

Індивідуальні завдання з теми «Лінійна алгебра та аналітична геометрія»

Варіант 1

1. Обчисліть $f(A)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f(x) = 2x^2 + 3x + 1.$$

2. Розв'яжіть матричне рівняння $A \cdot X = B$,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

3. Розв'яжіть систему:

- а) матричним методом;
б) за формулами Крамера

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 10, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$$

4. Дослідіть систему на сумісність і в разі сумісності знайдіть її загальний розв'язок.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & -9 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & -5 & -1 & 3 \end{array} \right).$$

5. Знайдіть власні числа і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Розкладіть вектор

$$\vec{x} = \{-2; 11; 14\} \text{ за векторами}$$

$$\vec{p} = \{1; 1; 3\}, \quad \vec{q} = \{1; 2; 1\},$$

$$\vec{r} = \{-4; 1; 1\}.$$

7. Чи колінеарні вектори

$$\vec{c}_1 = 2\vec{a} + 4\vec{b} \quad \text{і} \quad \vec{c}_2 = 3\vec{b} - \vec{a},$$

побудовані на векторах

$$\vec{a} = \{1; -2; 3\} \quad \text{і} \quad \vec{b} = \{3; 0; -1\}?$$

8. Чи компланарні вектори

$$\vec{a} = \{2; 3; 1\}, \quad \vec{b} = \{-1; 0; -1\},$$

$$\vec{c} = \{2; 2; 2\}?$$

9. Знайдіть рівняння прямої, що проходить через точку перетину прямих

$3x - 2y - 7 = 0$ і $x + 3y - 6 = 0$ та відтинає на осі абсцис відрізок, що дорівнює 3.

10. Знайдіть точку перетину прямої і площини.

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{4},$$
$$x + 2y + 3z - 14 = 0.$$

11. Знайдіть точку M' , симетричну точці $M(0; -3; -2)$ відносно прямої

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1,5}{-1} = \frac{z}{1}.$$

12. Дано координати точок $M_0(0; -1; 1)$, $M_1(1; 0; 1)$, $M_2(4; 6; 1)$, $M_3(6; -1; 0)$.

Знайдіть :

а) канонічні рівняння прямої M_1M_2 ;

б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;

г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_3}$;

д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до площини $M_1M_2M_3$.

13. Визначте тип кривої $9x^2 + 4y^2 - 18x - 27 = 0$, вкажіть усі її характеристики. Зробіть рисунок.

14. Запишіть канонічне рівняння:

а) еліпса; б) гіперболи;

в) параболи, якщо її вершина – $O(0, 0)$ (A, B точки, що лежать на кривій, F – фокус,

a – велика (дійсна) піввісь,

b – мала (уявна) піввісь,

ε – ексцентриситет, $y = \pm kx$ –

рівняння асимптот гіперболи,

D – директриса кривої,

$2c$ – фокусна відстань).

а) $b = 15$, $F(-10, 0)$;

б) $a = 13$, $\varepsilon = 14/13$;

в) $D: x = -4$.

15. Запишіть рівняння кола, що проходить через вершини гіперболи $12x^2 - 13y^2 = 156$ і має центр у точці $A(0, -2)$.

16. Побудуйте криву, задану рівнянням $\rho = 2 \sin 4\varphi$ у полярній системі координат.

Варіант 2

1. Обчисліть $f(A)$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$f(x) = x^2 + 5x + 2.$$

2. Розв'яжіть матричне рівняння $X \cdot A = B$,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Розв'яжіть систему:

- а) матричним методом;
б) за формулами Крамера.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -1. \end{cases}$$

4. Дослідіть систему на сумісність і в разі сумісності знайдіть її загальний розв'язок.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & -2 & 7 \end{array} \right).$$

5. Знайдіть власні числа і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Розкладіть вектор

$\vec{x} = \{2; -3; 1\}$ за векторами

$\vec{p} = \{2, 1, 8\}$, $\vec{q} = \{2; -3; 1\}$,

$\vec{r} = \{1; -1; 2\}$.

7. Чи колінеарні вектори

$\vec{c}_1 = a + 2b$ і $\vec{c}_2 = 3a - b$,

побудовані на векторах

$\vec{a} = \{1; 0; 1\}$, $\vec{b} = \{-2; 3; 5\}$?

8. Чи компланарні вектори

$\vec{a} = \{3; 2; 1\}$, $\vec{b} = \{2; 3; 4\}$,

$\vec{c} = \{3; 1; -1\}$?

9. Знайдіть проекцію точки $A(-8, 12)$ на пряму, що проходить через точки $B(2, -3)$ і $C(-5, 1)$.

10. Знайдіть точку перетину прямої і площини.

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{5},$$

$$x + 2y - 5z + 20 = 0.$$

11. Знайдіть точку M' , симетричну точці $M(2; -1; 1)$ відносно прямої

$$\frac{x-4,5}{1} = \frac{y+3}{-0,5} = \frac{z-2}{1}.$$

12. Дано координати точок $M_0(0; 1; 1)$, $M_1(-13; 0; 6)$,

$$M_2(10;1;-3), \quad M_3(-2;1;3).$$

Знайдіть :

а) канонічні рівняння прямої M_1M_2 ;

б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;

г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_3}$;

д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до площини $M_1M_2M_3$.

13. Визначте тип кривої $25x^2 + 9y^2 + 100x - 18y - 116 = 0$, вкажіть усі її характеристики. Зробіть рисунок.

14. Запишіть канонічне рівняння:

а) еліпса; б) гіперболи;

в) параболи, якщо її вершина – $O(0,0)$ (A, B точки, що лежать на кривій, F – фокус,

a – велика (дійсна) піввісь,

b – мала (уявна) піввісь,

ε – ексцентриситет, $y = \pm kx$ –

рівняння асимптот гіперболи,

D – директриса кривої,

$2c$ – фокусна відстань).

а) $b = 2, F(4\sqrt{2}, 0)$;

б) $a = 7, \varepsilon = \sqrt{85}/7$;

в) $D: x = 5$.

15. Запишіть рівняння кола, що проходить через вершини гіперболи $4x^2 - 9y^2 = 36$ і має центр у точці $A(0,4)$.

16. Побудуйте криву, задану рівнянням $\rho = 2\sin 4\varphi$ у полярній системі координат.

Варіант 3

1. Обчисліть $f(A)$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$f(x) = x^3 + x^2 - 7x + 3.$$

2. Розв'яжіть матричне рівняння $A \cdot X \cdot B = C$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \\ 6 & 5 & 9 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Розв'яжіть систему:

- а) матричним методом;
б) за формулами Крамера.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -3, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

4. Дослідіть систему на сумісність і в разі сумісності знайдіть її загальний розв'язок.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 9 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 7 & 6 & 5 \end{array} \right).$$

5. Знайдіть власні числа і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Розкладіть вектор

$$\vec{x} = \{-12; 13; -4\} \text{ за векторами}$$

$$\vec{p} = \{1; 2; 3\}, \quad \vec{q} = \{1; 4; 1\},$$

$$\vec{r} = \{5; 1; -3\}.$$

7. Чи колінеарні вектори

$$\vec{c}_1 = 5\vec{a} + 3\vec{b} \quad \text{і} \quad \vec{c}_2 = 2\vec{a} - \vec{b},$$

побудовані на векторах

$$\vec{a} = \{-2; 4; 1\}, \quad \vec{b} = \{1; -2; 7\}?$$

8. Чи компланарні вектори

$$\vec{a} = \{1; 5; 2\}, \quad \vec{b} = \{-1; 1; -1\},$$

$$\vec{c} = \{1; 1; 1\}?$$

9. Дані дві вершини

трикутника ABC : $A(-4, 4)$,

$B(4, -12)$ і точка $M(4, 2)$

перетину його висот. Знайдіть

вершину C .

10. Знайдіть точку перетину

прямої і площини.

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-1}{2},$$

$$x - 3y + 7z - 24 = 0.$$

11. Знайдіть точку M' , симетричну точці $M(1;1;1)$ відносно прямої

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1,5}{-2} = \frac{z-1}{1}.$$

12. Дано координати точок $M_0(0;4;1)$, $M_1(6;-8;-2)$, $M_2(-4;10;-1)$, $M_3(0;-2;-3)$.

Знайдіть :

а) канонічні рівняння прямої M_1M_2 ;

б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;

г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_3}$;

д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до площини $M_1M_2M_3$.

13. Визначте тип кривої $4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y - 11 = 0$, вкажіть усі її характеристики. Зробіть рисунок.

14. Запишіть канонічне рівняння:

а) еліпса; б) гіперболи;

в) параболи, якщо її вершина – $O(0, 0)$ (A, B точки, що лежать на кривій, F – фокус,

a – велика (дійсна) піввісь, b – мала (уявна) піввісь, ε – ексцентриситет, $y = \pm kx$ – рівняння асимптот гіперболи, D – директриса кривої, $2c$ – фокусна відстань).

а) $A(3,0), B(2, \sqrt{5}/3)$;

б) $c = 5, \varepsilon = 5/4$;

в) $D: y = -2$.

15. Запишіть рівняння кола, що проходить через фокуси гіперболи $24y^2 - 25x^2 = 600$ і має центр у точці $A(0, -8)$.

16. Побудуйте криву, задану рівнянням $\rho = 2(1 - \sin 2\varphi)$ у полярній системі координат.

Варіант 4

1. Обчисліть $f(A)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix},$$

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 8.$$

2. Розв'яжіть матричне рівняння $A \cdot X = B$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Розв'яжіть систему:

- а) матричним методом;
б) за формулами Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = -2, \\ 5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -2, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5. \end{cases}$$

4. Дослідіть систему на сумісність і в разі сумісності знайдіть її загальний розв'язок.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 7 \\ 5 & 4 & 3 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & 1 & 9 \end{array} \right).$$

5. Знайдіть власні числа і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. Розкладіть вектор

$\vec{x} = \{11; 14; 12\}$ за векторами

$$\vec{p} = \{2; 4; 3\}, \quad \vec{q} = \{1; 2; -1\},$$

$$\vec{r} = \{4; 4; 5\}.$$

7. Чи колінеарні вектори

$$\vec{c}_1 = 4\vec{a} + 3\vec{b} \quad \vec{c}_2 = 8\vec{a} - \vec{b},$$

побудовані на векторах

$$\vec{a} = \{1; 2; -3\}, \quad \vec{b} = \{2; -1; -1\}?$$

8. Чи компланарні вектори

$$\vec{a} = \{1; -1; -3\}, \quad \vec{b} = \{3; 2; 1\},$$

$$\vec{c} = \{2; 3; 4\}?$$

9. Знайдіть рівняння прямої, що відтинає на осі ординат відрізок, рівний 2, і проходить паралельно прямій $2y - x = 3$.

10. Знайдіть точку перетину прямої і площини.

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{2},$$
$$2x - y + 4z = 0.$$

11. Знайдіть точку M' , симетричну точці $M(1; 2; 3)$ відносно прямої

$$\frac{x-0,5}{0} = \frac{y+1,5}{-1} = \frac{z-1,5}{1}.$$

12. Дано координати точок $M_0(0; 1; 2)$, $M_1(2; 0; 2)$, $M_2(8; -1; 7)$, $M_3(12; 1; 1)$.

Знайдіть :

а) канонічні рівняння прямої M_1M_2 ;

б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;

г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_3}$;

д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до площини $M_1M_2M_3$.

13. Визначте тип кривої $25x^2 - 9y^2 + 100x + 18y - 134 = 0$, вкажіть усі її характеристики. Зробіть рисунок.

14. Запишіть канонічне рівняння:

а) еліпса; б) гіперболи;

в) параболи, якщо її вершина – (A, B) точки, що лежать на кривій, F – фокус,

a – велика (дійсна) піввісь,

b – мала (уявна) піввісь,

ε – ексцентриситет, $y = \pm kx$ –

рівняння асимптот гіперболи,

D – директриса кривої,

$2c$ – фокусна відстань).

а) $\varepsilon = \sqrt{21}/5$, $A(-5, 0)$;

б) $A(\sqrt{80}, 3)$, $B(4\sqrt{6}, 3/\sqrt{2})$;

в) $D: y = 1$.

15. Запишіть рівняння кола, що проходить через точку $O(0, 0)$ і має центр у вершині параболи $y^2 = 3(x - 4)$.

16. Побудуйте криву, задану рівнянням $\rho = 3 \sin 6\varphi$ у полярній системі координат.

Варіант 5

1. Обчисліть $f(A)$.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f(x) = x^2 - 3x - 1.$$

2. Розв'яжіть матричне рівняння

$$X \cdot A = B, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Розв'яжіть систему:

- а) матричним методом;
б) за формулами Крамера.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 19, \\ -3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

4. Дослідіть систему на сумісність і в разі сумісності знайдіть її загальний розв'язок.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 7 & 14 & 20 & 27 & 0 \\ 5 & 10 & 16 & 19 & -2 \\ 3 & 5 & 6 & 13 & 5 \end{array} \right).$$

5. Знайдіть власні числа і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. Розкладіть вектор

$$\vec{x} = \{-3; -2; 2\} \quad \text{за векторами}$$

$$\vec{p} = \{1; 2; 1\}, \quad \vec{q} = \{2; 2; -3\},$$

$$\vec{r} = \{-1; 1; 4\}.$$

7. Чи колінеарні вектори

$$\vec{c}_1 = -2\vec{a} + \vec{b} \quad \text{і} \quad \vec{c}_2 = 3\vec{a} - 2\vec{b},$$

побудовані на векторах

$$\vec{a} = \{3; 5; 4\}, \quad \vec{b} = \{5; 9; 7\}?$$

8. Чи компланарні вектори

$$\vec{a} = \{3; 3; 1\}, \quad \vec{b} = \{1; -2; 1\},$$

$$\vec{c} = \{1; 1; 1\}?$$

9. Знайдіть рівняння прямої, що проходить через точку $A(2, -3)$ і точку перетину прямих $2x - y = 5$ і $x + y = 1$.

10. Знайдіть точку перетину прямої і площини.

$$\frac{x-5}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{0},$$

$$3x + y - 5z - 12 = 0.$$

11. Знайдіть точку M' , симетричну точці $M(1; 0; -1)$ відносно прямої

$$\frac{x-3,5}{2} = \frac{y-1,5}{2} = \frac{z}{0}$$

12. Дано координати точок $M_0(0;1;-2)$, $M_1(1;-12;8)$, $M_2(0;11;-10)$, $M_3(0;-1;2)$.

Знайдіть :

а) канонічні рівняння прямої M_1M_2 ;

б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;

г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_3}$;

д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до площини $M_1M_2M_3$.

13. Визначте тип кривої $4x^2 - 9y^2 - 16x - 18y - 29 = 0$, вкажіть усі її характеристики. Зробіть рисунок.

14. Запишіть канонічне рівняння:

а) еліпса; б) гіперболи;

в) параболи, якщо її вершина – $O(0,0)$ (A, B точки, що лежать на кривій, F – фокус,

a – велика (дійсна) піввісь,

b – мала (уявна) піввісь,

ε – ексцентриситет, $y = \pm kx$ – рівняння асимптот гіперболи, D – директриса кривої, $2c$ – фокусна відстань).

а) $2a = 22$, $\varepsilon = \sqrt{57}/11$;

б) $k = 2/3$, $2c = 10\sqrt{3}$;

в) вісь симетрії Ox і $A(27, 9)$.

15. Запишіть рівняння кола, що проходить через фокуси еліпса $9x^2 + 25y^2 = 1$ і має центр у точці $A(0,6)$.

16. Побудуйте криву, задану рівнянням $\rho = 2 / (1 + \cos \varphi)$ у полярній системі координат.

Варіант 6

1. Обчисліть $f(A)$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f(x) = x^2 - x - 1.$$

2. Розв'яжіть матричне рівняння

$$A \cdot X \cdot B = C, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Розв'яжіть систему:

- а) матричним методом;
б) за формулами Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -17, \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 18, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = -7. \end{cases}$$

4. Дослідіть систему на сумісність і в разі сумісності знайдіть її загальний розв'язок.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right).$$

5. Знайдіть власні числа і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. Розкладіть вектор

$$\vec{x} = \{-12; -2; -15\}$$
 за векторами

$$\vec{p} = \{1; 2; -1\}, \quad \vec{q} = \{-4; 3; 1\},$$

$$\vec{r} = \{2; 4; 5\}.$$

7. Чи колінеарні вектори

$$\vec{c}_1 = \vec{a} + \vec{b} \quad \text{і} \quad \vec{c}_2 = 4\vec{a} + 2\vec{b},$$

побудовані на векторах

$$\vec{a} = \{1; 4; -2\}, \quad \vec{b} = \{1; 1; -1\}?$$

8. Чи компланарні вектори

$$\vec{a} = \{3; 1; -1\}, \quad \vec{b} = \{-2; -1; 0\},$$

$$\vec{c} = \{5; 2; -1\}?$$

9. Довести, що чотирикутник $ABCD$ –

трапеція, якщо $A(3, 6)$, $B(5, 2)$, $C(-1, -3)$, $D(-5, 5)$.

10. Знайдіть точку перетину прямої і площини.

$$\frac{x+1}{-3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-2},$$
$$x+3y-5z+9=0.$$

11. Знайдіть точку M' , симетричну точці $M(2; 1; 0)$

відносно прямої

$$\frac{x-2}{0} = \frac{y+1,5}{-1} = \frac{z+0,5}{1}.$$

12. Дано координати точок $M_0(1; -1; 0)$, $M_1(7; -5; -1)$, $M_2(-3; 13; 0)$, $M_3(1; 1; -2)$.

Знайдіть :

а) канонічні рівняння прямої M_1M_2 ;

б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;

г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_3}$;

д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до площини $M_1M_2M_3$.

13. Визначте тип кривої $y^2 - 2x - 2y - 1 = 0$, вкажіть усі її характеристики. Зробіть рисунок.

14. Запишіть канонічне рівняння:

а) еліпса; б) гіперболи;

в) параболи, якщо її вершина – $O(0, 0)$ (A, B точки, що лежать на кривій, F – фокус,

a – велика (дійсна) піввісь,

b – мала (уявна) піввісь,

ε – ексцентриситет, $y = \pm kx$ –

рівняння асимптот гіперболи,

D – директриса кривої, $2c$ – фокусна відстань).

а) $b = \sqrt{15}$, $\varepsilon = \sqrt{10}/25$;

б) $k = 3/4$, $2a = 16$;

в) вісь симетрії Ox і $A(4, -8)$.

15. Запишіть рівняння кола, що проходить через лівий фокус гіперболи $3x^2 - 4y^2 = 12$ і має центр у точці $A(0, -3)$.

16. Побудуйте криву, задану рівнянням $\rho = 3(1 + \sin \varphi)$ у полярній системі координат.

Варіант 7

1. Обчисліть $f(A)$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$f(x) = x^2 - 2x + 1.$$

2. Розв'яжіть матричне рівняння $A \cdot X = B$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 5 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

3. Розв'яжіть систему:

- а) матричним методом;
б) за формулами Крамера.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

4. Дослідіть систему на сумісність і в разі сумісності знайдіть її загальний розв'язок.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

5. Знайдіть власні числа і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Розкладіть вектор

$\vec{x} = \{-4; 13; 16\}$ за векторами

$$\vec{p} = \{1; 3; 1\}, \quad \vec{q} = \{7; -1; 4\},$$

$$\vec{r} = \{-1; 2; 3\}.$$

7. Чи колінеарні вектори

$$\vec{c}_1 = 4\vec{a} - 2\vec{b} \quad \text{і} \quad \vec{c}_2 = \vec{b} - 2\vec{a},$$

побудовані на векторах

$$\vec{a} = \{1; -2; 5\}, \quad \vec{b} = \{3; -1; 0\}?$$

8. Чи компланарні вектори

$$\vec{a} = \{4; 3; 1\}, \quad \vec{b} = \{1; -2; 1\},$$

$$\vec{c} = \{2; 2; 2\}?$$

9. Запишіть рівняння прямої, що проходить через точку $A(3, 1)$ перпендикулярно до прямої BC , якщо $B(2, 5)$, $C(1, 0)$.

10. Знайдіть точку перетину прямої і площини.

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1},$$
$$x - 2y + 5z + 17 = 0.$$

11. Знайдіть точку M' , симетричну точці $M(-2; -3; 0)$

відносно прямої

$$\frac{x+0,5}{1} = \frac{y+1,5}{0} = \frac{z-0,5}{1}.$$

12. Дано координати точок $M_0(1;3;1)$, $M_1(0;-2;-1)$, $M_2(-3;-1;6)$, $M_3(-5;-3;0)$.

Знайдіть :

а) канонічні рівняння прямої M_1M_2 ;

б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;

г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_3}$;

д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до площини $M_1M_2M_3$.

13. Визначте тип кривої $y^2 - 4x - 2y - 7 = 0$, вкажіть усі її характеристики. Зробіть рисунок.

14. Запишіть канонічне рівняння:

а) еліпса; б) гіперболи;

в) параболи, якщо її вершина – $O(0,0)$ (A, B точки, що лежать на кривій, F – фокус, a – велика (дійсна) піввісь, b – мала (уявна) піввісь, ε – ексцентриситет, $y = \pm kx$ – рівняння асимптот гіперболи,

D – директриса кривої, $2c$ – фокусна відстань).

а) $a = 4$, $F(3,0)$;

б) $b = 2\sqrt{10}$, $F(-11,0)$;

в) $D: x = -2$.

15. Запишіть рівняння кола, що проходить через фокус еліпса $3x^2 - 4y^2 = 12$ і має центр у точці A – його верхній вершині.

16. Побудуйте криву, задану рівнянням $\rho = 2(1 - \cos \varphi)$ у полярній системі координат.

Варіант 8

1. Обчисліть $f(A)$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$f(x) = -2x^2 + 8x - 6.$$

2. Розв'яжіть матричне рівняння $X \cdot A = B$,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Розв'яжіть систему:

- а) матричним методом;
б) за формулами Крамера.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -3, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 8, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$$

4. Дослідіть систему на сумісність і в разі сумісності знайдіть її загальний розв'язок.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 15 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 0 & 5 & 23 \end{array} \right).$$

5. Знайдіть власні числа і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. Розкладіть вектор

$$\vec{x} = \{4; 5; -7\} \text{ за векторами}$$

$$\vec{p} = \{1; 2; 1\}, \quad \vec{q} = \{2; -1; 1\},$$

$$\vec{r} = \{-1; 1; -3\}.$$

7. Чи колінеарні вектори

$$\vec{c}_1 = 6\vec{a} - 3\vec{b} \quad \text{і} \quad \vec{c}_2 = \vec{b} - 2\vec{a},$$

побудовані на векторах

$$\vec{a} = \{3; 4; -1\}, \quad \vec{b} = \{2; -1; 1\}?$$

8. Чи компланарні вектори

$$\vec{a} = \{4; 3; 1\}, \quad \vec{b} = \{6; 7; 4\},$$

$$\vec{c} = \{2; 0; -1\}?$$

9. Знайдіть рівняння прямої, що проходить через точку $A(-2, 1)$ паралельно прямій MN , якщо $M(-3, -2)$, $A(1, 6)$.

10. Знайдіть точку перетину прямої і площини.

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+4}{1},$$

$$x - 2y + 4z - 19 = 0.$$

11. Знайдіть точку M' , симетричну точці $M(-1; 0; -1)$ відносно прямої

$$\frac{x}{-1} = \frac{y-1,5}{0} = \frac{z-2}{1}.$$

12. Дано координати точок $M_0(1;2;3)$, $M_1(14;3;-2)$, $M_2(-9;2;7)$, $M_3(3;2;1)$.

Знайдіть :

а) канонічні рівняння прямої M_1M_2 ;

б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;

г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_3}$;

д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до площини $M_1M_2M_3$.

13. Визначте тип кривої $4x^2 + 25y^2 + 16x - 50y - 59 = 0$, вкажіть усі її характеристики. Зробіть рисунок.

14. Запишіть канонічне рівняння:

а) еліпса; б) гіперболи;

в) параболи, якщо її вершина – $O(0,0)$ (A, B точки, що лежать на кривій, F – фокус,

a – велика (дійсна) піввісь, b – мала (уявна) піввісь,

ε – ексцентриситет, $y = \pm kx$ – рівняння асимптот гіперболи, D – директриса кривої, $2c$ – фокусна відстань).

а) $b = 4, F(9,0)$;

б) $a = 5, \varepsilon = 7/5$;

в) $D: x = 6$.

15. Запишіть рівняння кола, що проходить через вершину гіперболи $x^2 - 16y^2 = 64$ і має центр у точці $A(0,-2)$.

16. Побудуйте криву, задану рівнянням $\rho = 3(1 - \cos 2\varphi)$ у полярній системі координат.

Варіант 9

1. Обчисліть $f(A)$.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad f(x) = x^3 - 4x.$$

2. Розв'яжіть матричне рівняння $A \cdot X \cdot B = C$,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 7 \\ 8 & 9 & 6 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Розв'яжіть систему:

- а) матричним методом;
б) за формулами Крамера.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

4. Дослідіть систему на сумісність і в разі сумісності знайдіть її загальний розв'язок.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & -5 \\ 2 & -1 & -3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -6 & -10 \end{array} \right).$$

5. Знайдіть власні числа і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

6. Розкладіть вектор

$$\vec{x} = \{0, 0, 2\} \quad \text{за векторами}$$

$$\vec{p} = \{2, 2, 3\}, \quad \vec{q} = \{4; -3; -1\},$$

$$\vec{r} = \{-6; 1; -1\}.$$

7. Чи колінеарні вектори

$$\vec{c}_1 = 3\vec{a} - 9\vec{b} \quad \text{і} \quad \vec{c}_2 = -3\vec{b} - \vec{a},$$

побудовані на векторах

$$\vec{a} = \{-2; -3; -2\}, \quad \vec{b} = \{1; 0; 5\}?$$

8. Чи компланарні вектори

$$\vec{a} = \{3; 2; 1\}, \quad \vec{b} = \{1; -3; -7\},$$

$$\vec{c} = \{1; 2; 3\}?$$

9. Знайдіть точку,

симетричну точці $M(2, -1)$

відносно прямої $x - 2y + 3 = 0$.

10. Знайдіть точку перетину прямої і площини.

$$\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+4}{-1},$$
$$2x - y + 3z + 23 = 0.$$

11. Знайдіть точку M' ,

симетричну точці $M(0; 2; 1)$

відносно прямої

$$\frac{x-1,5}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{1}.$$

12. Дано координати точок

$$M_0(-3; 1; -1),$$

$$M_1(-7; 0; 5), M_2(11; 1; -5),$$

$$M_3(-1; -1; -1).$$

Знайдіть :

а) канонічні рівняння прямої M_1M_2 ;

б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;

г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_3}$;

д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до площини $M_1M_2M_3$.

13. Визначте тип кривої $4x^2 + 36y^2 + 72y - 108 = 0$, вкажіть усі її характеристики. Зробіть рисунок.

14. Запишіть канонічне рівняння:

а) еліпса; б) гіперболи;

в) параболи, якщо її вершина – $O(0, 0)$ (A, B точки, що лежать на кривій, F – фокус, a – велика (дійсна) піввісь, b – мала (уявна) піввісь, ε – ексцентриситет, $y = \pm kx$ – рівняння асимптот гіперболи, D – директриса кривої, $2c$ – фокусна відстань).

а) $A(0, \sqrt{3}), B(\sqrt{14/3}, 1)$;

б) $2c = 22, \varepsilon = 11/10$;

в) $D: y = -4$.

15. Запишіть рівняння кола, що проходить через фокуси гіперболи $4x^2 - 5y^2 = 80$ і має центр у точці $A(0, -4)$.

16. Побудуйте криву, задану рівнянням $\rho = 4 \sin 3\varphi$ у полярній системі координат.

Варіант 10

1. Обчисліть $f(A)$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$f(x) = 2x^2 + 6x - 3.$$

2. Розв'яжіть матричне рівняння $A \cdot X = B$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

3. Розв'яжіть систему:

- а) матричним методом;
б) за формулами Крамера.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 2, \\ x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 4. \end{cases}$$

4. Дослідіть систему на сумісність і в разі сумісності знайдіть її загальний розв'язок.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -9 & 8 & 1 \\ 5 & 18 & 4 & 5 & 12 \end{array} \right).$$

5. Знайдіть власні числа і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

6. Розкладіть вектор

$\vec{x} = \{-1; 13; 10\}$ за векторами

$$\vec{p} = \{1; 2; 3\}, \quad \vec{q} = \{3; -3; 1\},$$

$$\vec{r} = \{-2; 4; 1\}.$$

7. Чи колінеарні вектори

$$\vec{c}_1 = 2\vec{a} - \vec{b} \quad \text{і} \quad \vec{c}_2 = 3\vec{b} - 6\vec{a},$$

побудовані на векторах

$$\vec{a} = \{-1; 4; 2\}, \quad \vec{b} = \{3; -2; 6\}?$$

8. Чи компланарні вектори

$$\vec{a} = \{3; 7; 2\}, \quad \vec{b} = \{-2; 0; -1\},$$

$$\vec{c} = \{2; 2; 1\}?$$

9. Знайдіть точку O перетину діагоналей

чотирикутника $ABCD$, якщо $A(-1, -3)$, $A(3, 5)$, $C(5, 2)$, $D(3, -5)$.

10. Знайдіть точку перетину прямої і площини.

$$\frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+3}{0},$$

$$2x - 3y - 5z - 7 = 0.$$

11. Знайдіть точку M' , симетричну точці $M(3; -3; -1)$

відносно прямої

$$\frac{x-6}{5} = \frac{y-3,5}{4} = \frac{z+0,5}{0}.$$

12. Дано координати точок $M_0(0; -1; 1)$, $M_1(1; 0; 1)$, $M_2(4; 6; 1)$, $M_3(6; -1; 0)$.

Знайдіть :

а) канонічні рівняння прямої M_1M_2 ;

б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;

г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_3}$;

д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до площини $M_1M_2M_3$.

13. Визначте тип кривої $4x^2 + 9y^2 + 24x + 36y + 36 = 0$, вкажіть усі її характеристики. Зробіть рисунок.

14. Запишіть канонічне рівняння:

а) еліпса; б) гіперболи;

в) параболи, якщо її вершина – $O(0, 0)$ (A, B точки, що лежать на кривій, F – фокус, a – велика (дійсна) піввісь, b – мала (уявна) піввісь, ε – ексцентриситет, $y = \pm kx$ – рівняння асимптот гіперболи,

D – директриса кривої, $2c$ – фокусна відстань).

а) $\varepsilon = 7/8$, $A(8, 0)$;

б) $A(3, -\sqrt{3/5})$, $B(\sqrt{13/5}, 6)$;

в) $D: y = 4$.

15. Запишіть рівняння кола, що проходить через точку $O(0, 0)$ і має центр у точці A – вершині параболи $y^2 = -(x + 5) / 2$.

16. Побудуйте криву, задану рівнянням $\rho = 4 \sin 4\varphi$ у полярній системі координат.

Варіант 11

1. Обчисліть $f(A)$.

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix},$$

$$f(x) = x^2 - 5x + 3.$$

2. Розв'яжіть матричне рівняння $X \cdot A = B$,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

3. Розв'яжіть систему:

- а) матричним методом;
б) за формулами Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 3, \\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2. \end{cases}$$

4. Дослідіть систему на сумісність і в разі сумісності знайдіть її загальний розв'язок.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 4 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 9 & 8 & 3 \\ 5 & 3 & 7 & 9 & 3 \\ 6 & 5 & 7 & 5 & -3 \end{array} \right).$$

5. Знайдіть власні числа і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. Розкладіть вектор

$$\vec{x} = \{-1; 9; 12\}$$
 за векторами

$$\vec{p} = \{1; 3; 2\}, \quad \vec{q} = \{-2; -1; 3\},$$

$$\vec{r} = \{3; 2; -1\}.$$

7. Чи колінеарні вектори

$$\vec{c}_1 = 2\vec{a} - \vec{b} \quad \text{і} \quad \vec{c}_2 = 3\vec{b} + 6\vec{a},$$

побудовані на векторах

$$\vec{a} = \{5; 0; -1\}, \quad \vec{b} = \{7; 2; 3\}?$$

8. Чи компланарні вектори

$$\vec{a} = \{1; -2; 6\}, \quad \vec{b} = \{1; 0; 1\},$$

$$\vec{c} = \{2; -6; 17\}?$$

9. Через точку перетину прямих $6x - 4y + 5 = 0$,

$2x + 5y + 8 = 0$ провести пряму, паралельну осі абсцис.

10. Знайдіть точку перетину прямої і площини.

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{3},$$

$$4x - 2y - z - 11 = 0.$$

11. Знайдіть точку M' , симетричну точці $M(-1; 2; 0)$

відносно прямої

$$\frac{x+0,5}{1} = \frac{y+0,7}{-0,2} = \frac{z-2}{2}.$$

12. Дано координати точок $M_0(-2; -2; 3)$, $M_1(4, 6, 2)$, $M_2(-6; 12; 3)$, $M_3(-2; 0; 1)$.

Знайдіть :

а) канонічні рівняння прямої M_1M_2 ;

б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;

г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_3}$;

д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до площини $M_1M_2M_3$.

13. Визначте тип кривої $4x^2 - 36y^2 - 72y - 180 = 0$, вкажіть усі її характеристики. Зробіть рисунок.

14. Запишіть канонічне рівняння:

а) еліпса; б) гіперболи;

в) параболи, якщо її вершина – $O(0, 0)$ (A, B точки, що лежать на кривій, F – фокус,

a – велика (дійсна) піввісь,

b – мала (уявна) піввісь,

ε – ексцентриситет, $y = \pm kx$ –

рівняння асимптот гіперболи,

D – директриса кривої, $2c$ – фокусна відстань).

а) $2a = 24$, $\varepsilon = \sqrt{22}/6$;

б) $k = \sqrt{2/3}$, $2c = 10$;

в) вісь симетрії Ox і $A(-7, -7)$.

15. Запишіть рівняння кола, що проходить через правий фокус еліпса $33x^2 + 49y^2 = 1617$ і має центр у точці $A(1, 7)$.

16. Побудуйте криву, задану рівнянням $\rho = 3(\cos \varphi + 1)$ у полярній системі координат.

Варіант 12

1. Обчисліть $f(A)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$f(x) = 5x^2 + 2x - 8.$$

2. Розв'яжіть матричне рівняння $A \cdot X \cdot B = C$,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

3. Розв'яжіть систему:

- а) матричним методом;
б) за формулами Крамера.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 7, \\ x_1 + 3x_2 = 7, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

4. Дослідіть систему на сумісність і в разі сумісності знайдіть її загальний розв'язок.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & -3 & -6 \\ 2 & -5 & 7 & 9 \\ 4 & 2 & -4 & -7 \\ 5 & -2 & 2 & 1 \end{array} \right).$$

5. Знайдіть власні числа і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Розкладіть вектор

$$\vec{x} = \{5, -6, 2\} \quad \text{за векторами}$$

$$\vec{p} = \{1; 2; 3\}, \quad \vec{q} = \{-4; 1; -2\},$$

$$\vec{r} = \{2; -3; -1\}.$$

7. Чи колінеарні вектори

$$\vec{c}_1 = 5\vec{a} - 2\vec{b} \quad \text{і} \quad \vec{c}_2 = 5\vec{b} + 3\vec{a},$$

побудовані на векторах

$$\vec{a} = \{0; 3; -2\}, \quad \vec{b} = \{1; -2; 1\}?$$

8. Чи компланарні вектори

$$\vec{a} = \{6; 3; 4\}, \quad \vec{b} = \{-1; -2; -1\},$$

$$\vec{c} = \{2; 1; 2\}?$$

9. Відомі рівняння сторони AB трикутника ABC

$$4x + y = 12, \quad \text{його висот}$$

$$BH \quad 5x - 4y = 12 \quad \text{і} \quad AM \quad x + y = 6.$$

Знайдіть рівняння двох інших сторін трикутника ABC .

10. Знайдіть точку перетину прямої і площини.

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-1}{-1},$$
$$3x - 2y - 4z - 8 = 0.$$

11. Знайдіть точку M' , симетричну точці $M(3;3;3)$ відносно прямої

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1,5}{0} = \frac{z-3}{1}.$$

12. Дано координати точок $M_0(1;0;-1)$, $M_1(-2;-1;4)$, $M_2(11;0;5)$, $M_3(-1;0;1)$.

Знайдіть :

а) канонічні рівняння прямої M_1M_2 ;

б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;

г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_3}$;

д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до площини $M_1M_2M_3$.

13. Визначте тип кривої $4x^2 - 25y^2 + 16x + 50y - 109 = 0$, вкажіть усі її характеристики. Зробіть рисунок.

14. Запишіть канонічне рівняння:

а) еліпса; б) гіперболи;

в) параболи, якщо її вершина – $O(0,0)$ (A, B точки, що лежать на кривій, F – фокус,

a – велика (дійсна) піввісь, b – мала (уявна) піввісь, ε – ексцентриситет, $y = \pm kx$ – рівняння асимптот гіперболи, D – директриса кривої, $2c$ – фокусна відстань).

а) $2b = 4$, $\varepsilon = 5\sqrt{29}/29$;

б) $k = 12/13$, $2a = 26$;

в) вісь симетрії Ox і $A(-5, 15)$.

15. Запишіть рівняння кола, що проходить через лівий фокус гіперболи $3x^2 - 5y^2 = 30$ і має центр у точці $A(0, 6)$.

16. Побудуйте криву, задану рівнянням $\rho = 1/(2 - \sin \varphi)$ у полярній системі координат.

Варіант 13

1. Обчисліть $f(A)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + x - 1.$$

2. Розв'яжіть матричне рівняння $A \cdot X = B$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

3. Розв'яжіть систему:

- а) матричним методом;
б) за формулами Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = -2, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

4. Дослідіть систему на сумісність і в разі сумісності знайдіть її загальний розв'язок.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 7 & 8 & -5 & 6 & -4 & 5 \\ 6 & 7 & -4 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 9 & 7 & 5 & 7 & 3 \end{array} \right).$$

5. Знайдіть власні числа і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Розкладіть вектор

$\vec{x} = \{16; 2; 10\}$ за векторами

$\vec{p} = \{2; 1; 1\}$, $\vec{q} = \{-6; 1; -1\}$,

$\vec{r} = \{8; -1; 4\}$.

7. Чи колінеарні вектори

$\vec{c}_1 = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ і $\vec{c}_2 = 2\vec{b} + 3\vec{a}$,

побудовані на векторах

$\vec{a} = \{-2; 7; -1\}$, $\vec{b} = \{-3; 5; 2\}$?

8. Чи компланарні вектори

$\vec{a} = \{7; 3; 4\}$, $\vec{b} = \{-1; -2; -1\}$,

$\vec{c} = \{4; 2; 4\}$?

9. Дано дві вершини трикутника ABC : $A(-6, 2)$,

$B(2, -2)$ і точка перетину його

висот $H(1, 2)$. Знайдіть

координати точки M перетину сторони AC і висоти BH .

10. Знайдіть точку перетину прямої і площини.

$$\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{2},$$
$$x + 2y - z - 2 = 0.$$

11. Знайдіть точку M' , симетричну точці $M(2; -2; -3)$ відносно прямої

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y+0,5}{0} = \frac{z+1,5}{0}.$$

12. Дано координати точок $M_0(1; -2; -1)$, $M_1(2; -1; -1)$, $M_2(5; 0; 4)$, $M_3(7; -2; -2)$.

Знайдіть :

а) канонічні рівняння прямої M_1M_2 ;

б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;

г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_3}$;

д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до площини $M_1M_2M_3$.

13. Визначте тип кривої $4x^2 - 9y^2 + 24x - 36y - 36 = 0$, вкажіть усі її характеристики. Зробіть рисунок.

14. Запишіть канонічне рівняння:

а) еліпса; б) гіперболи;

в) параболи, якщо її вершина – (A, B) точки, що лежать на кривій, F – фокус,

a – велика (дійсна) піввісь,

b – мала (уявна) піввісь,

ε – ексцентриситет, $y = \pm kx$ –

рівняння асимптот гіперболи,

D – директриса кривої,

$2c$ – фокусна відстань).

а) $a = 6, F(-4, 0)$;

б) $b = 3, F(7, 0)$;

в) $D: x = -7$.

15. Запишіть рівняння кола, що проходить через фокуси еліпса $16x^2 - 41y^2 = 656$ і має центр у точці A – його нижній вершині.

16. Побудуйте криву, задану рівнянням $\rho = 5(1 - \sin 2\varphi)$ у полярній системі координат.

Варіант 14

1. Обчисліть $f(A)$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$f(x) = 2x^3 - 8x + 6.$$

2. Розв'яжіть матричне рівняння $X \cdot A = B$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

3. Розв'яжіть систему:

- а) матричним методом;
б) за формулами Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 6, \\ 7x_1 + x_2 + 4x_3 = 10, \\ x_2 + 5x_3 = 4. \end{cases}$$

4. Дослідіть систему на сумісність і в разі сумісності знайдіть її загальний розв'язок.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & 6 & 5 & 6 & 1 \\ 3 & 7 & 4 & 8 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 9 & 1 \end{array} \right).$$

5. Знайдіть власні числа і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. Розкладіть вектор

$\vec{x} = \{13; -3; 6\}$ за векторами

$\vec{p} = \{3; 1; 4\}$, $\vec{q} = \{2; -2; -1\}$,

$\vec{r} = \{1; 1; 1\}$.

7. Чи колінеарні вектори

$\vec{c}_1 = 4\vec{a} - 2\vec{b}$ і $\vec{c}_2 = \vec{b} - 2\vec{a}$,

побудовані на векторах

$\vec{a} = \{3; 7; 0\}$, $\vec{b} = \{1; -3; 4\}$?

8. Чи компланарні вектори

$\vec{a} = \{2; 3; 2\}$, $\vec{b} = \{4; 7; 5\}$,

$\vec{c} = \{2; 0; -1\}$?

9. Знайдіть рівняння висот трикутника ABC , що проходить через вершини A і B , якщо $A(-4, 2)$, $B(3, -5)$, $C(5, 0)$.

10. Знайдіть точку перетину прямої і площини.

$$\frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z+2}{3},$$
$$5x - y + 4z + 3 = 0.$$

11. Знайдіть точку M' , симетричну точці $M(-1; 0; 1)$ відносно прямої

$$\frac{x+0,5}{0} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-4}{2}.$$

12. Дано координати точок $M_0(2;0;0)$, $M_1(-4;5;1)$, $M_2(2;0;-4)$, $M_3(-2;0;-2)$.

Знайдіть :

а) канонічні рівняння прямої M_1M_2 ;

б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;

г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_3}$;

д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до площини $M_1M_2M_3$.

13. Визначте тип кривої $y^2 - 6x + 8y + 22 = 0$, вкажіть усі її характеристики. Зробіть рисунок.

14. Запишіть канонічне рівняння:

а) еліпса; б) гіперболи;

в) параболи, якщо її вершина – $O(0,0)$ (A, B точки, що лежать на кривій, F – фокус,

a – велика (дійсна) піввісь, b – мала (уявна) піввісь,

ε – ексцентриситет, $y = \pm kx$ – рівняння асимптот гіперболи, D – директриса кривої, $2c$ – фокусна відстань).

а) $b = 7, F(5,0)$;

б) $a = 11, \varepsilon = 12/11$;

в) $D: x = 10$.

15. Запишіть рівняння кола, що проходить через вершину гіперболи $2x^2 - 9y^2 = 18$ і має центр у точці $A(0,4)$.

16. Побудуйте криву, задану рівнянням $\rho = 3(2 - \cos 2\varphi)$ у полярній системі координат.

Варіант 15

1. Обчисліть $f(A)$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & -4 \end{pmatrix},$$

$$f(x) = x^2 - 6x + 9.$$

2. Розв'яжіть матричне рівняння

$$A \cdot X \cdot B = C, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Розв'яжіть систему:

- а) матричним методом;
б) за формулами Крамера.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_3 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 = 5. \end{cases}$$

4. Дослідіть систему на сумісність і в разі сумісності знайдіть її загальний розв'язок.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 4 & 3 & 0 \\ 4 & 6 & 9 & 8 & -3 \\ 6 & 9 & 9 & 4 & 8 \end{array} \right)$$

5. Знайдіть власні числа і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

6. Розкладіть вектор

$$\vec{x} = \{13; 16; -1\} \quad \text{за векторами}$$

$$\vec{p} = \{1; 2; 1\}, \quad \vec{q} = \{2; 3; 1\},$$

$$\vec{r} = \{-1; 1; 4\}.$$

7. Чи колінеарні вектори

$$\vec{c}_1 = 4\vec{a} - 2\vec{b} \quad \text{і} \quad \vec{c}_2 = \vec{b} - 2\vec{a},$$

побудовані на векторах

$$\vec{a} = \{3; 7; 0\}, \quad \vec{b} = \{1; -3; 4\}?$$

8. Чи компланарні вектори

$$\vec{a} = \{5; 3; 4\}, \quad \vec{b} = \{-1; 0; -1\},$$

$$\vec{c} = \{4; 2; 4\}?$$

9. Обчисліть координати точки перетину

перпендикулярів, проведених через середини сторін

трикутника, вершинами якого служать точки $A(2, 3)$,

$$B(0, -3), \quad C(6, -3).$$

10. Знайдіть точку перетину прямої і площини.

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-4}{3},$$

$$x + 3y + 5z - 42 = 0.$$

11. Знайдіть точку M' , симетричну точці $M(0; -3; -2)$ відносно прямої

$$\frac{x+0,5}{0} = \frac{y+1,5}{-1} = \frac{z-1,5}{1}.$$

12. Дано координати точок $M_0(3; -1; 2)$, $M_1(7; 5; 0)$, $M_2(-1; -5; 2)$, $M_3(1; -1; -2)$.

Знайдіть :

а) канонічні рівняння прямої M_1M_2 ;

б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;

г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_3}$;

д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до площини $M_1M_2M_3$.

13. Визначте тип кривої $y^2 - 8x - 6y - 7 = 0$, вкажіть усі її характеристики. Зробіть рисунок.

14. Запишіть канонічне рівняння:

а) еліпса; б) гіперболи;

в) параболи, якщо її вершина – $O(0, 0)$ (A, B точки, що лежать на кривій, F – фокус,

a – велика (дійсна) піввісь, b – мала (уявна) піввісь, ε – ексцентриситет, $y = \pm kx$ – рівняння асимптот гіперболи, D – директриса кривої, $2c$ – фокусна відстань).

а) $A(-\sqrt{17/3}, 1/3)$, $B(\sqrt{21}/2, 1/2)$;

б) $k = 1/2$, $2b = 6$;

в) $D: y = -1$.

15. Запишіть рівняння кола, що проходить через фокуси гіперболи $5x^2 - 11y^2 = 55$ і має центр у точці $A(0, 5)$.

16. Побудуйте криву, задану рівнянням $\rho = 6 \sin 4\varphi$ у полярній системі координат.

Варіант 16

1. Обчисліть $f(A)$.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$f(x) = 9x^2 - 4.$$

2. Розв'яжіть матричне рівняння

$$X \cdot A \cdot B = C, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

3. Розв'яжіть систему:

- а) матричним методом;
б) за формулами Крамера.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_1 - x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$$

4. Дослідіть систему на сумісність і в разі сумісності знайдіть її загальний розв'язок.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -2 & 5 & -6 \end{array} \right)$$

5. Знайдіть власні числа і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 7 & -6 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 5 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

6. Розкладіть вектор

$$\vec{x} = \{11; 11; 27\} \quad \text{за векторами}$$

$$\vec{p} = \{1; 1; 5\}, \quad \vec{q} = \{5; 1; 1\},$$

$$\vec{r} = \{-1; -5; -1\}.$$

7. Чи колінеарні вектори

$$\vec{c}_1 = 2\vec{a} + 4\vec{b} \quad \text{і} \quad \vec{c}_2 = 3\vec{b} - \vec{a},$$

побудовані на векторах

$$\vec{a} = \{1; 3; 4\}, \quad \vec{b} = \{3; 1; -1\}?$$

8. Чи компланарні вектори

$$\vec{a} = \{3; 10; 5\}, \quad \vec{b} = \{-2; -2; -3\},$$

$$\vec{c} = \{2; 4; 3\}?$$

9. Запишіть рівняння висоти, проведеної через вершину A трикутника ABC , знаючи рівняння його сторін:

$$AB - 2x - y - 3 = 0,$$

$$AC - x + 5y - 7 = 0,$$

$$BC - 3x - 2y + 13 = 0.$$

10. Знайдіть точку перетину прямої і площини.

$$\frac{x-3}{-1} = \frac{y-4}{5} = \frac{z-4}{2},$$

$$7x + y + 4z - 47 = 0.$$

11. Знайдіть точку M' , симетричну точці $M(1;0;1)$ відносно площини

$$4x + 6y + 4z - 25 = 0.$$

12. Дано координати точок $M_0(2;1;0)$, $M_1(3;2;0)$, $M_2(6;3;5)$, $M_3(8;1;-1)$.

Знайдіть :

а) канонічні рівняння прямої M_1M_2 ;

б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;

г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_3}$;

д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до площини $M_1M_2M_3$.

13. Визначте тип кривої $25x^2 + 4y^2 + 150x - 8y + 129 = 0$, вкажіть усі її характеристики. Зробіть рисунок.

14. Запишіть канонічне рівняння:

а) еліпса; б) гіперболи;

в) параболи, якщо її вершина – (A, B) точки, що лежать на кривій, F – фокус, a – велика

(дійсна) піввісь, b – мала
(уявна) піввісь, ε –
ексцентриситет, $y = \pm kx$ –

рівняння асимптот гіперболи,
 D – директриса кривої,
 $2c$ – фокусна відстань).

а) $\varepsilon = 3/5$, $A(0,8)$;

б) $A(\sqrt{6},0)$, $B(-2\sqrt{2},1)$;

в) $D: y = 9$.

15. Запишіть рівняння кола, що проходить через точку $B(1,4)$ і має центр у точці A – вершині параболи $y^2 = -(x-4)/3$.

16. Побудуйте криву, задану рівнянням $\rho = 2\cos 6\varphi$ у полярній системі координат.

Варіант 17

1. Обчисліть $f(A)$.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix},$$

$$f(x) = 9 - x^2.$$

2. Розв'яжіть матричне рівняння

$$X \cdot A \cdot B = C, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

3. Розв'яжіть систему:

- а) матричним методом;
б) за формулами Крамера.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 + 3x_3 = 5, \\ 3x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 5. \end{cases}$$

4. Дослідіть систему на сумісність і в разі сумісності знайдіть її загальний розв'язок.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 5 & 3 & 4 & -2 & 3 & 1 \\ 8 & 5 & 5 & -4 & 4 & 2 \\ 7 & 4 & 7 & -3 & 7 & -1 \\ 4 & 3 & -1 & -3 & -2 & 4 \end{array} \right)$$

5. Знайдіть власні числа і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. Розкладіть вектор

$$\vec{x} = \{-1; -1; 2\} \quad \text{за векторами}$$

$$\vec{p} = \{2; 1; 3\}, \quad \vec{q} = \{2; -3; 1\},$$

$$\vec{r} = \{1; 2; 1\}.$$

7. Чи колінеарні вектори

$$\vec{c}_1 = \vec{a} + 2\vec{b} \quad \text{і} \quad \vec{c}_2 = 3\vec{a} - \vec{b},$$

побудовані на векторах

$$\vec{a} = \{1; 2; 3\}, \quad \vec{b} = \{-2; 5; 5\}?$$

8. Чи компланарні вектори

$$\vec{a} = \{-2; -4; -3\}, \quad \vec{b} = \{4; 3; 1\},$$

$$\vec{c} = \{6; 7; 4\}?$$

9. Дано трикутник з

вершинами $A(3, 1)$, $B(-3, -1)$

і $C(5, -12)$. Знайдіть рівняння

і Обчисліть довжину його

медіани, проведеної із вершини

C .

10. Знайдіть точку перетину прямої і площини.

$$\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{5},$$

$$2x + 3y + 7z - 52 = 0.$$

11. Знайдіть точку M' , симетричну точці $M(-1;0;-1)$ відносно площини

$$2x + 6y - 2z + 11 = 0.$$

12. Дано координати точок $M_0(3;5;1)$, $M_1(-3;9;2)$, $M_2(7;-9;1)$, $M_3(3;3;3)$.

Знайдіть :

а) канонічні рівняння прямої M_1M_2 ;

б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;

г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_3}$;

д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до площини $M_1M_2M_3$.

13. Визначте тип кривої $16x^2 + 25y^2 + 64x + 50y - 311 = 0$, вкажіть усі її характеристики. Зробіть рисунок.

14. Запишіть канонічне рівняння:

а) еліпса; б) гіперболи;

в) параболи, якщо її вершина – $O(0,0)$ (A, B точки, що лежать на кривій, F – фокус,

a – велика (дійсна) піввісь, b – мала (уявна) піввісь, ε – ексцентриситет, $y = \pm kx$ – рівняння асимптот гіперболи, D – директриса кривої, $2c$ – фокусна відстань).

а) $2a = 22$, $\varepsilon = 10/11$;

б) $k = \sqrt{11}/5$, $2c = 12$;

в) вісь симетрії Ox і $A(-7, 5)$.

15. Запишіть рівняння кола, що проходить через лівий фокус еліпса $3x^2 - 7y^2 = 21$ і має центр у точці $A(-1, -3)$.

16. Побудуйте криву, задану рівнянням $\rho = 3 / (1 - \cos 2\varphi)$ у полярній системі координат.

Варіант 18

1. Обчисліть $f(A)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$f(x) = 2x^2 + 8x + 8.$$

2. Розв'яжіть матричне рівняння $X \cdot A = B$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -3 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Розв'яжіть систему:

а) матричним методом;
б) за формулами Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

4. Дослідіть систему на сумісність і в разі сумісності знайдіть її загальний розв'язок.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array} \right)$$

5. Знайдіть власні числа і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 6 & 9 & -6 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

6. Розкладіть вектор

$$\vec{x} = \{1; 2; 6\} \quad \text{за векторами}$$

$$\vec{p} = \{1; 2; 3\}, \quad \vec{q} = \{1; -3; -1\},$$

$$\vec{r} = \{-4; 2; -1\}.$$

7. Чи колінеарні вектори

$$\vec{c}_1 = 5\vec{a} - 3\vec{b} \quad \text{і} \quad \vec{c}_2 = 2\vec{a} - \vec{b},$$

побудовані на векторах

$$\vec{a} = \{3; 4; -1\}, \quad \vec{b} = \{1; -2; 2\}?$$

8. Чи компланарні вектори

$$\vec{a} = \{3; 1; -1\}, \quad \vec{b} = \{1; 0; -1\},$$

$$\vec{c} = \{8; 3; -2\}?$$

9. Запишіть рівняння прямої, що проходить через початок координат і точку перетину прямих

$$2x + 5y - 8 = 0 \quad \text{і} \quad 2x + 3y + 4 = 0.$$

10. Знайдіть точку перетину прямої і площини.

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+3}{2},$$

$$3x + 4y + 7z - 16 = 0.$$

11. Знайдіть точку M' , симетричну точці $M(0;2;1)$ відносно площини

$$2x + 4y - 3 = 0.$$

12. Дано координати точок $M_0(-1;1;0)$, $M_1(0;1;1)$, $M_2(1;6;4)$, $M_3(-1;0;6)$.

Знайдіть :

а) канонічні рівняння прямої M_1M_2 ;

б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;

г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_3}$;

д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до площини $M_1M_2M_3$.

13. Визначте тип кривої $x^2 + 4y^2 - 8x + 8y + 16 = 0$, вкажіть усі її характеристики. Зробіть рисунок.

14. Запишіть канонічне рівняння:

а) еліпса; б) гіперболи;

в) параболи, якщо її вершина – (A, B) точки, що лежать на кривій, F – фокус,

a – велика (дійсна) піввісь, b – мала (уявна) піввісь, ε – ексцентриситет, $y = \pm kx$ – рівняння асимптот гіперболи, D – директриса кривої, $2c$ – фокусна відстань).

а) $b = 5$, $\varepsilon = 12/13$;

б) $k = 12/13$, $2a = 26$;

в) вісь симетрії Oy і $A(-9, 6)$.

15. Запишіть рівняння кола, що проходить через ліву вершину параболи $5x^2 - 9y^2 = 45$ і має центр у точці $A(0, -6)$.

16. Побудуйте криву, задану рівнянням $\rho = 2(1 - \cos 3\varphi)$ у полярній системі координат.

Варіант 19

1. Обчисліть $f(A)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & -7 \end{pmatrix},$$

$$f(x) = 5 - 4x - x^2.$$

2. Розв'яжіть матричне рівняння

$$A \cdot X \cdot B = C, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

3. Розв'яжіть систему:

- а) матричним методом;
б) за формулами Крамера.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 6, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -2. \end{cases}$$

4. Дослідіть систему на сумісність і в разі сумісності знайдіть її загальний розв'язок.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 6 & -3 & 9 \end{array} \right)$$

5. Знайдіть власні числа і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. Розкладіть вектор

$$\vec{x} = \{4; 11; 11\} \quad \text{за векторами}$$

$$\vec{p} = \{2; 3; 3\}, \quad \vec{q} = \{-1; 4; -2\},$$

$$\vec{r} = \{-1; -2; 4\}.$$

7. Чи колінеарні вектори

$$\vec{c}_1 = 4\vec{a} + 3\vec{b} \quad \text{і} \quad \vec{c}_2 = 8\vec{a} - 3\vec{b},$$

побудовані на векторах

$$\vec{a} = \{1; -2; 5\}, \quad \vec{b} = \{2; 2; -1\}?$$

8. Чи компланарні вектори

$$\vec{a} = \{4; 2; 2\}, \quad \vec{b} = \{-3; -3; -3\},$$

$$\vec{c} = \{2; 1; 2\}?$$

9. Знайдіть рівняння перпендикулярів до прямої $3x + 5y - 15 = 0$, проведених через точки перетину даної прямої з осями координат.

10. Знайдіть точку перетину прямої і площини.

$$\frac{x-5}{-2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+4}{-1},$$
$$2x - 5y + 4z + 24 = 0.$$

11. Знайдіть точку M' , симетричну точці $M(2;1;0)$ відносно площини $y + z + 2 = 0$.

12. Дано координати точок $M_0(4; -2; -6)$, $M_1(2; -4; 4)$, $M_2(4; -2; 1)$, $M_3(0; -2; 2)$.

Знайдіть :

а) канонічні рівняння прямої M_1M_2 ;

б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;

г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_3}$;

д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до площини $M_1M_2M_3$.

13. Визначте тип кривої $25x^2 - 4y^2 + 150x + 8y + 121 = 0$, вкажіть усі її характеристики. Зробіть рисунок.

14. Запишіть канонічне рівняння:

а) еліпса; б) гіперболи;

в) параболи, якщо її вершина – $O(0, 0)$ (A, B точки, що лежать на кривій, F – фокус,

a – велика (дійсна) піввісь, b – мала (уявна) піввісь, ε – ексцентриситет, $y = \pm kx$ – рівняння асимптот гіперболи, D – директриса кривої, $2c$ – фокусна відстань).

а) $a = 9, F(7, 0)$;

б) $b = 6, F(12, 0)$;

в) $D: x = -1/4$.

15. Запишіть рівняння кола, що проходить через фокуси еліпса $24x^2 - 25y^2 = 600$ і має центр у точці A , де A – його верхня вершина.

16. Побудуйте криву, задану рівнянням $\rho = 3(1 - \cos 4\varphi)$ у полярній системі координат.

Варіант 20

1. Обчисліть $f(A)$.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix},$$

$$f(x) = 3x^2 - 7x + 5.$$

2. Розв'яжіть матричне рівняння

$$A \cdot X = B,$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

3. Розв'яжіть систему:

- а) матричним методом;
б) за формулами Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5, \\ 5x_1 - 7x_2 + 8x_3 = -11, \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 20. \end{cases}$$

4. Дослідіть систему на сумісність і в разі сумісності знайдіть її загальний розв'язок.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 & 11 \\ 2 & 1 & -3 & 4 & -5 \\ 2 & -13 & 11 & -8 & 49 \\ 4 & 9 & -13 & 14 & -37 \end{array} \right)$$

5. Знайдіть власні числа і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & -4 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

6. Розкладіть вектор

$$\vec{x} = \{8; 6; -4\} \text{ за векторами}$$

$$\vec{p} = \{2; 1; 3\}, \quad \vec{q} = \{-1; -3; 1\},$$

$$\vec{r} = \{1, -5, -7\}.$$

7. Чи колінеарні вектори

$$\vec{c}_1 = -3\vec{a} + 2\vec{b} \quad \text{і} \quad \vec{c}_2 = \vec{a} + 2\vec{b},$$

побудовані на векторах

$$\vec{a} = \{3; 5; 4\} \quad \text{і} \quad \vec{b} = \{5; 9; 7\}?$$

8. Чи компланарні вектори

$$\vec{a} = \{4; 1; 2\}, \quad \vec{b} = \{9; 2; 5\},$$

$$\vec{c} = \{1; 1; -1\}?$$

9. Дано рівняння сторін чотирикутника:

$$x - y = 0,$$

$$x + 3y = 0, \quad x - y - 4 = 0,$$

$$3x + y - 12 = 0. \quad \text{Знайдіть}$$

рівняння його діагоналей.

10. Знайдіть точку перетину прямої і площини.

$$\frac{x-1}{8} = \frac{y-8}{-5} = \frac{z+5}{12},$$

$$x - 2y - 3z + 18 = 0.$$

11. Знайдіть точку M' , симетричну точці $M(-2; 2; 0)$

відносно площини

$$4x - 5y - z - 7 = 0.$$

12. Дано координати точок $M_0(-1; -3; 1)$, $M_1(5; -7; 0)$, $M_2(-5; 1; 1)$, $M_3(-1; -1; -1)$.

Знайдіть :

а) канонічні рівняння прямої M_1M_2 ;

б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;

г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_3}$;

д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до площини $M_1M_2M_3$.

13. Визначте тип кривої $16x^2 - 25y^2 + 64x - 50y - 361 = 0$, вкажіть усі її характеристики. Зробіть рисунок.

14. Запишіть канонічне рівняння:

а) еліпса; б) гіперболи;

в) параболи, якщо її вершина – $O(0, 0)$ (A, B точки, що лежать на кривій, F – фокус,

a – велика (дійсна) піввісь, b – мала (уявна) піввісь,

ε – ексцентриситет, $y = \pm kx$ – рівняння асимптот гіперболи, D – директриса кривої, $2c$ – фокусна відстань).

а) $b = 5$, $F(-10, 0)$;

б) $a = 9$, $\varepsilon = 4/3$;

в) $D: x = 12$.

15. Запишіть рівняння кола, що проходить через праву вершину гіперболи $3x^2 - 16y^2 = 48$ і має центр у точці $A(1, 3)$.

16. Побудуйте криву, задану рівнянням $\rho = 5(2 - \sin \varphi)$ у полярній системі координат.

Варіант 21

1. Обчисліть $f(A)$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 1.$$

2. Розв'яжіть матричне рівняння $A \cdot X = B$,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 0 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

3. Розв'яжіть систему:

- а) матричним методом;
б) за формулами Крамера

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 12, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

4. Дослідіть систему на сумісність і в разі сумісності знайдіть її загальний розв'язок.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & -9 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & -5 & -1 & 3 \end{array} \right).$$

5. Знайдіть власні числа і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Розкладіть вектор

$$\vec{x} = \{-2; 11; 14\} \text{ за векторами}$$

$$\vec{p} = \{1; 1; 3\}, \quad \vec{q} = \{1; 2; 1\},$$

$$\vec{r} = \{-4; 1; 1\}.$$

7. Чи колінеарні вектори

$$\vec{c}_1 = 3\vec{a} - 4\vec{b} \quad \text{і} \quad \vec{c}_2 = 3\vec{b} - \vec{a},$$

побудовані на векторах

$$\vec{a} = \{2; -2; 1\} \quad \text{і} \quad \vec{b} = \{3; 0; -1\}?$$

8. Чи компланарні вектори

$$\vec{a} = \{-2; 3; -1\}, \quad \vec{b} = \{-1; 0; 1\},$$

$$\vec{c} = \{2; 5; -2\}?$$

9. Знайдіть рівняння прямої, що проходить через точку перетину прямих $3x - 2y - 7 = 0$ і $x + 3y - 6 = 0$ та відтинає на осі абсцис відрізок, що дорівнює 3.

10. Знайдіть точку перетину прямої і площини.

$$\frac{x-3}{-1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{4},$$

$$x + 2y + 3z - 14 = 0.$$

11. Знайдіть точку M' , симетричну точці $M(2; -1; 1)$ відносно прямої

$$\frac{x-4,5}{1} = \frac{y+3}{-0,5} = \frac{z-2}{1}.$$

12. Дано координати точок $M_0(1; -3; 1)$, $M_1(1; 0; 1)$, $M_2(5; -3; 1)$, $M_3(6; -1; 0)$.

Знайдіть :

а) канонічні рівняння прямої M_1M_2 ;

б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;

г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_3}$;

д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до площини $M_1M_2M_3$.

13. Визначте тип кривої $9x^2 + 4y^2 - 18x - 27 = 0$, вкажіть усі її характеристики. Зробіть рисунок.

14. Запишіть канонічне рівняння:

а) еліпса; б) гіперболи;

в) параболу, якщо її вершина – $O(0, 0)$ (A, B точки, що лежать на кривій, F – фокус, a – велика (дійсна) піввісь, b – мала (уявна) піввісь, ε – ексцентриситет, $y = \pm kx$ – рівняння асимптот гіперболи,

D – директриса кривої, $2c$ – фокусна відстань).

а) $b = 2, F(4\sqrt{2}, 0)$;

б) $a = 7, \varepsilon = \sqrt{85}/7$;

в) $D: x = 5$.

15. Запишіть рівняння кола, що проходить через фокуси гіперболи $24y^2 - 25x^2 = 600$ і має центр у точці $A(0, -8)$.

16. Побудуйте криву, задану рівнянням $\rho = 2\sin 3\varphi$ у полярній системі координат.

Варіант 22

1. Обчисліть $f(A)$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & -3 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$f(x) = x^2 - 3x + 2.$$

2. Розв'яжіть матричне рівняння $X \cdot A = B$,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Розв'яжіть систему:

- а) матричним методом;
б) за формулами Крамера.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

4. Дослідіть систему на сумісність і в разі сумісності знайдіть її загальний розв'язок.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & -2 & 7 \end{array} \right).$$

5. Знайдіть власні числа і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Розкладіть вектор

$$\vec{x} = \{2; -3; 1\} \quad \text{за векторами}$$

$$\vec{p} = \{2, 1, 8\}, \quad \vec{q} = \{2; -3; 1\},$$

$$\vec{r} = \{1; -1; 2\}.$$

7. Чи колінеарні вектори

$$\vec{c}_1 = \vec{a} - 3\vec{b} \quad \text{і} \quad \vec{c}_2 = 3\vec{a} - \vec{b},$$

побудовані на векторах

$$\vec{a} = \{-3; 0; 1\}, \quad \vec{b} = \{2; -7; 5\}?$$

8. Чи компланарні вектори

$$\vec{a} = \{3; 3; 1\}, \quad \vec{b} = \{2; 3; 4\},$$

$$\vec{c} = \{5; 1; -1\}?$$

9. Знайдіть проекцію точки $A(-8, 12)$ на пряму, що

проходить через точки $B(2, -3)$ і $C(-5, 1)$.

10. Знайдіть точку перетину прямої і площини.

$$\frac{x}{3} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z+3}{5},$$

$$x + 2y - 5z + 20 = 0.$$

11. Знайдіть точку M' , симетричну точці $M(0; -3; -2)$

відносно прямої

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1,5}{-1} = \frac{z}{1}.$$

12. Дано координати точок
 $M_0(0;1;1)$, $M_1(-3;0;5)$,
 $M_2(0;1;-3)$, $M_3(-1;1;3)$.

Знайдіть :

а) канонічні рівняння прямої M_1M_2 ;

б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;

г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_3}$;

д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до площини $M_1M_2M_3$.

13. Визначте тип кривої $25x^2 + 9y^2 + 100x - 18y - 116 = 0$, вкажіть усі її характеристики. Зробіть рисунок.

14. Запишіть канонічне рівняння:

а) еліпса; б) гіперболи;

в) параболи, якщо її вершина – $O(0, 0)$ (A, B точки, що лежать на кривій, F – фокус,

a – велика (дійсна) піввісь,

b – мала (уявна) піввісь,

ε – ексцентриситет, $y = \pm kx$ –

рівняння асимптот гіперболи,

D – директриса кривої, $2c$ – фокусна відстань).

а) $b = 15, F(-10, 0)$;

б) $a = 13, \varepsilon = 14/13$;

в) $D: x = -4$.

15. Запишіть рівняння кола, що проходить через вершини гіперболи $4x^2 - 9y^2 = 36$ і має центр у точці $A(0, 4)$.

16. Побудуйте криву, задану рівнянням $\rho = 3 \sin 4\varphi$ у полярній системі координат.

Варіант 23

1. Обчисліть $f(A)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix},$$

$$f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 3.$$

2. Розв'яжіть матричне рівняння $A \cdot X \cdot B = C$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \\ 6 & 5 & 9 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Розв'яжіть систему:

- а) матричним методом;
б) за формулами Крамера.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -8, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$$

4. Дослідіть систему на сумісність і в разі сумісності знайдіть її загальний розв'язок.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 9 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 7 & 6 & 5 \end{array} \right).$$

5. Знайдіть власні числа і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Розкладіть вектор

$$\vec{x} = \{-12; 13; -4\} \text{ за векторами}$$

$$\vec{p} = \{1; 2; 3\}, \quad \vec{q} = \{1; 4; 1\},$$

$$\vec{r} = \{5; 1; -3\}.$$

7. Чи колінеарні вектори

$$\vec{c}_1 = 5\vec{a} + 3\vec{b} \quad \text{і} \quad \vec{c}_2 = \vec{a} - 5\vec{b},$$

побудовані на векторах

$$\vec{a} = \{2; -3; 1\}, \quad \vec{b} = \{1; -2; 7\}?$$

8. Чи компланарні вектори

$$\vec{a} = \{1; -3; 2\}, \quad \vec{b} = \{-1; 1; -1\},$$

$$\vec{c} = \{2; 1; -5\}?$$

9. Дані дві вершини

трикутника ABC : $A(-4, 4)$,

$B(4, -12)$ і точка $M(4, 2)$

перетину його висот. Знайдіть

вершину C .

10. Знайдіть точку перетину

прямої і площини.

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{2},$$
$$2x - y + 4z = 0.$$

11. Знайдіть точку M' , симетричну точці $M(1;1;1)$ відносно прямої

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1,5}{-2} = \frac{z-1}{1}.$$

12. Дано координати точок $M_0(0;1;4)$, $M_1(3;-8;-1)$, $M_2(-4;10;-1)$, $M_3(0;2;1)$.

Знайдіть :

а) канонічні рівняння прямої M_1M_2 ;

б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;

г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_3}$;

д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до площини $M_1M_2M_3$.

13. Визначте тип кривої $4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y - 11 = 0$, вкажіть усі її характеристики. Зробіть рисунок.

14. Запишіть канонічне рівняння:

а) еліпса; б) гіперболи;

в) параболи, якщо її вершина – $O(0, 0)$ (A, B точки, що лежать на кривій, F – фокус,

a – велика (дійсна) піввісь, b – мала (уявна) піввісь, ε – ексцентриситет, $y = \pm kx$ – рівняння асимптот гіперболи, D – директриса кривої, $2c$ – фокусна відстань).

а) $\varepsilon = \sqrt{21}/5$, $A(-5, 0)$;

б) $A(\sqrt{80}, 3)$, $B(4\sqrt{6}, 3/\sqrt{2})$;

в) $D: y = 1$.

15. Запишіть рівняння кола, що проходить через вершини гіперболи $12x^2 - 13y^2 = 156$ і має центр у точці $A(0, -2)$.

16. Побудуйте криву, задану рівнянням $\rho = 3(1 - \cos 2\varphi)$ у полярній системі координат.

Варіант 24

1. Обчисліть $f(A)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix},$$

$$f(x) = x^2 - 2x + 8.$$

2. Розв'яжіть матричне рівняння $A \cdot X = B$,

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 7 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. Розв'яжіть систему:

- а) матричним методом;
б) за формулами Крамера.

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$$

4. Дослідіть систему на сумісність і в разі сумісності знайдіть її загальний розв'язок.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 7 \\ 5 & 4 & 3 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & 1 & 9 \end{array} \right).$$

5. Знайдіть власні числа і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. Розкладіть вектор

$\vec{x} = \{11; 14; 12\}$ за векторами

$\vec{p} = \{2; 4; 3\}$, $\vec{q} = \{1; 2; -1\}$,

$\vec{r} = \{4; 4; 5\}$.

7. Чи колінеарні вектори

$\vec{c}_1 = 3\vec{a} + 5\vec{b}$ і $\vec{c}_2 = 8\vec{a} - \vec{b}$,

побудовані на векторах

$\vec{a} = \{-1; 2; -5\}$, $\vec{b} = \{2; -1; -1\}$?

8. Чи компланарні вектори

$\vec{a} = \{1; 1; -3\}$, $\vec{b} = \{-3; 2; 1\}$,

$\vec{c} = \{2; -5; 4\}$?

9. Знайдіть рівняння прямої, що відтинає на осі ординат відрізок, рівний 2, і проходить паралельно прямій $3y - 2x = 3$.

10. Знайдіть точку перетину прямої і площини.

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-1}{2},$$
$$x - 3y + 7z - 24 = 0.$$

11. Знайдіть точку M' , симетричну точці $M(1; 0; -1)$ відносно прямої

$$\frac{x-3,5}{2} = \frac{y-1,5}{2} = \frac{z}{0}.$$

12. Дано координати точок $M_0(0; -3; 2)$, $M_1(2; 1; -2)$, $M_2(8; -1; 7)$, $M_3(2; 1; -1)$.

Знайдіть :

а) канонічні рівняння прямої M_1M_2 ;

б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;

г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_3}$;

д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до площини $M_1M_2M_3$.

13. Визначте тип кривої $25x^2 - 9y^2 + 100x + 18y - 134 = 0$, вкажіть усі її характеристики. Зробіть рисунок.

14. Запишіть канонічне рівняння:

а) еліпса; б) гіперболи;

в) параболи, якщо її вершина – (A, B) точки, що лежать на кривій, F – фокус,

a – велика (дійсна) піввісь,

b – мала (уявна) піввісь,

ε – ексцентриситет, $y = \pm kx$ –

рівняння асимптот гіперболи,

D – директриса кривої, $2c$ – фокусна відстань).

а) $A(3, 0)$, $B(2, \sqrt{5}/3)$;

б) $c = 5$, $\varepsilon = 5/4$;

в) $D: y = -2$.

15. Запишіть рівняння кола, що проходить через точку $O(0, 0)$ і має центр у вершині параболи $y^2 = 3(x - 4)$.

16. Побудуйте криву, задану рівнянням $\rho = 3 \sin 5\varphi$ у полярній системі координат.

Варіант 25

1. Обчисліть $f(A)$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \\ -4 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$f(x) = x^2 - 3x + 5.$$

2. Розв'яжіть матричне рівняння

$$X \cdot A = B, \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 0 & -1 \\ -2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Розв'яжіть систему:

- а) матричним методом;
б) за формулами Крамера.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 10, \\ -3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

4. Дослідіть систему на сумісність і в разі сумісності знайдіть її загальний розв'язок.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 7 & 14 & 20 & 27 & 0 \\ 5 & 10 & 16 & 19 & -2 \\ 3 & 5 & 6 & 13 & 5 \end{array} \right).$$

5. Знайдіть власні числа і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. Розкладіть вектор

$$\vec{x} = \{-3; -2; 2\} \quad \text{за векторами}$$

$$\vec{p} = \{1; 2; 1\}, \quad \vec{q} = \{2; 2; -3\},$$

$$\vec{r} = \{-1; 1; 4\}.$$

7. Чи колінеарні вектори

$$\vec{c}_1 = -2\vec{a} + \vec{b} \quad \text{і} \quad \vec{c}_2 = 2\vec{a} - 3\vec{b},$$

побудовані на векторах

$$\vec{a} = \{1; -5; 4\}, \quad \vec{b} = \{5; 2; 7\}?$$

8. Чи компланарні вектори

$$\vec{a} = \{3; -3; 2\}, \quad \vec{b} = \{1; -2; 1\},$$

$$\vec{c} = \{2; 1; -1\}?$$

9. Знайдіть рівняння прямої, що проходить через точку $A(2, -5)$ і точку перетину прямих $2x - y = 5$ і $x + y = 1$.

10. Знайдіть точку перетину прямої і площини.

$$\frac{x+1}{-3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-2},$$

$$x + 3y - 5z + 9 = 0.$$

11. Знайдіть точку M' , симетричну точці $M(1; 2; 3)$

відносно прямої

$$\frac{x-0,5}{0} = \frac{y+1,5}{-1} = \frac{z-1,5}{1}.$$

12. Дано координати точок
 $M_0(1;1;2)$, $M_1(1;-2;7)$,
 $M_2(10;11;1)$, $M_3(0;-1;2)$.

Знайдіть :

а) канонічні рівняння прямої M_1M_2 ;

б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;

г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_3}$;

д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до площини $M_1M_2M_3$.

13. Визначте тип кривої $y^2 - 2x - 2y - 1 = 0$, вкажіть усі її характеристики. Зробіть рисунок.

14. Запишіть канонічне рівняння:

а) еліпса; б) гіперболи;

в) параболи, якщо її вершина – $O(0,0)$ (A, B точки, що лежать на кривій, F – фокус,

a – велика (дійсна) піввісь, b – мала (уявна) піввісь,

ε – ексцентриситет, $y = \pm kx$ – рівняння асимптот гіперболи, D – директриса кривої, $2c$ – фокусна відстань).

а) $b = \sqrt{15}$, $\varepsilon = \sqrt{10}/25$;

б) $k = 3/4$, $2a = 16$;

в) вісь симетрії Ox і $A(27, 9)$.

15. Запишіть рівняння кола, що проходить через фокуси еліпса $9x^2 + 25y^2 = 1$ і має центр у точці $A(0,6)$.

16. Побудуйте криву, задану рівнянням $\rho = 2(1 + \cos \varphi)$ у полярній системі координат.

Варіант 26

1. Обчисліть $f(A)$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f(x) = x^2 - x - 1.$$

2. Розв'яжіть матричне рівняння

$$A \cdot X \cdot B = C, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Розв'яжіть систему:

а) матричним методом;

б) за формулами Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 9, \\ 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = -2. \end{cases}$$

4. Дослідіть систему на сумісність і в разі сумісності знайдіть її загальний розв'язок.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right).$$

5. Знайдіть власні числа і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

6. Розкладіть вектор

$\vec{x} = \{-12; -2; -15\}$ за векторами

$\vec{p} = \{1; 2; -1\}$, $\vec{q} = \{-4; 3; 1\}$,

$\vec{r} = \{2; 4; 5\}$.

7. Чи колінеарні вектори

$\vec{c}_1 = \vec{a} + 3\vec{b}$ і $\vec{c}_2 = 4\vec{a} + 2\vec{b}$,

побудовані на векторах

$\vec{a} = \{1; 3; -2\}$, $\vec{b} = \{1; 1; -1\}$?

8. Чи компланарні вектори

$\vec{a} = \{3; 1; -1\}$, $\vec{b} = \{2; -1; 3\}$,

$\vec{c} = \{5; -2; -1\}$?

9. Довести, що

чотирикутник $ABCD$ –

трапеція, якщо $A(3, 6)$,

$B(5, 2)$, $C(-1, -3)$, $D(-5, 5)$.

10. Знайдіть точку перетину прямої і площини.

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1},$$
$$x - 2y + 5z + 17 = 0.$$

11. Знайдіть точку M' ,

симетричну точці $M(2; 1; 0)$

відносно прямої

$$\frac{x-2}{0} = \frac{y+1,5}{-1} = \frac{z+0,5}{1}.$$

12. Дано координати точок $M_0(2; -1; 0)$, $M_1(-7; 5; -1)$, $M_2(-3; 13; 0)$, $M_3(0; 1; -2)$.

Знайдіть :

а) канонічні рівняння прямої M_1M_2 ;

б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;

г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_3}$;

д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до площини $M_1M_2M_3$.

13. Визначте тип кривої $y^2 - 4x - 2y - 7 = 0$, вкажіть усі її характеристики. Зробіть рисунок.

14. Запишіть канонічне рівняння:

а) еліпса; б) гіперболи;

в) параболу, якщо її вершина – $O(0, 0)$ (A, B точки, що лежать на кривій, F – фокус,

a – велика (дійсна) піввісь,

b – мала (уявна) піввісь,

ε – ексцентриситет, $y = \pm kx$ –

рівняння асимптот гіперболи,

D – директриса кривої, $2c$ – фокусна відстань).

а) $2a = 22$, $\varepsilon = \sqrt{57}/11$;

б) $k = 2/3$, $2c = 10\sqrt{3}$;

в) вісь симетрії Ox і $A(4, -8)$.

15. Запишіть рівняння кола, що проходить через лівий фокус гіперболи $3x^2 - 4y^2 = 12$ і має центр у точці $A(0, -3)$.

16. Побудуйте криву, задану рівнянням $\rho = 3(1 + \sin 2\varphi)$ у полярній системі координат.

Варіант 27

1. Обчисліть $f(A)$.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ -2 & -7 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix},$$

$$f(x) = x^2 + 2x + 2.$$

2. Розв'яжіть матричне рівняння $A \cdot X = B$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 5 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

3. Розв'яжіть систему:

- а) матричним методом;
б) за формулами Крамера.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 16, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$$

4. Дослідіть систему на сумісність і в разі сумісності знайдіть її загальний розв'язок.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

5. Знайдіть власні числа і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Розкладіть вектор

$\vec{x} = \{-4; 13; 16\}$ за векторами

$\vec{p} = \{1; 3; 1\}$, $\vec{q} = \{7; -1; 4\}$,

$\vec{r} = \{-1; 2; 3\}$.

7. Чи колінеарні вектори

$\vec{c}_1 = 4\vec{a} - 2\vec{b}$ і $\vec{c}_2 = \vec{b} - 2\vec{a}$,

побудовані на векторах

$\vec{a} = \{3; -4; 5\}$, $\vec{b} = \{3; -2; 1\}$?

8. Чи компланарні вектори

$\vec{a} = \{-3; 5; 1\}$, $\vec{b} = \{1; -2; 0\}$,

$\vec{c} = \{2; -1; 2\}$?

9. Запишіть рівняння прямої, що проходить через точку $A(3, 1)$ перпендикулярно до прямої BC , якщо $B(2, 5)$, $C(1, 0)$.

10. Знайдіть точку перетину прямої і площини.

$$\frac{x-5}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{0},$$

$$3x + y - 5z - 12 = 0.$$

11. Знайдіть точку M' , симетричну точці $M(-1; 0; -1)$ відносно прямої

$$\frac{x}{-1} = \frac{y-1,5}{0} = \frac{z-2}{1}.$$

12. Дано координати точок $M_0(1;3;1)$, $M_1(5;-2;-1)$, $M_2(-3;-2;6)$, $M_3(-2;-3;2)$.

Знайдіть :

а) канонічні рівняння прямої M_1M_2 ;

б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;

г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_3}$;

д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до площини $M_1M_2M_3$.

13. Визначте тип кривої $4x^2 - 9y^2 - 16x - 18y - 29 = 0$, вкажіть усі її характеристики. Зробіть рисунок.

14. Запишіть канонічне рівняння:

а) еліпса; б) гіперболи;

в) параболи, якщо її вершина – $O(0,0)$ (A, B точки, що лежать на кривій, F – фокус,

a – велика (дійсна) піввісь, b – мала (уявна) піввісь,

ε – ексцентриситет, $y = \pm kx$ – рівняння асимптот гіперболи, D – директриса кривої, $2c$ – фокусна відстань).

а) $b = 4, F(9,0)$;

б) $a = 5, \varepsilon = 7/5$;

в) $D: x = 6$.

15. Запишіть рівняння кола, що проходить через вершину гіперболи $x^2 - 16y^2 = 64$ і має центр у точці $A(0,-2)$.

16. Побудуйте криву, задану рівнянням $\rho = 3(1 + \cos \varphi)$ у полярній системі координат.

Варіант 28

1. Обчисліть $f(A)$.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix},$$

$$f(x) = 2x^2 + 8x - 7.$$

2. Розв'яжіть матричне рівняння $X \cdot A = B$,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Розв'яжіть систему:

- а) матричним методом;
б) за формулами Крамера.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 10, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$$

4. Дослідіть систему на сумісність і в разі сумісності знайдіть її загальний розв'язок.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 15 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 0 & 5 & 23 \end{array} \right).$$

5. Знайдіть власні числа і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. Розкладіть вектор

$$\vec{x} = \{4; 5; -7\} \quad \text{за векторами}$$

$$\vec{p} = \{1; 2; 1\}, \quad \vec{q} = \{2; -1; 1\},$$

$$\vec{r} = \{-1; 1; -3\}.$$

7. Чи колінеарні вектори

$$\vec{c}_1 = 6\vec{a} - 3\vec{b} \quad \text{і} \quad \vec{c}_2 = \vec{b} - 2\vec{a},$$

побудовані на векторах

$$\vec{a} = \{3; -4; 2\}, \quad \vec{b} = \{5; -6; 1\}?$$

8. Чи компланарні вектори

$$\vec{a} = \{2; 3; -1\}, \quad \vec{b} = \{6; 7; 4\},$$

$$\vec{c} = \{2; 3; -1\}?$$

9. Знайдіть рівняння прямої,

що проходить через точку

$A(-2, 1)$ паралельно

прямій MN , якщо $M(-3, -2)$,

$A(1, 6)$.

10. Знайдіть точку перетину прямої і площини.

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+4}{1},$$
$$x - 2y + 4z - 19 = 0.$$

11. Знайдіть точку M' , симетричну точці $M(0;2;1)$ відносно прямої

$$\frac{x-1,5}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{1}.$$

12. Дано координати точок $M_0(1;-2;3)$, $M_1(12;3;-2)$, $M_2(-9;2;7)$, $M_3(-3;2;1)$.

Знайдіть :

а) канонічні рівняння прямої M_1M_2 ;

б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;

г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_3}$;

д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до площини $M_1M_2M_3$.

13. Визначте тип кривої $4x^2 + 36y^2 + 72y - 108 = 0$, вкажіть усі її характеристики. Зробіть рисунок.

14. Запишіть канонічне рівняння:

а) еліпса; б) гіперболи;

в) параболи, якщо її вершина – $O(0,0)$ (A, B точки, що лежать на кривій, F – фокус,

a – велика (дійсна) піввісь, b – мала (уявна) піввісь, ε – ексцентриситет, $y = \pm kx$ – рівняння асимптот гіперболи, D – директриса кривої, $2c$ – фокусна відстань).

а) $a = 4, F(3,0)$;

б) $b = 2\sqrt{10}, F(-11,0)$;

в) $D: x = -2$.

15. Запишіть рівняння кола, що проходить через фокус еліпса $3x^2 - 4y^2 = 12$ і має центр у точці A – його верхній вершині.

16. Побудуйте криву, задану рівнянням $\rho = 4(1 - \cos 2\varphi)$ у полярній системі координат.

Варіант 29

1. Обчисліть $f(A)$.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad f(x) = x^3 + 3x.$$

2. Розв'яжіть матричне рівняння $A \cdot X \cdot B = C$,

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 9 & -7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 7 \\ 8 & 9 & 6 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Розв'яжіть систему:

- а) матричним методом;
б) за формулами Крамера.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = -1, \\ 2x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 26, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 16. \end{cases}$$

4. Дослідіть систему на сумісність і в разі сумісності знайдіть її загальний розв'язок.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & -5 \\ 2 & -1 & -3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -6 & -10 \end{array} \right).$$

5. Знайдіть власні числа і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

6. Розкладіть вектор

$\vec{x} = \{13; -3; 6\}$ за векторами

$\vec{p} = \{3; 1; 4\}$, $\vec{q} = \{2; -2; -1\}$,

$\vec{r} = \{1; 1; 1\}$.

7. Чи колінеарні вектори

$\vec{c}_1 = 3\vec{a} - 9\vec{b}$ і $\vec{c}_2 = -3\vec{b} - \vec{a}$,

побудовані на векторах

$\vec{a} = \{2; -4; -7\}$, $\vec{b} = \{1; -3; 5\}$?

8. Чи компланарні вектори

$\vec{a} = \{4; 2; -1\}$, $\vec{b} = \{1; -3; -7\}$,

$\vec{c} = \{1; 6; -5\}$?

9. Знайдіть точку, симетричну точці $M(2, -1)$

відносно прямої $x - 2y + 3 = 0$.

10. Знайдіть точку перетину прямої і площини.

$$\frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+3}{0},$$
$$2x - 3y - 5z - 7 = 0.$$

11. Знайдіть точку M' , симетричну точці $M(-2; -3; 0)$

відносно прямої

$$\frac{x+0,5}{1} = \frac{y+1,5}{0} = \frac{z-0,5}{1}.$$

12. Дано координати точок
 $M_0(-3;1;-1)$,
 $M_1(-7;1;5)$, $M_2(-11;1;-2)$,
 $M_3(-1;1;-1)$.

Знайдіть :

а) канонічні рівняння прямої M_1M_2 ;

б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;

г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_3}$;

д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до площини $M_1M_2M_3$.

13. Визначте тип кривої $4x^2 + 25y^2 + 16x - 50y - 59 = 0$, вкажіть усі її характеристики. Зробіть рисунок.

14. Запишіть канонічне рівняння:

а) еліпса; б) гіперболи;

в) параболи, якщо її вершина – $O(0,0)$ (A, B точки, що лежать на кривій, F – фокус,

a – велика (дійсна) піввісь,

b – мала (уявна) піввісь,

ε – ексцентриситет, $y = \pm kx$ –

рівняння асимптот гіперболи, D – директриса кривої, $2c$ – фокусна відстань).

а) $\varepsilon = 7/8$, $A(8,0)$;

б) $A(3, -\sqrt{3/5})$, $B(\sqrt{13/5}, 6)$;

в) $D: y = 4$.

15. Запишіть рівняння кола, що проходить через фокуси гіперболи $4x^2 - 5y^2 = 80$ і має центр у точці $A(0, -4)$.

16. Побудуйте криву, задану рівнянням $\rho = 3 \sin 2\varphi$ у полярній системі координат.

Варіант 30

1. Обчисліть $f(A)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$f(x) = 2x^2 + 3x - 5.$$

2. Розв'яжіть матричне рівняння $A \cdot X = B$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & -3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

3. Розв'яжіть систему:

- а) матричним методом;
б) за формулами Крамера.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -4, \\ x_1 - 4x_2 + 5x_3 = -1, \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -2. \end{cases}$$

4. Дослідіть систему на сумісність і в разі сумісності знайдіть її загальний розв'язок.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -9 & 8 & 1 \\ 5 & 18 & 4 & 5 & 12 \end{array} \right).$$

5. Знайдіть власні числа і власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

6. Розкладіть вектор

$\vec{x} = \{-1; 13; 10\}$ за векторами

$\vec{p} = \{1; 2; 3\}$, $\vec{q} = \{3; -3; 1\}$,

$\vec{r} = \{-2; 4; 1\}$.

7. Чи колінеарні вектори

$\vec{c}_1 = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ і $\vec{c}_2 = 3\vec{b} - 6\vec{a}$,

побудовані на векторах

$\vec{a} = \{-1; 5; -2\}$, $\vec{b} = \{3; -2; 6\}$?

8. Чи компланарні вектори

$\vec{a} = \{3; 7; 2\}$, $\vec{b} = \{-3; 0; 1\}$,

$\vec{c} = \{2; -2; 1\}$?

9. Знайдіть точку O перетину діагоналей

чотирикутника $ABCD$, якщо $A(-1, -3)$, $A(3, 5)$, $C(5, 2)$, $D(3, -5)$.

10. Знайдіть точку перетину прямої і площини.

$$\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+4}{-1},$$
$$2x - y + 3z + 23 = 0.$$

11. Знайдіть точку M' , симетричну точці $M(-1; 2; 0)$

відносно прямої

$$\frac{x+0,5}{1} = \frac{y+0,7}{-0,2} = \frac{z-2}{2}.$$

12. Дано координати точок $M_0(0; -1; 1)$, $M_1(2; 0; -1)$, $M_2(5; -6; 1)$, $M_3(6; -1; 0)$.

Знайдіть :

а) канонічні рівняння прямої M_1M_2 ;

б) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;

г) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_3}$;

д) рівняння прямої, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до площини $M_1M_2M_3$.

13. Визначте тип кривої $4x^2 + 9y^2 + 24x + 36y + 36 = 0$, вкажіть усі її характеристики. Зробіть рисунок.

14. Запишіть канонічне рівняння:

а) еліпса; б) гіперболи; в) параболи, якщо її вершина – $O(0, 0)$

(A, B точки, що лежать на кривій, F – фокус,

a – велика (дійсна) піввісь, b – мала (уявна) піввісь, ε – ексцентриситет, $y = \pm kx$ – рівняння асимптот гіперболи

b – мала (уявна) піввісь, ε – ексцентриситет, $y = \pm kx$ – рівняння асимптот гіперболи, D – директриса кривої, $2c$ – фокусна відстань).

а) $2a = 24$, $\varepsilon = \sqrt{22}/6$;

б) $k = \sqrt{2/3}$, $2c = 10$;

в) $D: y = -4$.

15. Запишіть рівняння кола, що проходить через точку $O(0, 0)$ і має центр у точці A – вершині параболи $y^2 = -(x+5)/2$.

16. Побудуйте криву, задану рівнянням $\rho = 4 \sin 6\varphi$ у полярній системі координат.

Задачі економічного змісту

17. Витрати i -го виду сировини ($i = 1, 2, 3$) на виробництво j -го виду продукції ($j = 1, 2, 3$) дорівнюють a_{ij} одиниць. Запаси i -го виду сировини дорівнюють b_i одиниць. Визначити план виробництва, що забезпечує використання всієї сировини, розв'язавши складену систему методом Гаусса.

Таблиця 1

Варі-ант	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_1	b_2	b_3
1	1	1	1	2	1	3	1	3	1	39	65	65
2	2	1	1	1	2	1	1	1	2	54	56	58
3	1	2	3	2	1	4	3	2	1	94	109	86
4	3	4	1	5	3	4	4	2	3	124	150	142
5	2	1	3	1	2	4	3	4	2	104	125	151
6	3	2	4	4	3	2	3	1	3	164	158	126
7	1	1	1	2	1	2	3	1	1	57	95	91
8	1	2	2	2	1	3	3	4	1	102	122	156
9	1	3	1	2	4	4	3	2	1	105	214	122
10	2	3	3	1	4	5	3	4	3	178	228	220
11	3	4	3	4	5	3	2	3	4	230	274	211
12	1	0	2	1	3	0	2	2	1	74	94	118
13	3	1	2	1	3	2	2	1	1	148	152	98
14	3	2	1	7	0	1	0	2	5	152	196	192
15	1	1	1	2	0	2	2	3	0	81	108	131
16	2	1	1	3	3	2	1	1	1	110	222	84
17	1	2	1	2	0	3	3	3	1	116	147	199
18	3	1	1	1	3	1	1	1	3	146	150	154
19	1	3	0	1	1	1	2	2	3	122	93	219
20	3	4	1	5	0	4	1	1	1	252	186	96
21	1	2	3	2	1	1	1	3	1	202	130	165
22	1	2	1	3	1	2	3	0	8	136	202	384

Продовження табл.1

23	2	3	1	3	1	2	2	0	5	208	208	251
24	1	1	1	2	0	2	0	3	3	108	144	222
25	2	0	3	1	1	2	3	1	1	187	150	181
26	2	2	2	1	3	4	2	1	3	228	310	230
27	1	3	1	1	0	2	2	2	3	195	116	275
28	2	1	1	3	1	2	2	0	4	158	238	244
29	1	3	0	1	1	1	2	2	3	162	123	289
30	1	2	1	2	0	3	3	3	1	168	212	290

18. Щоб забезпечити споживачів деякою продукцією, побудовано заводи A і B . Визначити зони тяжіння для цих заводів і скласти рівняння граничної лінії, якщо заводи A і B мають координати $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, собівартість виробництва одиниці продукції дорівнює P_A і P_B , а витрати на її перевезення Q_A і Q_B для заводів A і B відповідно.

Таблиця 2

Вариант	x_1	y_1	P_A	Q_A	x_2	y_2	P_B	Q_B
1	2	0	3	2	4	0	8	2
2	-1	0	4	2	1	0	9	2
3	1	0	2	3	5	0	15	3
4	-2	0	3	3	2	0	16	3
5	-3	0	5	2	-1	0	10	2
6	0	0	1	2	2	0	6	2
7	2	0	2	2	4	0	7	2
8	-2	0	1	2	0	0	6	2
9	-1	0	3	3	3	0	16	3
10	-3	0	4	3	1	0	17	3
11	4	0	2	2	6	0	7	2
12	-3	0	3	2	-1	0	8	2
13	5	0	5	3	9	0	18	3
14	2	0	4	3	6	0	17	3
15	1	0	5	2	3	0	10	1
16	0	0	2	2	2	0	7	2

Продовження табл.2

17	-3	0	1	3	1	0	14	3
18	-1	0	1	3	3	0	14	3
19	1	0	3	2	3	0	8	2
20	-2	0	2	2	0	0	7	2
21	-4	0	4	3	0	0	17	3
22	5	0	1	3	9	0	14	3
23	6	0	3	2	8	0	8	2
24	2	0	4	2	4	0	9	2
25	1	0	5	3	5	0	18	3
26	-2	0	6	3	2	0	19	3
27	-3	0	2	2	-1	0	7	2
28	1	0	3	2	3	0	8	2
29	1	0	2	3	5	0	15	3
30	-4	0	1	3	0	0	14	3