

## Індивідуальні завдання з теми

### «Вступ до математичного аналізу.

### Диференціальне числення функцій однієї змінної»

#### Варіант 1

1. Знайдіть область визначення функції

$$y = \lg \frac{x-5}{x^2 - 10x + 24} - \sqrt[3]{x+5}.$$

2. Доведіть, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 2}{2n^2 - 3} = \frac{3}{2}.$$

3. Обчисліть границю послідовності

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-n)^2 + (1+n)^2}{(1-n)^3 + (1+n)^3};$

б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1}).$

4. Обчисліть границі

а)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 - 2x - 1)(x+1)}{x^4 + 4x^2 - 5};$

б)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2};$

в)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20};$

г)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 11x + 15}{3x^2 + 5x - 12};$

д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 2}{2x^3 + 5x^2 - x};$

е)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5 - 2x + 4}{2x^4 + 3x^2 + 1};$

ж)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x - 5}{7x^3 - 2x^2 + 1};$

з)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}};$

і)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+4}{x+8} \right)^{-3x};$

ї)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+3}{5x+7} \right)^{x+1};$

к)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{3x^2}.$

5. Порівняйте нескінченно малі функції  $\alpha(x)$  і  $\beta(x)$ :

$$\alpha(x) = x - x^2 - \sqrt{x};$$

$$\beta(x) = x + x^3 - 3\sqrt[3]{x} \quad (x \rightarrow 0).$$

6. Доведіть, що функції  $f(x)$  і  $\varphi(x)$  при  $x \rightarrow 0$  є нескінченно малими одного порядку малості:

$$f(x) = \operatorname{tg} 2x, \quad \varphi(x) = \arcsin x.$$

7. Обчисліть границі, використовуючи еквівалентність нескінченно малих.

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3};$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} + \ln(1 + \sqrt{x})}{\sin \sqrt{x}};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x^2)}{x^3 - 5x^2}.$$

**8.** Обчисліть границю

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ 1 - \ln(1 + x^3) \right]^{\frac{3}{x^2 \arcsin x}}.$$

**9.** Дослідіть функцію на неперервність і побудуйте графік:

$$f(x) = \begin{cases} x + 4, & x < -1, \\ x^2 + 2, & -1 \leq x < 1, \\ 2x, & x \geq 1. \end{cases}$$

**10.** Дослідіть функцію на неперервність у вказаних точках:

$$f(x) = 2^{\frac{1}{x-3}} + 1; \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 4.$$

**11.** Знайдіть похідну функцій:

$$\text{а) } y = \sqrt{x^3 + \sqrt{x^2 + 1}};$$

$$\text{б) } y = (\operatorname{tg} x)^x;$$

$$\text{в) } \begin{cases} x = t^2, \\ y = t + t^3, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

**12.** Знайдіть  $y'$  і  $y''$ :

$$\text{а) } y^2 = 8x;$$

$$\text{б) } \begin{cases} x = (2t + 3) \cos t, \\ y = 3t^3. \end{cases}$$

**13.** Для даної функції  $y$  і аргументу  $x_0$  обчисліть  $y'''(x_0)$ :

$$y = \sin^2 x, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}.$$

**14.** Запишіть формулу для похідної  $n$ -го порядку функції  $y = \ln x$ .

**15.** Обчисліть границі, використовуючи правило Лопіталя:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+5)}{\sqrt[4]{x+3}};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{\operatorname{tg}^2 2x};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 4x}{5 - 5e^{-3x}}.$$

**16.** Запишіть рівняння дотичної до кривої  $y = x^2 - 7x + 3$  у точці з абсцисою  $x = 1$ .

**17.** Доведіть, що лінія  $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = t^3 \end{cases}$

нахилена до осі  $Ox$  під гострим кутом в усіх своїх точках.

**18.** Проведіть повне дослідження функцій та побудуйте їх графіки

$$\text{а) } y = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3};$$

$$\text{б) } y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1};$$

$$\text{в) } y = e^{2x - x^2}.$$

**19.** Знайдіть найменше і найбільше значення функції

$y = \ln(x^2 - 2x + 2)$  на відрізку  
[0;3].

## Варіант 2

1. Знайдіть область визначення

функції  $y = \sqrt[6]{\frac{(x-2)(x-3)}{x^2}}$ .

2. Доведіть, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+4}{2n+3} = \frac{5}{2}.$$

3. Обчисліть границю послідовності

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^4 - (2-n)^4}{(1-n)^3 - (1+n)^3}$ ;

б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 - 2n} - \sqrt{n^2 - 3})$ .

4. Обчисліть границі

а)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 + x}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}}$ ;

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x^2 + 2x}{x^2 + x}$ ;

г)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 5x - 7}{x^3 - 1}$ ;

д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 7x}{2x^3 - 4x^2 + 5}$ ;

е)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 2x - 5}{2x^2 + x + 7}$ ;

ж)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 7x + 2}{x^4 + 2x - 4}$ ;

з)  $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+12} - \sqrt{4-x}}{x^2 + 2x - 8}$ ;

і)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^{2x-3}$ ;

ї)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^x$ ;

к)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin x}{5x}$ .

5. Порівняйте нескінченно малі функції  $\alpha(x)$  і  $\beta(x)$ :

$\alpha(x) = x^3 - 3x - 2$ ;  $\beta(x) = x - 2$   
( $x \rightarrow 2$ ).

6. Доведіть, що функції  $f(x)$  і  $\varphi(x)$  при  $x \rightarrow 0$  є нескінченно малими одного порядку малості  $f(x) = 1 - \cos x$ ,  $\varphi(x) = 3x^2$ .

7. Обчисліть границю

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} [\operatorname{tg} x]^{\pi - 2x}.$$

8. Обчисліть границі, використовуючи еквівалентність нескінченно малих.

а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - \cos \frac{1}{x}\right)$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 - 2^x + 1}{e^x - 1}$ ;

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{\operatorname{tg} 3x}$ .

9. Дослідіть функцію на неперервність і побудуйте графік:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0, \\ (x+1)^2, & 0 < x \leq 2, \\ -x+4, & x > 2. \end{cases}$$

**10.** Дослідіть функцію на неперервність у вказаних точках:

$$f(x) = 5^{\frac{1}{x-3}} - 1; \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 4.$$

**11.** Знайдіть похідну функцій:

$$\text{а) } y = \frac{x^3}{3\sqrt{(1+x^4)^3}};$$

$$\text{б) } y = (\arcsin x)^x;$$

$$\text{в) } \begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = \cos^2 t, \end{cases} \quad 0 < t < \frac{\pi}{2}.$$

**12.** Знайдіть  $y'$  і  $y''$ :

$$\text{а) } \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{7} = 1;$$

$$\text{б) } \begin{cases} x = 2\cos^2 t, \\ y = 3\sin^2 t. \end{cases}$$

**13.** Для даної функції  $y$  і аргументу  $x_0$  обчисліть  $y'''(x_0)$ :  $y = \arctg x$ ,  $x_0 = 1$ .

**14.** Запишіть формулу для похідної  $n$ -го порядку функції

$$y = \frac{1}{x}.$$

**15.** Обчисліть границі, використовуючи правило Лопіталя:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a^{\ln x} - x}{x-1};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} x^4 \sin\left(\frac{a}{x}\right);$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x}.$$

**16.** Запишіть рівняння дотичної до кривої  $y = x^2 - 16x + 7$  у точці з абсцисою  $x = 1$ .

**17.** На параболі  $y = x^2$  вибрані дві точки з абсцисами  $x_1 = 1$  і  $x_2 = 3$ . Через ці точки проведена січна. У якій точці параболі дотична до неї буде паралельна цій січній?

**18.** Проведіть повне дослідження функцій та побудуйте їх графіки

$$\text{а) } y = \frac{e \ln x}{x};$$

$$\text{б) } y = \frac{x+1}{(x-1)^2};$$

$$\text{в) } y = e^{\frac{1}{5+x}}.$$

**19.** Знайдіть найменше і найбільше значення функції

$$y = \frac{3x}{(x^2 + 1)} \text{ на відрізку } [0; 5].$$

### Варіант 3

1. Знайдіть область визначення функції

$$y = (x-2)^4 \sqrt{\frac{1+x^3}{1-x^3}}.$$

2. Доведіть, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 1}{2n^2 + 1} = 2.$$

3. Обчисліть границю послідовності

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^4 - (2-n)^4}{(1-n)^4 + (1+n)^4};$$

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^5 - 8} - n\sqrt{n^3 + 5n}}{\sqrt{n}}.$$

4. Обчисліть границі

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 + 3x + 2)^2}{x^3 + 2x^2 - x - 2};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x^2} - 1};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{6 + x - x^2}{x^3 - 27};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - 3x^2 + 7}{x^4 + 2x^3 + 1};$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 7x - 4}{x^5 + 2x - 1};$$

$$\text{ж) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 - 3x + 4}{3x^2 - 2x + 1};$$

$$\text{з) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x+10} - \sqrt{4-x}}{2x^2 - x - 21};$$

$$\text{і) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x}{1+2x} \right)^{-4x};$$

$$\text{ї) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{2x-1} \right)^{3x};$$

$$\text{к) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 5x}{2x^2}.$$

5. Порівняйте нескінченно малі функції  $\alpha(x)$  і  $\beta(x)$ :

$$\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3x}};$$

$$\beta(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3 - 2x}} \quad (x \rightarrow +\infty).$$

6. Доведіть, що функції  $f(x)$  і  $\varphi(x)$  при  $x \rightarrow 0$  є нескінченно малими одного порядку малості  $f(x) = \arctg^2 3x$ ,  $\varphi(x) = 4x^2$ .

7. Обчисліть границю

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \cos \sqrt{x} \right)^{1/x}.$$

8. Обчисліть границі, використовуючи еквівалентність нескінченно малих.

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{\arcsin x^2};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + e^{\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{x}};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\text{tg } 2x}.$$

**9.** Дослідіть функцію на неперервність і побудуйте графік:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \leq -1, \\ x^2 + 1, & -1 < x \leq 1, \\ -x + 3, & x > 1. \end{cases}$$

**10.** Дослідіть функцію на неперервність у вказаних точках:

$$f(x) = \frac{(x+7)}{(x-2)}; x_1 = 2, x_2 = 3.$$

**11.** Знайдіть похідну функцій:

а)  $y = \frac{\sqrt{3x^3 - 2x^2 + 1}}{x^2};$

б)  $y = (\arccos x)^{\frac{1}{x}};$

в)  $\begin{cases} x = a \operatorname{ch} t, \\ y = b \operatorname{sh} t, \end{cases} -\infty < t < 0.$

**12.** Знайдіть  $y'$  і  $y''$ :

а)  $y = x + \operatorname{arctg} y;$

б)  $\begin{cases} x = 6 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t. \end{cases}$

**13.** Для даної функції  $y$  і аргументу  $x_0$  обчисліть  $y'''(x_0)$ :  $y = \ln(2 + x^2)$ ,  $x_0 = 0$ .

**14.** Запишіть формулу для похідної  $n$ -го порядку функції

$$y = 2^x.$$

**15.** Обчисліть границі, використовуючи правило Лопіталя:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x};$

б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x \ln(x-1);$

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}.$

**16.** Запишіть рівняння дотичної до кривої  $y = \sqrt{x-4}$  у точці з абсцисою  $x = 8$ .

**17.** Складіть рівняння дотичних до лінії  $y = x - \frac{1}{x}$  у точках її перетину з віссю  $Ox$ .

**18.** Проведіть повне дослідження функцій та побудуйте їх графіки

а)  $y = xe^{-x};$

б)  $y = x + \ln(x^2 - 4).$

в)  $y = \frac{2(x+1)^2}{x-2}.$

**19.** Знайдіть найменше і найбільше значення функції

$y = \frac{(2x-1)}{(x-1)^2}$  на відрізку

$\left[-\frac{1}{2}; 0\right].$

## Варіант 4

1. Знайдіть область визначення функції

$$y = \sqrt[4]{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}.$$

2. Доведіть, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - 5}{3n + 1} = \frac{2}{3}.$$

3. Обчисліть границю послідовності

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-n)^4 - (1+n)^4}{(1+n)^3 - (1-n)^3};$

б)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{(n^2 + 1)(n^2 - 4)} - \sqrt{n^4 - 9} \right).$$

4. Обчисліть границі .

а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x^2 - x - 1)^2}{x^3 + 2x^2 - x - 2};$

б)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9};$

в)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{3x^2 - x - 2};$

г)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + 2x - 16}{x^3 - 8};$

д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 2x^2 + 4x}{2x^3 + 5};$

е)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - x^6}{x^2 - 2x + 5};$

ж)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - x + 7}{3x^4 - 5x^2 + 10};$

з)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{x+6}}{x^2 - x - 6};$

і)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x} \right)^{2-3x};$

ї)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{2x-1}{4x+1} \right)^{3x-1};$

к)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{2 \sin x}.$

5. Порівняйте нескінченно малі функції  $\alpha(x)$  і  $\beta(x)$ :

$$\alpha(x) = \sqrt{x} - 2, \quad \beta(x) = x^2 - 16 \quad (x \rightarrow 4).$$

6. Доведіть, що функції  $f(x)$  і  $\varphi(x)$  при  $x \rightarrow 0$  є нескінченно малими одного порядку малості  $f(x) = \sin 3x$ ,  $\varphi(x) = 5x$ .

7. Обчисліть границю

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + x + 4}{x^2 - x - 4} \right)^{x^2}.$$

8. Обчисліть границі, використовуючи еквівалентність нескінченно малих.

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x};$

б)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2^{\sqrt{x+1}} - 1}{\arcsin \sqrt[3]{x+1}};$

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x^3 + 27x}.$

**9.** Дослідіть функцію на неперервність і побудуйте графік:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ -(x-1)^2, & 0 < x < 2, \\ x-3, & x \geq 2. \end{cases}$$

**10.** Дослідіть функцію на неперервність у вказаних точках:

$$f(x) = \frac{(x-5)}{(x+3)}; \quad x_1 = -2, \quad x_2 = -3.$$

**11.** Знайдіть похідну функцій:

а)  $y = x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ ;

б)  $y = (\operatorname{sh} x)^{\operatorname{sh} x}$ ;

в)  $\begin{cases} x = 2^{-t}, \\ y = 2^{2t}, \end{cases} \quad t \in R.$

**12.** Знайдіть  $y'$  і  $y''$ :

а)  $\operatorname{arctg} y = 4x + 5y.$

б)  $\begin{cases} x = \frac{1}{(t+2)}, \\ y = \left(\frac{t}{t+2}\right)^2. \end{cases}$

**13.** Для даної функції  $y$  і аргументу  $x_0$  обчисліть  $y'''(x_0)$ :  $y = e^x \cos x, \quad x_0 = 0.$

**14.** Запишіть формулу для похідної  $n$ -го порядку функції  $y = \cos x.$

**15.** Обчисліть границі, використовуючи правило Лопіталя:

а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - 4 \sin^2 \left( \frac{\pi x}{6} \right)}{1 - x^2};$

б)  $\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{1}{x-3} - \frac{5}{x^2 - x - 6} \right);$

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1}{\cos x - \frac{x^2}{2} - 1}.$

**16.** Запишіть рівняння дотичної до кривої  $y = \sqrt{x+4}$  у точці з абсцисою  $x = -3.$

**17.** Складіть рівняння нормалі до лінії  $y = 2 - \sqrt{x}$  у точці її перетину з бісектрисою першого координатного кута.

**18.** Проведіть повне дослідження функцій та побудуйте їх графіки

а)  $y = x + \frac{4}{x+2};$

б)  $y = x e^{-\frac{x^2}{2}};$     в)  $y = x \ln^2 x.$

**19.** Знайдіть найменше і найбільше значення функції  $y = (x+2)e^{1-x}$  на відрізку  $[-2; 2].$

## Варіант 5

1. Знайдіть область визначення функції

$$y = \sqrt{\frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 2x - 3}}.$$

2. Доведіть, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^3 - 1}{3n^3 + 1} = \frac{7}{3}.$$

3. Обчисліть границю послідовності

а)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+n)^2 - (n+2)^3 + (n-1)^2}{(4-n)^3};$$

б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( \sqrt{n(n^4 - 1)} - \sqrt{n^5 - 8} \right).$

4. Обчисліть границі .

а)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x^2 + 2x - 3)^2}{x^3 + 4x^2 - 9};$

б)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x^3 + 8};$

в)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 7x + 6}{x^2 - 5x + 6};$

г)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - x^2 + x + 1}{x^4 - 1};$

д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 28x}{5x^3 + 3x^2 + x - 1};$

е)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 7x - 1}{3x^4 + 2x + 5};$

ж)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 - 2x^2 + x}{3x^2 - x};$

з)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+2x} - \sqrt{x+4}}{3x^2 - 4x + 1};$

і)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+5}{2x+1} \right)^{5x};$

ї)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x+8}{x-2} \right)^{x+4};$

к)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{3x^2}.$

5. Порівняйте нескінченно малі функції  $\alpha(x)$  і  $\beta(x)$ :

$$\alpha(x) = x^3 + x - 2; \quad \beta(x) = x - 1 \quad (x \rightarrow 1).$$

6. Доведіть, що функції  $f(x)$  і  $\varphi(x)$  при  $x \rightarrow 0$  є нескінченно малими одного порядку малості  $f(x) = \cos 3x - \cos x$ ,  $\varphi(x) = 7x^2$ .

7. Обчисліть границю

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sin \frac{1}{x} \right)^{\frac{x+3}{x^2-5}}.$$

8. Обчисліть границі, використовуючи еквівалентність нескінченно малих.

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x};$

б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left( e^{1/x} - 1 \right);$

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 6x}{2x^2 - 3x}$ .

**9.** Дослідіть функцію на неперервність і побудуйте графік:

$$f(x) = \begin{cases} -2(x+1), & x \leq -1, \\ (x+1)^3, & -1 < x < 0, \\ x, & x \geq 0. \end{cases}$$

**10.** Дослідіть функцію на неперервність у вказаних точках:

$$f(x) = 4^{\frac{1}{3-x}}; \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 3.$$

**11.** Знайдіть похідну функцій:

а)  $y = \operatorname{th}(\ln 3x + 1)$ ,

б)  $y = \arccos \sqrt[3]{\sin x}$ ;

в)  $\begin{cases} x = \sqrt[3]{1 - \sqrt{t}}, \\ y = \sqrt{1 + \sqrt{t}}, \end{cases} \quad t \in (1, \infty)$ .

**12.** Знайдіть  $y'$  і  $y''$ :

а)  $y^2 = 25x - 4$ .

б)  $\begin{cases} x = e^{-2t}, \\ y = e^{4t}. \end{cases}$

**13.** Для даної функції  $y$  і аргументу  $x_0$  обчисліть

$$y'''(x_0): \quad y = e^x \sin 2x, \quad x_0 = 0.$$

**14.** Запишіть формулу для похідної  $n$ -го порядку функції  $y = \sin x$ .

**15.** Обчисліть границі, використовуючи правило Лопіталя:

а)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x-a}{a} \operatorname{ctg}(x-a)$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{2(1-\sqrt{x})} - \frac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})} \right)$ ;

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - 1}{\operatorname{tg} x - x}$ .

**16.** Запишіть рівняння дотичної до кривої  $y = x^3 - 2x^2 + 4x - 7$  у точці  $(2, 1)$ .

**17.** Складіть рівняння тієї нормалі до лінії  $y = x \ln x$ , що паралельна прямій  $2x - 2y + 3 = 0$ .

**18.** Проведіть повне дослідження функцій та побудуйте їх графіки

а)  $y = \frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^2}$ ;

б)  $y = \frac{4x - x^2 - 4}{x}$ ;

в)  $y = \frac{4e^{x^2} - 1}{e^{x^2}}$ .

**19.** Знайдіть найменше і найбільше значення функції  $y = \ln(x^2 + 2x + 4)e^{1-x}$  на відрізку  $\left[-1; \frac{3}{2}\right]$ .



## Варіант 6

1. Знайдіть область визначення функції

$$y = \sqrt{\log_2 \log_3 |x-2|}.$$

2. Доведіть, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 1}{3n^2 + 2} = \frac{4}{3}.$$

3. Обчисліть границю послідовності

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+n)^3 - (1+n)^2}{(1+n)^3 + (n-1)^3};$

б)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{(n^2 + 1)(n^2 - 4)} - \sqrt{n^4 - 9} \right).$$

4. Обчисліть границі .

а)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 - 2x - 1)^2}{x^4 + 2x + 1};$

б)  $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4};$

в)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{12 + x - x^2}{x^3 - 27};$

г)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x - 1}{x^4 - 1};$

д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 10x + 3}{2x^2 + 5x - 3};$

е)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 7x^2 + 4}{x^4 + 5x - 1};$

ж)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2x + 1}{3x^2 + 2x - 5};$

з)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x+1}};$

і)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3}{x} \right)^{-5x};$

ї)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x+1}{3x-1} \right)^{2x+1};$

к)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{\sin 3x}.$

5. Порівняйте нескінченно малі функції  $\alpha(x)$  і  $\beta(x)$ :

$$\alpha(x) = \sin(\sqrt{x} - 2);$$

$$\beta(x) = x - 4 \quad (x \rightarrow 4).$$

6. Доведіть, що функції  $f(x)$  і  $\varphi(x)$  при  $x \rightarrow 0$  є нескінченно малими одного порядку малості  $f(x) = x^2 - \cos 2x$ ,  $\varphi(x) = 6x^2$ .

7. Обчисліть границю

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}.$$

8. Обчисліть границі, використовуючи еквівалентність нескінченно малих.

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{\operatorname{tg} x};$

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-2x}}{\operatorname{tg} x};$

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{2x}.$

**9.** Дослідіть функцію на неперервність і побудуйте графік:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 2, \\ x+1, & x > 2. \end{cases}$$

**10.** Дослідіть функцію на неперервність у вказаних точках:

$$f(x) = 9^{2-x}; \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 2.$$

**11.** Знайдіть похідну функцій:

а)  $y = x \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}};$

б)  $y = (\arctg x)^{x^2};$

в)  $\begin{cases} x = \ln \sin \frac{t}{2}, \\ y = \ln \sin t, \end{cases} \quad 0 < t < \pi.$

**12.** Знайдіть  $y'$  і  $y''$ :

а)  $\operatorname{arcctg} y = 4x + 5y.$

б)  $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \sqrt[5]{t}. \end{cases}$

**13.** Для даної функції  $y$  і аргументу  $x_0$  обчисліть  $y'''(x_0)$ :  $y = e^x \cos x, \quad x_0 = 0.$

**14.** Запишіть формулу для похідної  $n$ -го порядку функції

$$y = \frac{1}{x+5}.$$

**15.** Обчисліть границі, використовуючи правило Лопіталя:

а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\pi - 2 \arctg x) \ln x;$

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{\sin x};$

в)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1-x) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\operatorname{ctg} \pi x}.$

**16.** Запишіть рівняння дотичної до кривої  $y = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$  у точці  $(1, 1).$

**17.** Під яким кутом графік функції  $y = e^{\frac{x}{2}}$  перетинає пряму  $x = 2$ ?

**18.** Проведіть повне дослідження функцій та побудуйте їх графіки

а)  $y = x - \ln x;$

б)  $y = \frac{x^2}{4x^2 - 1};$

в)  $y = x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}.$

**19.** Знайдіть найменше і найбільше значення функції

$y = \frac{x^3}{x^2 - x + 1}$  на відрізку  $[-1; 1].$

## Варіант 7

1. Знайдіть область визначення функції

$$y = \sqrt{\log_{\frac{1}{4}} \left( \frac{x}{x-1} \right)^2} - 1.$$

2. Доведіть, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9 - n^3}{2n^3 + 1} = \frac{9}{2}.$$

3. Обчисліть границю послідовності

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+2n)^3 - 8n^3}{(1+2n)^2 + 4n^2};$

б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n + \sqrt[3]{4 - n^3} \right).$

4. Обчисліть границі

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - (1+3x)}{x^5 + x};$

б)  $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2};$

в)  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{3x^2 + 2x - 1}{27x^3 - 1};$

г)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{5x^2 + 3x - 26};$

д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^4 + x^2 + x}{x^4 + 3x - 2};$

е)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^6 - 5x^2 + 2}{2x^3 + 4x - 5};$

ж)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 5x + 2}{x^4 + 3x^2 - 9};$

з)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 4x + 1}{\sqrt{x+3} - \sqrt{5+3x}};$

і)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+2}{x+1} \right)^{1+2x};$

ї)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{2x+1}{x-1} \right)^{4x};$

к)  $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}.$

5. Порівняйте нескінченно малі функції  $\alpha(x)$  і  $\beta(x)$ :

$$\alpha(x) = \operatorname{tg}(x^3 + x); \quad \beta(x) = x \quad (x \rightarrow 0).$$

6. Доведіть, що функції  $f(x)$  і  $\varphi(x)$  при  $x \rightarrow 0$  є нескінченно малими одного порядку малості  $f(x) = \sqrt{1+x} - 1$ ,  $\varphi(x) = 2x$ .

7. Обчисліть границю

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^{\sin \pi x}.$$

8. Обчисліть границі, використовуючи еквівалентність нескінченно малих.

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \operatorname{tg} \sqrt{x} - 2 \sin x}{x + x^2 + \operatorname{tg} x};$

б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( x e^{\frac{1}{x}} - x \right);$

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{arctg} 2x}.$

**9.** Дослідіть функцію на неперервність і побудуйте графік:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 1, \\ 2x, & 1 < x \leq 3, \\ x + 2, & x > 3. \end{cases}$$

**10.** Дослідіть функцію на неперервність у вказаних точках:

$$f(x) = 2^{\frac{1}{x-5}} + 1; \quad x_1 = 4, \quad x_2 = 5.$$

**11.** Знайдіть похідну функцій:

а)  $y = \operatorname{ch}^2(x^2 + x\sqrt{x} + 3),$

б)  $y = (\cos x)^{\sin x};$

в) 
$$\begin{cases} x = t^2 + 6t + 5, \\ y = \frac{t^3 - 54}{t}, \end{cases} \quad t \in (0, \infty).$$

**12.** Знайдіть  $y'$  і  $y''$ :

а)  $y^2 - x = \cos y.$

б) 
$$\begin{cases} x = \frac{2t}{1+t^3}, \\ y = \frac{t^2}{1+t^2}. \end{cases}$$

**13.** Для даної функції  $y$  і аргументу  $x_0$  обчисліть  $y'''(x_0)$ :  $y = \sin 2x, \quad x_0 = \pi.$

**14.** Запишіть формулу для похідної  $n$ -го порядку функції  $y = e^{-2x}.$

**15.** Обчисліть границі, використовуючи правило Лопіталя:

а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( a^{\frac{1}{x}} - 1 \right) x;$

б)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \frac{x}{\operatorname{ctg} x} - \frac{\pi}{2 \cos x} \right);$

в)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x \ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)}.$

**16.** Запишіть рівняння дотичної до кривої  $x^2 - y^2 + xy - 11 = 0$  у точці  $(3, 2).$

**17.** Знайдіть кути, під якими перетинаються криві  $y = 2 - x^2$  і  $y = x^3.$

**18.** Проведіть повне дослідження функцій та побудуйте їх графіки

а)  $y = \frac{x^4}{x^3 - 1};$

б)  $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}};$

в)  $y = xe^{\frac{1}{x}}.$

**19.** Знайдіть найменше і найбільше значення функції

$y = \left( \frac{x+1}{x} \right)^3$  на відрізку  $[1; 2].$

## Варіант 8

1. Знайдіть область визначення функції

$$y = \sqrt{\log_{0,3} \frac{x-1}{x+5}}.$$

2. Доведіть, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 3}{2n^2 + 1} = 2.$$

3. Обчисліть границю послідовності

$$а) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-4n)^2}{(n-3)^3 - (n+3)^3};$$

$$б) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 - 2n + 3} \right).$$

4. Обчисліть границі

$$а) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - x - 1};$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x+x^2} - (1-x)}{x};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 2x - 3};$$

$$г) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 3x - 1}{x^4 - 1};$$

$$д) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 7x + 3}{5x^2 - 3x + 4};$$

$$е) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^7 + 5x^2 - 4x}{3x^2 + 11x - 7};$$

$$ж) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2 - 4x + 2}{4x^3 + 2x - 5};$$

$$з) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x-3}};$$

$$і) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3}{x-1} \right)^{x-4};$$

$$ї) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+1}{2x-1} \right)^{5x};$$

$$к) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\pi - 2x}.$$

5. Порівняйте нескінченно малі функції  $\alpha(x)$  і  $\beta(x)$ :

$$\alpha(x) = (x^3 + 2)^{-1};$$

$$\beta(x) = (x^{10} - 15)^{-1/3} \quad (x \rightarrow \infty).$$

6. Доведіть, що функції  $f(x)$  і  $\varphi(x)$  при  $x \rightarrow 0$  є нескінченно малими одного порядку малості  $f(x) = \sin x + \sin 5x$ ,  $\varphi(x) = 2x$ .

7. Обчисліть границю

$$\lim_{x \rightarrow 2} (\operatorname{ctg} \pi x)^{2-x}.$$

8. Обчисліть границі, використовуючи еквівалентність нескінченно малих.

$$а) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x}}{x^2};$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a+x) - \ln a}{x};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{\sin 2x}.$$

**9.** Дослідіть функцію на неперервність і побудуйте графік:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 1, \\ 2x, & 1 < x \leq 3, \\ x + 2, & x > 3. \end{cases}$$

**10.** Дослідіть функцію на неперервність у вказаних точках:

$$f(x) = 5^{\frac{1}{x-4}} - 2; \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 4.$$

**11.** Знайдіть похідну функцій:

а)  $y = \sin \cos^2 x$ ;   б)  $y = x^{x^x}$ ;

в)  $\begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = t^3, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

**12.** Знайдіть  $y'$  і  $y''$ :

а)  $3x + \sin y = 5y$ .

б)  $\begin{cases} x = \sqrt{t^2 - 1}, \\ y = \frac{t+1}{\sqrt{t^2 - 1}}. \end{cases}$

**13.** Для даної функції  $y$  і аргументу  $x_0$  обчисліть

$$y'''(x_0): \quad y = (2x+1)^5, \quad x_0 = 1.$$

**14.** Запишіть формулу для похідної  $n$ -го порядку функції  $y = \ln(3+x)$ .

**15.** Обчисліть границі, використовуючи правило Лопіталя:

а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x} \right);$

б)  $\lim_{x \rightarrow \pi} (\pi - x) \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} \right);$

в)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\cos \left( \frac{\pi x}{2} \right) \ln(1-x)}.$

**16.** У якій точці кривої  $y^2 = 4x^3$  дотична перпендикулярна до прямої  $x + 3y - 1 = 0$ ?

**17.** Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої  $y = x^3 + 2x^2 - x - 2$  у точці  $x = 1$ .

**18.** Проведіть повне дослідження функцій та побудуйте їх графіки

а)  $y = \frac{4}{x} + \frac{1}{x^4};$

б)  $y = x + \frac{\ln x}{x};$

в)  $y = \frac{2+x}{(x+1)^2}.$

**19.** Знайдіть найменше і найбільше значення функції  $y = \sqrt{x - x^3}$  на відрізку  $[-2; 2]$ .

## Варіант 9

1. Знайдіть область визначення функції

$$y = \sqrt{\log_{0,5} \log_2 \frac{x+1}{x-1}}.$$

2. Доведіть, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2n^2}{4n^2+2} = -\frac{1}{2}.$$

3. Обчисліть границю послідовності

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^3}{(1+n)^2 - (1+n)^3};$

б)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{n^2 + 3n + 2} - \sqrt{n^2 + 2n - 3} \right).$$

4. Обчисліть границі

а)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - x - 2};$

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x+x^2} - 2}{x^2 + x};$

в)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{-x^2 + x + 2};$

г)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2};$

д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 3x + 1}{3x^2 + x - 5};$

е)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^2 + 5x + 9}{1 + 4x - x^3};$

ж)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 + 7x + 1};$

з)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+6}}{2x^2 - 7x - 15};$

і)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x}{2x-3} \right)^{3x};$

ї)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x+3}{2x-4} \right)^{x+2};$

к)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - \sin 2x}{x^2}.$

5. Порівняйте нескінченно малі функції  $\alpha(x)$  і  $\beta(x)$ :

$$\alpha(x) = \sin(x - \sqrt{x});$$

$$\beta(x) = 2\sqrt{x} \quad (x \rightarrow 0).$$

6. Доведіть, що функції  $f(x)$  і  $\varphi(x)$  при  $x \rightarrow 0$  є нескінченно малими одного порядку малості

$$f(x) = \frac{3x}{1-x}, \quad \varphi(x) = \frac{x}{4+x}.$$

7. Обчисліть границю

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos \pi x)^{\frac{1}{x \sin \pi x}}.$$

8. Обчисліть границі,

використовуючи

еквівалентність нескінченно малих.

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x}{\operatorname{tg} \sqrt{x+x}};$

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(\operatorname{tg} x - x)}{\ln(1 + \sin x)};$

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\operatorname{tg} 3x}$ .

**9.** Дослідіть функцію на неперервність і побудуйте графік:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq 2, \\ x-2, & x > 2. \end{cases}$$

**10.** Дослідіть функцію на неперервність у вказаних точках:

$$f(x) = 6^{\frac{1}{x-3}} + 3; \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 4.$$

**11.** Знайдіть похідну функцій:

а)  $y = x \arcsin \ln x$ ;

б)  $y = (\sin x)^{\arcsin x}$ ;

в)  $\begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = t^3, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

**12.** Знайдіть  $y'$  і  $y''$ :

а)  $\operatorname{tg} y = 3x + 5y$ .

б)  $\begin{cases} x = 4t + 2t^2, \\ y = 5t^3 - 3t^2. \end{cases}$

**13.** Для даної функції  $y$  і аргументу  $x_0$  обчисліть  $y'''(x_0)$ :  $y = \ln(1+x)$ ,  $x_0 = 2$ .

**14.** Запишіть формулу для похідної  $n$ -го порядку функції

$$y = \sqrt{x}.$$

**15.** Обчисліть границі, використовуючи правило Лопіталя:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 - \sin x^2}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$ ;

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(e^{x^2} - 1)}{\cos x - 1}$ .

**16.** Запишіть рівняння дотичної до кривої  $y = x^2 - 6x + 2$  у точці з абсцисою  $x = 2$ .

**17.** Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої  $y = x^2 + e^{2x}$  у точці  $x = 0$ .

**18.** Проведіть повне дослідження функцій та побудуйте їх графіки

а)  $y = \frac{x^2}{x-2}$ ;

б)  $y = x - \ln(1+x^2)$ ;

в)  $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$ .

**19.** Знайдіть найменше і найбільше значення функції  $y = 4 - e^{-x^2}$  на відрізку  $[0;1]$ .

## Варіант 10

1. Знайдіть область визначення функції

$$y = \sqrt{5 - x - \frac{6}{x}}.$$

2. Доведіть, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 - 1}{2n^3 + 1} = \frac{3}{2}.$$

3. Обчисліть границю послідовності

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(6-n)^2 - (6+n)^2}{(6+n)^2 - (1-n)^2};$

б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n - \sqrt[3]{n^3 - 5} \right) n \sqrt{n}.$

4. Обчисліть границі

а)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 5x^2 + 7x + 3}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2};$

б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x^2 - 1};$

в)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 11x + 6}{2x^2 - 5x - 3};$

г)  $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x^2 + 7x - 4}{x^3 + 64};$

д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 10}{7x^3 + 2x + 1};$

е)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + x^2 - 6}{2x^2 + 3x + 1};$

ж)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - 7x + 5}{4x^5 - 3x^3 + 2};$

з)  $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{3x+17} - \sqrt{2x+12}}{x^2 + 8x + 15};$

і)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-7}{x} \right)^{2x+1};$

ї)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{2x+1}{3x-1} \right)^{x-1};$

к)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \operatorname{tg} x}.$

5. Порівняйте нескінченно малі функції  $\alpha(x)$  і  $\beta(x)$ :

$$\alpha(x) = \arcsin(2 - \sqrt{x});$$

$$\beta(x) = 4 - x \quad (x \rightarrow 4).$$

6. Доведіть, що функції  $f(x)$  і  $\varphi(x)$  при  $x \rightarrow 0$  є нескінченно малими одного порядку малості

$$f(x) = \frac{3x^2}{2+x}, \quad \varphi(x) = 7x^2.$$

7. Обчисліть границю

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{xe^x + 1}{x\pi^x + 1} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

8. Обчисліть границі, використовуючи еквівалентність нескінченно малих.

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}};$

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}.$

$$в) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x-3)}{x^2 - 5x + 6}.$$

**9.** Дослідіть функцію на неперервність і побудуйте графік:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2, & x \leq 0, \\ x, & 0 < x \leq 1, \\ 2 + x, & x > 1. \end{cases}$$

**10.** Дослідіть функцію на неперервність у вказаних точках:

$$f(x) = 7^{\frac{1}{5-x}} + 1; \quad x_1 = 4, \quad x_2 = 5.$$

**11.** Знайдіть похідну функцій:

а)  $y = \operatorname{chtg} \sqrt{\sin x};$

б)  $y = (\operatorname{ch} 3x)^{\operatorname{sh} x};$

в)  $\begin{cases} x = \arccos t, \\ y = \arcsin t^2, \end{cases} \quad t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$

**12.** Знайдіть  $y'$  і  $y''$ :

а)  $xy = \operatorname{ctg} y.$

б)  $\begin{cases} x = \frac{\ln t}{t}, \\ y = t \ln t. \end{cases}$

**13.** Для даної функції  $y$  і аргументу  $x_0$  обчисліть

$$y'''(x_0): \quad y = \frac{1}{2}x^2 e^x, \quad x_0 = 0.$$

**14.** Запишіть формулу для похідної  $n$ -го порядку функції

$$y = xe^{3x}.$$

**15.** Обчисліть границі, використовуючи правило Лопіталя:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{2 \sin x + x};$

б)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2a}} \frac{1 - \sin \alpha x}{(2ax - \pi)^2};$

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - \cos \alpha x}{e^{\beta x} - \cos \beta x}.$

**16.** Запишіть рівняння дотичної до кривої  $y = \frac{x^2}{4} - x + 5$  у точці

з абсцисою  $x = 4.$

**17.** Знайдіть кути, під якими перетинаються криві

$$y = (2 - x)^2 \quad \text{і} \quad y = -x^2 + 4x + 4.$$

**18.** Проведіть повне дослідження функцій та побудуйте їх графіки

а)  $y = \frac{x}{9 - x};$

б)  $y = \frac{x^3}{x^2 - x + 1};$

в)  $y = xe^x.$

**19.** Знайдіть найменше і найбільше значення функції

$$y = \frac{x^3 + 4}{x^2} \quad \text{на відрізку} \quad [1; 2].$$

## Варіант 11

1. Знайдіть область визначення функції

$$y = \frac{\sqrt{4x - x^2}}{\log_3 |x - 4|}.$$

2. Доведіть, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{1 - 2n^2} = -\frac{1}{2}.$$

3. Обчисліть границю послідовності

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(1+n)^3 - (n-2)^3}{n^3 + 2n - 3};$

б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt[3]{8n^3 + 5} - 2n \right) n.$

4. Обчисліть границі

а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1};$

б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{1+x} - \sqrt{2x}};$

в)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 + x - 6};$

г)  $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{4x^2 + 19x - 5}{2x^2 + 11x + 5};$

д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 5x - 7}{2x^2 - x + 10};$

е)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 5x + 7}{3x^4 - 2x^2 + x};$

ж)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^5 + 6x^4 - x^3}{2x^2 + 6x + 1};$

з)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{2}}{\sqrt{x^2 + 1} - 1};$

і)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x+4} \right)^{3x+2};$

ї)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x-3}{x+4} \right)^{x+3};$

к)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{\sin x} \right).$

5. Порівняйте нескінченно малі функції  $\alpha(x)$  і  $\beta(x)$ :

$$\alpha(x) = e^x - 1; \quad \beta(x) = x^2 \quad (x \rightarrow 0).$$

6. Доведіть, що функції  $f(x)$  і  $\varphi(x)$  при  $x \rightarrow 0$  є нескінченно малими одного порядку малості

$$f(x) = 2x^3, \quad \varphi(x) = \frac{5x^3}{4-x}.$$

7. Обчисліть границю

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - x \right) \right)^{\operatorname{ctg} x}.$$

8. Обчисліть границі, використовуючи еквівалентність нескінченно малих.

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{\sin x^2};$

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{\sqrt{x}} - \operatorname{csx}}{\sin \sqrt{x}};$

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{2x^2}.$

**9.** Дослідіть функцію на неперервність і побудуйте графік:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

**10.** Дослідіть функцію на неперервність у вказаних точках:

$$f(x) = (x-3)(x+4);$$

$$x_1 = -5, \quad x_2 = -4.$$

**11.** Знайдіть похідну функцій:

а)  $y = \sqrt{\cos x} 2^{\sqrt{\cos x}};$

б)  $y = (\ln x)^{\frac{1}{x}};$

в)  $\begin{cases} x = t \ln t, \\ y = \frac{\ln t}{t}, \end{cases} \quad t \in (0, \infty).$

**12.** Знайдіть  $y'$  і  $y''$ :

а)  $y = e^y + 4x;$

б)  $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$

**13.** Для даної функції  $y$  і аргументу  $x_0$  обчисліть  $y'''(x_0)$ :  $y = \arcsin x, \quad x_0 = 0.$

**14.** Запишіть формулу для похідної  $n$ -го порядку функції  $y = \ln(x-3).$

**15.** Обчисліть границі, використовуючи правило Лопіталя:

а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{x^2}} - 1}{2 \arctg x^2 - \pi};$

б)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1 - 2 \sin x}{\cos 3x};$

в)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}.$

**16.** Запишіть рівняння дотичної

до кривої  $y = \frac{x^2}{4} - 27x + 60$  у

точці з абсцисою  $x = 2.$

**17.** Знайдіть коефіцієнти  $b$  і  $c$  в рівнянні параболи  $y = x^2 + bx + c,$  якщо відомо, що вона дотикається до прямої  $y = x$  у точці  $M_0(1; 1).$

**18.** Проведіть повне дослідження функцій та побудуйте їх графіки

а)  $y = x + \arctg 2x ;$

б)  $y = x^2 - 2 \ln x;$

в)  $y = \frac{x^3}{x^2 - x + 1}.$

**19.** Знайдіть найменше і найбільше значення функції  $y = xe^x$  на відрізку  $[-2; 0].$

## Варіант 12

1. Знайдіть область визначення функції

$$y = \sqrt{\log^2_3(x-3) - 1}.$$

2. Доведіть, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 1}{3n^3 - 5} = \frac{2}{3}.$$

3. Обчисліть границю послідовності

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+n)^3 + (2+n)^3}{(3+n)^3 + (4+n)^3};$

б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( \sqrt[3]{n^3 + 5} - \sqrt[3]{3 + n^3} \right).$

4. Обчисліть границі

а)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x^2 - 3x - 3}{x^3 - x^2 - x + 1};$

б)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4x} - 2}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2x}};$

в)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 + 1};$

г)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^3 + x - 2};$

д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 2x + 1}{x^4 - x^3 + 2x};$

е)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 4x^2 - 7x}{2x^2 + 7x - 3};$

ж)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 - 3x - 2x^2}{3x^4 + 5x};$

з)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{7-x} - \sqrt{7+x}}{\sqrt{7x}};$

і)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+1}{2x-1} \right)^{x+2};$

ї)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{2x-3}{7x+4} \right)^x;$

к)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x - \sin^2 x}{x^2}.$

5. Порівняйте нескінченно малі функції  $\alpha(x)$  і  $\beta(x)$ :

$$\alpha(x) = \ln(1 + \sqrt{x});$$

$$\beta(x) = 1 + \sqrt[3]{x-1} \quad (x \rightarrow 0).$$

6. Доведіть, що функції  $f(x)$  і  $\varphi(x)$  при  $x \rightarrow 0$  є нескінченно малими одного порядку малості

$$f(x) = \frac{x^2}{5+x}, \quad \varphi(x) = \frac{4x^2}{x-1}.$$

7. Обчисліть границю

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 - x^2 \sin x \right)^{\frac{1}{\ln(1+3x)}}.$$

8. Обчисліть границі, використовуючи еквівалентність нескінченно малих.

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{\operatorname{arctg} x^2};$

б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^{x-1} - 1}{x^2 - 3x + 2}.$

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arcsin} 4x}{\operatorname{tg} 5x}.$

**9.** Дослідіть функцію на неперервність і побудуйте графік:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < \pi, \\ 2, & x \geq \pi. \end{cases}$$

**10.** Дослідіть функцію на неперервність у вказаних точках:

$$f(x) = \frac{x+5}{x-2}; \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 2.$$

**11.** Знайдіть похідну функцій:

а)  $y = 2 \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{ctg} \frac{1}{x}$ ;

б)  $y = \operatorname{arctg} \sqrt{\cos x}$ ;

в) 
$$\begin{cases} x = \frac{1}{t+1}, \\ y = \left(\frac{t}{t+1}\right)^2, \end{cases} \quad t \neq -1.$$

**12.** Знайдіть  $y'$  і  $y''$ :

а)  $\ln y - \frac{y}{x} = 7$ ; б)  $\begin{cases} x = t^4, \\ y = \ln t. \end{cases}$

**13.** Для даної функції  $y$  і аргументу  $x_0$  обчисліть  $y'''(x_0)$ :  $y = (5x - 4)^5$ ,  $x_0 = 2$ .

**14.** Запишіть формулу для похідної  $n$ -го порядку функції  $y = \ln(5 + x^2)$ .

**15.** Обчисліть границі, використовуючи правило Лопіталя:

а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\ln(1 + 2x)}$ ;

в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{a}{6x}$ .

**16.** Запишіть рівняння дотичної до кривої  $y = -\frac{x^2}{2} + 7x - \frac{15}{2}$  у точці з абсцисою  $x = 3$ .

**17.** Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої  $y = e^{1-x^2}$  у точці  $x = -1$ .

**18.** Проведіть повне дослідження функцій та побудуйте їх графіки

а)  $y = \frac{\ln x}{x}$ ;

б)  $y = x^3 e^{-\frac{x^2}{2}}$ ;

в)  $y = \frac{x^2}{(x+2)^2}$ .

**19.** Знайдіть найменше і найбільше значення функції  $y = (x - 2)e^x$  на відріжку  $[-2; 1]$ .

## Варіант 13

1. Знайдіть

визначення функції

$$y = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{(x-4)(x+3)}} - 1.$$

2. Доведіть, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 2n^2}{n^2 + 3} = -2.$$

3. Обчисліть границю послідовності

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3+n)^3 + (4+n)^3}{(2+n)^4 - (1+n)^4};$$

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt[3]{(n+2)^2} - \sqrt[3]{(n-3)^2} \right).$$

4. Обчисліть границі

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}{x^3 - 3x - 2};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 + x - 20};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 - 7x + 5};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x + 9}{2x^2 - x + 4};$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^3 - 3x^2 + 7}{2x^4 + 3x^2 + 1};$$

$$\text{ж) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7 - 3x^4}{2x^3 + 3x^2 - 5};$$

область

$$\text{з) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}};$$

$$\text{і) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-2}{x+1} \right)^{2x-3};$$

$$\text{ї) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x-5}{3x+4} \right)^{2x};$$

$$\text{к) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 7x + \sin 3x}{x \sin x} \right).$$

5. Порівняйте нескінченно малі функції  $\alpha(x)$  і  $\beta(x)$ :

$$\alpha(x) = \sqrt[3]{x} - 3; \quad \beta(x) = 27 - x \quad (x \rightarrow 27).$$

6. Доведіть, що функції  $f(x)$  і  $\varphi(x)$  при  $x \rightarrow 0$  є нескінченно малими одного порядку малості

$$f(x) = \sin 8x, \quad \varphi(x) = \arcsin 5x.$$

7. Обчисліть границю

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \cos x + \operatorname{arctg}^2 x \right)^{\frac{1}{\operatorname{arctg} x}}.$$

8. Обчисліть границі, використовуючи еквівалентність нескінченно малих.

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2(x-1)}{x^2 - 3x + 2};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 3x}{\ln(1+2x)}.$$

**9.** Дослідіть функцію на неперервність і побудуйте графік:

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x < 2, \\ 2x, & x \geq 2. \end{cases}$$

**10.** Дослідіть функцію на неперервність у вказаних точках:

$$f(x) = 5^{\frac{1}{x-4}} - 2; \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 4.$$

**11.** Знайдіть похідну функцій:

а)  $y = \frac{\arccos 7x}{\sqrt{1-x}}$ ;

б)  $y = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$ ;

в)  $\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} \quad t \in (0, \pi).$

**12.** Знайдіть  $y'$  і  $y''$ :

а)  $y^2 + x^2 = \sin y$ .

б)  $\begin{cases} x = 5 \cos t, \\ y = 4 \sin t. \end{cases}$

**13.** Для даної функції  $y$  і аргументу  $x_0$  обчисліть

$$y'''(x_0): \quad y = x \sin x, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}.$$

**14.** Запишіть формулу для похідної  $n$ -го порядку функції

$$y = e^{4x}.$$

**15.** Обчисліть границі, використовуючи правило Лопітала:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{c^x - 1}$ ;

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \operatorname{tg} 4x - 12 \operatorname{tg} x}{3 \sin 4x - 12 \sin x}$ .

**16.** Запишіть рівняння нормалі до кривої  $y = 3 \operatorname{tg} 2x + 1$  у точці з абсцисою  $x = \frac{\pi}{2}$ .

**17.** Під яким кутом графік функції  $y = e^{\frac{x^2}{2}}$  перетинає пряму  $x = 2$ ?

**18.** Проведіть повне дослідження функцій та побудуйте їх графіки

а)  $y = x + 2\sqrt{-x}$ ;

б)  $y = \frac{x^2 - x - 1}{x^2 - 2x}$ ;

в)  $y = (x + 2)e^{1-x}$ .

**19.** Знайдіть найменше і найбільше значення функції  $y = (x - 1)e^{-x}$  на відрізку  $[0; 3]$ .

## Варіант 14

1. Знайдіть визначення функції

$$y = \lg \log_2 \frac{x-1}{x^3-8}.$$

2. Доведіть, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2}{2-n^2} = -3.$$

3. Обчисліть границю послідовності

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(1-n)^3 + (1+n)^3};$

б)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n+1)^3} - \sqrt{n(n-1)(n-3)}}{\sqrt{n}}.$$

4. Обчисліть границі

а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{2x^4 - x^2 - 1};$

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+x} - \sqrt[3]{27-x}}{x + 2\sqrt[3]{x^4}};$

в)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^2 + 11x - 3}{x^2 + 2x - 3};$

г)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{2x^2 - 9x + 10};$

д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x - 7}{3x^2 + x + 1};$

е)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3x + 1}{1 + 2x - x^4};$

область

ж)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^4 + 7x^{3-3}}{3x^2 - 5x + 1};$

з)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}};$

і)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{x-3} \right)^{x-5};$

ї)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3}{4x-5} \right)^{2x};$

к)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{2x^2}.$

5. Порівняйте нескінченно малі функції  $\alpha(x)$  і  $\beta(x)$ :

$$\alpha(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 2}; \quad \beta(x) = \frac{x-4}{x+4} \quad (x \rightarrow 4).$$

6. Доведіть, що функції  $f(x)$  і  $\varphi(x)$  при  $x \rightarrow 0$  є нескінченно малими одного порядку малості

$$f(x) = \sin 3x + \sin x, \quad \varphi(x) = 10x.$$

7. Обчисліть границю

$$\lim_{x \rightarrow 4\pi} (\cos x)^{\frac{5}{\operatorname{tg} 5x \sin 2x}}.$$

8. Обчисліть границі, використовуючи еквівалентність нескінченно малих.

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 5x}{\sin 3x};$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 10x}{e^{x^2} - 1};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 4x}{\operatorname{tg} 5x}.$$

**9.** Дослідіть функцію на неперервність і побудуйте графік:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0, \\ x^2 - 1, & 0 \leq x < 1, \\ -x, & x \geq 1. \end{cases}$$

**10.** Дослідіть функцію на неперервність у вказаних точках:

$$f(x) = 4^{\frac{2}{x-1}} - 3; \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2.$$

**11.** Знайдіть похідну функцій:

$$\text{а) } y = \ln \left( x + \sqrt{4x + x^2} \right);$$

$$\text{б) } y = x^{\sin^2 x};$$

$$\text{в) } \begin{cases} x = \operatorname{tg} t, \\ y = \sin 2t + 2 \cos t, \end{cases}$$

$$t \in \left( -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right).$$

**12.** Знайдіть  $y'$  і  $y''$ :

$$\text{а) } e^y = 4x - 7y.$$

$$\text{б) } \begin{cases} x = 5 \cos^2 t, \\ y = 3 \sin^2 t. \end{cases}$$

**13.** Для даної функції  $y$  і аргументу  $x_0$  обчисліть

$$y'''(x_0): \quad y = x^2 \ln x, \quad x_0 = \frac{1}{3}.$$

**14.** Запишіть формулу для похідної  $n$ -го порядку функції

$$y = \frac{1}{x-7}.$$

**15.** Обчисліть границі, використовуючи правило Лопіталя:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^5};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1 - x^3};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x} - 1}{2 \sin^2 x - 1}.$$

**16.** Запишіть рівняння дотичної до кривої  $y = 4 \operatorname{tg} 3x$  у точці з абсцисою  $x = \frac{\pi}{9}$ .

**17.** Доведіть, що дотичні до гіперболи  $y = \frac{x-4}{x-2}$  у точках її перетину з осями координат паралельні.

**18.** Проведіть повне дослідження функцій та побудуйте їх графіки

$$\text{а) } y = \frac{3 - x^2}{x + 2};$$

б)  $y = \frac{(x-2)^2}{x+1}$ ; в)  $y = \frac{\ln x}{x}$ .

**19.** Знайдіть найменше і найбільше значення функції

$y = \frac{x}{9-x^2}$  на відрізку  $[-2; 2]$ .

## Варіант 15

1. Знайдіть область визначення функції

$$y = \log_2 \frac{(x-2)(x-3)}{x^5}.$$

2. Доведіть, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{3n^2 - 1} = \frac{1}{3}.$$

3. Обчисліть границю послідовності

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^3 - 2n}{(1+n)^4 - (1-n)^4};$

б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{n^2 + 3n - 2} - \sqrt{n^2 - 3} \right).$

4. Обчисліть границі  $\left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right].$

а)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^3 + 3x^2 - 4};$

б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{9x} - 3}{\sqrt{3-x} - \sqrt{2x}};$

в)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 7x - 6}{2x^2 - 7x + 3};$

г)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{9x^2 + 17x - 2}{x^2 + 2x};$

д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 7x - 2}{3x^3 - x - 4};$

е)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 + 3x^2 + 5}{3x^2 - 4x + 1};$

ж)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + 7}{2 - 3x + 4x^2};$

з)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{5+x} - 2}{\sqrt{8-x} - 3};$

і)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x-4}{3x+2} \right)^{2x};$

ї)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x-2}{3x+1} \right)^{5x};$

к)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{3x^2}.$

5. Порівняйте нескінченно малі функції  $\alpha(x)$  і  $\beta(x)$ :

$$\alpha(x) = x \sin \sqrt{x}; \quad \beta(x) = \sqrt{x^3} \quad (x \rightarrow 0).$$

6. Доведіть, що функції  $f(x)$  і  $\varphi(x)$  при  $x \rightarrow 0$  є нескінченно малими одного порядку малості  $f(x) = \cos 7x - \cos x$ ,  $\varphi(x) = 2x^2$ .

7. Обчисліть границю

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{9-2x}{3} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{8}}.$$

8. Обчисліть границі, використовуючи еквівалентність нескінченно малих.

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\operatorname{tg} \pi(x+2)};$

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{x+1} - 3}{\ln(1 + x\sqrt{1 + xe^x})};$

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{\sin 2x}.$

**9.** Дослідіть функцію на неперервність і побудуйте графік:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x^2 + 1, & 0 \leq x < 2, \\ x + 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

**10.** Дослідіть функцію на неперервність у вказаних точках:

$$f(x) = 2^{\frac{5}{1-x}} - 1; \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1.$$

**11.** Знайдіть похідну функцій:

а)  $y = e^{-x} \operatorname{sh} ax$ ;   б)  $y = \sqrt{x^x}$ ;

в) 
$$\begin{cases} x = t^3 + 2, \\ y = 0,5t^2, \end{cases} \quad t \in R.$$

**12.** Знайдіть  $y'$  і  $y''$ :

а)  $4 \sin^2(x + y) = x$ .

б) 
$$\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \ln(1 + t^2). \end{cases}$$

**13.** Для даної функції  $y$  і аргументу  $x_0$  обчисліть

$$y'''(x_0): \quad y = x \sin 2x, \quad x_0 = -\frac{\pi}{4}.$$

**14.** Запишіть формулу для похідної  $n$ -го порядку функції  $y = 5^x$ .

**15.** Обчисліть границі, використовуючи правило Лопіталя:

а) 
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1 - \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)};$$

б) 
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} \pi x};$$

в) 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3}.$$

**16.** Запишіть рівняння нормалі до кривої  $y = 6 \operatorname{tg} 5x$  у точці з абсцисою  $x = \frac{\pi}{20}$ .

**17.** У якій точці кривої  $y = 2x^2$  дотична перпендикулярна до прямої  $4x - 3y + 2 = 0$ ?

**18.** Проведіть повне дослідження функцій та побудуйте їх графіки

а)  $y = x^2 e^{-x}$ ;

б)  $y = -\ln \frac{1+x}{1-x}$ ;

в)  $y = \left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2$ .

**19.** Знайдіть найменше і найбільше значення функції  $y = \frac{(1 + \ln x)}{x}$  на відрізку

$$\left[\frac{1}{e}; e\right].$$

## Варіант 16

1. Знайдіть

визначення функції

$$y = \lg \frac{(x-5)(x-3)}{x^2 - 6x + 18}.$$

2. Доведіть, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3}{n^3 - 1} = 3.$$

3. Обчисліть

послідовності

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^3 - (n+1)^3}{(2n+3)^2 + (4+n)^2};$

б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n-3})\sqrt{n}.$

4. Обчисліть границі .

а)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^3 - 3x^2 + 4};$

б)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x+2};$

в)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x^2 + 7x - 2}{3x^2 + 8x + 4};$

г)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1};$

д)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{18x^2 + 5x}{8 - 3x - 9x^2};$

е)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - 5x + 2}{4x^3 + 2x - 1};$

ж)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 3x + 1}{7x + 5};$

область

границю

з)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4} - 3}{\sqrt{x-1} - 2};$

і)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-1}{2x+4} \right)^{3x-1};$

ї)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{3x-4}{x+6} \right)^{x-1};$

к)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\operatorname{tg} 3x}.$

5. Порівняйте нескінченно малі функції  $\alpha(x)$  і  $\beta(x)$ :

$$\alpha(x) = x - \sin x; \quad \beta(x) = x \quad (x \rightarrow 0).$$

6. Доведіть, що функції  $f(x)$  і  $\varphi(x)$  при  $x \rightarrow 0$  є нескінченно малими одного порядку малості  $f(x) = 1 - \cos 2x$ ,  $\varphi(x) = 8x^2$ .

7. Обчисліть границю

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}.$$

8. Обчисліть границі, використовуючи еквівалентність нескінченно малих.

а)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin \frac{x}{2}}{\pi - x};$

б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3^{5x-3} - 3^{2x^2}}{\operatorname{tg} \pi x};$

в)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{tg}(x+2)}{x^2 - 4}.$

**9.** Дослідіть функцію на неперервність і побудуйте графік:

$$f(x) = \begin{cases} x+3, & x \leq 0, \\ 1, & 0 < x \leq 2, \\ x^2 - 2, & x > 2. \end{cases}$$

**10.** Дослідіть функцію на неперервність у вказаних точках:

$$f(x) = 8^{\frac{4}{x-2}} - 1; \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 3.$$

**11.** Знайдіть похідну функцій:

а)  $y = \arccos \frac{1}{\operatorname{ch} x}$ ;

б)  $y = (\cos 2x)^{\sin 3x}$ ;

в)  $\begin{cases} x = \ln(1+t^3), \\ y = t - \operatorname{arctg} t, \end{cases} \quad t > 0.$

**12.** Знайдіть  $y'$  і  $y''$ :

а)  $\sin y = 7x + 3y$ .

б)  $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

**13.** Для даної функції  $y$  і аргументу  $x_0$  обчисліть

$$y'''(x_0): \quad y = x \cos 2x, \quad x_0 = \frac{\pi}{12}.$$

**14.** Запишіть формулу для похідної  $n$ -го порядку функції

$$y = e^{-5x}.$$

**15.** Обчисліть границі, використовуючи правило Лопітала:

а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos ax}{1 - \cos bx}$ ;

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^3}$ .

**16.** Запишіть рівняння дотичної до кривої  $y = 4\sin 6x$  у точці з абсцисою  $x = \frac{\pi}{18}$ .

**17.** Під яким кутом графік функції  $y = x^2 - 4x + 5$  перетинає пряму  $x - y + 1 = 0$ ?

**18.** Проведіть повне дослідження функцій та побудуйте їх графіки

а)  $y = \frac{(x-1)^2}{x^2 + 1}$ ;

б)  $y = \ln(x^2 + 1)$ ;

в)  $y = (2x + 3)e^{-2(x+1)}$ .

**19.** Знайдіть найменше і найбільше значення функції  $y = e^{4x-x^2}$  на відрізку  $[1; 3]$ .

## Варіант 17

1. Знайдіть  
визначення функції

$$y = \sqrt[6]{\frac{x^2 - 6x + 8}{x^4}}.$$

2. Доведіть, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + 2n^2}{1 - 3n^2} = -\frac{2}{3}.$$

3. Обчисліть  
послідовності

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-3)^2 - (n+1)^3}{(3n-1)^2 + (3+2n)^3};$

б)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^6 + 9n} - \sqrt{(n^4 - 1)(n^2 + 5)}}{n}.$$

4. Обчисліть границі

а)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^3 - 3x^2 + 4};$

б)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt[3]{16x-4}}{\sqrt{4+x} - \sqrt{2x}};$

в)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^2 + 4x - 1}{3x^2 + x - 2};$

г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - 2x^2 + 5x}{3x^2 + 7x};$

д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 6x^2 + 2}{x^4 + 4x - 3};$

е)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{11x^3 + 3x}{2x^2 - 2x + 1};$

область

границю

ж)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x - 7}{3x^4 + 2x^3 + 1};$

з)  $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x-3} - 2}{\sqrt{x+2} - 3};$

і)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-4}{2x} \right)^{-3x};$

ї)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-2}{3x+10} \right)^{3x};$

к)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x - \sin 3x}{2x^2}.$

5. Порівняйте нескінченно малі функції  $\alpha(x)$  і  $\beta(x)$ :

$$\alpha(x) = x \sin(1/x); \quad \beta(x) = x \quad (x \rightarrow 0).$$

6. Доведіть, що функції  $f(x)$  і  $\varphi(x)$  при  $x \rightarrow 0$  є нескінченно малими одного порядку малості  $f(x) = 3 \sin^2 4x$ ,  $\varphi(x) = x^2 - x^4$ .

7. Обчисліть границю

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin 4x)^{\frac{1}{x}}.$$

8. Обчисліть границі, використовуючи еквівалентність нескінченно малих.

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-7x)}{\sin \pi(x+7)};$

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{x^2 + \pi x};$

$$в) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sin(x+2)}{x^3+8}.$$

**9.** Дослідіть функцію на неперервність і побудуйте графік:

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0, \\ \sin x, & 0 \leq x < \pi, \\ 3, & x \geq \pi. \end{cases}$$

**10.** Дослідіть функцію на неперервність у вказаних точках:

$$f(x) = 5^{\frac{4}{3-x}} + 1; \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 3.$$

**11.** Знайдіть похідну функцій:

$$а) y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}};$$

$$б) y = (\arccos 3x)^{2x};$$

$$в) \begin{cases} x = \sqrt{1-\sqrt[3]{t}}, \\ y = \sqrt[3]{1-\sqrt{t}}, \end{cases} \quad 0 < t < 1.$$

**12.** Знайдіть  $y'$  і  $y''$ :

$$а) \operatorname{tg} y = 4y - 5x.$$

$$б) \begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t). \end{cases}$$

**13.** Для даної функції  $y$  і аргументу  $x_0$  обчисліть  $y'''(x_0)$ :  $y = x^4 \ln x$ ,  $x_0 = 1$ .

**14.** Запишіть формулу для похідної  $n$ -го порядку функції  $y = \ln(4+x)$ .

**15.** Обчисліть границі, використовуючи правило Лопіталя:

$$а) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{1 - \cos x};$$

$$б) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x-a}{x^n - a^n};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3}.$$

**16.** З'ясуйте, у яких точках кривої  $y = \sin 2x$  дотична

утворює з віссю  $Ox$  кут  $\frac{\pi}{4}$ .

**17.** Доведіть, що нормалі до лінії  $y = x^2 - x + 1$ , проведені у точках з абсцисами  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = \frac{5}{2}$ , перетинаються в одній точці.

**18.** Проведіть повне дослідження функцій та побудуйте їх графіки

$$а) y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2};$$

$$б) y = \frac{x^2 + 6}{x^2 + 1};$$

$$в) y = (x+1)e^{2x}.$$

**19.** Знайдіть найменше і найбільше значення функції

$$y = \frac{x^5 - 8}{x^4} \quad \text{на відрізку } [-3; -1].$$



## Варіант 18

1. Знайдіть  
визначення функції

$$y = (x+5)^4 \sqrt{\frac{8+x^3}{8-x^3}}.$$

2. Доведіть, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 + 15}{6 - 2n^3} = -\frac{5}{2}.$$

3. Обчисліть  
послідовності

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+10)^2 + (3n+1)^2}{(n+3)^2 - (n+1)^3};$

б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n(n+5)} - n).$

4. Обчисліть границі

а)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 5x^2 + 8x + 4}{x^3 + 7x^2 + 16x + 12};$

б)  $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x^2} - 4};$

в)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{3x^2 + 2x - 2};$

г)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^4 - 5x^2 + 1}{x^2 - 1};$

д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 + 4x - 5}{4x^2 - 3x + 2};$

е)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 + 3x + 5}{4x^3 - 2x^2 + 1};$

ж)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^4 - 3x^2}{1 + 2x + 3x^2};$

область

з)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{4x-3} - 3}{x^2 - 9};$

і)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+5}{x} \right)^{3x+4};$

ї)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{2x-3}{x+4} \right)^{6x+1};$

к)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin 2x}{\pi - 4x}.$

5. Порівняйте  
малі функції  $\alpha(x)$  і  $\beta(x)$ :

$$\alpha(x) = x^2 \cos(1/x); \quad \beta(x) = x \quad (x \rightarrow 0).$$

6. Доведіть, що функції  $f(x)$  і  $\varphi(x)$  при  $x \rightarrow 0$  є нескінченно малими одного порядку малості

$$f(x) = \operatorname{tg}(x^2 + 2x),$$

$$\varphi(x) = x^2 + 2x.$$

7. Обчисліть границю

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{x - \pi/2}}.$$

8. Обчисліть  
використовуючи  
еквівалентність  
нескінченно  
малих.

а)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos 5x - \cos 3x}{\sin^2 x};$

б)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{Intg} x}{\cos 2x};$

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{\operatorname{tg} 4x}$ .

**9.** Дослідіть функцію на неперервність і побудуйте графік:

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1, & x < -1, \\ x^2 + 1, & -1 \leq x \leq 2, \\ 2x, & x > 2. \end{cases}$$

**10.** Дослідіть функцію на неперервність у вказаних точках:

$$f(x) = \frac{3x}{x-4}; \quad x_1 = 4, \quad x_2 = 5.$$

**11.** Знайдіть похідну функцій:

а)  $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ ;

б)  $y = (\operatorname{arctg} x)^{x-3}$ ;

в)  $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t, \end{cases} \quad t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

**12.** Знайдіть  $y'$  і  $y''$ :

а)  $y = 7x - \operatorname{ctg} y$ .

б)  $\begin{cases} x = 3(\sin t - t \cos t), \\ y = 3(\cos t + t \sin t). \end{cases}$

**13.** Для даної функції  $y$  і аргументу  $x_0$  обчисліть  $y'''(x_0)$ :  $y = x + \operatorname{arctg} x$ ,  $x_0 = 1$ .

**14.** Запишіть формулу для похідної  $n$ -го порядку функції

$$y = \frac{1}{x-6}.$$

**15.** Обчисліть границі, використовуючи правило Лопіталя:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{x}}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$ .

**16.** З'ясуйте, у якій точці кривої  $y = 2x^3 - 1$  дотична утворює з віссю  $Ox$  кут  $\frac{\pi}{3}$ .

**17.** У якій точці кривої  $y = \frac{x-1}{x+4}$  дотична перпендикулярна до прямої  $y = x$ ?

**18.** Проведіть повне дослідження функцій та побудуйте їх графіки

а)  $y = (x-5)x^{\frac{3}{2}}$ ;

б)  $y = x \ln x$ ;

в)  $y = \frac{4x}{4+x^2}$ .

**19.** Знайдіть найменше і найбільше значення функції

$$y = \frac{e^{2x} + 1}{e^x} \quad \text{на відрізку } [-1; 2].$$

## Варіант 19

1. Знайдіть область визначення функції

$$y = \sqrt{x^2 - 4x + 3} + \frac{1}{\sqrt{8 + 2x - x^2}}.$$

2. Доведіть, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - n^2}{1 + 2n^2} = -\frac{1}{2}.$$

3. Обчисліть границю послідовності

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^3 + (3n+2)^3}{(2n+3)^3 - (n-1)^3};$

б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{n^3 + 2} - \sqrt{n^3 - 1} \right) \sqrt{n^3 + 8}.$

4. Обчисліть границі

а)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{(x^2 - x - 2)^2};$

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8 + 3x - x^2} - 2}{\sqrt[3]{x^3 + x^2}};$

в)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{7x^2 + 4x - 3}{2x^2 + 3x + 1};$

г)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 5x - 12}{x^2 - 5x + 6};$

д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^4 - 4x^2 + 3}{2x^4 + 1};$

е)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x^3 + 5x^2 - 3}{2x^2 - x + 7};$

ж)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + 3}{x^3 - 4x^2 - x};$

з)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{5x+1} - 4}{x^2 + 2x - 15};$

і)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-7}{x+1} \right)^{4x-2};$

ї)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x+3}{3x-1} \right)^{2x};$

к)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos^3 4x}{3x^2}.$

5. Порівняйте нескінченно малі функції  $\alpha(x)$  і  $\beta(x)$ :

$$\alpha(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{x}; \quad \beta(x) = \frac{1}{x-2} \quad (x \rightarrow \infty).$$

6. Доведіть, що функції  $f(x)$  і  $\varphi(x)$  при  $x \rightarrow 0$  є нескінченно малими одного порядку малості  $f(x) = \arcsin(x^2 - x),$

$$\varphi(x) = x^3 - x.$$

7. Обчисліть границю

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( 2 - 3^{\sin^2 x} \right)^{\frac{1}{\ln \cos x}}.$$

8. Обчисліть границі, використовуючи еквівалентність нескінченно малих.

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sin \pi(x+2)};$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{1-\sqrt{x^2+1}};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 64}{\operatorname{tg}(x-4)}.$$

**9.** Дослідіть функцію на неперервність і побудуйте графік:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 2^x, & 0 < x \leq 2, \\ x+3, & x > 2. \end{cases}$$

**10.** Дослідіть функцію на неперервність у вказаних точках:

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}; \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2.$$

**11.** Знайдіть похідну функцій:

$$\text{а) } y = \log_2 \sin(2x + \pi);$$

$$\text{б) } y = (\arccos x)^{\cos x};$$

$$\text{в) } \begin{cases} x = e^t, \\ y = e^{2t}, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

**12.** Знайдіть  $y'$  і  $y''$ :

$$\text{а) } xy - 6 = \cos y.$$

$$\text{б) } \begin{cases} x = \sin 2t, \\ y = \cos^2 t. \end{cases}$$

**13.** Для даної функції  $y$  і аргументу  $x_0$  обчисліть

$$y'''(x_0): \quad y = \cos^2 x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}.$$

**14.** Запишіть формулу для похідної  $n$ -го порядку функції

$$y = 10^x.$$

**15.** Обчисліть границі, використовуючи правило Лопіталя:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 2 \operatorname{tg} x}{1 + \cos 4x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x);$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}.$$

**16.** З'ясуйте, в якій точці кривої  $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 7x + 9$

дотична утворює з віссю  $Ox$  кут  $-\frac{\pi}{4}$ .

**17.** Доведіть, що лінія  $y = 2x^3 + x^5 + x + 10$  в усіх своїх точках нахилена до осі  $Ox$  під гострим кутом.

**18.** Проведіть повне дослідження функцій та побудуйте їх графіки

$$\text{а) } y = \frac{x^3}{9 - x^3};$$

$$\text{б) } y = (x-1)e^{3x+1};$$

$$\text{в) } y = \frac{x^4}{x^3 - 1}.$$

**19.** Знайдіть найменше і найбільше значення функції  $y = x \ln x$  на відрізку  $[\frac{1}{e^2}; 1]$ .

## Варіант 20

1. Знайдіть  
визначення

$$y = \sqrt{\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x - 4}}.$$

2. Доведіть, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2-3n} = -\frac{2}{3}.$$

3. Обчисліть  
послідовності

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n+2)^3}{(3n+2)^2 + (4n+1)^2};$

б)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n^2+1)(n^2+3)} - \sqrt{n^4+2}}{\sqrt{n}}.$$

4. Обчисліть границі

а)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 + 2x + 1};$

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+x} - \sqrt[3]{27-x}}{\sqrt[5]{x} + \sqrt[3]{x^2}};$

в)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 3x + 2}{x^2 - x - 12};$

г)  $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - x - 30}{x^3 + 125};$

д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 2}{6x^2 + 5x + 1};$

е)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x - 7}{x^4 - 2x^3 + 1};$

область  
функції

границю

ж)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 + 5x}{2x^2 - 3x - 7};$

з)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{x^2 + 4}}{3x^2};$

і)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^{3-2x};$

ї)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x+5}{x-10}\right)^{5x};$

к)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin 2x} - \frac{1}{\operatorname{tg} 2x}\right).$

5. Порівняйте нескінченно малі функції  $\alpha(x)$  і  $\beta(x)$ :

$$\alpha(x) = \operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}; \quad \beta(x) = \frac{1}{x} \quad (x \rightarrow +\infty).$$

6. Доведіть, що функції  $f(x)$  і  $\varphi(x)$  при  $x \rightarrow 0$  є нескінченно малими одного порядку малості

$$f(x) = \sin 7x + \sin x, \quad \varphi(x) = 4x.$$

7. Обчисліть границю

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos 3x)^{\sec x}.$$

8. Обчисліть границі, використовуючи еквівалентність нескінченно малих.

а)  $\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{(x-2\pi)^2}{\operatorname{tg}(\cos x - 1)};$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2^{\cos^2 x} - 1}{\ln \sin x}.$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{3x^2}.$$

**9.** Дослідіть функцію на неперервність і побудуйте графік:

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2, & x \leq -2, \\ x^3, & -2 < x \leq 1, \\ 2, & x > 1. \end{cases}$$

**10.** Дослідіть функцію на неперервність у вказаних точках:

$$f(x) = 2^{\frac{3}{x+2}} + 1; \quad x_1 = -2, \quad x_2 = -1.$$

**11.** Знайдіть похідну функцій:

$$\text{а) } y = \operatorname{arctg}(\operatorname{th} 3x);$$

$$\text{б) } y = (\ln 3x)^{\operatorname{sh} x};$$

$$\text{в) } \begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

**12.** Знайдіть  $y'$  і  $y''$ :

$$\text{а) } 3y = 7 + xy^3;$$

$$\text{б) } \begin{cases} x = e^{3t}, \\ y = e^{-3t}. \end{cases}$$

**13.** Для даної функції  $y$  і аргументу  $x_0$  обчисліть  $y'''(x_0)$ :  $y = \ln(x^2 - 4)$ ,  $x_0 = 3$ .

**14.** Запишіть формулу для похідної  $n$ -го порядку функції

$$y = 7^x.$$

**15.** Обчисліть границі, використовуючи правило Лопіталя:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin mx)}{\ln(\sin x)};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2} \right);$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2 \sin^2 x - 1}.$$

**16.** Визначить, у яких точках кривої  $y = \frac{x^3}{3} - 5 \frac{x^2}{2} + 7x + 4$

дотична утворює з віссю  $Ox$  кут  $\frac{\pi}{4}$ .

**17.** Складіть рівняння дотичної та нормалі до гіперболи  $y = \frac{1}{x}$

у точці  $x = -\frac{1}{2}$ .

**18.** Проведіть повне дослідження функцій та побудуйте їх графіки

$$\text{а) } y = \frac{2}{x^2 + 2x};$$

$$\text{б) } y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1};$$

$$\text{в) } y = \ln(x^2 - 2x + 6).$$

**19.** Знайдіть найменше і найбільше значення функції  $y = x^3 e^{x+1}$  на відрізку  $[-4; 0]$ .

## Варіант 21

1. Знайдіть область визначення

$$\text{функції } y = \sqrt{\log_{0,5} \log_2 |x-2|}.$$

2. Доведіть, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2n^2}{2+4n^2} = -\frac{1}{2}.$$

3. Обчисліть границю послідовності

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - (n-1)^3}{(n+1)^4 - n^4};$$

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{(n^2+1)(n^2+2)} - \sqrt{(n^2-1)(n^2-2)} \right).$$

4. Обчисліть границі

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x - 2}{x - 2};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 1/4} \frac{\sqrt[3]{x/16} - 1/4}{\sqrt{1/4 + x} - \sqrt{2x}}.$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 9x + 10}{x^2 + 3x - 10};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 3x - 28}{x^3 - 64};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + 4x}{x^3 - 3x^2 + 2};$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x^5 - 4x^3 + 3}{2x^3 + x - 7};$$

$$\text{ж) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 5x + 3}{3x^4 - 2x^2 + x};$$

$$\text{з) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{\sqrt{x^2 + 16} - 4};$$

$$\text{і) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2-3x}{5-3x} \right)^x;$$

$$\text{ї) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{3x+7}{x+4} \right)^{4x};$$

$$\text{к) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos^2 2x}{x^2}.$$

5. Порівняйте нескінченно малі функції  $\alpha(x)$  і  $\beta(x)$ :

$$\alpha(x) = x^2 \sin(1/x);$$

$$\beta(x) = x - \sqrt{x} \quad (x \rightarrow 0).$$

6. Доведіть, що функції  $f(x)$  і  $\varphi(x)$  при  $x \rightarrow 0$  є нескінченно малими одного порядку малості  $f(x) = \sqrt{4+x} + 2$ ,  $\varphi(x) = 3x$ .

7. Обчисліть границю

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( 6 - \frac{5}{\cos x} \right)^{\text{ctg}^2 x}.$$

8. Обчисліть границі, використовуючи еквівалентність нескінченно малих.

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\cos 7x - \cos 3x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(e^{\pi x} - 1)}{3(\sqrt[3]{1+x} - 1)};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4x^2)}{2x^3}.$$

**9.** Дослідіть функцію на неперервність і побудуйте графік:

$$f(x) = \begin{cases} 3x+4, & x \leq -1, \\ x^2-2, & -1 < x < 2, \\ x, & x \geq 2. \end{cases}$$

**10.** Дослідіть функцію на неперервність у вказаних точках:

$$f(x) = 4^{\frac{3}{x-2}} + 2; \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 3.$$

**11.** Знайдіть похідну функцій:

$$а) y = \sqrt{4-x^2} \arcsin 4x;$$

$$б) y = x^{\ln x};$$

$$в) \begin{cases} x = 2t, \\ y = \sin 2t, \end{cases} \quad t \in (0, \infty).$$

**12.** Знайдіть  $y'$  і  $y''$ :

$$а) y^2 = x + \ln\left(\frac{y}{x}\right).$$

$$б) \begin{cases} x = \frac{\ln t}{t}, \\ y = t^2 \ln t. \end{cases}$$

**13.** Для даної функції  $y$  і аргументу  $x_0$  обчисліть

$$y'''(x_0): \quad y = x^2 \cos x, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}.$$

**14.** Запишіть формулу для похідної  $n$ -го порядку функції  $y = \cos 3x$ .

**15.** Обчисліть границі, використовуючи правило Лопіталя:

$$а) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 5x};$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^{2x}) \operatorname{ctg} x;$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right).$$

**16.** Знайдіть точки на кривій  $y = \frac{x^3}{3} - 9\frac{x^2}{2} + 20x - 7$ , у яких дотичні паралельні до осі  $Ox$ .

**17.** У яких точках лінії  $y = x^3 + x - 2$  дотична до неї паралельна прямій  $y = 4x - 1$ ?

**18.** Проведіть повне дослідження функцій та побудуйте їх графіки

$$а) y = (x+1)e^{\frac{(x+1)^2}{2}};$$

$$б) y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$$

$$в) y = \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right).$$

**19.** Знайдіть найменше і найбільше значення функції

$$y = x^2 - 2x + \frac{2}{(x-1)} \quad \text{на}$$

відрізка  $[-1; 3]$ .

## Варіант 22

1. Знайдіть область визначення

$$\text{функції } y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \left( \frac{x}{x+1} \right)^2} - 1.$$

2. Доведіть, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 - 3}{n^3 + 1} = 4.$$

3. Обчисліть границю послідовності

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^3 - (2n+3)^3}{(2n+1)^2 + (2n+3)^2};$

б)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n^5+1)(n^2-1)} - n\sqrt{(n^4+n)}}{n}$$

4. Обчисліть границі

а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1};$

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{x}};$

в)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 + x - 5}{x^2 - 2x + 1};$

г)  $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{8x^2 - 2}{x^2 - 1/4};$

д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 4x - x^4}{x + 3x^2 + 2x^4};$

е)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 7x + 1}{x^3 + 4x^2 - 3};$

ж)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5 - x^3}{4x^2 + 3x - 6};$

з)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x+x}};$

і)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1-x}{2-x} \right)^{3x};$

ї)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{4x+5} \right)^{3x};$

к)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{x^2 - x}.$

5. Порівняйте нескінченно малі функції  $\alpha(x)$  і  $\beta(x)$ :

$$\alpha(x) = \operatorname{arcctg}(1/x); \quad \beta(x) = x \quad (x \rightarrow 0).$$

6. Доведіть, що функції  $f(x)$  і  $\varphi(x)$  при  $x \rightarrow 0$  є нескінченно малими одного порядку малості  $f(x) = \sin(x^2 - 2x)$ ,  $\varphi(x) = x^4 - 8x$ .

7. Обчисліть границю

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{3x-1}{x+1} \right)^{\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}}.$$

8. Обчисліть границі, використовуючи еквівалентність нескінченно малих.

а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 - \sqrt{10-x}}{\sin 3\pi x};$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(2x-5)}{e^{\sin \pi x} - 1};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 5x}{\operatorname{tg} 2x}.$$

**9.** Дослідіть функцію на неперервність і побудуйте графік:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1, \\ (x-2)^2, & 1 < x < 3, \\ -x+6, & x \geq 3. \end{cases}$$

**10.** Дослідіть функцію на неперервність у вказаних точках:

$$f(x) = 3^{\frac{2}{x+1}} - 2; \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 0.$$

**11.** Знайдіть похідну функцій:

$$\text{а) } y = \ln \sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}};$$

$$\text{б) } y = (\ln x)^{\operatorname{tg} x};$$

$$\text{в) } \begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \ln(1+t^2), \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

**12.** Знайдіть  $y'$  і  $y''$ :

$$\text{а) } xy^2 - y^3 = 4x - 5;$$

$$\text{б) } \begin{cases} x = \arccos t, \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$$

**13.** Для даної функції  $y$  і аргументу  $x_0$  обчисліть

$$y'''(x_0): \quad y = x \arccos x, \quad x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

**14.** Запишіть формулу для похідної  $n$ -го порядку функції

$$y = \frac{x}{x+5}.$$

**15.** Обчисліть границі, використовуючи правило Лопіталя:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \operatorname{ctg} x;$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x\sqrt{1-x^2}};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-0.01x}.$$

**16.** Знайдіть точку на кривій

$$y = \frac{x^4}{4} - 7, \quad \text{дотична у якій}$$

паралельна прямій  $y = 8x - 4$ .

**17.** Складіть рівняння тієї нормалі до параболи  $y = x^2 - 6x + 6$ , що перпендикулярна до прямої, яка з'єднує початок координат з вершиною параболи.

**18.** Проведіть повне дослідження функцій та побудуйте їх графіки

$$\text{а) } y = \frac{e^{x+1}}{x+1};$$

$$\text{б) } y = \frac{x^5}{x^4 - 1};$$

$$\text{в) } y = x^2 \ln x + 1.$$

**19.** Знайдіть найменше і найбільше значення функції

$$y = (x+1)\sqrt[3]{x^2} \quad \text{на відрізку}$$

$$\left[ \frac{-4}{5}; 3 \right].$$

## Варіант 23

1. Знайдіть  
визначення функції

$$y = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}} \frac{x-2}{x+3}}.$$

2. Доведіть, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 1}{5n^2 + 1} = \frac{3}{5}.$$

3. Обчисліть  
послідовності

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^3 - (n-2)^3}{(n+5)^2 + (n-5)^2};$

б)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n^4 + 1)(n^2 - 1)} - \sqrt{n^6 - 1}}{n}.$$

4. Обчисліть границі

а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{2x^4 - x^2 - 1};$

б)  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{\sqrt[3]{x/9} - 1/3}{\sqrt{1/3 + x} - \sqrt{2x}};$

в)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-5x^2 + 11x - 2}{3x^3 - x - 10};$

г)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 3x - 28}{x^2 - 4x};$

д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 7x^2 - 2}{6x^3 - 4x + 3};$

е)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^4 - 2x^3 + 3}{2x^2 + 3x - 7};$

область

границю

ж)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+1}{x^3 - 5x^2 + 4x};$

з)  $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{2x+7} - 5}{3 - \sqrt{x}};$

і)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x-1}{4x+1} \right)^{2x};$

ї)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{5x-7}{x+6} \right)^{2x};$

к)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 2x}{x \arcsin x}.$

5. Порівняйте нескінченно  
малі функції  $\alpha(x)$  і  $\beta(x)$ :

$$\alpha(x) = \frac{x^3 - 8}{\sqrt{x}}; \quad \beta(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$$

( $x \rightarrow 2$ ).

6. Доведіть, що функції  $f(x)$  і  
 $\varphi(x)$  при  $x \rightarrow 0$  є нескінченно  
малими одного порядку малості

$$f(x) = \frac{2x}{(3-x)}, \quad \varphi(x) = 2x - x^2.$$

7. Обчисліть границю

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( 3 - \frac{2}{\cos x} \right)^{\operatorname{cosec}^2 x}.$$

8. Обчисліть границі,  
використовуючи  
еквівалентність нескінченно  
малих.

а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos \pi x}{\operatorname{tg}^2 \pi x};$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5(x + \pi)}{e^{3x} - 1}.$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\ln(1 + 2x)}.$$

**9.** Дослідіть функцію на неперервність і побудуйте графік:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 1, \\ x^2 + 2, & 1 \leq x \leq 2, \\ -2x, & x > 2. \end{cases}$$

**10.** Дослідіть функцію на неперервність у вказаних точках:

$$f(x) = 5^{\frac{3}{x+4}} + 1; \quad x_1 = -5, \quad x_2 = -4.$$

**11.** Знайдіть похідну функцій:

$$\text{а) } y = \ln\left(x + \sqrt[3]{x + \sqrt{x}}\right);$$

$$\text{б) } y = x^{\text{ch } x};$$

$$\text{в) } \begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t, \end{cases} \quad t \in (0, 2\pi).$$

**12.** Знайдіть  $y'$  і  $y''$ :

$$\text{а) } x^2 y^2 + x = 5y;$$

$$\text{б) } \begin{cases} x = \frac{1}{t+1}, \\ y = \left(\frac{t}{t+1}\right)^2. \end{cases}$$

**13.** Для даної функції  $y$  і аргументу  $x_0$  обчисліть  $y'''(x_0)$ :  $y = \ln^3 x$ ,  $x_0 = 1$ .

**14.** Запишіть формулу для похідної  $n$ -го порядку функції  $y = \ln(3x - 5)$ .

**15.** Обчисліть границі, використовуючи правило Лопіталя:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right);$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^3} - 1 - x^3}{\sin^2 2x};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + xe^x)}{\ln(x + \sqrt{1 + x^2})}.$$

**16.** Знайдіть точку на кривій  $y^2 = -3x^2 + 4x + 7$ , дотична в якій перпендикулярна до прямої  $x + 20y + 5 = 0$ .

**17.** Під яким кутом графік функції  $y = e^{\frac{x}{2}}$  перетинає пряму  $x = 2$ ?

**18.** Проведіть повне дослідження функцій та побудуйте їх графіки

$$\text{а) } y = \frac{e^{\frac{1}{1-x}}}{x-1}; \quad \text{б) } y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$$

$$\text{в) } y = x - \ln(1 + x^2).$$

**19.** Знайдіть найменше і найбільше значення функції  $y = e^{6x-x^2}$  на відрізку  $[-3;3]$ .

## Варіант 24

1. Знайдіть область визначення функції

$$y = \sqrt[4]{\frac{x^2 - 6x - 16}{x^2 - 12x + 11}} + \sqrt{x^2 - 49}.$$

2. Доведіть, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + 1}{10n^2 - 3} = \frac{1}{2}.$$

3. Обчисліть границю послідовності

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^3 + (n-1)^3};$

б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n - \sqrt{n(n-1)} \right).$

4. Обчисліть границі

а)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 3x + 2}{x^3 + 2x^2 - x - 2};$

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8 - x^2} - 2}{\sqrt[3]{x^2 + x^3}};$

в)  $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 5x - 14}{2x^2 - 9x - 35};$

г)  $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{3x^2 + 11x + 10}{x^2 - 5x - 14};$

д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 14x^2}{1 + 2x + 7x^2};$

е)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 - x^2 - 7}{2x^2 - 5x + 3};$

ж)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - x - 3x^2}{x^3 - 16};$

з)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{\sqrt{6x+1} - 5};$

і)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x+4}{3x} \right)^{-2x};$

ї)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3-4x}{2-x} \right)^{6x};$

к)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x \sin x}.$

5. Порівняйте нескінченно малі функції  $\alpha(x)$  і  $\beta(x)$ :

$$\alpha(x) = \frac{\arcsin(x-2)}{x};$$

$$\beta(x) = x^3 - 8 \quad (x \rightarrow 2).$$

6. Доведіть, що функції  $f(x)$  і  $\varphi(x)$  при  $x \rightarrow 0$  є нескінченно малими одного порядку малості

$$f(x) = \frac{x^2}{7+x}, \quad \varphi(x) = 3x^3 - x^2.$$

7. Обчисліть границю

$$\lim_{x \rightarrow 1} (3 - 2x)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}.$$

8. Обчисліть границі, використовуючи еквівалентність нескінченно малих.

а)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin 2x}{(\pi - 4x)^2};$

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{x+1} - 3}{\ln(1 + x\sqrt{1 + xe^x})};$

$$в) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 8x}{\operatorname{tg} 4x}.$$

**9.** Дослідіть функцію на неперервність і побудуйте графік:

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x < -1, \\ x-1, & -1 \leq x \leq 3, \\ -x+5, & x > 3. \end{cases}$$

**10.** Дослідіть функцію на неперервність у вказаних точках:

$$f(x) = \frac{x-4}{x+2}; \quad x_1 = -2, \quad x_2 = -1.$$

**11.** Знайдіть похідну функцій:

$$а) y = \operatorname{lnch} x + \frac{1}{2 \operatorname{ch}^2 x};$$

$$б) y = (\operatorname{arctg} x)^{\operatorname{ln} x};$$

$$в) \begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \ln(1-t^2), \end{cases} \quad t \in (-1, 1).$$

**12.** Знайдіть  $y'$  і  $y''$ :

$$а) x^4 + x^2 y^2 + y = 4;$$

$$б) \begin{cases} x = 5 \sin^3 t, \\ y = 3 \cos^3 t. \end{cases}$$

**13.** Для даної функції  $y$  і аргументу  $x_0$  обчисліть  $y'''(x_0)$ :

$$y = (x+1) \ln(x+1), \quad x_0 = \frac{-1}{2}.$$

**14.** Запишіть формулу для похідної  $n$ -го порядку функції

$$y = \ln \frac{1}{4-x}.$$

**15.** Обчисліть границі, використовуючи правило Лопіталя:

$$а) \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{3}{x};$$

$$б) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{a\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{\sin bx}};$$

$$в) \lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^{\log_2 x}.$$

**16.** Знайдіть точку на криві

$$y = 3x^2 - 4x + 6, \quad \text{дотична в якій паралельна прямій } 8x - y - 5 = 0.$$

**17.** Складіть рівняння тієї дотичної до лінії  $y = x \ln x$ , що паралельна прямій  $2x - 2y + 3 = 0$ .

**18.** Проведіть повне дослідження функцій та побудуйте їх графіки

$$а) y = 2 \ln \frac{x}{x-4} - 3;$$

$$б) y = \frac{1}{3} \sqrt[3]{x^2} (x-5);$$

$$в) y = \frac{x^3}{x^4 - 1}.$$

**19.** Знайдіть найменше і найбільше значення функції

$$y = \frac{\ln x}{x} \quad \text{на відрізку } [1; 4].$$

## Варіант 25

1. Знайдіть  
визначення функції

$$y = \sqrt{5 - x - \frac{4}{x}}.$$

2. Доведіть, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - 2n^3}{3 + 4n^3} = -\frac{1}{2}.$$

3. Обчисліть  
послідовності

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+n)^3 - (n-1)^3}{(1+n)^2 + (n-1)^2};$

б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt[3]{n^8 + 4n^2} - \sqrt[3]{n^8 - 1} \right) n^3.$

4. Обчисліть границі

а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2};$

б)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{\sqrt[3]{x^3 + 8}};$

в)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 6x + 45}{2x^2 - 3x - 35};$

г)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{3x^2 + x - 10};$

д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2x^2 + x^4}{2 + 3x^2 + x^4};$

е)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 + 2x^2 - 8}{8x^3 - 4x + 5};$

ж)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 10x + 7}{2x^3 - 3x};$

область

з)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{\sqrt{3x} - x};$

і)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-1}{2x+4} \right)^{-x};$

ї)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1-2x}{3-x} \right)^{-x};$

к)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos x}{4x^2}.$

5. Порівняйте  
малі функції  $\alpha(x)$  і  $\beta(x)$ :

$$\alpha(x) = x + 2x^2 - \sqrt[3]{x};$$

$$\beta(x) = 1 - \sqrt{1-x} \quad (x \rightarrow 0).$$

6. Доведіть, що функції  $f(x)$  і  $\varphi(x)$  при  $x \rightarrow 0$  є нескінченно малими одного порядку малості  $f(x) = \sin(x^2 + 5x)$ ,  $\varphi(x) = x^3 - 25x$ .

7. Обчисліть границю

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 + x^{3^x}}{1 + x^{7^x}} \right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}}.$$

8. Обчисліть  
використовуючи  
еквівалентність  
нескінченно  
малих.

а)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x^2 - \pi^2}{\sin x};$

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 (e^x - e^{-x})}{e^{x^3} - 1};$

$$в) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{\operatorname{tg} 2x}.$$

**9.** Дослідіть функцію на неперервність і побудуйте графік:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < -2, \\ -x + 1, & -2 \leq x \leq 1, \\ x^2 - 1, & x > 1. \end{cases}$$

**10.** Дослідіть функцію на неперервність у вказаних точках:

$$f(x) = \frac{x-4}{x+3}; \quad x_1 = -3, \quad x_2 = -2.$$

**11.** Знайдіть похідну функцій:

а)  $y = \operatorname{tg} \ln(\cos 7x + 3);$

б)  $y = (\operatorname{ch} x)^{x^{-1}};$

в)  $\begin{cases} x = at \cos t, \\ y = at \sin t, \end{cases} \quad t \in R.$

**12.** Знайдіть  $y'$  і  $y''$ :

а)  $\sin y = xy^2 + 5;$

б)  $\begin{cases} x = e^{-3t}, \\ y = e^{8t}. \end{cases}$

**13.** Для даної функції  $y$  і аргументу  $x_0$  обчисліть

$$y'''(x_0): \quad y = 2^{x^2}, \quad x_0 = 1.$$

**14.** Запишіть формулу для похідної  $n$ -го порядку функції  $y = \sqrt{x+7}.$

**15.** Обчисліть границі, використовуючи правило Лопіталя:

а)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{1+2x+1}}{\sqrt{2+x+x}};$

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x - e^{-x}};$

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{4}{x^2}} - 1}{2 \operatorname{arctg} x^2 - \pi}.$

**16.** Знайдіть точку на кривій  $y = 5x^2 - 4x + 1$ , у якій дотична перпендикулярна до прямої  $x + 6y + 15 = 0.$

**17.** Через точки з абсцисами  $x_1 = 1$  і  $x_2 = 3$  параболи  $y = x^2$  проведено січну. У якій точці параболи дотична до неї буде паралельна цій січній?

**18.** Проведіть повне дослідження функцій та побудуйте їх графіки

а)  $y = \frac{4-x^3}{x^2};$

б)  $y = 1 - \ln^3 x;$

в)  $y = (x-1)e^{4x+2}.$

**19.** Знайдіть найменше і найбільше значення функції  $y = 3x^4 - 16x^3 + 2$  на відрізку  $[-3; 1].$



## Варіант 26

1. Знайдіть

визначення функції

$$y = \sqrt{\log_3 \log_6 \frac{x^2 + x}{x + 4}}.$$

2. Доведіть, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - 4n^2}{2 - 3n^2} = \frac{4}{3}.$$

3. Обчисліть

послідовності

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+2)^3 - (n+3)^3};$

б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n\sqrt{n} - \sqrt{n(n+1)(n+2)} \right).$

4. Обчисліть границі .

а)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 + 4x^2 + 3x};$

б)  $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2};$

в)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^2 + 3x + 15}{x^2 - 6x - 27};$

г)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + x - 4}{4x^2 - 5x + 1};$

д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2x^2 - 7}{3x^2 + 3x + 5};$

е)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 2x - 4}{3x^2 - 4x + 1};$

ж)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 3x + 1}{x^5 + x^3};$

область

границю

з)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x^2} - 1}{x^3 + x^2};$

і)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x+4}{3x+5} \right)^{x+1};$

ї)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{4+3x}{5+x} \right)^{7x};$

к)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x + \sin x}{\arcsin x}.$

5. Порівняйте нескінченно малі функції  $\alpha(x)$  і  $\beta(x)$ :

$$\alpha(x) = x^2 + 5x + 4;$$

$$\beta(x) = x^2 + 3x + 2 \quad (x \rightarrow -1).$$

6. Доведіть, що функції  $f(x)$  і  $\varphi(x)$  при  $x \rightarrow 0$  є нескінченно малими одного порядку малості

$$f(x) = \cos x - \cos^3 x, \quad \varphi(x) = 6x^2.$$

7. Обчисліть границю

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 + \operatorname{tg} x \cos 2x}{1 + \operatorname{tg} x \cos 5x} \right)^{1/x^3}.$$

8. Обчисліть границі, використовуючи еквівалентність нескінченно малих.

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \sin x - \cos 2x}{\sin^2 x};$

б)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\ln \sin 3x}{(6x - \pi)^2}.$

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4x)}{\sin 2x}.$

**9.** Дослідіть функцію на неперервність і побудуйте графік:

$$f(x) = \begin{cases} x + 3, & x \leq 0, \\ -x^2 + 4, & 0 < x < 2, \\ x - 2, & x \geq 2. \end{cases}$$

**10.** Дослідіть функцію на неперервність у вказаних точках:

$$f(x) = \frac{x+5}{x-3}; x_1 = 3, x_2 = 4.$$

**11.** Знайдіть похідну функцій:

а)  $y = \frac{\arccos 7x}{\sqrt{1-x}};$

б)  $y = (\cos 2x)^{\sin 3x};$

в)  $\begin{cases} x = t \ln t; \\ y = \frac{\ln t}{t}, \end{cases} t \in (0, \infty).$

**12.** Знайдіть  $y'$  і  $y''$ :

а)  $x^3 + y^3 = 5x;$

б)  $\begin{cases} x = \sqrt[3]{(t-1)^2}, \\ y = \sqrt{t-1}. \end{cases}$

**13.** Для даної функції  $y$  і аргументу  $x_0$  обчисліть  $y'''(x_0)$ :  $y = (4x-3)^5, x_0 = 1.$

**14.** Запишіть формулу для похідної  $n$ -го порядку функції  $y = xe^{6x}.$

**15.** Обчисліть границі, використовуючи правило Лопіталя:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3};$

б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^5};$

в)  $\lim_{x \rightarrow 1/2} \ln 2x \ln(2x-1).$

**16.** Знайдіть точку на кривій  $y = x^3 - 5x - 11,$  у якій дотична паралельна до прямої  $x - y + 10 = 0.$

**17.** Складіть рівняння нормалі до лінії  $y = \frac{1}{x}$  у точці її перетину з бісектрисою першого координатного кута.

**18.** Проведіть повне дослідження функцій та побудуйте їх графіки

а)  $y = \frac{4x^2}{x^2 + 3};$

б)  $y = \frac{e^{2x} + 1}{e^x};$

в)  $y = \frac{2x^2 + 2 + 4x}{2 - x}.$

**19.** Знайдіть найменше і найбільше значення функції  $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$  на відрізьку  $[-1; 2].$

## Варіант 27

1. Знайдіть область визначення функції

$$y = \sqrt{\log_{0,3}^2(x-2) - 1}.$$

2. Доведіть, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3n^2}{6 - 2n^2} = -\frac{3}{2}.$$

3. Обчисліть границю послідовності

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2+n)^3 - (n-2)^3}{n^4 + 2n^2 - 1};$

б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n} \left( \sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{n^2 - n} \right).$

4. Обчисліть границі

а)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^4 + 2x + 1};$

б)  $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{10 - x - 6\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{x} + 2};$

в)  $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 2x - 35}{2x^2 + 11x + 5};$

г)  $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{2x^2 - 11x - 6}{3x^2 - 20x + 12};$

д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - 5x^2 - 3x^5}{x^5 + 6x + 8};$

е)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^3 - 2x + 4}{2x^2 + x - 5};$

ж)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 13}{x^7 - 3x^5 - x};$

з)  $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+20} - 4}{x^3 + 64};$

і)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1+2x}{3+2x} \right)^{-x};$

ї)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{3x-1}{2x+5} \right)^{3x};$

к)  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2}.$

5. Порівняйте нескінченно малі функції  $\alpha(x)$  і  $\beta(x)$ :

$$\alpha(x) = \operatorname{ctg} x; \quad \beta(x) = \pi - 2x \quad (x \rightarrow \pi/2).$$

6. Доведіть, що функції  $f(x)$  і  $\varphi(x)$  при  $x \rightarrow 0$  є нескінченно малими одного порядку малості  $f(x) = \arcsin 2x$ ,  $\varphi(x) = 8x$ .

7. Обчисліть границю

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left( 2e^{\frac{3x+2}{x-2}} - 1 \right).$$

8. Обчисліть границі, використовуючи еквівалентність нескінченно малих.

а)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(9 - 2x^2)}{\sin 2\pi x};$

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(e^{\pi x} - 1)}{3(\sqrt[3]{1+x} - 1)};$

в)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x-3)}{x^3 - 27}.$

**9.** Дослідіть функцію на неперервність і побудуйте графік:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ x^2 - 1, & -1 < x \leq 2, \\ 2x, & x > 2. \end{cases}$$

**10.** Дослідіть функцію на неперервність у вказаних точках:

$$f(x) = 3^{\frac{4}{1-x}} + 1; \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2.$$

**11.** Знайдіть похідну функцій:

а)  $y = \sin 3 \cos^2 x$ ;    б)  $y = x^{x^x}$ ;

в) 
$$\begin{cases} x = \sqrt{1 - \sqrt[3]{t}}, \\ y = \sqrt[3]{1 - \sqrt{t}}, \end{cases} \quad 0 < t < 1.$$

**12.** Знайдіть  $y'$  і  $y''$ :

а)  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{7}$ ;

б) 
$$\begin{cases} x = \ln^2 t, \\ y = t + \ln t. \end{cases}$$

**13.** Для даної функції  $y$  і аргументу  $x_0$  обчисліть  $y'''(x_0)$ :  $y = x \operatorname{arcsctg} x$ ,  $x_0 = 2$ .

**14.** Запишіть формулу для похідної  $n$ -го порядку функції

$$y = \frac{4}{x+3}.$$

**15.** Обчисліть границі, використовуючи правило Лопіталя:

а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1 - \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+7)}{\sqrt[7]{x-3}}$ ;

в)  $\lim_{x \rightarrow 1/2} \left( \frac{x}{3x-1} - \frac{1}{\ln 3x} \right)$ .

**16.** На кривій  $y = -x^2 + 7x + 16$  знайдіть точку, в якій дотична паралельна до прямої  $y = 3x + 4$ .

**17.** Доведіть, що лінія  $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = t^3 \end{cases}$

нахилена до осі  $Ox$  під гострим кутом в усіх своїх точках.

**18.** Проведіть повне дослідження функцій та побудуйте їх графіки

а)  $y = x^3 e^{x+1}$ ;

б)  $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$ ;

в)  $y = -x \ln^2 x$ .

**19.** Знайдіть найменше і найбільше значення функції  $y = (3-x)e^{-x}$  на відрізку  $[0;5]$ .

## Варіант 28

1. Знайдіть область визначення функції

$$y = \sqrt{\frac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{x - 2}}.$$

2. Доведіть, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 3}{3n^3 + 5} = \frac{2}{3}.$$

3. Обчисліть границю послідовності

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 + (n-1)^3}{n^3 - 3n}$ ;

б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+2} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n-4})$ .

4. Обчисліть границі  $\left[ \frac{0}{0} \right]$ .

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - (1-3x)}{x^5 - x^2}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{\sqrt[3]{x^3} + 8}$ ;

в)  $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{2x^2 + 15x - 8}{3x^2 + 25x + 8}$ ;

г)  $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{x^2 + 2x - 24}{2x^3 + 15x + 18}$ ;

д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 7x^2 + 3}{2 + 2x - x^3}$ ;

е)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 5x^2 - 3x}{3x^2 + x - 10}$ ;

ж)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^3 + 2x^2 + 5}$

з)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2}{\sqrt{6+x} - 3}$ ;

і)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x}{3x+2} \right)^{x-2}$ ;

ї)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1-x}{2-10x} \right)^{5x}$ ;

к)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x \sin x}$ .

5. Порівняйте нескінченно малі функції  $\alpha(x)$  і  $\beta(x)$ :

$$\alpha(x) = 1 - \sqrt{2} \cos x;$$

$$\beta(x) = 4x - \pi \quad (x \rightarrow \pi/4).$$

6. Доведіть, що функції  $f(x)$  і  $\varphi(x)$  при  $x \rightarrow 0$  є нескінченно малими одного порядку малості  $f(x) = 1 - \cos 4x$ ,  $\varphi(x) = x \sin 2x$ .

7. Обчисліть границю

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \operatorname{tg}^2 x \right)^{\frac{1}{\ln(3x^2+1)}}.$$

8. Обчисліть границі, використовуючи еквівалентність нескінченно малих.

а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 3} - 1}{\sin \pi x}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin 7\pi x}{\sin 8\pi x}$ ;

в)  $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{\operatorname{tg}(x+5)}{x^2 - 25}$ .

**9.** Дослідіть функцію на неперервність і побудуйте графік:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ \cos x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 1 - x, & x > \pi. \end{cases}$$

**10.** Дослідіть функцію на неперервність у вказаних точках:

$$f(x) = \frac{4x}{x+5}; \quad x_1 = -5, \quad x_2 = -4.$$

**11.** Знайдіть похідну функцій:

а)  $y = \sqrt{x^3 - \sqrt{x^2 + 1}}$ ;

б)  $y = (\operatorname{ctg} x)^x$ ;

в)  $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t + 2t^3, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

**12.** Знайдіть  $y'$  і  $y''$ :

а)  $y^2 = (x - y) / (x + y)$ ;

б)  $\begin{cases} x = \sqrt{t^2 - 1}, \\ y = \frac{t + 1}{\sqrt{t^2 - 1}}. \end{cases}$

**13.** Для даної функції  $y$  і аргументу  $x_0$  обчисліть  $y'''(x_0)$ :  $y = (7x - 4)^6$ ,  $x_0 = 1$ .

**14.** Запишіть формулу для похідної  $n$ -го порядку функції

$$y = \frac{1+x}{\sqrt{x}}.$$

**15.** Обчисліть границі, використовуючи правило Лопіталя:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{4x - \sin x}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{x}}{\operatorname{ctg}\left(\frac{5x}{2}\right)}$ ;

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \arcsin x \operatorname{ctg} x$ .

**16.** У якій точці кривої  $y = 4x^2 - 10x + 13$  дотична паралельна до прямої  $y = 6x - 7$ ?

**17.** Доведіть, що дотичні до гіперболи  $y = \frac{x-4}{x-2}$  у точках її перетину з осями координат паралельні.

**18.** Проведіть повне дослідження функцій та побудуйте їх графіки

а)  $y = x^2 + \frac{2}{x}$ ;

б)  $y = \frac{5x^4 + 3}{x}$ ;

в)  $y = x^2 - 2 \ln x$ .

**19.** Знайдіть найменше і найбільше значення функції

$y = \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos x$  на відрізку

$$\left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

## Варіант 29

1. Знайдіть

визначення функції

$$y = \sqrt{\frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{x^2 + 3x - 10}}.$$

2. Доведіть, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2}{4n^2 - 1} = \frac{3}{4}.$$

3. Обчисліть

послідовності

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 + (n-1)^3}{n^3 + 1};$

б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^4 + 3} - \sqrt{n^4 - 3}).$

4. Обчисліть границі

а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1};$

б)  $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{(\sqrt{x} - 4)^{2/3}};$

в)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 2x - 40}{x^2 - 3x - 4};$

г)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x - 4}{x^2 - 11x + 18};$

д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 2x + 1}{2x^3 + 3x^2 + 2};$

е)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 10x - 11}{3x^4 - 2x + 5};$

ж)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 81}{3x^2 + 4x + 2};$

область

границю

з)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x} - 3}{x^2 + x};$

і)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-1}\right)^{3-2x};$

ї)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3+x}{9x-4}\right)^{2x};$

к)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{\sin x + \sin 7x}.$

5. Порівняйте нескінченно малі функції  $\alpha(x)$  і  $\beta(x)$ :

$$\alpha(x) = 1 - 2 \cos x;$$

$$\beta(x) = (3x - \pi)^2 \quad (x \rightarrow \pi/3).$$

6. Доведіть, що функції  $f(x)$  і  $\varphi(x)$  при  $x \rightarrow 0$  є нескінченно малими одного порядку малості

$$f(x) = \sqrt{9-x} - 3, \quad \varphi(x) = 2x.$$

7. Обчисліть границю

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \ln \cos x)^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}}.$$

8. Обчисліть границі, використовуючи еквівалентність нескінченно малих.

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(x + \frac{5\pi}{2}\right) \operatorname{tg} x}{\arcsin 2x};$

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{\ln(1 + 2x)};$

$$в) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{2x^2}.$$

**9.** Дослідіть функцію на неперервність і побудуйте графік:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x < -1, \\ 1 - x, & -1 \leq x \leq 1, \\ \ln x, & x > 1. \end{cases}$$

**10.** Дослідіть функцію на неперервність у вказаних точках:

$$f(x) = 6^{\frac{2}{4-x}}; \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 4.$$

**11.** Знайдіть похідну функцій:

а)  $y = x \operatorname{arctg} \ln x;$

б)  $y = (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{arcsin} x};$

в)  $\begin{cases} x = e^t, \\ y = e^{2t}, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

**12.** Знайдіть  $y'$  і  $y''$ :

а)  $\sin^2(3x + y^2) = 5;$

б)  $\begin{cases} x = 6t^2 - 4, \\ y = 3t^5. \end{cases}$

**13.** Для даної функції  $y$  і аргументу  $x_0$  обчисліть

$$y'''(x_0): \quad y = x \sin 2x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}.$$

**14.** Запишіть формулу для похідної  $n$ -го порядку функції

$$y = \frac{1}{1+x}.$$

**15.** Обчисліть границі, використовуючи правило Лопіталя:

а)  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x};$

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos 2x) \operatorname{ctg} 4x;$

в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 e^{-x}).$

**16.** У якій точці кривої  $y = 7x^2 - 5x + 4$ , дотична перпендикулярна прямій  $23y + x - 1 = 0$ ?

**17.** Складіть рівняння дотичної та нормалі до кривої  $\begin{cases} x = 1 - t^2, \\ y = 1 - t^3 \end{cases}$

у точці, що відповідає параметру  $t = 2$ .

**18.** Проведіть повне дослідження функцій та побудуйте їх графіки

а)  $y = \frac{x^2}{2} - \ln x;$

б)  $y = \frac{4 - 2x}{1 - x^2};$

в)  $y = e^{\frac{1}{2-x}}.$

**19.** Знайдіть найменше і найбільше значення функції  $y = 108x - x^4$  на відрізку  $[-1; 4]$ .

## Варіант 30

1. Знайдіть область визначення функції

$$y = \sqrt{\log_2(x-1) - \log_2(x+1)}.$$

2. Доведіть, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - 3n^2}{4 + 5n^2} = -\frac{3}{5}.$$

3. Обчисліть границю послідовності

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2+n)^3 - (n-2)^3}{(n+3)^3};$

б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{(n^2+n)(n+2)} \times (\sqrt{n^3-3} - \sqrt{n^3-2}).$

4. Обчисліть границі

а)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 7x^2 + 15x + 9}{x^3 + 8x^2 + 21x + 18};$

б)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 16};$

в)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{3x^2 + 10x + 3};$

г)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 64}{7x^2 - 27x - 4};$

д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 3x + 1}{3x^2 + x - 5};$

е)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + 3x - 4}{2x^2 - 5x + 1};$

ж)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x + 4}{3x - 5x + 1};$

з)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{x^3 - 8};$

і)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4-2x}{1-2x} \right)^{x+1};$

ї)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x+5}{4x-2} \right)^{3x};$

к)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{5x^2}.$

5. Порівняйте нескінченно малі функції  $\alpha(x)$  і  $\beta(x)$ :

$$\alpha(x) = e^x; \quad \beta(x) = 2^{\sqrt[3]{x}} \quad (x \rightarrow -\infty).$$

6. Доведіть, що функції  $f(x)$  і  $\varphi(x)$  при  $x \rightarrow 0$  є нескінченно малими одного порядку малості

$$f(x) = \cos 3x - \cos 5x, \quad \varphi(x) = x^2.$$

7. Обчисліть границю

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 - \sin^2 \frac{x}{2} \right)^{\frac{1}{\ln(x^2+1)}}.$$

8. Обчисліть границі, використовуючи еквівалентність нескінченно малих.

а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{1 - \sqrt{x}};$

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(e^{\pi x} - 1)}{3 \ln(1 + \arcsin x)};$

в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+5x)}{\sin 3x}$ .

**9.** Дослідіть функцію на неперервність і побудуйте графік:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ x^3, & 0 < x \leq 2, \\ x + 4, & x > 2. \end{cases}$$

**10.** Дослідіть функцію на неперервність у вказаних точках:

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2}; \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 3.$$

**11.** Знайдіть похідну функцій:

а)  $y = e^{-x} \sin x$ ; б)  $y = \sqrt{x^{\cos x}}$ ;

в)  $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t, \end{cases} \quad t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

**12.** Знайдіть  $y'$  і  $y''$ :

а)  $\operatorname{ctg}^2(x+y) = 5x$ ;

б)  $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \ln t. \end{cases}$

**13.** Для даної функції  $y$  і аргументу  $x_0$  обчисліть  $y'''(x_0)$ :

$$y = \sin(x^3 + \pi), \quad x_0 = \sqrt[3]{\pi}.$$

**14.** Запишіть формулу для похідної  $n$ -го порядку функції  $y = \ln(5x-1)$ .

**15.** Обчисліть границі, використовуючи правило Лопітала:

а)  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sec^2 x - 2 \operatorname{tg} x}{1 + \cos 4x}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 \sin \frac{b}{x})$ ;

в)  $\lim_{x \rightarrow t} (x-1)^{x-1}$ .

**16.** У якій точці кривої  $y = \frac{x^2}{4} - 7x + 5$ , дотична паралельна до прямої  $y = 2x + 5$ ?

**17.** У якій точці кривої  $y = 2x^2$  дотична перпендикулярна до прямої  $4x - 3y + 2 = 0$ ?

**18.** Проведіть повне дослідження функцій та побудуйте їх графіки

а)  $y = xe^{2x} + 1$ ;

б)  $y = \frac{5x}{4-x^2}$ ;

в)  $y = \ln(4-x^2)$ .

**19.** Знайдіть найменше і найбільше значення функції

$$y = \frac{x^4}{4} - 6x^3 + 7 \quad \text{на відрізьку } [4; 6].$$

## Економічний зміст похідної

**20.1–20.10.** Деяка компанія визначила, що її функції прибутку і вартості є відповідно

$$R(x) = a \ln(x+1) \text{ і } C(x) = bx + c,$$

де  $x$  – ціна за одиницю продукції, що визначається в гривнях. Знайти таке значення  $x$ , що максимізує прибуток компанії  $P(x) = R(x) - C(x)$ . Чому дорівнює максимальний прибуток? За яких значень  $x$  прибуток зростає, а за яких спадає?

Для варіантів 1-10 дані наведено в табл. 1.

*Таблиця 1*

Вар і- ант	$a$	$b$	$c$	Вар і- ант	$a$	$b$	$c$
<b>1</b>	204	4	50	<b>6</b>	150	3	40
<b>2</b>	350	5	100	<b>7</b>	180	3	60
<b>3</b>	100	2	80	<b>8</b>	160	4	50
<b>4</b>	300	5	60	<b>9</b>	200	5	100
<b>5</b>	120	4	30	<b>10</b>	240	4	70

**20.11–20.20.** Деяка компанія підрахувала, що вартість виробництва  $x$  виробів визначається функцією  $C(x) = ae^{\frac{x}{b}}$ . Середня вартість визначена як  $\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$ . Знайдіть кількість виробів, за якої середня вартість буде мінімальною. Чому дорівнює мінімальна середня вартість? За якої кількості виробів середня вартість зростає, а за якої спадає?

Для варіантів 11-20 дані наведено в табл. 2.





Таблиця 2

варіант	$a$	$b$	варіант	$a$	$b$
<b>11</b>	20	5	<b>16</b>	35	7
<b>12</b>	45	15	<b>17</b>	40	8
<b>13</b>	40	10	<b>18</b>	30	5
<b>14</b>	30	6	<b>19</b>	15	3
<b>15</b>	25	10	<b>20</b>	20	7

**20.21–20.30.** Вартість виробництва деякого товару змінюється за законом

$$C(t) = a + b \cos\left(\frac{\pi t}{c}\right),$$

де  $C(t)$  вимірюється у тисячах гривень і  $t$  вимірюється в днях. У який день місяця ( $1 \leq t \leq 30$ ) вартість виробництва буде мінімальною? Чому вона дорівнює? У які дні місяця вартість виробництва буде зростати, а в які спадати?

Для варіантів 21-30 дані наведено в табл. 3.

Таблиця 3

варіант	$a$	$b$	$c$	варіант	$a$	$b$	$c$
<b>21</b>	40	18	15	<b>26</b>	65	42	25
<b>22</b>	45	22	20	<b>27</b>	70	47	15
<b>23</b>	50	27	25	<b>28</b>	75	53	20
<b>24</b>	55	31	15	<b>29</b>	80	58	25
<b>25</b>	60	35	20	<b>30</b>	85	62	15

**21.** Припустімо, що попит на кількість виробів описується функцією  $f(p) = a - bp^2$ ,  $0 < p < c$ , де  $p$  - ціна виробу. Знайдіть еластичність попиту  $E(p)$ . Для ціни визначить, чи є попит еластичним.

Таблиця 4

Варіант	$a$	$b$	$c$	$p_0$
---------	-----	-----	-----	-------

<b>1</b>	16	4	2	1
<b>2</b>	45	5	3	2
<b>3</b>	64	4	4	3
<b>4</b>	100	4	5	2
<b>5</b>	144	4	6	3
<b>6</b>	245	5	7	4
<b>7</b>	256	4	8	5
<b>8</b>	324	4	9	5
<b>9</b>	300	3	10	6
<b>10</b>	242	2	11	7
<b>11</b>	8	2	2	1
<b>12</b>	18	2	3	1
<b>13</b>	48	3	4	2
<b>14</b>	125	5	5	3
<b>15</b>	72	2	6	5
<b>16</b>	147	3	7	4
<b>17</b>	128	2	8	7
<b>18</b>	243	3	9	6
<b>19</b>	500	5	10	8
<b>20</b>	363	3	11	9
<b>21</b>	12	3	2	1
<b>22</b>	36	4	3	2
<b>23</b>	32	2	4	1
<b>24</b>	50	2	5	3
<b>25</b>	108	3	6	4
<b>26</b>	98	2	7	6
<b>27</b>	192	3	8	5
<b>28</b>	162	2	9	7
<b>29</b>	400	4	10	9
<b>30</b>	484	4	11	10