

## Індивідуальні завдання з теми «Інтегральне числення функцій однієї змінної»

### Варіант 1

Знайдіть невизначені інтеграли

1.  $\int \frac{2-3x}{x^2+2} dx.$
2.  $\int \sin^2(1-x) dx.$
3.  $\int \sin 3x \cos x dx.$
4.  $\int \frac{dx}{4x^2-5x+4}.$
5.  $\int \frac{dx}{\sqrt{4+8x-x^2}}.$
6.  $\int \frac{x+1}{2x^2+3x-4} dx.$
7.  $\int \frac{2x-13}{\sqrt{3x^2-3x-16}} dx.$
8.  $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} dx.$
9.  $\int \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x} dx.$
10.  $\int x^2 \cos 2x dx.$
11.  $\int \ln(x-5) dx.$
12.  $\int \operatorname{arctg} 2x dx.$
13.  $\int \frac{3x^2+20x+9}{(x^2+4x+3)(x+5)} dx.$
14.  $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2} dx.$

$$15. \int \frac{3x+13}{(x^2+2x+5)(x-1)} dx.$$

$$16. \int \frac{1-\sqrt{x+1}}{(1+\sqrt[3]{x+1})\sqrt{x+1}} dx.$$

$$17. \int \cos^4 3x \sin^2 3x dx.$$

Обчисліть визначені інтеграли.

$$18. \int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{1+x^2} dx.$$

$$19. \int_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}} dx.$$

20. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями

а)  $y = 2x^2 - 8x + 6,$   
 $y = x^2 - 3x;$

б)  $y = (x-2)^3, y = 4x - 8;$

в)  $\begin{cases} x = 4\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin^3 t; \end{cases}, x = 2,$   
 $x \geq 2;$

г)  $\rho = 4 \cos 3\varphi, \rho = 2, \rho \geq 2.$

21. Обчисліть довжину дуги кривої

а)  $y = \ln x, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{15};$

б)  $\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases} 0 \leq t \leq \pi;$

в)  $\rho = 3e^{3\varphi/4}, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$

**22.** Знайдіть об'єм тіла, що утворюється при обертанні навколо осі  $l = OX$  фігури, обмеженої лініями

а)  $y = x^2 - 2x + 1, y = x + 1;$

б)  $y = -x^2 + 5x - 6, y = 0.$

**23.** Обчисліть невласні інтеграли або доведіть їх розбіжність.

а)  $\int_0^{\infty} \frac{xdx}{16x^4 + 1};$  б)  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}.$

## Варіант 2

Знайдіть невизначені інтеграли

1.  $\int \frac{3-5x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

2.  $\int \sin^3(1-x) dx.$

3.  $\int \sin^5 2x \cos 2x dx.$

4.  $\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 10}.$

5.  $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 - 4x + 1}}.$

6.  $\int \frac{x+6}{3x^2 + x + 1} dx.$

7.  $\int \frac{x-3}{\sqrt{2x^2 - 4x - 1}} dx.$

8.  $\int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx.$

9.  $\int \cos(\ln x) dx.$

10.  $\int x \sin^2 x dx.$

11.  $\int x^2 e^{-x} dx.$

12.  $\int x \cos 6x dx.$

13.  $\int \frac{12}{(x^2 - 2x + 3)(x - 2)} dx.$

14.  $\int \frac{x^3 - 2x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2} dx.$

15.  $\int \frac{x^2 - 6x + 8}{x^3 + 8} dx.$

16.  $\int \frac{\sqrt[4]{x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} dx.$

17.  $\int \cos^3 x \sqrt{\sin^4 x} dx.$

Обчисліть визначені інтеграли.

18.  $\int_0^{12\sqrt{3}} \frac{12x^5 dx}{\sqrt{x^6 + 1}}.$

19.  $\int_0^{\ln 2} \frac{dx}{e^x(3 + e^{-x})}.$

**20.** Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями

а)  $y = 2x^2 - 8x + 7,$

$y = x^2 - 5x + 5;$

б)  $y = 4 - x^2, y = x^2 - 2x;$

в)  $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases} \quad y = 4,$

$0 \leq x \leq 8\pi, y \geq 4;$

г)  $\rho = \sqrt{3} \cos \varphi, \rho = \sin \varphi,$

$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$

**21.** Обчисліть довжину дуги кривої

а)  $y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x$ ,  
 $0 \leq x \leq 7/9$ ;

б)  $\begin{cases} x = 4(\cos t + t \sin t), \\ y = 4(\sin t - t \cos t), \end{cases}$   
 $0 \leq t \leq 2\pi$ ;

в)  $\rho = \sqrt{2}e^\varphi$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ .

**22.** Знайдіть об'єм тіла, що утворюється при обертанні навколо осі  $l = OX$  фігури, обмеженої лініями

а)  $y = x^2 + 2x + 1$ ,  $y = 1 - x$ ;

б)  $2x - x^2 - y = 0$ ,  
 $2x^2 - 4x + y = 0$ .

**23.** Обчисліть невласні інтеграли або доведіть їх розбіжність.

а)  $\int_1^{\infty} \frac{16x dx}{16x^4 - 1}$ ; б)  $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}$ .

### Варіант 3

Знайдіть невизначені інтеграли

1.  $\int \frac{8-13x}{\sqrt{x^2-1}} dx$ .

2.  $\int \left(1 - 2 \sin \frac{x}{5}\right)^2 dx$ .

3.  $\int \sin^2 3x \cos 3x dx$ .

4.  $\int \frac{dx}{2x^2 - 7x + 1}$ .

5.  $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-2x^2}}$ .

6.  $\int \frac{2x-1}{3x^2-2x+6} dx$ .

7.  $\int \frac{x-1}{\sqrt{3x^2-x+5}} dx$ .

8.  $\int \frac{\sqrt{4+x^2}}{x} dx$ .

9.  $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$ .

10.  $\int x \sin x \cos x dx$ .

11.  $\int x^2 e^{-2x} dx$ .

12.  $\int \arcsin 3x dx$ .

13.  $\int \frac{43x-67}{(x^2-x-12)(x-1)} dx$ .

14.  $\int \frac{3x^2+1}{(x^2-1)(x-1)} dx$ .

15.  $\int \frac{12-6x}{(x^2-4x+13)(x+1)} dx$ .

16.  $\int \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[6]{x+1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}} dx$ .

17.  $\int \cos^3 x \sin^8 x dx$ .

Обчисліть визначені інтеграли.

18.  $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{x^2+1}$ .

19.  $\int_0^5 \frac{dx}{2x + \sqrt{3x+1}}$ .

20. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями

а)  $y = x^2 - 2x - 1$ ,  
 $2y = 3x - 2$ ;

б)  $y = x\sqrt{9 - x^2}$ ,  $y = 0$ ,  
 $0 \leq x \leq 3$ ;

в)  $\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin t; \end{cases}$   $y = 2$ ,  $y \geq 2$ ;

г)  $\rho = \cos 2\varphi$ .

21. Обчисліть довжину дуги кривої

а)  $y = \frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{2}$ ,  $1 \leq x \leq 2$ ;

б)  $\begin{cases} x = 3(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 3(2 \sin t - \sin 2t), \end{cases}$   
 $0 \leq t \leq 2\pi$ ;

в)  $\rho = 2e^{4\varphi/3}$ ,  $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ .

22. Знайдіть об'єм тіла, що утворюється при обертанні навколо осі  $l = OY$  фігури, обмеженої лініями

а)  $y = x^2 - 2x + 1$ ,  $y = 2x - 2$ ;

б)  $y = \arcsin \frac{x}{5}$ ,  $y = \arcsin x$ ,

$y = \frac{\pi}{2}$ .

23. Обчисліть невласні інтеграли або доведіть їх розбіжність.

а)  $\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{\sqrt{16x^4 + 1}}$ ; б)  $\int_0^{1/3} \frac{e^3 + 1/x}{x^2} dx$ .

### Варіант 4

Знайдіть невизначені інтеграли

1.  $\int \frac{6x+1}{2x^2-1} dx$ .

2.  $\int \cos^3 5x \sin 5x dx$ .

3.  $\int \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} dx$ .

4.  $\int \frac{dx}{2x^2 + x - 6}$ .

5.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 6x + 8}}$ .

6.  $\int \frac{x}{2x^2 + x + 5} dx$ .

7.  $\int \frac{2x+1}{\sqrt{1+x-3x^2}} dx$ .

8.  $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4} dx$ .

9.  $\int \ln(x+2) dx$ .

10.  $\int x^2 (\sin 2x - 3) dx$ .

11.  $\int \operatorname{arctg} 2x dx$ .

12.  $\int \arccos 2x dx$ .

$$13. \int \frac{2x^4 + 8x^3 + 9x^2 - 7}{(x^2 + x - 2)(x + 3)} dx.$$

$$14. \int \frac{x + 2}{x^3 - x^2} dx.$$

$$15. \int \frac{2x^2 + 2x + 20}{(x^2 + 2x + 5)(x - 1)} dx.$$

$$16. \int \frac{(\sqrt[3]{x} + 1)(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt[6]{x^5}} dx.$$

$$17. \int \cos^4 x \sin^3 x dx.$$

Обчисліть визначені інтеграли.

$$18. \int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx.$$

$$19. \int_3^8 \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} - 1} dx.$$

20. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями

$$а) y = x^2 - 2x,$$

$$y = -x^2 + 2x + 6;$$

$$б) y = x^2 \sqrt{4 - x^2}, y = 0,$$

$$0 \leq x \leq 2;$$

$$в) \begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases} \quad y = 3,$$

$$0 \leq x \leq 4\pi, y \geq 3;$$

$$г) \rho = \cos 3\varphi.$$

21. Обчисліть довжину дуги кривої

$$а) y = 2 + \operatorname{ch} x, 0 \leq x \leq 1;$$

$$б) \begin{cases} x = 6 \cos^3 t, \\ y = 6 \sin^3 t; \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3};$$

$$в) \rho = 1 - \sin t, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq -\frac{\pi}{3}.$$

22. Знайдіть об'єм тіла, що утворюється при обертанні навколо осі  $l = OX$  фігури, обмеженої лініями

$$а) y = x^2 - 2x + 2, y = x + 2;$$

$$б) y = 5 \cos x, y = \cos x,$$

$$x = 0, x \geq 0.$$

23. Обчисліть невласні інтеграли або доведіть їх розбіжність.

$$а) \int_1^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{16x^4 - 1}}; \quad б) \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^5}}.$$

## Варіант 5

Знайдіть невизначені інтеграли

$$1. \int \frac{x - 2}{\sqrt{2 - x^2}} dx.$$

$$2. \int \cos^3(1 - x) dx.$$

$$3. \int \cos^3 7x \sin 7x dx.$$

$$4. \int \frac{dx}{5x^2 + 2x + 7}.$$

$$5. \int \frac{dx}{\sqrt{2 + 8x - 2x^2}}.$$

$$6. \int \frac{x + 5}{x^2 + x - 2} dx.$$

$$7. \int \frac{2x + 5}{\sqrt{4x^2 + 8x + 9}} dx.$$

$$8. \int \sqrt{4 - x^2} dx.$$

9.  $\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx.$
10.  $\int x^2(\sin x + 1) dx.$
11.  $\int (x+1)e^{-4x} dx.$
12.  $\int \operatorname{arctg} 8x dx.$
13.  $\int \frac{12x}{(x^2 + 6x + 5)(x + 3)} dx.$
14.  $\int \frac{4x^4 + 8x^3 - 3x - 3}{x^3 + 2x^2 + x} dx.$
15.  $\int \frac{2x^2 + 2x + 20}{(x^2 + 2x + 5)(x - 1)} dx.$
16.  $\int \frac{x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x}}{x(\sqrt[3]{x} + 1)} dx.$
17.  $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[3]{\sin^4 x}}.$

Обчисліть визначені інтеграли.

18.  $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{1 + \cos x}.$
19.  $\int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{x+1}}.$
20. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями
- а)  $4y = x^2, 2y = 6 - x^2;$
- б)  $y = 2 - x^2, y^3 = x^2;$
- в)  $\begin{cases} x = 16 \cos^3 t, \\ y = 16 \sin^3 t; \end{cases} x = 2, x \geq 2;$
- г)  $\rho = 4 \sin 3\varphi.$

21. Обчисліть довжину дуги кривої

- а)  $y = \ln \frac{5x}{2}, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8};$
- б)  $\begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t; \end{cases} 0 \leq t \leq \pi;$

в)  $\rho = 5e^{5\varphi/12}, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$

22. Знайдіть об'єм тіла, що утворюється при обертанні навколо осі  $l = OX$  фігури, обмеженої лініями

- а)  $y = x^2 + 2x + 2, y = 2 - x;$
- б)  $y = \sin^2 x, x = \frac{\pi}{2}, y = 0.$

23. Обчисліть невласні інтеграли або доведіть їх розбіжність.

- а)  $\int_{-\infty}^0 \frac{x dx}{\sqrt{(x^2 + 4)^3}};$
- б)  $\int_{1/3}^1 \frac{\ln(3x - 1)}{3x - 1} dx.$

### Варіант 6

Знайдіть невизначені інтеграли

1.  $\int \frac{3 - 7x}{\sqrt{1 - 4x^2}} dx.$
2.  $\int (3 - \sin 2x)^2 dx.$
3.  $\int \sin 9x \cos x dx.$

4.  $\int \frac{dx}{2x^2 - 2x + 1}$ .
5.  $\int \frac{dx}{\sqrt{3 + 2x - 2x^2}}$ .
6.  $\int \frac{3x - 2}{5x^2 - 3x + 2} dx$ .
7.  $\int \frac{2x - 10}{\sqrt{1 + x - x^2}} dx$ .
8.  $\int \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x} dx$ .
9.  $\int \ln x^2 dx$ .
10.  $\int (x^2 + x)e^{-x} dx$ .
11.  $\int \operatorname{arctg} 3x dx$ .
12.  $\int x \sin(x - 2) dx$ .
13.  $\int \frac{2x^4 - 7x^3 + 7x^2 - 8x}{(x^2 - 5x + 6)(x + 1)} dx$ .
14.  $\int \frac{x + 2}{x^3 + x^2} dx$ .
15.  $\int \frac{x^2 + 3x + 2}{x^3 - 1} dx$ .
16.  $\int \frac{\sqrt{2x + 1} + \sqrt[3]{2x + 1}}{\sqrt{2x + 1}} dx$ .
17.  $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}$ .

Обчисліть визначені інтеграли.

18.  $\int_{3/4}^{4/3} \frac{dx}{x^2 + 1}$ .

19.  $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx$ .

20. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями

а)  $y = x^2 - 4x + 2, y = 2 - x$ ;

б)  $y = \sqrt{e^x - 1}, y = 0, x = \ln 2$ ;

в)  $\begin{cases} x = 6 \cos t, \\ y = 2 \sin t; \end{cases} y = \sqrt{3},$

$y \geq \sqrt{3}$ ;

г)  $\rho = \sin 3\varphi$ .

21. Обчисліть довжину дуги кривої

а)  $y = e^x + 6,$

$\ln \sqrt{8} \leq x \leq \ln \sqrt{15}$ ;

б)  $\begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t); \end{cases}$

$0 \leq t \leq \pi$ ;

в)  $\rho = 3e^{3\varphi/4}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$ .

22. Знайдіть об'єм тіла, що утворюється при обертанні навколо осі  $l = OY$  фігури, обмеженої лініями

а)  $y = x^2 - 2x + 2, y = 2x - 1$ ;

б)  $y = \ln x, x = 2, y = 0$ .

23. Обчисліть невласні інтеграли або доведіть їх розбіжність.

а)  $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(x^3 + 8)^4}}$ ;

$$6) \int_{1/4}^1 \frac{dx}{20x^2 - 9x + 1}.$$

### Варіант 7

Знайдіть невизначені інтеграли

$$1. \int \frac{5-3x}{\sqrt{2x^2+1}} dx.$$

$$2. \int \sin^2 \frac{3x}{2} dx.$$

$$3. \int \sin^4 2x \cos 2x dx.$$

$$4. \int \frac{dx}{2x^2 - 11x + 2}.$$

$$5. \int \frac{dx}{\sqrt{2-2x-3x^2}}.$$

$$6. \int \frac{x+4}{2x^2-6x-8} dx.$$

$$7. \int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x+x^2}} dx.$$

$$8. \int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2} dx.$$

$$9. \int \frac{\ln(\cos x)}{\sin^2 x} dx.$$

$$10. \int (x^2+x)e^x dx.$$

$$11. \int x \cos 8x dx.$$

$$12. \int \arcsin 8x dx.$$

$$13. \int \frac{2x^4 + 8x^3 - 45x - 61}{(x^2 + 5x + 6)(x-1)} dx.$$

$$14. \int \frac{4x^2}{(x^2-2x+1)(x+1)} dx.$$

$$15. \int \frac{36}{(x^2-2x+10)(x+2)} dx.$$

$$16. \int \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[6]{x-1}} dx.$$

$$17. \int \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}.$$

Обчисліть визначені інтеграли.

$$18. \int_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{3x+25}}.$$

$$19. \int_{\ln 2}^{2 \ln 2} \frac{dx}{e^x - 1}.$$

20. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями

а)  $y = x^2 + 4x + 2$ ,  $y = 2 + x$ ;

б)  $y^2 = 2x$ ,  $y^2 = 4x - x^2$ ;

в)  $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases} \quad y = 3,$

$y \geq 3$ ,  $0 \leq x \leq 6\pi$ ;

г)  $\rho = 4 \sin \varphi$ ,  $\rho = 6 \sin \varphi$ .

21. Обчисліть довжину дуги кривої

а)  $y = -\ln \cos x$ ,  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ ;

б)  $\begin{cases} x = 10 \cos^3 t, \\ y = 10 \sin^3 t; \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ ;

в)  $\rho = e^{12\varphi/5}$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ .



**22.** Знайдіть об'єм тіла, що утворюється при обертанні навколо осі  $l = OX$  фігури, обмеженої лініями

а)  $y = x^2 - 6x + 9, y = x - 1;$

б)  $x = \sqrt[3]{y - 2}, x = 1, y = 1.$

**23.** Обчисліть невластні інтеграли або доведіть їх розбіжність.

а)  $\int_0^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt[4]{(x^2 + 16)^5}};$

б)  $\int_{1/2}^1 \frac{\ln 2}{(1-x)\ln^2(1-x)} dx.$

### Варіант 8

Знайдіть невизначені інтеграли

1.  $\int \frac{1+x}{\sqrt{2-x^2}} dx.$

2.  $\int (\cos x + 3)^2 dx.$

3.  $\int \sin \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2} dx.$

4.  $\int \frac{dx}{2x^2 + x + 2}.$

5.  $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}.$

6.  $\int \frac{5x-2}{2x^2-5x+2} dx.$

7.  $\int \frac{3x+4}{\sqrt{x^2+6x+13}} dx.$

8.  $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4} dx.$

9.  $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx.$

10.  $\int (x^2 - x + 1)e^{-x} dx.$

11.  $\int \operatorname{arctg} 4x dx.$

12.  $\int x \sin(x+3) dx.$

13.  $\int \frac{2x^4 + 17x^3 + 32x^2 - 7x}{(x^2 + 4x + 3)(x + 5)} dx.$

14.  $\int \frac{2x^2 - 2x - 1}{x^2 - x^3} dx.$

15.  $\int \frac{9x-9}{(x^2 - 4x + 13)(x+1)} dx.$

16.  $\int \frac{\sqrt{x-1} - 2\sqrt[3]{x-1}}{2\sqrt[3]{x-1} + \sqrt{x-1}} dx.$

17.  $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}.$

Обчисліть визначені інтеграли.

18.  $\int_0^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^4 + 4}}.$

19.  $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx.$

**20.** Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями

а)  $y = 2x^2 + 8x + 7,$

$y = x^2 + 3x + 1;$

б)  $y = 2x - x^2 + 3,$

$y = x^2 - 4x + 3;$

$$\text{в) } \begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \end{cases} \quad y = 9,$$

$$y \geq 9, \quad 0 \leq x \leq 12\pi;$$

$$\text{г) } \rho = 0,5 + \sin \varphi.$$

**21.** Обчисліть довжину дуги кривої

$$\text{а) } y = -\arccos x + \sqrt{1-x^2} + 1, \quad 0 \leq x \leq 9/16;$$

$$\text{б) } \begin{cases} x = 4(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 4(2 \sin t - \sin 2t); \end{cases}$$

$$0 \leq t \leq \pi/3;$$

$$\text{в) } \rho = 2\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 4/3.$$

**22.** Знайдіть об'єм тіла, що утворюється при обертанні навколо осі  $l = OX$  фігури, обмеженої лініями

$$\text{а) } y = x^2 + 6x + 9, \quad y = -1 - x;$$

$$\text{б) } y = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right), \quad y = x^2.$$

**23.** Обчисліть невласні інтеграли або доведіть їх розбіжність.

$$\text{а) } \int_4^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - 4x + 1}};$$

$$\text{б) } \int_0^{2/3} \frac{\sqrt[3]{\ln(2-3x)}}{2-3x} dx.$$

## Варіант 9

Знайдіть невизначені інтеграли

$$1. \int \frac{3x+2}{2x^2+1} dx.$$

$$2. \int \cos^3(x+3) dx.$$

$$3. \int \cos^5 x \sin x dx.$$

$$4. \int \frac{dx}{3x^2 - 12x + 3}.$$

$$5. \int \frac{dx}{\sqrt{5x^2 - 10x + 4}}.$$

$$6. \int \frac{4x-1}{4x^2 - 4x + 5} dx.$$

$$7. \int \frac{3x-1}{\sqrt{2x^2 - 5x + 1}} dx.$$

$$8. \int \frac{dx}{(1+x^2)^3}.$$

$$9. \int x \ln \frac{1-x}{x+1} dx.$$

$$10. \int (x^2 - x + 1)e^x dx.$$

$$11. \int \arcsin 5x dx.$$

$$12. \int x \cos(x+4) dx.$$

$$13. \int \frac{6x^2 + 6x - 6}{(x^2 + x - 2)(x+1)} dx.$$

$$14. \int \frac{2x^2 - 5x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx.$$

$$15. \int \frac{7x-10}{x^3+8} dx.$$

$$16. \int \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt[3]{x+3} + \sqrt[6]{x+3}} dx.$$

$$17. \int \frac{3\sin^3 x dx}{\cos^4 x}.$$

Обчисліть визначені інтеграли.

$$18. \int_1^e \frac{1 + \ln x}{x} dx.$$

$$19. \int_0^5 \frac{x dx}{\sqrt{x+4}}.$$

20. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями

$$а) \quad y = 2x^2 + 8x + 7, \\ y = x^2 + 5x + 5;$$

$$б) \quad y = \sin x \cos^2 x, \quad y = 0, \\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2};$$

$$в) \quad \begin{cases} x = 24 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t; \end{cases}$$

$$x = 9\sqrt{3}, x \geq 9\sqrt{3};$$

$$г) \quad \rho = \cos \varphi + \sin \varphi.$$

21. Обчисліть довжину дуги кривої

$$а) \quad y = e^x + e,$$

$$\ln \sqrt{3} \leq x \leq \ln \sqrt{15};$$

$$б) \quad \begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t); \end{cases}$$

$$\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{4};$$

$$в) \quad \rho = 8 \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}.$$

22. Знайдіть об'єм тіла, що утворюється при обертанні

навколо осі  $l = OY$  фігури, обмеженої лініями

$$а) \quad y = x^2 - 4x + 4, \quad y = 2x - 4;$$

$$б) \quad y = (x-1)^2, \quad y = 1.$$

23. Обчисліть невласні інтеграли або доведіть їх розбіжність.

$$а) \int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{\pi(x^2 + 4x + 5)}; \quad б) \int_0^1 \frac{x dx}{1 - x^4}.$$

### Варіант 10

Знайдіть невизначені інтеграли

$$1. \int \frac{1-5x}{25x^2+1} dx.$$

$$2. \int \sin^3 \frac{4x}{5} dx.$$

$$3. \int \cos 2x \cos 3x dx.$$

$$4. \int \frac{dx}{2x^2+3x}.$$

$$5. \int \frac{dx}{\sqrt{2x+3-x^2}}.$$

$$6. \int \frac{x+1}{2x^2+x+1} dx.$$

$$7. \int \frac{5x+2}{\sqrt{x^2+3x-4}} dx.$$

$$8. \int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^4} dx.$$

$$9. \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx.$$

$$10. \int x \operatorname{ctg}^2 x dx.$$

11.  $\int (x+1)e^{-x} dx.$

12.  $\int \arccos 7x dx.$

13.  $\int \frac{37x-85}{(x^2+2x-3)(x-3)} dx.$

14.  $\int \frac{4x^4+8x^3-x-2}{x(x+1)^2} dx.$

15.  $\int \frac{4x^2+3x+17}{(x^2+2x+5)(x-1)} dx.$

16.  $\int \frac{\sqrt[6]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1} + \sqrt{x-1}} dx.$

17.  $\int \cos^4 x \sin^5 x dx.$

Обчисліть визначені інтеграли.

18.  $\int_0^1 \frac{x^3 dx}{x^8+1}.$

19.  $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}.$

20. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями

а)  $y = 2x^2 - 12x + 16,$   
 $y = x^2 - 5x + 4;$

б)  $y = \frac{x}{(x^2+1)^2}, y = 0, x = 1;$

в)  $\begin{cases} x = 9 \cos t, \\ y = 4 \sin t; \end{cases} y = 2, y \geq 2;$

г)  $\rho = \sin 4\varphi.$

21. Обчисліть довжину дуги кривої

а)  $y = \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} + 3),$

$0 \leq x \leq 2;$

б)  $\begin{cases} x = 2 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t; \end{cases} 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4};$

в)  $\rho = 8 \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}.$

22. Знайдіть об'єм тіла, що утворюється при обертанні навколо осі  $l = OX$  фігури, обмеженої лініями

а)  $y = x^2 - 6x + 10, y = x;$

б)  $y = xe^x, y = 0, x = 1.$

23. Обчисліть невластні інтеграли або доведіть їх розбіжність.

а)  $\int_{-1}^{\infty} \frac{xdx}{x^2+4x+5};$

б)  $\int_0^{\pi/6} \frac{\cos 3x dx}{\sqrt[6]{(1-\sin 3x)^5}}.$

## Варіант 11

Знайдіть невизначені інтеграли

1.  $\int \frac{4x-3}{3x^2-4} dx.$

2.  $\int (1-\cos x)^2 dx.$

3.  $\int \sin 5x \sin 7x dx.$

4.  $\int \frac{dx}{x^2-5x+6}.$

5.  $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 8x + 3}}$ .
6.  $\int \frac{x+1}{3x^2 - 2x - 3} dx$ .
7.  $\int \frac{x-4}{\sqrt{2x^2 - x + 7}} dx$ .
8.  $\int \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^6} dx$ .
9.  $\int \ln(x+4) dx$ .
10.  $\int x^2 e^{-x} dx$ .
11.  $\int x \operatorname{arctg} x dx$ .
12.  $\int x \cos(x-7) dx$ .
13.  $\int \frac{3x^2 + 3x - 24}{(x^2 - x - 2)(x-3)} dx$ .
14.  $\int \frac{2x^3 + 1}{x^2(x+1)} dx$ .
15.  $\int \frac{4x+2}{x^4 + 4x^2} dx$ .
16.  $\int \frac{\sqrt{x+3}}{1 + \sqrt[3]{x+3}} dx$ .
17.  $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt[5]{\cos^2 x}}$ .

Обчисліть визначені інтеграли.

18.  $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{1 - \cos^2 x}$ .
19.  $\int_{2/3}^{7/3} \frac{x dx}{\sqrt{3x+2}}$ .

**20.** Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями

а)  $x = y^2 - 2, y = -x;$

б)  $y = \cos^3 x \sin 2x, y = 0,$

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2};$

в)  $\begin{cases} x = 8 \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t; \end{cases} \quad x = 3\sqrt{3},$

$x \geq 3\sqrt{3};$

г)  $\rho = 2 \cos \varphi, \rho = 3 \cos \varphi.$

**21.** Обчисліть довжину дуги кривої

а)  $y = e^x + 26,$

$\ln \sqrt{8} \leq x \leq \ln \sqrt{24};$

б)  $\begin{cases} x = 6(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 6(2 \sin t - \sin 2t); \end{cases}$

$0 \leq t \leq \pi;$

в)  $\rho = 3 \cos 2\varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}.$

**22.** Знайдіть об'єм тіла, що утворюється при обертанні навколо осі  $l = OX$  фігури, обмеженої лініями

а)  $y = x^2 + 6x + 10, y = -x;$

б)  $y = e^{1-x}, y = 0, x = 0, x = 1.$

**23.** Обчисліть невласні інтеграли або доведіть їх розбіжність.

а)  $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2x dx}{\pi(4x^2 + 1)};$  б)  $\int_0^1 \frac{2x dx}{\sqrt{1-x^4}}.$

## Варіант 12

Знайдіть невизначені інтеграли

1.  $\int \frac{5x+1}{\sqrt{x^2-6}} dx.$
2.  $\int \sin^2(2x-1) dx.$
3.  $\int \sin 4x \cos 2x dx.$
4.  $\int \frac{dx}{2x-3-4x^2}.$
5.  $\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}.$
6.  $\int \frac{4x+8}{4x^2+6x-13} dx.$
7.  $\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-3x+4}} dx.$
8.  $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^5}}.$
9.  $\int \frac{x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx}{\sqrt{1+x^2}}.$
10.  $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}.$
11.  $\int x^2 e^{3x} dx.$
12.  $\int x \sin(x-5) dx.$
13.  $\int \frac{2x^4 - 7x^3 + 3x + 20}{(x^2 - 2x - 3)(x - 2)} dx.$
14.  $\int \frac{x^3 - 3}{(x^2 - 1)(x - 1)} dx.$

15.  $\int \frac{x^2 - 5x + 40}{(x^2 - 2x + 10)(x + 2)} dx.$

16.  $\int \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt[6]{x}} dx.$

17.  $\int \sqrt[3]{\cos^2 x} \sin^3 x dx.$

Обчисліть визначені інтеграли.

18.  $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}.$

19.  $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x - e^{-x}}.$

20. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями

а)  $x = y^2 - 2y - 1, y = 1 - x;$

б)  $y = \sqrt{4 - x^2}, x = 0, y = 0, x = 1;$

в)  $\begin{cases} x = 5\sqrt{2} \cos t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin t; \end{cases} \quad y = 2,$

$y \geq 2;$

г)  $\rho = 3 \sin \varphi, \rho = 5 \sin \varphi.$

21. Обчисліть довжину дуги кривої

а)  $y = \operatorname{sh} x + 5, y = 0, 0 \leq x \leq 1;$

б)  $\begin{cases} x = 3(\cos t + t \sin t), \\ y = 3(\sin t - t \cos t), \end{cases}$

$0 \leq t \leq \frac{\pi}{3};$

в)  $\rho = 5\varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$

22. Знайдіть об'єм тіла, що утворюється при обертанні

навколо осі  $l = OY$  фігури, обмеженої лініями

а)  $y = x^2 - 4x + 5,$   
 $y = 2x - 3;$

б)  $y = \arccos \frac{x}{3}, y = \arccos x.$

**23.** Обчисліть невідкладні інтеграли або доведіть їх розбіжність.

а)  $\int_{1/2}^{\infty} \frac{16dx}{\pi(4x^2 + 4x + 5)};$

б)  $\int_{-1/3}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}}.$

### Варіант 13

Знайдіть невизначені інтеграли

1.  $\int \frac{x-3}{9x^2+7} dx.$

2.  $\int \sin^3 6x dx.$

3.  $\int \cos^3 4x \sin 4x dx.$

4.  $\int \frac{dx}{3x^2 - 8x - 3}.$

5.  $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - x + 4}}.$

6.  $\int \frac{5x+1}{x^2 - 4x + 1} dx.$

7.  $\int \frac{4x+1}{\sqrt{2+x-x^2}} dx.$

8.  $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} dx.$

9.  $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x} dx.$

10.  $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}.$

11.  $\int x \cos(x+4) dx.$

12.  $\int (x-4)e^x dx.$

13.  $\int \frac{3x^2-15}{(x^2+5x+6)(x-1)} dx.$

14.  $\int \frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x} dx.$

15.  $\int \frac{3-9x}{x^3-1} dx.$

16.  $\int \frac{\sqrt[6]{x+3}}{\sqrt[3]{x+3} + \sqrt{x+3}} dx.$

17.  $\int \sqrt[3]{\sin^2 x \cos^3 x} dx.$

Обчисліть визначені інтеграли.

18.  $\int_0^1 x^3 \sqrt{4+5x^4} dx.$

19.  $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{(1+x)^4}.$

20. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями

а)  $x = y^2 + 2y - 1, y = -1 - x;$

б)  $y = x^2 \sin x, y = 0, 0 \leq x \leq \pi;$

в)  $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases} y = 3,$

$y \geq 3, 0 \leq x \leq \pi;$

г)  $\rho = \frac{1}{2} + \cos \varphi$ .

**21.** Обчисліть довжину дуги кривої

а)  $y = \ln \cos x + 2, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ ;

б)  $\begin{cases} x = \cos t + t \sin t, \\ y = \sin t - t \cos t, \end{cases} 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}$ ;

в)  $\rho = 2 \sin \varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}$ .

**22.** Знайдіть об'єм тіла, що утворюється при обертанні навколо осі  $l = OX$  фігури, обмеженої лініями

а)  $y = x^2 - 6x + 11, y = x + 1$ ;

б)  $y = 2x - x^2, y = -x + 2, x = 0$ .

**23.** Обчисліть невластні інтеграли або доведіть їх розбіжність.

а)  $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{4x^2 + 4x + 5}$ ;

б)  $\int_{3/4}^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}$ .

### Варіант 14

Знайдіть невизначені інтеграли

1.  $\int \frac{5-3x}{\sqrt{4-3x^2}} dx$ .

2.  $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$ .

3.  $\int \cos^{-3} 2x \sin 2x dx$ .

4.  $\int \frac{dx}{8-2x-x^2}$ .

5.  $\int \frac{dx}{\sqrt{2+4x-3x^2}}$ .

6.  $\int \frac{x}{2x^2+2x+5} dx$ .

7.  $\int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+4x-5}} dx$ .

8.  $\int \frac{dx}{(x^2-1)^3}$ .

9.  $\int x^2 \ln(x+1) dx$ .

10.  $\int x \operatorname{tg}^2 x dx$ .

11.  $\int x \cos(x-2) dx$ .

12.  $\int x e^{-6x} dx$ .

13.  $\int \frac{x^2-19x+6}{(x^2+5x+6)(x-1)} dx$ .

14.  $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+x} dx$ .

15.  $\int \frac{x^2-13x+40}{(x^2-4x+13)(x+1)} dx$ .

16.  $\int \frac{x+1+\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[6]{x+1}}{(x+1)(\sqrt[3]{x+1}+1)} dx$ .

17.  $\int \sqrt[5]{\cos^3 2x} \sin^3 2x dx$ .

Обчисліть визначені інтеграли.

18.  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{x}{2} dx$ .



19.  $\int_{-1}^0 \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+1}}$ .

20. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями

а)  $x = y^2 + 2y - 2$ ,  $y = -2 - x$ ;

б)  $y = \arccos x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ;

в) 
$$\begin{cases} x = 8\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = \sqrt{2} \sin^3 t, \end{cases}$$

$x = 4$ ,  $x \geq 4$ ;

г)  $\rho = 2(2 + \cos \varphi)$ .

21. Обчисліть довжину дуги кривої

а)  $y = 2 - e^x$ ,

$\ln \sqrt{3} \leq x \leq \ln \sqrt{8}$ ;

б) 
$$\begin{cases} x = 6(\cos t + t \sin t), \\ y = 6(\sin t - t \cos t), \end{cases}$$

$0 \leq t \leq \pi$ ;

в)  $\rho = 5(1 - \cos \varphi)$ ,  $-\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq 0$ .

22. Знайдіть об'єм тіла, що утворюється при обертанні навколо осі  $l = OX$  фігури, обмеженої лініями

а)  $y = x^2 + 6x + 11$ ,

$y = -x + 1$ ;

б)  $y = x^2$ ,  $y^2 - x = 0$ .

23. Обчисліть невластні інтеграли або доведіть їх розбіжність.

а)  $\int_0^{\infty} \frac{(x+2)dx}{\sqrt[3]{(x^2+4x+1)^4}}$ ;

б)  $\int_0^{\pi/2} \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos 2x} dx$ .

## Варіант 15

Знайдіть невизначені інтеграли

1.  $\int \frac{4-2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$ .

2.  $\int \sin^2\left(\frac{x}{2} + 1\right) dx$ .

3.  $\int \sin x \cos 9x dx$ .

4.  $\int \frac{dx}{5x-6-x^2}$ .

5.  $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+2x+4}}$ .

6.  $\int \frac{x-3}{x^2-5x+4} dx$ .

7.  $\int \frac{3x+2}{\sqrt{4+2x-x^2}} dx$ .

8.  $\int x^3 \sqrt{9-x^2} dx$ .

9.  $\int \frac{\ln x \ln(\ln x)}{x} dx$ .

10.  $\int (x^2+2)e^{-x} dx$ .

11.  $\int x \cos(x+3) dx$ .

12.  $\int \operatorname{arctg} 7x dx$ .

13.  $\int \frac{6x}{x^3+2x^2-x-2} dx$ .

$$14. \int \frac{4x^4 + 8x^3 - 1}{(x^2 + x)(x + 1)} dx.$$

$$15. \int \frac{3 - 9x}{x^3 - 1} dx.$$

$$16. \int \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x} + 1)} dx.$$

$$17. \int \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[5]{\sin^3 x}}.$$

Обчисліть визначені інтеграли.

$$18. \int_1^2 \frac{e^{1/x} dx}{x^2}.$$

$$19. \int_0^{0.5 \ln 2} \frac{e^x dx}{e^x + e^{-x}}.$$

20. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями

а)  $x = y^2 - 2y - 2, y = -x;$

б)  $y = (x + 1)^2, y^2 = x + 1;$

в)  $\begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos t, \\ y = 3\sqrt{2} \sin t, \end{cases} y = 3, y \geq 3;$

г)  $\rho = 6 \cos 3\varphi, \rho = 3.$

21. Обчисліть довжину дуги кривої

а)  $y = 1 - \ln(x^2 - 1), 3 \leq x \leq 4;$

б)  $\begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases}$

$0 \leq t \leq 2\pi;$

в)  $\rho = 8(1 + \sin \varphi), -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 0.$

22. Знайдіть об'єм тіла, що утворюється при обертанні навколо осі  $l = OY$  фігури, обмеженої лініями

а)  $y = x^2 - 4x + 4, y = 4 - 2x;$

б)  $y = \sqrt{x - 1}, y = 0, y = 1,$

$x = \frac{1}{2}.$

23. Обчисліть невласні інтеграли або доведіть їх розбіжність.

а)  $\int_0^{\infty} \frac{3 - x^2}{x^2 + 4} dx;$

б)  $\int_0^1 \frac{2e^{1 - \frac{2}{\pi} \arcsin x}}{\pi \sqrt{1 - x^2}} dx.$

### Варіант 16

Знайдіть невизначені інтеграли

1.  $\int \frac{5 - x}{x^2 + 2} dx.$

2.  $\int \cos^2 2x dx.$

3.  $\int \sin 4x \cos 2x dx.$

4.  $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 25}.$

5.  $\int \frac{dx}{\sqrt{3x + 2 - 2x^2}}.$

6.  $\int \frac{2x - 1}{2x^2 + 8x - 6} dx.$

7.  $\int \frac{x - 7}{\sqrt{3x^2 - 2x + 1}} dx.$

8.  $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{(x^2 - 1)^3}}$ .
9.  $\int \ln(x^2 + 1) dx$ .
10.  $\int (x^2 + 3) \sin x dx$ .
11.  $\int x e^{x+2} dx$ .
12.  $\int \arcsin 5x dx$ .
13.  $\int \frac{4x^2 + 32x + 52}{(x^2 + 6x + 5)(x + 3)} dx$ .
14.  $\int \frac{4x}{(x^2 - 1)(x + 1)} dx$ .
15.  $\int \frac{6 - 9x}{x^3 + 8} dx$ .
16.  $\int \frac{\sqrt{3x + 1} + 2}{\sqrt[3]{3x + 1} + \sqrt{3x + 1}} dx$ .
17.  $\int \cos^4 2x \sin^2 2x dx$ .

Обчисліть визначені інтеграли.

18.  $\int_0^{1/2} \frac{x dx}{\sqrt{1 - x^2}}$ .
19.  $\int_0^{\sqrt[3]{7}} \frac{x^2 dx}{\sqrt{9 + x^3}}$ .

20. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями

- а)  $y = x^2 - 2x$ ,  $y = -x^2 + 2x + 6$ ;
- б)  $y = \frac{x}{1 + \sqrt{x}}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ ;
- в)  $\begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = \sqrt{2} \sin^3 t, \end{cases} x = 1, x \geq 1$ ;

г)  $\rho = 1 + \sqrt{2} \sin \varphi$ .

21. Обчисліть довжину дуги кривої

а)  $y = \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}$ ,  
 $0 \leq x \leq 15/16$ ;

б)  $\begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases}$   
 $0 \leq t \leq \pi/2$ ;

в)  $\rho = 8(1 - \cos \varphi)$ ,  $-\frac{2\pi}{3} \leq \varphi \leq 0$ .

22. Знайдіть об'єм тіла, що утворюється при обертанні навколо осі  $l = OY$  фігури, обмеженої лініями

а)  $y = x^2 - 2x + 1$ ,  $y = 2x - 2$ ;

б)  $y = x - 2$ ,  $y = 0$ ,  $y = x^3$ ,  $y = 1$ .

23. Обчисліть невласні інтеграли або доведіть їх розбіжність.

а)  $\int_0^{\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{\arctg x}}{4x^2 + 1} dx$ ;

б)  $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[5]{4x - x^2 - 4}}$ .

### Варіант 17

Знайдіть невизначені інтеграли

1.  $\int \frac{1 + 3x}{\sqrt{4x^2 + 1}} dx$ .

2.  $\int \left(1 + 2 \cos \frac{x}{2}\right)^2 dx$ .

3.  $\int \sin 3x \cos 2x dx.$
4.  $\int \frac{dx}{2x^2 - 8x + 30}.$
5.  $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - 8x + 1}}.$
6.  $\int \frac{2-x}{4x^2 + 16x - 12} dx.$
7.  $\int \frac{x+5}{\sqrt{3-6x-x^2}} dx.$
8.  $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}.$
9.  $\int \frac{\ln x}{x^3} dx.$
10.  $\int x^2 (\cos 2x + 3) dx.$
11.  $\int x e^{-7x} dx.$
12.  $\int \ln(x-7) dx.$
13.  $\int \frac{2x^2 + 41x - 91}{(x^2 + 2x - 3)(x+2)} dx.$
14.  $\int \frac{1}{x^3 + x^2} dx.$
15.  $\int \frac{4x-10}{(x^2 - 2x + 10)(x+2)} dx.$
16.  $\int \frac{1}{\sqrt[3]{(2x+1)^2} - \sqrt{2x+1}} dx.$
17.  $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}.$

Обчисліть визначені інтеграли.

18.  $\int_0^1 3(x^2 + x^2 e^{x^3}) dx.$

19.  $\int_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{3x+1}}.$

20. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями

а)  $4y = x^2, 2y = 6 - x^2;$

б)  $x = \arccos y, x = 0, y = 0;$

в)  $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \end{cases}$

$y = 6, y \geq 6;$

г)  $\rho = \sin \varphi, \rho = 2 \sin \varphi.$

21. Обчисліть довжину дуги кривої

а)  $y = 1 - \ln \sin x, \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2};$

б)  $\begin{cases} x = 8 \cos^3 t, \\ y = 8 \sin^3 t, \end{cases} 0 \leq t \leq \frac{\pi}{6};$

в)  $\rho = 7(1 - \sin \varphi),$

$-\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}.$

22. Знайдіть об'єм тіла, що утворюється при обертанні навколо осі  $l = OX$  фігури, обмеженої лініями

а)  $y = x^2 + 2x + 2, y = 2 - x;$

б)  $x^2 + |y - 2|^2 = 1.$

23. Обчисліть невласні інтеграли або доведіть їх розбіжність.

$$\text{a) } \int_1^{\infty} \frac{4dx}{x(1+\ln^2 x)}; \text{ б) } \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x dx}{\sqrt[7]{\cos^2 x}}.$$

### Варіант 18

Знайдіть невизначені інтеграли

$$1. \int \frac{5-4x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$2. \int \cos^2 3x dx.$$

$$3. \int \sin^3 7x \cos 7x dx.$$

$$4. \int \frac{dx}{3x^2 - 9x + 6}.$$

$$5. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}.$$

$$6. \int \frac{2x-1}{3x^2 - 6x - 9} dx.$$

$$7. \int \frac{7x-2}{\sqrt{x^2 - 5x + 1}} dx.$$

$$8. \int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^2} dx.$$

$$9. \int \sqrt{x} \ln^2 x dx.$$

$$10. \int (x^2 + 2)e^x dx.$$

$$11. \int \arcsin 2x dx.$$

$$12. \int x \cos(x+6) dx.$$

$$13. \int \frac{2x^4 + 8x^3 - 17x - 5}{(x^2 + 2x - 3)(x - 2)} dx.$$

$$14. \int \frac{4x^2 + x - 1}{x^3 + 2x^2 + x} dx.$$

$$15. \int \frac{x^2 + 2x + 3}{(x^2 + 2x + 10)(x - 1)} dx.$$

$$16. \int \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x} - 1} dx.$$

$$17. \int \sqrt[5]{\cos^4 x} \sin^3 x dx.$$

Обчисліть визначені інтеграли.

$$18. \int_1^2 x \ln^2 x dx.$$

$$19. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}}.$$

20. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями

$$\text{a) } y = x^2 - 4x + 2, \quad y = 2 - x;$$

$$\text{б) } y = x \operatorname{arctg} x, \quad y = 0, \quad x = \sqrt{3};$$

$$\text{в) } \begin{cases} x = 8 \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t, \end{cases}$$

$$x = 3\sqrt{3}, \quad x \geq 3\sqrt{3};$$

$$\text{г) } \rho = \cos \varphi, \quad \rho = 2 \cos \varphi.$$

21. Обчисліть довжину дуги кривої

$$\text{a) } y = -\arccos x + \sqrt{x - x^2},$$

$$0 \leq x \leq \frac{1}{4};$$

$$\text{б) } \begin{cases} x = 3,5(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 3,5(2 \sin t - \sin 2t), \end{cases}$$

$$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2};$$

$$\text{в) } \rho = 4(1 - \sin \varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}.$$

**22.** Знайдіть об'єм тіла, що утворюється при обертанні навколо осі  $l = OY$  фігури, обмеженої лініями

а)  $y = x^2 - 2x + 2, y = 2x - 1;$

б)  $y = x^3, y = x^2.$

**23.** Обчисліть невластні інтеграли або доведіть їх розбіжність.

а)  $\int_0^{\infty} x \sin x dx;$  б)  $\int_{-3/4}^0 \frac{dx}{\sqrt{4x+3}}.$

### Варіант 19

Знайдіть невизначені інтеграли

1.  $\int \frac{5-4x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

2.  $\int \sin^4 2x dx.$

3.  $\int \cos 5x \cos 2x dx.$

4.  $\int \frac{dx}{2x^2 - 2x + 5}.$

5.  $\int \frac{dx}{\sqrt{3x - 2x^2}}.$

6.  $\int \frac{2x-1}{3+x-2x^2} dx.$

7.  $\int \frac{2x+4}{\sqrt{3x^2+x-5}} dx.$

8.  $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2-1}}.$

9.  $\int \ln \frac{1-x}{x+1} dx.$

10.  $\int x^2 \sin^2 x dx.$

11.  $\int x \sin(x+7) dx.$

12.  $\int \operatorname{arctg} \frac{x}{2} dx.$

13.  $\int \frac{2x^4 + 17x^3 + 40x^2 + 37x + 36}{(x^2 + 8x + 15)(x+1)} dx.$

14.  $\int \frac{6x - 2x^2 - 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx.$

15.  $\int \frac{2x^2 + 7x + 7}{(x^2 + 2x + 5)(x-1)} dx.$

16.  $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[4]{x}} dx.$

17.  $\int \cos^2 2x \sin^4 2x dx.$

Обчисліть визначені інтеграли.

18.  $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt[3]{\cos x} \sin x dx.$

19.  $\int_{\ln 3}^0 \frac{1-e^x}{1+e^x} dx.$

**20.** Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями

а)  $y = 2x^2 + 8x + 7,$

$y = x^2 + 3x + 1;$

б)  $x = (y-2)^3, x = 4y - 8;$

в)  $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases} \quad y = 1, y \geq 1,$

$0 \leq x \leq 2\pi;$

г)  $\rho = \frac{5}{2} \cos \varphi, \rho = \frac{3}{2} \cos \varphi.$

**21.** Обчисліть довжину дуги кривої

а)  $y = \ln 7 - \ln x, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8};$

б) 
$$\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t \sin t, \end{cases}$$
  
 $0 \leq t \leq 2\pi;$

в)  $\rho = 2\varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}.$

**22.** Знайдіть об'єм тіла, що утворюється при обертанні навколо осі  $l = OX$  фігури, обмеженої лініями

а)  $y = x^2 - 6x + 9, y = x - 1;$

б)  $y = 1 - x^2, x = 0,$   
 $x = \sqrt{y - 2}, x = 1.$

**23.** Обчисліть невластні інтеграли або доведіть їх розбіжність.

а)  $\int_{-\infty}^{-1} \frac{7dx}{(x^2 - 4x) \ln 5};$

б)  $\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{(x^2 - 1)^3} \ln 2}.$

### Варіант 20

Знайдіть невизначені інтеграли

1.  $\int \frac{1 - 3x}{4x^2 - 1} dx.$

2.  $\int \sin^2 3x dx.$

3.  $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx.$

4.  $\int \frac{dx}{2x^2 - 3x - 2}.$

5.  $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - x + 3}}.$

6.  $\int \frac{x - 4}{3x^2 + x - 1} dx.$

7.  $\int \frac{x - 8}{\sqrt{4x^2 + x - 5}} dx.$

8.  $\int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^4} dx.$

9.  $\int (x^2 - x + 1) \ln x dx.$

10.  $\int (x^2 - 3) \cos x dx.$

11.  $\int x \cos(x - 4) dx.$

12.  $\int \ln(x + 8) dx.$

13.  $\int \frac{6x^2}{(x^2 + 3x + 2)(x - 1)} dx.$

14.  $\int \frac{3x - x^2 - 2}{x(x + 1)^2} dx.$

15.  $\int \frac{19x - x^2 - 34}{(x^2 - 4x + 13)(x + 1)} dx.$

16.  $\int \frac{\sqrt[6]{3x + 1} + 1}{\sqrt{3x + 1} - \sqrt[3]{3x + 1}} dx.$

17.  $\int \frac{\cos^3 2x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 2x}}.$

Обчисліть визначені інтеграли.

18.  $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1 + 5 \operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx.$

19.  $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{4 + \sqrt{\sin x}}.$

20. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями

а)  $y = 2x^2 + 8x + 7,$

$y = x^2 + 5x + 5;$

б)  $x = \sqrt{e^y - 1}, x = 0, y = \ln 2;$

в)  $\begin{cases} x = 6 \cos t, \\ y = 4 \sin t, \end{cases}$

$y = 2\sqrt{3}, y \geq 2\sqrt{3};$

г)  $\rho = 1 + \sqrt{2} \cos \varphi$

21. Обчисліть довжину дуги кривої

а)  $y = \sqrt{x - x^2} - \arccos x + 5,$

$\frac{1}{9} \leq x \leq 1;$

б)  $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases} \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{2\pi}{3};$

в)  $\rho = 8(1 - \cos \varphi),$

$-\frac{2\pi}{3} \leq \varphi \leq 0.$

22. Знайдіть об'єм тіла, що утворюється при обертанні навколо осі  $l = OX$  фігури, обмеженої лініями

а)  $y = x^2 + 6x + 9, y = -1 - x;$

б)  $y = x^2, y = 1, x = 2.$

23. Обчисліть невідомі інтеграли або доведіть їх розбіжність.

а)  $\int_{1/3}^{\infty} \frac{\pi dx}{(9x^2 + 1) \arctg^2 3x};$

б)  $\int_0^{1/3} \frac{dx}{9x^2 - 9x + 2}.$

### Варіант 21

Знайдіть невизначені інтеграли

1.  $\int \frac{x - 5}{3 - 2x^2} dx.$

2.  $\int (1 - \cos 3x)^2 dx.$

3.  $\int \frac{\cos 2x}{\sin^4 2x} dx.$

4.  $\int \frac{dx}{2x^2 - 6x + 1}.$

5.  $\int \frac{dx}{\sqrt{2 - x - 2x^2}}.$

6.  $\int \frac{3x + 1}{x^2 - 4x - 2} dx.$

7.  $\int \frac{3x + 4}{\sqrt{2 + 3x - x^2}} dx.$

8.  $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + 9}}.$

9.  $\int \sqrt{x} \ln x dx.$

10.  $\int (x^2 + 1)e^{-x} dx.$

11.  $\int x \sin(x + 4) dx.$

12.  $\int \arctg \frac{x}{5} dx.$



$$13. \int \frac{6x^4}{(x^2 - 1)(x + 2)} dx.$$

$$14. \int \frac{2x^3 + 2x^2 + 4x + 3}{x^3 + x^2} dx.$$

$$15. \int \frac{4x^2 + 38}{(x^2 - 2x + 10)(x + 2)} dx.$$

$$16. \int \frac{\sqrt{x}}{x - 4\sqrt[3]{x^2}} dx.$$

$$17. \int \frac{\sin^3 2x dx}{\sqrt[3]{\cos^2 2x}}.$$

Обчисліть визначені інтеграли.

$$18. \int_0^6 \frac{dx}{1 + \sqrt{3x - 2}}.$$

$$19. \int_2^5 \frac{x^2 dx}{(x - 1)\sqrt{x - 1}}.$$

20. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями

а)  $y = 2x^2 - 12x + 16,$   
 $y = x^2 - 5x + 4;$

б)  $y = \frac{1}{1 + \cos x},$   $y = 0,$   
 $x = -\pi/2, x = \pi/2.$

в)  $\begin{cases} x = 4\sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = \sqrt{2} \sin^3 t, \end{cases}$   $x = 2,$

$x \geq 2;$

г)  $\rho = 2 \sin \varphi, \rho = 3 \sin \varphi.$

21. Обчисліть довжину дуги кривої

а)  $y = x^2 \cos x, y = 0,$   
 $0 \leq x \leq \pi/2;$

б)  $\begin{cases} x = 8(t - \sin t), \\ y = 8(1 - \cos t), \end{cases}$

$0 \leq t \leq 2\pi/3;$

в)  $\rho = 3(1 - \cos \varphi), -\pi/3 \leq \varphi \leq 0.$

22. Знайдіть об'єм тіла, що утворюється при обертанні навколо осі  $l = OY$  фігури, обмеженої лініями

а)  $y = x^2 - 4x + 4, y = 2x - 4;$

б)  $y = \arcsin x, y = \arccos x,$   
 $y = 0.$

23. Обчисліть невласні інтеграли або доведіть їх розбіжність.

а)  $\int_2^{\infty} \frac{\pi dx}{(x^2 + 4)\sqrt{\pi \operatorname{arctg} \frac{x}{2}}};$

б)  $\int_0^{\pi/2} \frac{3 \sin^3 x dx}{\sqrt{\cos x}}.$

## Варіант 22

Знайдіть невизначені інтеграли

1.  $\int \frac{x + 4}{\sqrt{9 - x^2}} dx.$

2.  $\int \cos^2 \frac{2x}{5} dx.$

3.  $\int \sin^2 2x \cos 2x dx.$

4.  $\int \frac{dx}{2x^2 - 3x + 2}$ .
5.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3x - 1}}$ .
6.  $\int \frac{x-5}{2x^2 + x - 4} dx$ .
7.  $\int \frac{x-6}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx$ .
8.  $\int x^2 \sqrt{1-x^2} dx$ .
9.  $\int \frac{\ln(\sin x)}{\cos^2 x} dx$ .
10.  $\int (x^2 - 1)e^x dx$ .
11.  $\int x \cos(x+9) dx$ .
12.  $\int \ln(x+12) dx$ .
13.  $\int \frac{2x^2 - 26}{(x^2 + 4x + 3)(x+5)} dx$ .
14.  $\int \frac{2x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x + 1}{x(x-1)^2} dx$ .
15.  $\int \frac{8}{(x^2 + 6x + 13)(x+1)} dx$ .
16.  $\int \frac{x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}}{x(\sqrt[3]{x} + 1)} dx$ .
17.  $\int \cos^3 x \sin^4 x dx$ .

Обчисліть визначені інтеграли.

18.  $\int_0^3 x^2 \sqrt{9-x^2} dx$ .

19.  $\int_0^{\ln 2} \frac{dx}{e^x \sqrt{1+e^{-2x}}}$ .

20. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями

а)  $x = y^2 - 2, y = -x$ ;

б)  $y = x^2 \sqrt{16-x^2}, y = 0, 0 \leq x \leq 4$ ;

в)  $\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = 4\sqrt{2} \sin^3 t, \end{cases} y = 4, y \geq 4$ ;

г)  $\rho = 3(1 + \cos \varphi)$ .

21. Обчисліть довжину дуги кривої

а)  $y = \ln \sin x, \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ;

б)  $\begin{cases} x = 8(\cos t + t \sin t), \\ y = 8(\cos t - t \sin t), \end{cases}$

$0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$ ;

в)  $\rho = 3\varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{5}{12}$ .

22. Знайдіть об'єм тіла, що утворюється при обертанні навколо осі  $l = OX$  фігури, обмеженої лініями

а)  $y = x^2 - 6x + 10, y = x$ ;

б)  $y = 2x - x^2, y = -x + 2$ .

23. Обчисліть невласні інтеграли або доведіть їх розбіжність.

а)  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2x) \ln 3}$ ;

$$6) \int_0^3 \frac{\sqrt[3]{9x} dx}{\sqrt[3]{9-x^2}}.$$

### Варіант 23

Знайдіть невизначені інтеграли

$$1. \int \frac{2x-7}{x^2-5} dx.$$

$$2. \int \sin^3 5x dx.$$

$$3. \int \frac{\cos x}{\sin^4 x} dx.$$

$$4. \int \frac{dx}{x^2+7x+11}.$$

$$5. \int \frac{dx}{\sqrt{5-7x-3x^2}}.$$

$$6. \int \frac{2x+3}{3x^2+2x-7} dx.$$

$$7. \int \frac{2x+3}{\sqrt{2x^2-x+6}} dx.$$

$$8. \int x^3 \sqrt{1-x^2} dx.$$

$$9. \int x \ln(x^2+1) dx.$$

$$10. \int x^2 \cos^2 x dx.$$

$$11. \int (x+3)e^{-x} dx.$$

$$12. \int \arcsin \frac{x}{5} dx.$$

$$13. \int \frac{2x^2+12x-6}{(x^2+8x+15)(x+1)} dx.$$

$$14. \int \frac{x^3-4x+5}{(x^2-1)(x-1)} dx.$$

$$15. \int \frac{x^2+4x+20}{(x^2-4x+13)(x+1)} dx.$$

$$16. \int \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x^2}} dx.$$

$$17. \int \cos^4 x \sin^2 x dx.$$

Обчисліть визначені інтеграли.

$$18. \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{x}{\sin^2 x} dx.$$

$$19. \int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}.$$

20. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями

$$a) \quad x = y^2 - 2y - 1, \quad y = 1 - x;$$

$$б) \quad y = \frac{1}{x^2} e^{1/x}, \quad y = 0, \quad x = 1, \\ x = 2;$$

$$в) \quad \begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 8 \sin t, \end{cases} \quad y = 4\sqrt{}$$

$$y \geq 4\sqrt{3};$$

$$г) \quad \rho = 2 \sin 4\varphi.$$

21. Обчисліть довжину дуги кривої

$$a) \quad y = \operatorname{ch} x + 3, \quad 0 \leq x \leq 1;$$

$$б) \quad \begin{cases} x = 4 \cos^3 t, & \frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{4}; \\ y = 4 \sin^3 t, & \end{cases}$$

$$в) \quad \rho = 5 \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}.$$

22. Знайдіть об'єм тіла, що утворюється при обертанні

навколо осі  $l = OY$  фігури, обмеженої лініями

а)  $y = x^2 - 4x + 5, y = 2x - 3;$

б)  $y = x^2 + 1, y = x, x = 0, x = 1.$

**23.** Обчисліть невластні інтеграли або доведіть їх розбіжність.

а)  $\int_0^{\infty} x e^{-3x} dx;$  б)  $\int_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt[3]{1-x^5}}.$

### Варіант 24

Знайдіть невизначені інтеграли

1.  $\int \frac{7x-2}{\sqrt{x^2-1}} dx.$

2.  $\int \sin^4 x dx.$

3.  $\int \sin 3x \sin 2x dx.$

4.  $\int \frac{dx}{2x^2-3x+1}.$

5.  $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-x+5}}.$

6.  $\int \frac{x-3}{4x^2+2x-3} dx.$

7.  $\int \frac{x-9}{\sqrt{4+2x-x^2}} dx.$

8.  $\int \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^4} dx.$

9.  $\int x \ln^2 x dx.$

10.  $\int (x^2+x) \sin x dx.$

11.  $\int \arccos x dx.$

12.  $\int \ln(2x-1) dx.$

13.  $\int \frac{2x^4-5x^3-15x^2+40x-70}{(x^2+2x-3)(x-4)} dx$

14.  $\int \frac{3x^2+2}{x(x+1)^2} dx.$

15.  $\int \frac{5x+13}{(x^2+6x+13)(x+1)} dx.$

16.  $\int \frac{\sqrt{x}}{3x+\sqrt[3]{x^2}} dx.$

17.  $\int \cos^2 x \sin^4 x dx.$

Обчисліть визначені інтеграли.

18.  $\int_0^{\pi/3} \frac{x}{\cos^2 x} dx$

19.  $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}.$

20. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями

а)  $x = y^2 + 2y - 1, y = -1 - x;$

б)  $x = \sqrt{4-y^2}, x = 0, y = 0,$

$y = 1;$

в)  $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases}$

$y = 2, y \geq 2, 0 \leq x \leq 4\pi;$

г)  $\rho = \cos \varphi - \sin \varphi.$

21. Обчисліть довжину дуги кривої

a)  $y = 1 + \arcsin x - \sqrt{1 - x^2},$

$0 \leq x \leq \frac{3}{4};$

б) 
$$\begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases}$$

$0 \leq t \leq \frac{3\pi}{2};$

в)  $\rho = 3 \sin \varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{4}{3}.$

**22.** Знайдіть об'єм тіла, що утворюється при обертанні навколо осі  $l = OX$  фігури, обмеженої лініями

a)  $y = x^2 - 6x + 11, y = x + 1;$

б)  $y = x^2 - 3x, y = 0.$

**23.** Обчисліть невластні інтеграли або доведіть їх розбіжність.

a)  $\int_{-\infty}^0 \left( \frac{x^2}{x^3 - 1} - \frac{x}{1 + x^2} \right) dx;$

б)  $\int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{64 - x^6}}.$

### Варіант 25

Знайдіть невизначені інтеграли

1.  $\int \frac{1 + 3x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$

2.  $\int \cos^4 x dx.$

3.  $\int \cos^3 x \sin x dx.$

4.  $\int \frac{dx}{5x^2 - 10x + 25}.$

5.  $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x - x^2}}.$

6.  $\int \frac{x + 2}{3x^2 - x + 5} dx.$

7.  $\int \frac{2x + 7}{\sqrt{x^2 + 5x - 4}} dx.$

8.  $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 9)^3}}.$

9.  $\int x^2 \ln x dx.$

10.  $\int (x^2 + x) \cos x dx.$

11.  $\int (x^2 - 3)e^x dx.$

12.  $\int \ln(2x + 3) dx.$

13.  $\int \frac{2x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 13}{(x^2 - 5x + 6)(x + 1)} dx.$

14.  $\int \frac{x + 5}{x^3 - x^2 - x + 1} dx.$

15.  $\int \frac{4x^2 + x + 10}{x^3 + 8} dx.$

16.  $\int \frac{\sqrt{x}}{1 - \sqrt[3]{x}} dx.$

17.  $\int \sin^3 x \cos^8 x dx.$

Обчисліть визначені інтеграли.

18.  $\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx.$

19.  $\int_{e^2}^{e^3} \frac{\ln x dx}{x(1 - \ln^2 x)}.$

**20.** Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями

а)  $x = y^2 + 2y - 2,$   
 $y = -2 - x;$

б)  $y = (x-1)^2, y = x-1;$

в)  $\begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos t, \\ y = 5\sqrt{2} \sin t, \end{cases} y = 5, y \geq 5;$

г)  $\rho = 3 \sin \varphi, \rho = 5 \sin \varphi.$

**21.** Обчисліть довжину дуги кривої

а)  $y = \ln \cos x + 2, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6};$

б)  $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases} 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2};$

в)  $\rho = 5\varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{5}{12}.$

**22.** Знайдіть об'єм тіла, що утворюється при обертанні навколо осі  $l = OX$  фігури, обмеженої лініями

а)  $y = x^2 + 6x + 11,$   
 $y = -x + 1;$

б)  $y = 3 \sin x, y = \sin x, 0 \leq x \leq \pi.$

**23.** Обчисліть невласні інтеграли або доведіть їх розбіжність.

а)  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{2x^2 - 2x + 1};$  б)  $\int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt[9]{1-2x}}.$

## Варіант 26

Знайдіть невизначені інтеграли

1.  $\int \frac{x-5}{x^2+7} dx.$

2.  $\int \cos^3 4x dx.$

3.  $\int \sin 5x \cos 3x dx.$

4.  $\int \frac{dx}{2x^2+6x+3}.$

5.  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}.$

6.  $\int \frac{3x-2}{x^2+5x-1} dx.$

7.  $\int \frac{3x-4}{\sqrt{2x^2-6x+1}} dx.$

8.  $\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x^4} dx.$

9.  $\int x \ln(x+1) dx.$

10.  $\int (x^2+1)e^x dx.$

11.  $\int x e^{-4x} dx.$

12.  $\int \arccos \frac{x}{5} dx.$

13.  $\int \frac{6x^4 - 21x^2 + 3x + 24}{(x^2+x-2)(x+1)} dx.$

14.  $\int \frac{3x^2 - 7x + 2}{(x^2-x)(x-1)} dx.$

15.  $\int \frac{4x^2 + 7x + 5}{(x-1)(x^2+2x+5)} dx.$

$$16. \int \frac{x - \sqrt[3]{x^2}}{x(\sqrt[6]{x} + 1)} dx.$$

$$17. \int \frac{3 \cos^3 x dx}{\sin^4 x}.$$

Обчисліть визначені інтеграли.

$$18. \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

$$19. \int_4^9 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x}-1}.$$

20. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями

а)  $x = y^2 - 2y - 2, y = -x;$

б)  $y = \cos^5 x \sin 2x,$

$y = 0, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2};$

в)  $\begin{cases} x = 8 \cos^3 t, \\ y = 8 \sin^3 t, \end{cases} x = 1, x \geq 1;$

г)  $\rho = 4 \cos 4\varphi.$

21. Обчисліть довжину дуги кривої

а)  $y = \arccos \sqrt{x} - \sqrt{x-x^2} + 4,$

$0 \leq x \leq \frac{1}{2};$

б)  $\begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases}$

$0 \leq t \leq 3\pi;$

в)  $\rho = 6 \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}.$

22. Знайдіть об'єм тіла, що утворюється при обертанні навколо осі  $l = OX$  фігури, обмеженої лініями

а)  $y = x^2 + 6x + 11,$

$y = -x + 1;$

б)  $x = y^2, y = 2, x = 0.$

23. Обчисліть невластні інтеграли або доведіть їх розбіжність.

а)  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)};$  б)  $\int_1^5 \frac{x^2 dx}{\sqrt{31(x^3-1)}}.$

### Варіант 27

Знайдіть невизначені інтеграли

1.  $\int \frac{3-7x}{x^2+1} dx.$

2.  $\int \cos^2 7x dx.$

3.  $\int \sin x \cos 4x dx.$

4.  $\int \frac{dx}{x^2-6x+8}.$

5.  $\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x-x^2}}.$

6.  $\int \frac{x-7}{4x^2+3x-1} dx.$

7.  $\int \frac{2x+5}{\sqrt{3x^2+9x-4}} dx.$

8.  $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}.$

9.  $\int \sin(\ln x) dx.$

10.  $\int (x^2 - 1)e^{-x} dx.$

11.  $\int x \cos(x + 7) dx.$

12.  $\int \operatorname{arctg} \frac{x}{4} dx.$

13.  $\int \frac{2x^4 - 3x^3 - 21x^2 - 26}{(x^2 - 5x + 4)(x + 3)} dx.$

14.  $\int \frac{x^2 + x + 2}{x^3 + x^2} dx.$

15.  $\int \frac{3x^2 + 2x + 1}{x^3 - 1} dx.$

16.  $\int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[4]{x}} dx.$

17.  $\int \sqrt[5]{\cos^3 x \sin^5 x} dx.$

Обчисліть визначені інтеграли.

18.  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+3} + \sqrt{(x+3)^3}}.$

19.  $\int_{\sqrt{7}}^{\sqrt{26}} \frac{x^3 dx}{(1+x^2)^{2/3}}.$

20. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями

а)  $y = 2x^2 - 8x + 6,$   
 $y = x^2 - 3x;$

б)  $y = x^2 \cos x,$   
 $y = 0, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2};$

в)  $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases} \quad y = 6,$

$y \geq 6, 0 \leq x \leq 8\pi;$

г)  $\rho = 2 \sin \varphi, \rho = 4 \sin \varphi.$

21. Обчисліть довжину дуги кривої

а)  $y = e^x + 13,$   
 $\ln \sqrt{15} \leq x \leq \ln \sqrt{24};$

б)  $\begin{cases} x = 2(\cos t + t \sin t), \\ y = 2(\cos t - t \cos t), \end{cases}$

$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2};$

в)  $\rho = 3(1 + \sin \varphi), -\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq 0.$

22. Знайдіть об'єм тіла, що утворюється при обертанні навколо осі  $l = OY$  фігури, обмеженої лініями

а)  $y = x^2 - 4x + 4, y = 4 - 2x;$

б)  $y = \arccos x, y = \arcsin x,$   
 $x = 0.$

23. Обчисліть невласні інтеграли або доведіть їх розбіжність.

а)  $\int_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x - 1)^2};$

б)  $\int_1^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{3x - x^2 - 2}}.$



## Варіант 28

Знайдіть невизначені інтеграли

1.  $\int \frac{8-2x}{3x^2+1} dx.$

2.  $\int (\sin x - 5)^2 dx.$

3.  $\int \cos 7x \cos 5x dx.$

4.  $\int \frac{dx}{1-2x-3x^2}.$

5.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5x+1}}.$

6.  $\int \frac{2x+1}{5x^2+2x+10} dx.$

7.  $\int \frac{4x+3}{\sqrt{2x^2-x+5}} dx.$

8.  $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}.$

9.  $\int (x^2-4) \sin 5x dx.$

10.  $\int x \sin^2 x dx.$

11.  $\int x e^{-5x} dx.$

12.  $\int \arcsin \frac{x}{7} dx.$

13.  $\int \frac{7x^2-17x}{(x^2-2x-3)(x-2)} dx.$

14.  $\int \frac{1}{x^3-x^2} dx.$

15.  $\int \frac{6x}{x^3-1} dx.$

16.  $\int \frac{\sqrt{3x+1}-1}{\sqrt{3x+1}+\sqrt[3]{3x+1}} dx.$

17.  $\int \cos^5 x \sin^4 x dx.$

Обчисліть визначені інтеграли.

18.  $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{1+\ln x}{2x} dx.$

19.  $\int_0^{13} \frac{(x+1) dx}{\sqrt[3]{2x+1}}.$

20. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями

а)  $y = 2x^2 - 8x + 7,$

$y = x^2 - 5x + 5;$

б)  $y = x\sqrt{9-x^2}, \quad y = 0,$   
 $0 \leq x \leq 3;$

в)  $\begin{cases} x = 10(t - \sin t), \\ y = 10(1 - \cos t), \end{cases} y = 15,$

$y \geq 15, 0 \leq x \leq 20\pi;$

г)  $\rho = \frac{1}{2} + \cos \varphi.$

21. Обчисліть довжину дуги кривої

а)  $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + 3, 0 \leq x \leq 2;$

б)  $\begin{cases} x = 2 \cos t - \cos 2t, \\ y = 2 \sin t - \sin 2t, \end{cases}$

$\frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{\pi}{2};$

в)  $\rho = 3 \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}.$

**22.** Знайдіть об'єм тіла, що утворюється при обертанні навколо осі  $l = OX$  фігури, обмеженої лініями

а)  $y = x^2 - 2x + 1, y = x + 1;$

б)  $x = (y - 1)^2, y = 0, y = 2, x = 0.$

**23.** Обчисліть невластні інтеграли або доведіть їх розбіжність.

а)  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(6x^2 - 5x + 1)\ln(3/4)};$

б)  $\int_0^4 \frac{10x dx}{\sqrt[4]{(16 - x^2)^3}}.$

### Варіант 29

Знайдіть невизначені інтеграли

1.  $\int \frac{3x + 7}{\sqrt{x^2 + 4}} dx.$

2.  $\int \sin^3 4x dx.$

3.  $\int \cos^4 2x \sin 2x dx.$

4.  $\int \frac{dx}{2x^2 + 3x + 6}.$

5.  $\int \frac{dx}{\sqrt{3 - x - x^2}}.$

6.  $\int \frac{x - 4}{5x^2 - x + 7} dx.$

7.  $\int \frac{3x - 7}{\sqrt{x^2 - 5x + 1}} dx.$

8.  $\int \frac{\sqrt{16 - x^2}}{x^4} dx.$

9.  $\int \ln(x + 5) dx$

10.  $\int \arcsin 9x dx.$

11.  $\int x e^{x+3} dx.$

12.  $\int \operatorname{arctg} 6x dx.$

13.  $\int \frac{6x^4 - 30x^2 + 30}{(x^2 - 1)(x + 2)} dx.$

14.  $\int \frac{2x^2 + 1}{x^3 - 2x^2 + x} dx.$

15.  $\int \frac{5x^2 + 17x + 36}{(x^2 + 6x + 13)(x + 1)} dx.$

16.  $\int \frac{\sqrt{x}}{4x - \sqrt[3]{x^2}} dx.$

17.  $\int \cos^2 3x \sin^4 3x dx.$

Обчисліть визначені інтеграли.

18.  $\int_{-4}^0 7x \cos x dx.$

19.  $\int_{\ln 5}^{\ln 12} \frac{dx}{\sqrt{4 + e^x}}.$

**20.** Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями

а)  $y = x^2 - 2x - 1,$

$2y = 3x - 2;$

б)  $y^2 = 4 - x, x = y^2 - 2y;$

$$в) \begin{cases} x = 8(t - \sin t), \\ y = 8(1 - \cos t), \end{cases} \quad y = 12,$$

$$y \geq 12, 0 \leq x \leq 16\pi;$$

$$г) \quad \rho = 2 \cos \varphi, \quad \rho = 3 \cos \varphi.$$

**21.** Обчисліть довжину дуги кривої

$$а) \quad y = 1 - \ln \cos x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6};$$

$$б) \begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases}$$

$$\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi;$$

$$в) \quad \rho = 2(1 - \cos \varphi),$$

$$-\pi \leq \varphi \leq -\frac{\pi}{2}.$$

**22.** Знайдіть об'єм тіла, що утворюється при обертанні навколо осі  $l = OX$  фігури, обмеженої лініями

$$а) \quad y = x^2 + 2x + 1, \quad y = 1 - x;$$

$$б) \quad x = y^3, \quad y = x.$$

**23.** Обчисліть невласні інтеграли або доведіть їх розбіжність.

$$а) \int_1^{\infty} \frac{dx}{9x^2 - 9x + 2}; \quad б) \int_0^{1/4} \frac{dx}{\sqrt[3]{1 - 4x}}.$$

### Варіант 30

Знайдіть невизначені інтеграли

$$1. \quad \int \frac{6 - 5x}{\sqrt{4 - 3x^2}} dx.$$

$$2. \quad \int \sin^2 \frac{3x}{4} dx.$$

$$3. \quad \int \cos 3x \cos x dx.$$

$$4. \quad \int \frac{dx}{3x^2 + 5x + 1}.$$

$$5. \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 1}}.$$

$$6. \quad \int \frac{x}{2x^2 + x + 5} dx.$$

$$7. \quad \int \frac{7x - 1}{\sqrt{2 - 3x - x^2}} dx.$$

$$8. \quad \int \frac{\sqrt{16 - x^2}}{x^2} dx.$$

$$9. \quad \int \ln \frac{2 - x}{x + 2} dx.$$

$$10. \quad \int x \operatorname{arctg} 2x dx.$$

$$11. \quad \int x \cos(2 - x) dx.$$

$$12. \quad \int \arccos \frac{x}{3} dx.$$

$$13. \quad \int \frac{3x^2 - 17x + 2}{(x^2 + 5x + 6)(x - 1)} dx.$$

$$14. \quad \int \frac{2x^3 + 5x^2 - 1}{x^3 + x^2} dx.$$

$$15. \quad \int \frac{2x + 22}{(x^2 - 2x + 10)(x + 2)} dx.$$

$$16. \quad \int \frac{\sqrt{x+1} - 1}{(\sqrt[3]{x+1} + 1)\sqrt{x+1}} dx.$$

$$17. \quad \int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}.$$

Обчисліть визначені інтеграли.

18.  $\int_0^{\pi/6} \frac{dx}{3+2\cos x}$ .

19.  $\int_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$ .

20. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями

а)  $y = x^2 - 2x$ ,  
 $y = -x^2 + 2x + 6$ ;

б)  $y = \frac{x}{(x^2 + 1)^2}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ ;

в)  $\begin{cases} x = 2\sqrt{2} \cos t, \\ y = 3\sqrt{2} \sin t, \end{cases} \quad y = 3,$

$y \geq 3$ ;

г)  $\rho = 4 \sin 3\varphi$ .

21. Обчисліть довжину дуги кривої

а)  $y = -\ln \cos x$ ,  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ ;

б)  $\begin{cases} x = 6(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 6(2 \sin t - \sin 2t); \end{cases}$

$0 \leq t \leq \pi$ ;

в)  $\rho = e^{12\varphi/5}$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ .

22. Знайдіть об'єм тіла, що утворюється при обертанні навколо осі  $l = OY$  фігури, обмеженої лініями

а)  $y = x^2 - 2x + 1$ ,  $y = 2x - 2$ ;

б)  $y = x^2 - 2x + 1$ ,  $x = 2$ ,  $y = 0$ .

23. Обчисліть невласні інтеграли або доведіть їх розбіжність.

а)  $\int_3^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$ ; б)  $\int_0^{1/2} \frac{dx}{(2x-1)^2}$ .

## Економічний зміст інтеграла

**24.** Деяка компанія визначила, що її маржинальна функція прибутку має вигляд  $P'(x) = Ax^2 + Bx + C$ , де  $x$  – кількість проданих одиниць продукції. Знайти прибуток, який компанія одержить від продажу  $n$  одиниць продукції, якщо  $P(m) = 0$  (компанія одержує нульовий прибуток після продажу  $m$  одиниць продукції). Знайти загальний прибуток, який отримає компанія, якщо кількість одиниць проданої продукції збільшиться з  $k_1$  до  $k_2$  одиниць.

Таблиця 1

Варі-ант.	$A$	$B$	$C$	$n$	$m$	$k_1$	$k_2$
<b>1</b>	-3	200	50	10	1	5	10
<b>2</b>	-9	180	70	8	2	3	8
<b>3</b>	-18	240	60	9	3	4	9
<b>4</b>	-12	220	90	12	2	6	12
<b>5</b>	-6	260	40	11	1	6	11
<b>6</b>	-9	280	60	10	3	4	10
<b>7</b>	-21	200	50	9	2	5	9
<b>8</b>	-3	300	80	7	3	2	7
<b>9</b>	-18	260	90	6	1	2	6
<b>10</b>	-9	220	40	8	2	4	8
<b>11</b>	-6	200	50	12	3	7	12
<b>12</b>	-12	200	70	11	1	5	11

*Продовження табл. 1*

<b>13</b>	-21	180	60	10	3	5	10
<b>14</b>	-3	280	80	9	2	4	9
<b>15</b>	-18	300	90	8	1	3	8
<b>16</b>	-24	160	80	8	3	2	8
<b>17</b>	-6	240	70	9	2	4	9
<b>18</b>	-9	220	60	10	1	5	10
<b>19</b>	-18	200	90	11	2	6	11
<b>20</b>	-3	300	50	12	3	5	12
<b>21</b>	-12	260	40	8	1	3	8
<b>22</b>	-9	200	70	6	3	2	6
<b>23</b>	-24	180	50	7	2	2	7
<b>24</b>	-6	240	60	9	1	4	9
<b>25</b>	-18	200	80	10	2	5	10
<b>26</b>	-21	220	90	11	3	6	11
<b>27</b>	-12	200	40	12	1	7	12
<b>28</b>	-3	280	70	9	3	4	9
<b>29</b>	-9	180	50	8	2	3	8
<b>30</b>	-24	140	60	10	1	6	10