	–	–	–	–
y''	–	+	0	–	+
y	↘ ∩	↘ ∪	0 точка перегину	↘ ∩	↘ ∪

7) Асимптоти. Оскільки $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}=0$, то графік функції має горизонтальну асимптоту $y = 0$, при $x \to \infty$.



8) За результатами досліджень побудуємо графік функції.

9) Область значень функції : $E_f = \mathbb{R}$.

Завдання 1

Обчислити наближено значення функції у вказаній точці з указаною похибкою:

1. $y = 2^x, \quad x_0 = 0{,}1, \quad \varepsilon = 0{,}001.$

2. $y = \sqrt[3]{1+x}, \quad x_0 = 0{,}1, \quad \varepsilon = 0{,}0001.$

3. $y = \sin x, \quad x_0 = 1, \quad \varepsilon = 0{,}001.$

4. $y = e^x, \quad x_0 = 0{,}5, \quad \varepsilon = 0{,}001.$

5. $y = \ln\ 1+x\ , \quad x_0 = 0{,}05, \quad \varepsilon = 0{,}001.$

6. $y = 3^x, \quad x_0 = \frac{1}{3}, \quad \varepsilon = 0{,}001.$

7. $y = \sqrt[4]{1+x}, \quad x_0 = 0{,}1, \quad \varepsilon = 0{,}0001.$

8. $y = \cos x, \quad x_0 = 1, \quad \varepsilon = 0{,}001.$

9. $y = e^x, \quad x_0 = 0{,}5, \quad \varepsilon = 0{,}001.$

10. $y = \ln\ 1-x\ , \quad x_0 = 0{,}05, \quad \varepsilon = 0{,}001.$

11. $y = 5^x, \quad x_0 = 0{,}1, \quad \varepsilon = 0{,}001.$

12. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}, \quad x_0 = 0{,}2, \quad \varepsilon = 0{,}0001.$

13. $y = \operatorname{sh} x, \quad x_0 = 1, \quad \varepsilon = 0{,}001.$

14. $y = e^{-x}, \quad x_0 = 0{,}5, \quad \varepsilon = 0{,}001.$

15. $y = \ln\ 1+x\ , \quad x_0 = 0{,}01, \quad \varepsilon = 0{,}001.$

16. $y=2^x-1,\quad x_0=0{,}3,\quad \varepsilon=0{,}001.$

17. $y=\sqrt[5]{1+x},\quad x_0=-0{,}1,\quad \varepsilon=0{,}0001.$

18. $y=\operatorname{ch} x,\quad x_0=1,\quad \varepsilon=0{,}001.$

19. $y=e^x,\quad x_0=0{,}7,\quad \varepsilon=0{,}001.$

20. $y=x\ln\ 1+x\ ,\quad x_0=0{,}5,\quad \varepsilon=0{,}001.$

21. $y=2^x,\quad x_0=0{,}01,\quad \varepsilon=0{,}001.$

22. $y=\sqrt[7]{1+x},\quad x_0=0{,}1,\quad \varepsilon=0{,}0001.$

23. $y=\sin^2 x,\quad x_0=1,\quad \varepsilon=0{,}001.$

24. $y=e^{-2x},\quad x_0=0{,}5,\quad \varepsilon=0{,}001.$

25. $y=\ln\ 1+x^2\ ,\quad x_0=0{,}1,\quad \varepsilon=0{,}001.$

26. $y=2^{-x},\quad x_0=0{,}2,\quad \varepsilon=0{,}001.$

27. $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}},\quad x_0=0{,}1,\quad \varepsilon=0{,}0001.$

28. $y=\cos^2 x,\quad x_0=1,\quad \varepsilon=0{,}001.$

29. $y=e^{3x},\quad x_0=0{,}5,\quad \varepsilon=0{,}001.$

30. $y=\ln\ 1+2x\ ,\quad x_0=0{,}01,\quad \varepsilon=0{,}001.$

Завдання 2

Знайти найбільше те найменше значення функції на відрізку:

1. $y=\ln(x^2-2x+2),[0;3].$

2. $y = x^2 + \frac{16}{x} - 16, [1;4].$

3. $y = \frac{3x}{x^2 + 1}, [0;5].$

4. $y = 4 - x - \frac{4}{x^2}, [1;4].$

5. $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}, \left[-\frac{1}{2};0\right].$

6. $y = \sqrt[3]{2(x-2)^2(8-x)}, [0;6].$

7. $y = (x+2)e^{1-x}, [-2;2].$

8. $y = \frac{2(x^2+3)}{x^2 - 2x + 5}, [-3;3].$

9. $y = \ln(x^2 - 2x + 4), \left[-1;\frac{3}{2}\right].$

10. $y = 2\sqrt{x} - x, [0;4].$

11. $y = \frac{x^3}{x^2 - x + 1}, [-1;1].$

12. $y = \sqrt[3]{(x-1)^2(x-7)}, [-1;5].$

13. $y = \left(\frac{x+1}{x}\right)^3, [1;2].$

14. $y = x - 4\sqrt{x} + 5, [1;9].$

15. $y = \sqrt{4x - x^3}, [-2;2].$

16. $y=\dfrac{10x}{x^2+1},[0;3].$

17. $y=4-e^{-x^2},[0;1].$

18. $y=\sqrt[3]{(x+1)^2(5-x)},[-3;3].$

19. $y=x+\dfrac{4}{x^2},[1;2].$

20. $y=2x^2+\dfrac{108}{x},[2;4].$

21. $y=(x+1)\sqrt[3]{x^2},\left[-\dfrac{4}{5};3\right].$

22. $y=x^2-2x+\dfrac{16}{x-1},[2;5].$

23. $y=e^{6x-x^2},[-3;3].$

24. $y=2\sqrt{x-1}-x,[1;5].$

25. $y=\dfrac{\ln x}{x},[1;4].$

26. $y=3x^4-16x^3+2,[-3;1].$

27. $y=2x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{8}{x-2},[-2;1].$

28. $y=(3-x)e^{-x},[0;5].$

29. $y=x^2+4x+\dfrac{16}{x+2},[-1;2].$

30. $y=108x-x^4,[-1;4].$

Завдання 3

Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

1. $y = \frac{x}{2} + \mathrm{arcctg} x.$

2. $y = x \mathrm{arctg} x.$

3. $y = \frac{\ln x}{x}.$

4. $y = \frac{6x^2 - x^4}{9}.$

5. $y = \sqrt[3]{1 - x^3}.$

6. $y = x \ln x.$

7. $y = x^4 - 2x^2 + 2.$

8. $y = x^2 \ln x.$

9. $y = \sqrt[3]{1 - x^2}.$

10. $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1.$

11. $y = \frac{x}{x^2 + 1}.$

12. $y = \frac{1}{x^2 - 1}.$

13. $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}.$

14. $y = xe^{-x}.$

15. $y = \dfrac{x^3}{x+2}$.

16. $y = x - \ln(x+1)$.

17. $y = \dfrac{e^x}{x}$.

18. $y = x^2 - \dfrac{1}{x}$.

19. $y = x + \dfrac{1}{x}$

20. $y = \dfrac{x^3}{x+1}$.

21. $y = \dfrac{x^2}{x+1}$.

22. $y = \dfrac{x}{x^2-4}$.

23. $y = x - 2\operatorname{arctg} x$.

24. $y = \dfrac{x^4-3}{x}$.

25. $y = x^2 + \dfrac{1}{x}$.

26. $y = \dfrac{4}{x^2-4}$.

27. $y = x + \ln(x+1)$.

28. $y = x - \dfrac{1}{x}$.

29. $y = \dfrac{x^2}{x-3}$.

30. $y = \dfrac{x^3}{x-1}$.

10.НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Первісна. Поняття невизначеного інтеграла.

Функція $F(x)$ називається первісною функції $f(x)$ на деякому проміжку, якщо в усіх точках цього проміжку виконується рівність $F'(x) = f(x)$.

Наприклад, первісними функції $f(x) = 3x^2$ будуть функції x^3, $x^3 + 1$, $x^3 + 0{,}5$ і взагалі $F(x) = x^3 + C$, де C — довільна стала, оскільки $F'(x) = = (x^3 + C)' = 3x^2$. Цей приклад показує, що якщо функція $f(x)$ має одну первісну, то вона може мати їх нескінченно багато. Виникає питання: як знайти всі первісні даної функції, якщо відома одна з них? Відповідь дає така теорема.

Теорема. *Якщо* $F(x)$ — первісна функції $f(x)$ на деякому проміжку, то всяка інша первісна функції $f(x)$ на цьому проміжку має вигляд $F(x) + C$, де C — довільна стала.

Множину всіх первісних $F(x) + C$ функції $f(x)$ називають невизначеним інтегралом функції $f(x)$ і позначають $\int f(x)dx$. Таким чином, за означенням

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad \text{якщо} \quad F'(x) = f(x).$$

При цьому $f(x)$ називають підінтегральною функцією, $f(x)dx$ — підінтегральним виразом, x — змінною інтегрування, знак $\int$ — знаком інтегралу, C — сталою інтегрування.

Операцію знаходження первісної функції $f(x)$ називають інтегруванням цієї функції.

Операції диференціювання та інтегрування є оберненими одна до одної.

Виникає питання: чи для кожної функції $f(x)$ існує первісна, а отже, і невизначений інтеграл? Виявляється, що не для кожної. Але справедлива така

Теорема. Усяка неперервна на проміжку $[a,b]$ функція має на цьому проміжку первісну.

Елементарні властивості невизначеного інтерграла:

1. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$.

2. $\int dF(x) = F(x) + C$.

3. $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$.

4. $\forall A \in \mathbb{R} \quad \int \left(A\,f\left(x\right)\right)dx = A\int f(x)\,dx.$

5. $\int \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$.

6. $\forall a \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad \int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$.

Таблиця основних інтегралів.

1. $\int u^{\alpha}\,du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1.$
2. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C.$
3. $\int a^{u}\,du = \frac{a^{u}}{\ln a} + C, \quad a > 0,\ a \neq 1.$
4. $\int e^{u}\,du = e^{u} + C.$
5. $\int \sin u\,du = -\cos u + C.$
6. $\int \operatorname{sh} u\,du = \operatorname{ch} u + C.$

7. $\int \cos u\,du = \sin u + C.$

8. $\int \mathrm{ch}\,u\,du = \mathrm{sh}\,u + C.$

9. $\int \mathrm{tg}\,u\,du = -\ln|\cos u| + C.$

10. $\int \mathrm{ctg}\,u\,du = \ln|\sin u| + C.$

11. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = \mathrm{tg}\,u + C.$

12. $\int \dfrac{du}{\mathrm{ch}^2 u} = \mathrm{th}\,u + C.$

13. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\,\mathrm{ctg}\,u + C.$

14. $\int \dfrac{du}{\mathrm{sh}^2 u} = -\,\mathrm{cth}\,u + C.$

15. $\int \dfrac{du}{\sin u} = \ln\left|\mathrm{tg}\dfrac{u}{2}\right| + C.$

16. $\int \dfrac{du}{\cos u} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{u}{2}\right)\right| + C.$

17. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\dfrac{u}{a} + C.$

18. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 + A}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + A}\right| + C.$

19. $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a}\mathrm{arctg}\dfrac{u}{a} + C.$

20. $\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| + C.$

21. $\int \sqrt{a^2 - u^2}\,du = \dfrac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{u}{a} + C.$

22. $\int \sqrt{u^2 + A}\,du = \dfrac{u}{2}\sqrt{u^2 + A} + \dfrac{A}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 + A}\right| + C.$

Безпосереднє інтегрування.

Безпосереднім інтегруванням називають обчислення інтегралів за допомогою основних властивостей невизначеного інтеграла й таблиці інтегралів.

Приклад 1. Обчислити інтеграли:

а) $\int\left(x^5-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)dx$; б) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$.

Розв’язання. Користуючись правилами інтегрування і таблицею інтегралів, дістанемо:

а) $\int\left(x^5-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)dx=\int x^5dx-4\int\frac{dx}{x}+3\int x^{-2}dx=$

$$=\frac{x^6}{6}-4\ln|x|-\frac{3}{x}+C.$$

б) $\int \operatorname{tg}^2 x dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{1}{\cos^2 x}dx-\int dx=\operatorname{tg}x-x+C.$

Відповідь: а) $\frac{x^6}{6}-4\ln|x|-\frac{3}{x}+C$; б) $\operatorname{tg}x-x+C.$ □

Метод підстановки (заміни змінної).

Метод підстановки є одним з основних методів інтегрування. Більше того, вивчення методів інтегрування в основному зводиться до з’ясування того, яку потрібно зробити підстановку в тому чи іншому випадку.

Теорема. Якщо

$$\forall x\in(a,b)\quad \int f(x)dx=F(x)+C$$

і $\varphi:(\alpha,\beta)\to(a,b)$ — довільна функція, що має неперервну похідну, то

$$\forall t\in(\alpha,\beta)\quad \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=F(\varphi(t))+C.$$

Зауваження. Останню формулу можна записати у вигляді

$$\int f(u)du=F(u)+C,$$

де $u=\varphi(t)$. Це пояснює, чому в позначенні інтеграла присутній диференціал.

З цієї дуже важливої теореми випливає, що таблиця інтегралів залишається правильною незалежно від того, чи є змінна інтегрування незалежною змінною або довільною диференційованою функцією. Таким чином, з однієї формули можна одержувати безліч інших.

Наприклад,

$$\int e^u du = e^u + C \quad \Rightarrow \quad \int 2xe^{x^2} dx = \int e^{x^2} d\left(x^2\right) = e^{x^2} + C,$$

$$\int e^u du = e^u + C \quad \Rightarrow \quad \int \cos x e^{\sin x} dx = \int e^{\sin x} d\sin x = e^{\sin x} + C,$$

$$\int e^u du = e^u + C \quad \Rightarrow \quad \int e^{7x+5} dx = \frac{1}{7} e^{7x+5} + C.$$

Приклад 2. Обчислити інтеграли:

$$\text{а) } \int \frac{\operatorname{arctg}^7 x}{1+x^2} dx; \qquad \text{б) } \int \sin^5 x \cos x dx.$$

Розв’язання.

а) $\int \frac{\operatorname{arctg}^7 x}{1+x^2} dx$. Застосовуючи метод підстановки, одержимо:

$$\int \frac{\operatorname{arctg}^7 x}{1+x^2} dx = \left| \begin{array}{l} \operatorname{arctg} x = t, \\ \dfrac{dx}{1+x^2} = dt \end{array} \right| = \int t^7 dt = \frac{1}{8} t^8 + C = \frac{1}{8} \operatorname{arctg}^8 x + C.$$

Цей інтеграл можна було б обчислити і методом введення функції під знак диференціала:

$$\int \frac{\operatorname{arctg}^7 x}{1+x^2} dx = \int \operatorname{arctg}^7 x \; d(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{8} \operatorname{arctg}^8 x + C.$$

б) Спосіб 1 (метод заміни змінної).

$$\int \sin^5 x \cos x dx = \begin{vmatrix} \sin x = t, \\ \cos x dx = dt \end{vmatrix} = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + C = \frac{1}{6}\sin^6 x + C.$$

Спосіб 2 (метод введення функції під знак диференціала).

$$\int \sin^5 x \cos x dx = \int \sin^5 x \, d(\sin x) = \frac{1}{6}\sin^6 x + C.$$

Відповідь: а) $\frac{1}{8}\operatorname{arctg}^8 x + C$; б) $\frac{1}{6}\sin^6 x + C$. □

Різниця між методом заміни змінної та методом введення функції під знак диференціала полягаю, по суті, лише в оформленні.

Інтегрування частинами.

Нехай $u(x)$, $v(x)$ — функції, що мають на деякому проміжку неперервні похідні. Тоді

$$d(uv) = udv + vdu$$

або

$$udv = d(uv) - vdu.$$

Інтегруючи цю рівність, дістанемо

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu,$$

або, враховуючи властивість 2 невизначених інтегралів,

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Цю формулу називають формулою інтегрування частинами.

Укажемо деякі інтеграли, які зручно обчислювати методом інтегрування частинами:

1) в інтегралах виду $\int P_n(x)e^{ax}dx,\ \int P_n(x)\sin ax\,dx,\ \int P_n(x)\cos ax\,dx,$ де $P_n(x)$ — многочлен степеня n, за u слід брати $P_n(x)$, а за dv — вираз, що залишився;

2) в інтегралах виду $\int P_n(x)\ln x\,dx,\ \int P_n(x)\,\mathrm{arctg}\,x\,dx,\ \int P_n(x)\arcsin x\,dx,$ $\int P_n(x)\,\mathrm{arctg}\,x\,dx,\ \int P_n(x)\arccos x\,dx$ слід позначати $dv = P_n(x)\,dx$.

3) інтеграли $\int e^{ax}\sin bx\,dx,\ \int e^{ax}\cos bx\,dx,\ \int \cos\ln x\,dx,\ \int \sin\ln x\,dx$ тощо обчислюються за допомогою так званого ціклічного інтегрування.

Приклад 3. Обчислити інтеграли:

$$\text{а) } \int (x^2+3x+2)\sin x dx; \qquad \text{б) } \int \ln(2x+3)\,dx.$$

Розв’язання.

а) $$\int (x^2+3x+2)\sin x dx = \left| \begin{matrix} u = x^2+3x+2,\ dv = \sin x\,dx, \\ du = (2x+3)\,dx,\ v = -\cos x \end{matrix} \right| =$$

$$= -(x^2+3x+2)\cos x + \int (2x+3)\cos x dx = \left| \begin{matrix} u = 2x+3,\ dv = \cos x dx, \\ du = 2dx, \quad v = \sin x \end{matrix} \right| =$$

$$= -(x^2+3x+2)\cos x + (2x+3)\sin x - \int 2\sin x dx =$$

$$= -(x^2+3x+2)\cos x + (2x+3)\sin x + 2\cos x + C =$$

$$= (2x+3)\sin x - (x^2+3x)\cos x + C.$$

б) $\int \ln(2x+3)\,dx = \left| \begin{array}{ll} u=\ln\left(2x+3\right), & dv=dx, \\ du=\dfrac{2}{2x+3}dx, & v=x, \end{array} \right| = x\ln(2x+3) - \int \dfrac{2x}{2x+3}\,dx =$

$$= x\ln(2x+3) - \int \frac{(2x+3)-3}{2x+3}\,dx = x\ln(2x+3) - \int dx + 3\int \frac{dx}{2x+3} =$$

$$= x\ln(2x+3) - x + \frac{3}{2}\ln(2x+3) + C = \left(x+\frac{3}{2}\right)\ln(2x+3) - x + C.$$

Відповідь: а) $(2x+3)\sin x - (x^2+3x)\cos x + C$; б) $\left(x+\dfrac{3}{2}\right)\ln(2x+3) - x - C.$ □

Приклад 4. Обчислити інтеграл

$$\int e^x \sin 2x\,dx.$$

Розв'язання. Позначимо цей інтеграл I та застосуємо метод циклічного інтегрування:

$$I = \int e^x \sin 2x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u=\sin 2x, & dv=e^x dx, \\ du=2\cos 2x\,dx, & v=e^x, \end{array} \right| = e^x \sin 2x - 2\int e^x \cos 2x\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u=\cos 2x, & dv=e^x dx, \\ du=-2\sin 2x\,dx, & v=e^x, \end{array} \right| = e^x \sin 2x - 2\left(e^x \cos 2x + 2\int e^x \sin 2x\,dx\right) + C_1 =$$

$$= e^x \sin 2x - 2e^x \cos 2x - 4I + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Таким чином, ми одержали рівняння

$$I = e^x \sin 2x - 2e^x \cos 2x - 4I + C_1,$$

з якого легко знаходимо, що

$$I = \frac{1}{5}\left(e^x \sin 2x - 2e^x \cos 2x\right) + C, \quad C = \frac{1}{5}C_1.$$

Відповідь: $\frac{1}{5}\left(e^x\sin 2x-2e^x\cos 2x\right)+C.$ □

Інтеграли, що “не беруться”.

Невизначений інтеграл існує для довільної неперервної функції $f(x)$, тобто

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C.$$

Але при цьому не завжди первісна $F(x)$ є елементарною функцією. Про такі інтеграли кажуть, що вони “не беруться”. Наприклад:

$$\int e^{-x^2}dx=F(x)+C,\quad \text{де}\quad F(x)=x-\frac{x^3}{3\cdot 1!}+\frac{x^5}{5\cdot 2!}-\frac{x^7}{7\cdot 3!}+\dots .$$

Приклади інтегралів, які “не беруться”:

$$\int\frac{dx}{\ln x}\ \text{— інтегральний логарифм,}$$

$$\int\frac{\sin x}{x}dx\ \text{— інтегральний синус,}$$

$$\int\frac{\cos x}{x}dx\ \text{— інтегральний косинус,}$$

$$\int\sin x^2dx,\ \int\cos x^2dx\ \text{— інтеграли Френеля та інші.}$$

У зв’язку з цим важливо виділити такі класи функцій, інтеграли від яких завжди виражаються через елементарні функції. Одним із таких класів функцій, інтеграли від яких завжди виражаються в елементарних функціях є клас раціональних функцій.

Інтегрування раціональних функцій.

Раціональною функцією або раціональним дробом називають дріб

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

де $P_m(x)$, $Q_n(x)$ — многочлени степеня m і n:

$$Q_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n, \quad P_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m.$$

Раціональний дріб називається правильним, якщо степінь чисельника менший степеня знаменника $m < n$, і неправильним, якщо $m \geq n$.

Неправильний дріб завжди можна записати у вигляді суми многочлена і правильного дробу.

Оскільки многочлени інтегруються дуже легко, то задача інтегрування раціональних функцій зводиться, таким чином, до інтегрування правильних дробів. Правильні дроби, у свою чергу, розкладаються на елементарні дроби. Тому зараз розглянемо інтегрування елементарних дробів.

Розрізняють чотири типи елементарних дробів:

$$\text{I. } \frac{A}{x-a}, \quad \text{II. } \frac{A}{(x-a)^n}, \quad \text{III. } \frac{Mx+N}{x^2+px+q}, \quad \text{IV. } \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n},$$

де $n = 2, 3, \ldots$, а тричлен $x^2 + px + q$ не має дійсних коренів, тобто $D = p^2 - 4q < 0$.

Розглянемо, як інтегруються ці дроби.

I. $$\int \frac{A\,dx}{x-a} = A\ln|x-a| + C.$$

II. $$\int \frac{A\,dx}{(x-a)^n} = A\int (x-a)^{-n}dx = A\frac{(x-a)^{1-n}}{1-n} + C = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C.$$

III. Інтеграли від дробів третього типу представляють у вигляді лінійної комбінації двох інтегралів, в першому з яких у чисельнику стоїть похідна від знаменника, а в другому — одиниця. Таким чином, перший інтеграл зводиться до логарифму від знаменника, а другий до арктангенса.

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{1}{x^2+px+q}dx =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d\left(x^2+px+q\right)}{x^2+px+q} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{1}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}dx =$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \frac{2}{a}\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{a} + C,$$

де $a=\sqrt{4q-p^2}$.

Приклад 5. Обчислити інтеграл

$$\int \frac{3x+2}{x^2+2x+5}dx.$$

Розв’язання.

$$\int \frac{3x+2}{x^2+2x+5}dx = \int \frac{3x+2}{(x+1)^2+4}dx = \begin{vmatrix} x+1=u, \\ dx=du, \\ x=u-1 \end{vmatrix} =$$

$$= \int \frac{3u-1}{u^2+4}du = \frac{3}{2}\int \frac{d(u^2+4)}{u^2+4} - \int \frac{du}{u^2+4} = \frac{3}{2}\ln(u^2+4) -$$

$$-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{u}{2} + C = \frac{3}{2}\ln(x^2+2x+5) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C.$$

Відповідь: $\frac{3}{2}\ln(x^2+2x+5)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C.$ □

IV. Інтеграли від дробів четвертого типу, як й інтеграли третього типу, представляють у вигляді лінійної комбінації двох інтегралів, в першому з яких у чисельнику стоїть похідна від знаменника, а в другому — одиниця.

$$\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx=\frac{M}{2}\int \frac{2x+p}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{1}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx=$$

$$=-\frac{M}{2(n-1)}\frac{1}{\left(x^2+px+q\right)^{n-1}}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{1}{\left(t^2+a^2\right)^n}dx,$$

де $a=\sqrt{4q-p^2}$, $t=x+\frac{p}{2}$.

Інтеграл

$$I_n=\int \frac{1}{\left(t^2+a^2\right)^n}dx$$

обчислюють за рекурентною формулою

$$I_{n+1}=\frac{1}{2na^2}\left(\frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^n}+(2n-1)I_n\right),\quad n\geq 1,$$

$$I_1=\int \frac{1}{t^2+a^2}dt=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}+C.$$

Як відомо з алгебри, многочлен $Q_n(x)$ степеня n може бути розкладений на лінійні та квадратні множники:

$$Q_n(x)=a_0(x-x_1)^{k_1}\cdots(x-x_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\cdots(x^2+p_sx+q_s)^{l_s},$$

де a_0, x_i, p_i, q_i — дійсні числа; $k_i,\ l_i$ — натуральні числа; $k_1 + \ldots + k_r + 2(l_1 + \ldots + l_s) = n, \quad p_i^2 - 4q_i < 0$.

Розглянемо правильний раціональний дріб $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, знаменник якого вже розкладений на лінійні та квадратні множники. Тоді цей дріб можна розкласти на суму елементарних дробів за такими правилами:

1) множнику $(x-a)^k$ відповідає сума дробів виду

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k} \ ;$$

2) множнику $(x^2 + px + q)^l$ відповідає сума дробів виду

$$\frac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \ldots + \frac{M_l x + N_l}{(x^2 + px + q)^l},$$

де A_i, M_i, N_i — невизначені коефіцієнти.

Шукати ці невизначені коефіцієнти можна з огляду на те, що рівні многочлени мають рівні коефіцієнти при однакових степенях x.

Приклад 5. Обчислити інтеграл:

$$I = \int \frac{x^4 + 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx.$$

Розв’язання. Підінтегральна функція є неправильним раціональним дробом. Виділимо цілу частину цього дробу:

$$\begin{array}{l|l} x^4+1 & x^3-2x^2+x \\ \cline{2-2} \underline{x^4-2x^3+x^2} & x+2 \\ \quad 2x^3-x^2+1 & \\ \quad \underline{2x^3-4x^2+2x} & \\ \qquad 3x^2-2x+1 & \end{array}$$

Тоді

$$I=\int\left(x+2+\frac{3x^2-2x+1}{x^3-2x^2+x}\right)dx=\frac{x^2}{2}+2x+\int\frac{3x^2-2x+1}{x(x-1)^2}dx.$$

Розкладемо підінтегральну функцію на елементарні дроби:

$$\frac{3x^2-2x+1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}.$$

$$3x^2-2x+1=A(x-1)^2+B(x^2-x)+Cx.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, одержимо систему:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & 3=A+B, \\ x & -2=-2A-B+C, \\ x^0 & 1=A \end{array}$$

звідки $A=1$, $B=2$, $C=2$. Далі маємо:

$$I=\frac{x^2}{2}+2x+\int\frac{dx}{x}+2\int\frac{dx}{x-1}+2\int\frac{dx}{(x-1)^2}=$$
$$\frac{x^2}{2}+2x+\ln|x|+2\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}+C.$$

Відповідь: $\frac{x^2}{2}+2x+\ln|x|+2\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}+C.$ □

Метод Остроградського.

Інтеграл від правильного дробу $\frac{P(x)}{Q(x)}$ можна подати і вигляді

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}dx,$$

де дроби $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ і $\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ правильні, і якщо

$$Q(x) = (x - x_1)^{k_1} \cdots (x - x_r)^{k_r} (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} \cdots (x^2 + p_s x + q_s)^{l_s},$$

то

$$Q_1(x) = (x - x_1)^{k_1 - 1} \cdots (x - x_r)^{k_r - 1} (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1 - 1} \cdots (x^2 + p_s x + q_s)^{l_s - 1},$$
$$Q_2(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_r)(x^2 + p_1 x + q_1) \cdots (x^2 + p_s x + q_s).$$

Коефіцієнти многочленів $P_1(x)$ та $P_2(x)$ знаходять методом невизначених коефіцієнтів після диференціювання обох частин рівності:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \left(\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \right)' + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}.$$

Інтегрування тригонометричних функцій.

1. Інтеграли виду

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx,$$

де R — раціональна функція, завжди зводяться до інтегралів від раціональних функцій за допомогою так званої універсальної тригонометричної підстановки:

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2} = t, \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2\,\mathrm{arctg}\,t, \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Зауваження. Універсальна тригонометрична підстановка завжди приводить до мети, але в силу своєї універсальності вона часто вимагає невиправдано громіздких обчислень. Тому в багатьох випадках зручніше користуватися іншими підстановками. Розглянемо деякі з них.

1) Якщо в інтегралі

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx$$

$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то зручно робити підстановку $\cos x = t$.

2) Якщо $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то зручно робити підстановку $\sin x = t$.

3) Якщо $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то зручно робити підстановку:

$$\mathrm{tg}\, x = t, \qquad \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$x = \mathrm{arctg}\, t, \qquad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Розглянемо більш докладно інтеграли виду

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x\, dx,$$

де m, n — цілі числа.

1) Якщо m — непарне додатне число, то зручно робити підстановку $\cos x = t$.

2) Якщо n − непарне додатне число, то зручно робити підстановку $\sin x = t$.

3) Якщо обидва показники m і n — парні невід'ємні числа, то треба робити пониження степенів синуса і косинуса за формулами:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Для знаходження інтегралів виду

$$\int \mathrm{tg}^n\, x dx, \qquad \int \mathrm{ctg}^n\, x dx$$

зручно користуватися формулами

$$\mathrm{tg}^2\, x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1, \qquad \mathrm{ctg}^2\, x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1.$$

2. В інтегралах

$$\int \sin mx \cos nx dx, \quad \int \sin mx \sin nx dx, \quad \int \cos mx \cos nx dx, \qquad m \neq n$$

треба підінтегральну функцію записати у вигляді суми функцій за допомогою формул:

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right],$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right],$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right].$$

Приклад 6. Обчислити інтеграли:

а) $\int \sin 3x \cos 2x dx$; б) $\int \frac{dx}{3+2\cos x}$.

Розв'язання.

а) Використаємо формулу

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right].$$

Тоді

$$\int \sin 3x \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}\int (\sin 5x + \sin x)\, dx = -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos 5x}{5} + \cos x\right) + C.$$

б) Застосуємо універсальну тригонометричну підстановку:

$$\int \frac{dx}{3+2\cos x} = \left| \begin{array}{ll} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, & \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ x = 2\operatorname{arctg} t, & dx = \frac{2\,dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{3+2\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{3(1+t^2)+2(1-t^2)} = 2\int \frac{dt}{t^2+5} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}} + C = \frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{5}} + C.$$

Відповідь: а) $-\frac{1}{2}\left(\frac{\cos 5x}{5} + \cos x\right) + C$; б) $\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{5}} + C.$ □

Інтегрування ірраціональних функцій.

1. Інтеграли виду

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})\, dx,$$

де $R(x,y)$ — раціональна функція відносно x і y, $a \neq 0$, зводяться до інтегралів від раціональних функцій за допомогою підстановки:

$$ax+b = t^n.$$

2. Інтеграли виду

$$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}},\dots\right)dx,$$

де R – раціональна функція , p_i, q_i — цілі числа , зводяться до інтегралів від раціональних функцій за допомогою підстановки $\frac{ax+b}{cx+d}=t^n$, де n — спільний знаменник дробів $\frac{p_1}{q_1},\ \frac{p_2}{q_2},\dots$.

Приклад 7. Обчислити інтеграл:

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}.$$

Розв’язання.

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}=\left|\begin{matrix} x=t^2, \\ dx=2tdt\end{matrix}\right|=\int\frac{2tdt}{1+t}=2\int\frac{(t+1)-1}{1+t}dt=$$

$$=2\int\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt=2(t-\ln(t+1))+C=2(\sqrt{x}-\ln(\sqrt{x}+1))+C.$$

Відповідь: $2(\sqrt{x}-\ln(\sqrt{x}+1))+C$ □

3. Квадратичні ірраціональності.

Інтеграли

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx,\quad a\neq 0$$

завжди можна раціоналізувати за допомогою підстановок Ейлера.

I. Якщо $a>0$, то $\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm x\sqrt{a}.$

ІІ. Якщо $c>0$, то $\sqrt{ax^2+bx+c}=t\,x\pm\sqrt{c}$.

ІІІ.Якщо

$$ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right),\quad x_1,x_2\in\mathbb{R},$$

то $\sqrt{ax^2+bx+c}=t\left(x-x_1\right)$.

Частинні випадки:

1. $$\int\frac{P_n\left(x\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx=Q_{n-1}\left(x\right)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

2. Інтеграл

$$\int\frac{dx}{\left(x-\alpha\right)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

зводиться до попереднього випадку заміною $t=\dfrac{1}{x-\alpha}$.

Інший метод інтегрування квадратичних ірраціональностей полягає в тому, що в підкореневому виразі виділяють повний квадрат і застосовують одну з таких підстановок:

1) в інтегралі

$$\int R\left(z,\sqrt{z^2+a^2}\right)dz$$

використовують підстановки $z=a\,\mathrm{tg}\,t,\ z=a\,\mathrm{sh}\,t$;

2) в інтегралі

$$\int R\left(z,\sqrt{a^2-z^2}\right)dz$$

використовують підстановки $z=a\sin t,\ z=a\cos t$;

3) в інтегралі

$$\int R\left(z, \sqrt{z^2 - a^2}\right) dz$$

використовують підстановки $z = \dfrac{a}{\cos t}$, $z = \dfrac{a}{\cos t}$, $z = a\,\mathrm{ch}\,t$.

Приклад 8. Обчислити інтеграл:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{7x - 10 - x^2}}.$$

Розв’язання.

Спосіб I.

Застосуємо третю підстановку Ейлера. Оскільки

$$7x - 10 - x^2 = -(x-2)(x-5),$$

введемо заміну

$$\begin{aligned}
&\sqrt{7x - 10 - x^2} = t(x-2),\\
&-(x-2)(x-5) = t^2(x-2)^2,\\
&-(x-5) = t^2(x-2),
\end{aligned}$$

$$x = \frac{2t^2 + 5}{t^2 + 1}, \quad dx = -\frac{6t\,dt}{\left(t^2 + 1\right)^2}, \quad \sqrt{7x - 10 - x^2} = \frac{3t}{t^2 + 1}.$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{7x - 10 - x^2}} = -\int \frac{2t^2 + 5}{t^2 + 1} \cdot \frac{t^2 + 1}{3t} \cdot \frac{6t\,dt}{\left(t^2 + 1\right)^2} =$$

$$= -2\int \frac{2t^2 + 5}{\left(t^2 + 1\right)^2} dt = -4\int \frac{dt}{t^2 + 1} - 6\int \frac{dt}{\left(t^2 + 1\right)^2} = -4\,\mathrm{arctg}\,t - 6I_2,$$

де за рекурентною формулою

$$I_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{t}{t^2+1} + I_1\right),$$

$$I_1 = \int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \operatorname{arctg} t + C_1.$$

Таким чином,

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{7x-10-x^2}} = -4\operatorname{arctg} t - 3\left(\frac{t}{t^2+1} + \operatorname{arctg} t\right) + C =$$

$$= -7\operatorname{arctg} t - \frac{3t}{t^2+1} + C = -7\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{7x-10-x^2}}{x-2}\right) - \sqrt{7x-10-x^2} + C.$$

Спосіб II.

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{7x-10-x^2}} = A\sqrt{7x-10-x^2} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{7x-10-x^2}}.$$

Продиференціюємо обидві частини рівності:

$$\frac{x}{\sqrt{7x-10-x^2}} = A\frac{7-2x}{2\sqrt{7x-10-x^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{7x-10-x^2}}.$$

Знайдемо невизначені коефіцієнти:

$$\begin{aligned} &2x = 7A - 2Ax + 2\lambda, \\ &x:\quad 2 = -2A \quad \Rightarrow \quad A = -1, \\ &x^0:\ 0 = 7A + 2\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{7x-10-x^2}} = -\sqrt{7x-10-x^2} + \frac{7}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{7x-10-x^2}} =$$

$$=-\sqrt{7x-10-x^2}+\frac{7}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{9}{4}-\left(x-\frac{7}{2}\right)^2}}=$$

$$=-\sqrt{7x-10-x^2}+\frac{7}{2}\arcsin\frac{2x-7}{3}+C.$$

Спосіб III.

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{7x-10-x^2}}=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{\frac{9}{4}-\left(x-\frac{7}{2}\right)^2}}.$$

Зробимо підстановку $x-\frac{7}{2}=\frac{3}{2}\sin t.$ Тоді

$$x=\frac{7}{2}+\frac{3}{2}\sin t,\quad \sqrt{\frac{9}{4}-\left(x-\frac{7}{2}\right)^2}=\frac{3}{2}\cos t,\quad dx=\frac{3}{2}\cos t\,dt,$$

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{7x-10-x^2}}=\int\frac{\left(\frac{7}{2}+\frac{3}{2}\sin t\right)\frac{3}{2}\cos t\,dt}{\frac{3}{2}\cos t}=\int\left(\frac{7}{2}+\frac{3}{2}\sin t\right)dt=$$

$$=\frac{7}{2}t+\frac{3}{2}\cos t+C=\frac{7}{2}\arcsin\frac{2x-7}{3}+\frac{3}{2}\cos\left(\arcsin\frac{2x-7}{3}\right)+C$$

$$=\frac{7}{2}\arcsin\frac{2x-7}{3}+\frac{3}{2}\sqrt{1-\left(\frac{2x-7}{3}\right)^2}=-\sqrt{7x-10-x^2}+\frac{7}{2}\arcsin\frac{2x-7}{3}+C.$$

Відповідь: $-\sqrt{7x-10-x^2}+\frac{7}{2}\arcsin\frac{2x-7}{3}+C.$ □

4. Диференціальні біноми.

Диференціальним біномом називають вираз

$$x^m\left(a+bx^n\right)^p,$$

де $a, b \in \mathbb{R},\ m, n, p \in \mathbb{Q}.$

Теорема. Інтеграл від диференціального бінома раціоналізується

1) підстановкою $t^s = x,$ де s — спільний знаменник дробів m і n, якщо $p \in \mathbb{Z}$;

2) підстановкою $t^l = a + bx^n,$ де l — знаменник дробу $p,$ якщо $p \notin \mathbb{Z},\quad \dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$;

3) підстановкою $t^l = \dfrac{a + bx^n}{x^n},$ де l — знаменник дробу $p,$ якщо $p \notin \mathbb{Z},\quad \dfrac{m+1}{n} \notin \mathbb{Z},\quad \dfrac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}.$

Теорема (Чебишов). Якщо

$$p \notin \mathbb{Z},\quad \frac{m+1}{n} \notin \mathbb{Z},\quad \frac{m+1}{n} + p \notin \mathbb{Z},$$

то інтеграл

$$\int x^m \left(a + bx^n\right)^p dx$$

не виражаєтьсся в елементарних функціях.

Завдання 1

Обчислити безпосереднім інтегруванням інтеграли:

1. $\int \left(3 - x^2\right)^3 dx.$

2. $\int x^2 \left(5 - x\right)^4 dx.$

3. $\int (1 - x)(1 - 2x)(1 - 3x)\,dx.$

4. $\int\left(\frac{1-x^2}{x}\right)^2 dx.$

5. $\int\frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}dx.$

6. $\int\frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}dx.$

7. $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}dx.$

8. $\int\frac{\left(\sqrt{2x}-\sqrt[3]{3x}\right)^2}{x}dx.$

9. $\int\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx.$

10. $\int\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}dx.$

11. $\int\frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx.$

12. $\int\sqrt{1-\sin 2x}dx.$

13. $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx.$

14. $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx.$

15. $\int\frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}dx.$

16. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}\,dx.$

17. $\int \frac{3\cdot 2^x-2\cdot 3^x}{2^x}\,dx.$

18. $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}\,dx.$

19. $\int \frac{1+2x^2}{x^2\left(1+x^2\right)}\,dx.$

20. $\int \frac{\left(1+x\right)^2}{x^2\left(1+x^2\right)}\,dx.$

21. $\int \frac{1}{\cos 2x+\sin^2 x}\,dx.$

22. $\int \frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}\,dx.$

23. $\int \frac{\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^4-9}}\,dx.$

24. $\int \left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx.$

25. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}\,dx.$

26. $\int \frac{\left(3^x-5^x\right)^2}{15^x}\,dx.$

27. $\int \frac{x^6}{1-x^2}\,dx.$

28. $\int \left(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x\right) dx.$

29. $\int \frac{x^4}{1-x^2} dx.$

30. $\int \frac{\left(1+x\right)^2}{x\left(1+x^2\right)} dx.$

Завдання 2

Обчислити інтеграли:

1. $\int (1-5x)\sin 2x dx$.

2. $\int (x^2 + 2x)\, e^{-x} dx$.

3. $\int (x^2 - 7x + 2)\sin x\, dx$.

4. $\int (x^2 + 1)\ \sin 5x\, dx$.

5. $\int x^2 e^{3x} dx$.

6. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$.

7. $\int x^3 \operatorname{arctg} x\ dx$.

8. $\int (x-3)\cos\frac{x}{2}\ dx$.

9. $\int \frac{\ln x}{x^3}\ dx$.

10. $\int (x+2)\ln x\ dx$.

11. $\int (x^2+4)\, e^{-2x} dx$.

12. $\int (4x^2+x+2)\ \sin x\, dx$.

13. $\int \arccos x\ dx$.

14. $\int x \operatorname{arcctg} x\, dx$.

15. $\int (x^2+4x+3)\ln x\ dx$.

16. $\int (7x+4)\, e^{x+2} dx$.

17. $\int (x+1)^2 e^{-x} dx$.

18. $\int (8-7x^2)\sin x\ dx$.

19. $\int (2x^2+x)\ \cos x\, dx$.

20. $\int \left(x^2+1\right)e^{2x+3} dx$.

21. $\int x^2 \sin 2x\, dx$.

22. $\int x^3 e^x dx$.

23. $\int (2x+3)\cos 2x\, dx$.

24. $\int (x^2+2x)\ \sin x\, dx$.

25. $\int (x^2+3)\ e^{-x} dx$.

26. $\int (x+4)^3 \ln x\ dx$.

27. $\int (x^2-2x+5)\, e^{2x} dx$.

28. $\int (3-x)^2 e^{7x} dx$.

29. $\int (2-3x)\cos 3x\, dx$.

30. $\int (x^2+3x+2)\ \sin x\, dx$.

Завдання 3

Обчислити інтеграли:

1. $\int \frac{2x-\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

2. $\int \frac{x+\sqrt{\arccos 3x}}{\sqrt{1-9x^2}} dx.$

3. $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}} dx.$

4. $\int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}.$

5. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \sqrt[4]{\operatorname{ctg} x}}.$

6. $\int \frac{2^x \cdot 3^x}{9^x-4^x} dx.$

7. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{2+\cos 2x}} dx.$

8. $\int \frac{2^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx.$

9. $\int \frac{3^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx.$

10. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\,(\mathrm{tg}^2 x-9)}.$

11. $\int \frac{\sqrt{5+\ln x}}{x}\,dx.$

12. $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{\cos^2 x+4}}\,.$

13. $\int 2^{\sin x}\cos x\,dx.$

14. $\int \frac{\cos x\,dx}{1+3\sin x}.$

15. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\,(1+\mathrm{tg}\,x)}\,.$

16. $\int \frac{1-\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx.$

17. $\int \frac{\sqrt[3]{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

18. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{2x}}.$

19. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{7+3x^3}}.$

20. $\int \frac{x^4dx}{\sqrt{3+x^5}}.$

21. $\int \frac{1}{1-x^2} \ln \frac{1+x}{1-x} dx.$

22. $\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x \cdot \sqrt[3]{\mathrm{th}^2 x}}.$

23. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx.$

24. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}} dx.$

25. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}} dx.$

26. $\int \frac{\mathrm{sh}\, x}{\sqrt{\mathrm{ch}\, 2x}} dx.$

27. $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}.$

28. $\int \frac{e^x dx}{e^x + 2}.$

29. $\int \sin^5 x \, dx.$

30. $\int \cos^5 x \, dx.$

Завдання 4

Обчислити інтеграли:

1. $\int \frac{x^3+2}{(x+1)(x^2+1)} \, dx.$

2. $\int \frac{dx}{x^3 - 4x}.$

3. $\int \frac{x^2\,dx}{(x-1)^3}.$

4. $\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x^2-1)}.$

5. $\int \frac{x+7}{x^3-4x^2+4x}\,dx.$

6. $\int \frac{2x^4+1}{x^3+x}\,dx.$

7. $\int \frac{x^4+2x+3}{x^3-9x}\,dx.$

8. $\int \frac{x+4}{(x+1)(x^2-1)}\,dx.$

9. $\int \frac{dx}{(x+2)(x+1)^2}.$

10. $\int \frac{x-6}{x^3+2x^2+x}\,dx.$

11. $\int \frac{x+1}{x^3+4x}\,dx.$

12. $\int \frac{(x+2)\,dx}{x^3-7x^2+6x}.$

13. $\int \frac{(x+1)\,dx}{x^3+2x^2+5x}.$

14. $\int \frac{8x-15}{x^3-4x^2+5x}\,dx.$

15. $\int \frac{x^4+1}{x^2-x-2}\,dx.$

16. $\int \dfrac{x^2+2x}{(x+3)^3}\ dx.$

17. $\int \dfrac{2x+3}{(x+1)(x^2-3x+2)}\ dx.$

18. $\int \dfrac{x^2dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}.$

19. $\int \dfrac{2x+1}{x^3+4x^2+4x}\ dx.$

20. $\int \dfrac{x\ dx}{(x+4)(x^2-1)}.$

21. $\int \dfrac{x^3+2x+1}{x^2-5x+6}\ dx\ .$

22. $\int \dfrac{x^2+3x+4}{x^2+3x+2}\ dx.$

23. $\int \dfrac{x^3+2}{(x+1)(x^2+1)}\ dx\ .$

24. $\int \dfrac{x^{10}}{x^2+x-2} dx.$

25. $\int \dfrac{x^3+1}{x^3-5x^2+6} dx.$

26. $\int \dfrac{x}{x^3-3x+2} dx.$

27. $\int \dfrac{x^5}{(x-1)^2\left(x^2-1\right)} dx.$

28. $\int \frac{3x^2+1}{\left(x^2-1\right)^3}dx.$

29. $\int \frac{x^2}{\left(x+2\right)^2\left(x+4\right)^2}dx.$

30. $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx.$

Завдання 5

Обчислити інтеграли:

1. $\int \frac{x+1}{(x^2+1)^3}\,dx\,.$

2. $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}\,dx\,.$

3. $\int \frac{5x^2-12}{(x^2-6x+13)^2}\,dx\,.$

4. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^4}.$

5. $\int \frac{dx}{(x^2+4)^3}.$

6. $\int \frac{dx}{(x^2+9)^3}.$

7. $\int \frac{dx}{(x^2+2x+2)^3}\,.$

8. $\int \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)^2}\,dx\,.$

9. $\int \frac{dx}{(x^2+25)^3}$.

10. $\int \frac{dx}{(x^2+6x+25)^2}$.

11. $\int \frac{dx}{(x^2+2x+2)^4}$.

12. $\int \frac{dx}{(x^2-6x+13)^3}$.

13. $\int \frac{dx}{(x^2+6x+13)^3}$.

14. $\int \frac{dx}{(x^2-6x+25)^2}$.

15. $\int \frac{dx}{(x^2-2x+2)^3}$.

16. $\int \frac{dx}{(x^2+16)^4}$.

17. $\int \frac{dx}{(x^2-2x+10)^3}$.

18. $\int \frac{dx}{(x^2+2x+10)^3}$.

19. $\int \frac{x-2}{(x^2+1)^4}\,dx$.

20. $\int \frac{2x-1}{(x^2+4)^3}\,dx$.

21. $\int \frac{x-2}{(x^2+2x+2)^3}\,dx.$

22. $\int \frac{x^2-4}{(x^2+2x+2)^2}\,dx.$

23. $\int \frac{x^2-1}{(x^2-6x+13)^2}\,dx\,.$

24. $\int \frac{x^2+x+1}{(x^2-2x+5)^2}\,dx\,.$

25. $\int \frac{dx}{(x^2+2x+15)^3}.$

26. $\int \frac{dx}{(x^2+4x+5)^3}.$

27. $\int \frac{x^2+2x+3}{(x^2+2x+15)^2}\,dx\,.$

28. $\int \frac{x-2}{(x^2+4x+5)^3}\,dx.$

29. $\int \frac{dx}{(x^2-2x+15)^3}.$

30. $\int \frac{x^2+2x+2}{(x^2+2x+5)^2}\,dx\,.$

Завдання 6

Обчислити інтеграли:

1. $\int \frac{dx}{1+2\sin x}.$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3}$.

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{4 + 5\cos x}$.

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{5 - 4\cos x}$.

5. $\displaystyle\int \frac{dx}{5 + 13\cos x}$.

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + 4\sin x}$.

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{4 - 5\cos x}$.

8. $\displaystyle\int \frac{\cos x \; dx}{1 + \cos x}$.

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{5 + 3\cos x}$.

10. $\displaystyle\int \frac{\sin x \; dx}{1 - \sin x}$.

11. $\displaystyle\int \frac{dx}{13 - 12\cos x}$.

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{5 + 4\cos x}$.

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 - 3\sin x}$.

14. $\displaystyle\int \frac{dx}{11 + 5\cos x}$.

15. $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}.$

16. $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}.$

17. $\int \frac{dx}{5 - 3\cos x}.$

18. $\int \frac{dx}{5 + 4\sin x}$.

19. $\int \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x} dx.$

20. $\int \frac{dx}{5 - 4\sin x + 3\cos x}.$

21. $\int \frac{dx}{1 + \cos x + \sin x}.$

22. $\int \frac{dx}{2 - \cos x}.$

23. $\int \frac{dx}{3 + 5\cos x}.$

24. $\int \frac{dx}{5 - 3\sin x}.$

25. $\int \frac{dx}{5 + 3\cos x + 2\sin x}.$

26. $\int \frac{dx}{5 + 2\cos x - 4\sin x}.$

27. $\int \frac{3\sin x - 2\cos x}{1 + \cos x} dx.$

28. $\int \dfrac{dx}{5\cos x + 10\sin x}$.

29. $\int \dfrac{dx}{3 + 2\cos x - \sin x}$.

30. $\int \dfrac{dx}{8 + 7\cos x - 4\sin x}$.

Завдання 7

Обчислити інтеграли:

1. $\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx$.

2. $\int \dfrac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$.

3. $\int \dfrac{dx}{4 + 5\sin^2 x - 3\cos^2 x}$.

4. $\int \dfrac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

5. $\int \dfrac{dx}{(\sin x + \cos x)^2}$.

6. $\int \dfrac{\cos^2 x}{\sin x \cdot \cos 3x} dx$.

7. $\int \sin^2 x \cos^5 x\, dx$.

8. $\int \dfrac{\sin 2x\, dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

9. $\int \dfrac{dx}{\mathrm{tg}\, x \cdot \cos 2x}$.

10. $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx.$

11. $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}.$

12. $\int \mathrm{ctg}^4 x \, dx.$

13. $\int \frac{dx}{4\sin^2 x - 7\cos^2 x}.$

14. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} dx.$

15. $\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx.$

16. $\int \frac{dx}{1-\sin^4 x}.$

17. $\int \mathrm{tg}^5 x \, dx.$

18. $\int \frac{dx}{\mathrm{tg}^2 x + \sin^2 x}.$

19. $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x - \cos^3 x} dx.$

20. $\int \frac{\sin x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx.$

21. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}.$

22. $\int \frac{dx}{\cos^3 x}.$

23. $\int \mathrm{ctg}^6 x \, dx.$

24. $\int \dfrac{\sin^4 x}{\cos^6 x} dx.$

25. $\int \dfrac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}.$

26. $\int \dfrac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}.$

27. $\int \dfrac{dx}{\sin x \cos^5 x}.$

28. $\int \sin^6 x \, dx.$

29. $\int \cos^6 x \, dx.$

30. $\int \sin x \sin \dfrac{x}{2} \sin \dfrac{x}{3} dx.$

Завдання 8

Обчислити інтеграли:

1. $\int \dfrac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}} dx.$

2. $\int \dfrac{dx}{1+\sqrt{x}}.$

3. $\int \dfrac{dx}{x\left(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}.$

4. $\int \dfrac{x\sqrt[3]{x+2}}{x+\sqrt[3]{x+2}} dx.$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^3}$.

6. $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\,dx.$

7. $\int \frac{dx}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2}\right)}$.

8. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x+1}+\sqrt{x+1}}$.

9. $\int \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{x}$.

10. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{dx}{x}$.

11. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}$.

12. $\int \sqrt{\frac{2x-1}{2x+1}}\,\frac{dx}{2x+1}$.

13. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}$.

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x}}$.

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{2x-1}}$.

16. $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x+3}}$.

17. $\int \frac{1-\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}\,dx.$

18. $\int \frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\,dx.$

19. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+3}}.$

20. $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[6]{x+1}}\,dx.$

21. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x-3}}.$

22. $\int \frac{\sqrt[6]{x^5}+\sqrt{x}+1}{\sqrt[6]{x^5}+\sqrt[6]{x^7}}\,dx.$

23. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x+1}}.$

24. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x+2}}\,dx.$

25. $\int \frac{\sqrt[3]{x-1}\,dx}{\sqrt[6]{x-1}+1}.$

26. $\int \frac{\sqrt[6]{x-1}-2}{\sqrt[6]{x-1}+2}\,dx.$

27. $\int \frac{\sqrt{x+2}}{x-3}\,dx.$

28. $\int \frac{\sqrt[3]{x+3}}{\sqrt[6]{x+3}+1}\,dx.$

29. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+3}.$

30. $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{x-1}+\sqrt[3]{x-1}}.$

Завдання 9

Обчислити інтеграли:

1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x-1}}.$

2. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}.$

3. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}.$

4. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}.$

5. $\int x\sqrt{x^2-2x+2}\,dx.$

6. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}.$

7. $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx.$

8. $\int \frac{x-1}{\sqrt{3x^2-x+5}}dx.$

9. $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x}dx.$

10. $\int \frac{2x+1}{\sqrt{1+x-3x^2}}dx.$

11. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{4x^2+8x+9}}dx.$

12. $\int x^2\sqrt{4-x^2}dx.$

13. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}.$

14. $\int \frac{2x-10}{\sqrt{1+x-x^2}}dx.$

15. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$

16. $\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x}dx.$

17. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}.$

18. $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x+x^2}}dx.$

19. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+1}}.$

20. $\int \frac{(3x+4)dx}{\sqrt{x^2+6x+13}}.$

21. $\int \frac{(3x-1)dx}{\sqrt{2x^2-5x+1}}.$

22. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$

23. $\int \frac{5x+2}{\sqrt{x^2+3x-4}}dx.$

24. $\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx.$

25. $\int \frac{x}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}dx.$

26. $\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}dx.$

27. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}}dx.$

28. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+x+x^2}}.$

29. $\int \frac{dx}{(x-1)^2 \cdot \sqrt{1-x^2}}.$

30. $\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}dx.$

Завдання 10

Обчислити інтеграли:

1. $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x^2\sqrt{x}}dx.$

2. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x^2}\,dx.$

3. $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^2}}{x\sqrt[6]{x^5}}\,dx.$

4. $\int \sqrt{x^3+x^4}\,dx.$

5. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}.$

6. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}.$

7. $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

8. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}.$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$

10. $\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt[6]{1+x^6}}.$

11. $\int \frac{dx}{x^3\cdot\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}.$

12. $\int \sqrt[3]{3x-x^3}\,dx.$

13. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt{x}}\,dx.$

14. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x^7}}\,dx.$

15. $\int \sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^4 dx.$

16. $\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{x^2+1}}.$

17. $\int \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5}\,dx.$

18. $\int \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2}\,dx.$

19. $\int \sqrt[3]{x-x^3}\,dx.$

20. $\int \frac{dx}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3}.$

21. $\int x^5\cdot\sqrt[3]{\left(1+x^3\right)^2}\,dx.$

22. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$

23. $\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{x^5+1}}.$

24. $\int \frac{dx}{x^{11}\cdot\sqrt{x^4+1}}.$

25. $\int \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\,dx.$

26. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x \cdot \sqrt[3]{x^2}}\,dx.$

27. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}{x \cdot \sqrt[9]{x^4}}\,dx.$

28. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x \cdot \sqrt[9]{x^8}}\,dx.$

29. $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x})^2}}{x \cdot \sqrt[9]{x^5}}\,dx.$

30. $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x^2})^2}}{x^2 \cdot \sqrt[9]{x}}\,dx.$

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ:

1. Дороговцев А.Я. Математический анализ. Справочное пособие, К.: Вища школа, 1985.
2. Фихтенгольц В. Н. Курс дифференциального и интегрального исчисления (Том 1, 2, 3). М.: Наука, 1969.
3. Ильин В.А., Позняк С.Г. Основы математического анализа. М.: Наука, 1965.
4. Письменний Д.Т. Конспект лекций по высшей математике (частини 1, 2). М.: Рольф, 2000.
5. Берман Г.М. Сборник задач по курсу математического анализа. М.: Наука, 1967.
6. І.В. Алєксєєва, В.О. Гайдей, О.О. Диховичний, Л.Б. Федорова. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Практикум. К., 2012.
7. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. К.: Вища школа, 1998.
8. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа, Т.1, М., Наука, 1981.
9. Никольский С.М. Курс математического анализа, Т.1, М., Наука, 1983.
10. И.И. Ежов, А.В. Скороход, М.И. Ядренко. Элементы комбинаторики. М.: Наука, 1977.
11. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу, М., Физматгиз, 1972.

12. Гудименко Ф.С. Збірник задач з вищої математики. — К.: КДУ, 1967. — 352 с.

13. Вища математика: Збірник задач / В.П. Дубовик, І.І. Юрик, І.П. Вовкодав та ін. — К.: Вища шк., 1999. — 480 с.

14. Сборник задач по курсу высшей математики / Г.И. Кручкович, Н.И. Гутарина,
П.Е. Дюбюк и др. — М.: Высш. шк., 1973. — 576 с.

15. Сборник задач по математическому анализу. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость / Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин. — М.: Наука, 1984. — 592 с.

16. Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды / Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин. — М.: Наука, 1986. — 528 с.

ЗМІСТ