

Індивідуальні завдання з теми

«Диференціальне числення функцій багатьох змінних. Диференціальні рівняння. Ряди»

Варіант 1

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції

а) $z = \frac{3xy}{2x-5y}$; б) $z = \frac{1}{\sqrt{y-\sqrt{x}}}$.

2. Обчисліть значення частинних похідних функції

$u = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ у точці

$M_0(0, -1, 1)$.

3. Знайдіть повний диференціал функції

$z = 2x^3y - 4xy^5$.

4. Обчисліть значення похідної складеної функції

$u = e^{x-2y}$, де $x = \sin t$, $y = t^3$ при $t = 0$.

5. Знайдіть $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо

$z = v^2 + \sqrt{uw} + \sin u$, $v = x + y$;
 $w = x^2 - y$; $u = xy$.

6. Для функції

$z = \ln(x + 1/y)$, точки $P_0(1, 1)$ та вектора $\vec{a} = \{1, -1\}$ знайдіть

$\text{grad } z(P_0)$ і $\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}(P_0)$.

7. Обчисліть наближено $(1.01)^{3.01}$.

8. Доведіть, що функція $z = \sqrt{x} \sin \frac{y}{x}$ задовольняє

рівняння $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2} z$.

9. Дослідіть на екстремум функцію

$z = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 14y$.

10. Знайдіть умовний екстремум функції

$z = x^2 + y^2 - xy - 4x$ за умови $2x + 3y - 12 = 0$.

11. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $z = 3x + y - xy$ в заданій області $D: y = x, y = 4, x = 0$.

Знайдіть загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

12. $e^{x+3y} dy = x dx$.

13. $(xy + x^3y)y' = 1 + y^2$.

14. $y - xy' = x \sec(y/x)$.

15. Знайдіть частинний розв'язок (частинний інтеграл) диференціального рівняння

$(x^2 + 1)y' + 4xy = 3, y(0) = 0$.

16. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння $y' + y = x\sqrt{y}$.

Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння

17. а) $y'' + 4y = 0$;

б) $y'' - 10y' + 25y = 0$;

в) $y'' + 3y' + 2y = 0$.

18. $y'' + y' = 2x - 1$.

19. $y'' - 8y' + 17y = 10e^{3x}$.

20. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початкові умови.

$$y'' - 2y' + y = -12\cos 2x - 9\sin 2x, \\ y(0) = -2, \quad y'(0) = 0.$$

21. Дослідіть збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ і знайдіть його суму.

Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (n+2)!}{n^5}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 2}}$.

25. Дослідіть на збіжність і абсолютну збіжність

знакопечерговий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)3^n}.$$

26. Знайдіть область збіжності функціональних рядів

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n^2 + 1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1}$.

27. Запишіть ряд Маклорена функції $f(x) = \cos 5x$. Вкажіть область збіжності отриманого ряду до цієї функції.

28. Користуючись розкладом у степеневий ряд відповідно підбраної функції, обчисліть e із заданою точністю $\alpha = 0,0001$.

29. Розв'яжіть у ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi, \pi)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ x-1, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

30. Розв'яжіть у ряд Фур'є періодичну з періодом $\omega = 2l$ функцію $f(x) = |x|$, задану на інтервалі $-1 < x < 1, l = 1$.

31. Розв'яжіть у ряд Фур'є за косинусами функцію $f(x) = 2x - 1$, задану на відрізку $[0, \pi]$.

Варіант 2

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції

а) $z = \arcsin(x - y)$;

б) $u = \arcsin \frac{x}{a} + \arccos \frac{y}{b} + \operatorname{arctg} \frac{z}{c}$.

2. Обчисліть значення частинних похідних функції

$u = \ln \left(x + \frac{y}{2z} \right)$ у точці

$M_0(1, 2, 1)$.

3. Знайдіть повний диференціал функції

$z = x^2 y \sin x - 3y$.

4. Обчисліть значення похідної складеної функції

$u = \ln(e^x + e^{-y})$, де $x = t^2$,

$y = t^3$ при $t = -1$.

5. Знайдіть $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо

$z = u^2 w - w^2 u$, $u = x \cos x$,

$w = x \sin y$.

6. Для функції

$z = (x^2 + y^2)^{3/2}$, точки $P_0(2, 1)$

та вектора $\vec{a} = \{-1, 1\}$ знайдіть

$\operatorname{grad} z(P_0)$ і $\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}(P_0)$.

7. Обчисліть наближено $(1.08)^{3.96}$.

8. Доведіть, що функція $z = (x + a)(y + b)$ задовольняє

рівняння $\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} = z$.

9. Дослідіть на екстремум функцію $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 15$.

10. Знайдіть умовний екстремум функції $z = xy$ при $x^2 + y^2 = 1$.

11. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $z = xy - x - 2y$ в заданій області $D: x = 3, y = x, y = 0$.

Знайдіть загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

12. $y' \sin x = y \ln y$.

13. $\frac{y'}{7^{y-x}} = 3$.

14. $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0$.

15. Знайдіть частинний розв'язок (частинний інтеграл) диференціального рівняння $y' + y \operatorname{tg} x = \sec x$, $y(0) = 0$.

16. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння

$ydx + 2xdy = 2y\sqrt{x} \sec^2 y dy$.

Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння.

17. а) $y'' - y' - 2y = 0$;

б) $y'' + 9y = 0$;

в) $y'' + 4y' + 4y = 0$.

18. $y'' - 2y' + 5y = 10e^{-x} \cos 2x$.

19. $y'' + y' - 6y = (6x + 1)e^{3x}$.

20. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початкові умови.

$$y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 39x + 65,$$
$$y(0) = -1, y'(0) = 1.$$

21. Дослідіть збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{12^n}$$
 і знайдіть його суму.

Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами

22.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n-1}{5^n(n+1)!}$$
.

23.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n-1}{5n} \right)^{n^2}$$
.

24.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^5}}$$
.

25. Дослідіть на збіжність і абсолютну збіжність знакопечерговий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$
.

26. Знайдіть область збіжності функціональних рядів

а)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{2^{n-1}3^n}$$
;

б)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^n \ln(1+1/n)}$$
.

27. Запишіть ряд Тейлора функції $f(x) = \frac{1}{x}$ в околі точки

$\sqrt[5]{250}$ та знайдіть область його збіжності.

28. Користуючись розкладом у степеневий ряд відповідно підбраної функції, обчисліть із заданою точністю $\alpha = 0,01$.

29. Розвиньте у ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi, \pi)$.

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1, & -\pi \leq x < 0, \\ 0, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

30. Розвиньте у ряд Фур'є періодичну з періодом $\omega = 2l$ функцію $f(x) = 2x$, задану на інтервалі $-1 < x < 1$, $l = 1$.

31. Розвиньте у ряд Фур'є за синусами функцію $f(x) = 3x + 2$, задану на відрізьку $[0, \pi]$.

Варіант 3

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції

а) $z = \sqrt{y^2 - x^2}$;

б) $u = \ln(-x^2 - y^2 + 2z)$.

2. Обчисліть значення частинних похідних функції

$u = (\sin x)^{yz}$ у точці

$M_0\left(\frac{\pi}{6}, 1, 2\right)$ з точністю до двох

знаків після коми.

3. Знайдіть повний диференціал функції

$z = \arctg x + \sqrt{y}$.

4. Обчисліть значення похідної складеної функції

$u = y^x$, де $x = \ln(t-1)$, $y = e^{\frac{t}{2}}$ при $t = 2$.

5. Знайдіть $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо

$z = 2uw - w^2u$, $u = y \cos x$,

$w = x \sin y$.

6. Для функції

$z = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$, точки

$P_0(3,1)$ та вектора $\vec{a} = \{3,4\}$

знайдіть $\text{grad } z(P_0)$ і $\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}(P_0)$.

7. 6. Обчисліть наближено $\sin 1.59 \text{tg } 3.09$.

8. Доведіть, що функція

$z = e^{\frac{x}{y^2}}$ задовольняє рівняння

$2x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

9. Дослідіть на екстремум функцію

$z = 1 + 15x - 2x^2 - 2y^2 - xy$.

10. Знайдіть умовний екстремум функції

$z = x^2 + 3y^2 + x - y$ при $x + y = 1$.

11. Знайдіть найбільше і найменше значення функції

$z = x^2 + 2xy + 8y - 4x$ в заданій області $D: y = 0, y = 2, x = 1, x = 0$.

Знайдіть загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

12. $y' = (2x - 1) \text{ctg } y$.

13. $y - xy' = 2(1 + x^2 y')$.

14. $(x + 2y)dx - xdy = 0$.

15. Знайдіть частинний розв'язок (частинний інтеграл) диференціального рівняння

$(1 - x)(y' + y) = e^{-x}$, $y(0) = 0$.

16. Знайдіть загальний розв'язок диференціального

рівняння $y' + y = e^x y^2$.

Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння

17. а) $y'' - 4y' = 0$;

б) $y'' - 4y' + 13y = 0$;

в) $y'' - 3y' + 2y = 0$.

18. $y'' - 2y' - 8y = 12\sin 2x - 36\cos 2x$.

19. $y'' - 7y' + 12y = 3e^{4x}$.

20. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початкові умови.

$$y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 8x + 6, \\ y(0) = 1, y'(0) = 4.$$

21. Дослідіть збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{12^n}$ і знайдіть його суму.

Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{8}\right)^n \left(\frac{1}{n}\right)^7$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2n+1}\right)^n$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n+2}$.

25. Дослідіть на збіжність і абсолютну збіжність знакопозитивний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln n}.$$

26. Знайдіть область збіжності функціональних рядів

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{8^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2^n}$.

27. Запишіть ряд Маклорена функції $f(x) = \sin x^2$. Вкажіть область збіжності отриманого ряду до цієї функції.

28. Користуючись розкладом у степеневий ряд відповідно підбраної функції, обчисліть $\sin 1$ із заданою точністю $\alpha = 0,00001$.

29. Розв'яжіть у ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi, \pi)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ x+2, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

30. Розв'яжіть у ряд Фур'є періодичну з періодом $\omega = 2l$ функцію $f(x) = e^x$, задану на інтервалі $-2 < x < 2$, $l = 2$.

31. Розв'яжіть у ряд Фур'є за косинусами функцію $f(x) = 2x - 1$, задану на відрізку $[0, \pi]$.

Варіант 4

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції

а) $z = \ln(4 - x^2 - y^2)$;

б) $z = \sqrt{(x^2 + y^2 - R^2)} \ln \frac{R^2}{x^2 + y^2}$.

2. Обчисліть значення частинних похідних функції $u = \ln(x^3 + 2y^3 - z^3)$ у точці $M_0(2, 1, 0)$.

3. Знайдіть повний диференціал функції $z = \arcsin(xy) - 3xy^2$.

4. Обчисліть значення похідної складеної функції $u = e^{y-2x+2}$, де $x = \sin t$, $y = \cos t$ при $t = \frac{\pi}{2}$.

5. Знайдіть $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо

$$z = \phi(\xi; \eta), \xi = x + y; \eta = x - y.$$

6. Для функції $z = \arctg(xy)$, точки $P_0(1, 1)$ та вектора $\vec{a} = \{1, 1\}$ знайдіть $\text{grad } z(P_0)$ і $\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}(P_0)$.

7. Обчисліть наближено $\sin 1.49 \arctg 0.07$.

8. Доведіть, що функція $z = \ln(e^x + e^y)$ задовольняє рівняння

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

9. Дослідіть на екстремум функцію

$$z = 1 + 6x - x^2 - y^2 - xy.$$

10. Знайдіть умовний екстремум функції $z = x^2 + 3y^2 + x - y$ при $x + y = 1$.

11. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $z = 5x^2 - 3xy + y^2$ в заданій області $D: y = 0, y = 1, x = 0, x = 1$.

Знайдіть загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння

12. $y' = (2y + 1) \text{tg } x$.

13. $y - xy' = 1 + x^2 y'$.

14. $(x - y)dx + (x + y)dy = 0$.

15. Знайдіть частинний розв'язок (частинний інтеграл) диференціального рівняння.

$$xy' - 2y = 2x^4, y(1) = 0.$$

16. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння $y' = y^4 \cos x + y \text{tg } x$.

Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння.

17. а) $y'' - 5y' + 6y = 0$;

б) $y'' + 3y' = 0$;

в) $y'' + 2y' + 5y = 0$.

18. $y'' - 12y' + 36y = 14e^{6x}$.

19. $y'' - 2y' = 6 + 12x - 24x^2$.

20. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початкові умови.

$$y'' - 6y' + 25y = 9\sin 4x - 24\cos 4x, \quad y(0) = 2, \\ y'(0) = -2.$$

21. Дослідіть збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 5^n}{10^n}$ і знайдіть його суму.

Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами

22. $\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \operatorname{tg} \frac{\pi}{3^n}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n+2))^n}$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + 3n}}$.

25. Дослідіть на збіжність і абсолютну збіжність знакопечерговий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{6n+5}.$$

26. Знайдіть область збіжності функціональних рядів

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2}$.

27. Запишіть ряд Тейлора функції $f(x) = \frac{1}{x+3}$ в околі точки $x_0 = -2$ та знайдіть область його збіжності.

28. Користуючись розкладом у степеневий ряд відповідно підбраної функції, обчисліть $\sqrt{1,3}$ із заданою точністю $\alpha = 0,001$.

29. Розв'яньте у ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi, \pi)$.

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1/2, & -\pi \leq x < 0, \\ 0, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

30. Розв'яньте у ряд Фур'є періодичну з періодом $\omega = 2l$ функцію $f(x) = |x| - 5$, задану на інтервалі $-2 < x < 2$, $l = 2$.

31. Розв'яньте у ряд Фур'є за синусами функцію $f(x) = x - 1$, задану на відрізку $[0, \pi]$.

Варіант 5

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції

а) $z = \frac{2}{6 - x^2 - y^2}$;

б) $z = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$.

2. Обчисліть значення частинних похідних функції

$u = \frac{x}{\sqrt{z^2 + y^2}}$ у точці

$M_0(1, 0, 1)$.

3. Знайдіть повний диференціал функції

$z = 5xy^4 + 2x^2y^7$.

4. Обчисліть значення похідної складеної функції

$u = x^2e^y$, де $x = \cos t$, $y = \sin t$ при $t = \pi$.

5. Знайдіть $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо

$z = \phi(\xi; \eta)$, $\xi = x^2 + y^2$; $\eta = xy$.

6. Для функції

$z = x^2y^2 - xy^3 - 3x - 1$, точки

$P_0(2, 1)$ та вектора $\vec{a} = \{-2, -1\}$

знайдіть $\text{grad } z(P_0)$ і $\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}(P_0)$.

7. Обчисліть наближено $\sin 1.59 \text{tg } 3.09$

8. Доведіть, що функція $z = \ln(x^2 + xy + y^2)$ задовольняє рівняння

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2.$$

9. Дослідіть на екстремум функцію

$z = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$.

10. Знайдіть умовний екстремум функції $z = x^2 + y^2$ при $xy = 2$.

11. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$ в заданій області $D: x - y + 1 = 0, y = 0, x = 3$.

Знайдіть загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

12. $(1 + e^x)ydy - e^y dx = 0$.

13. $(x + 4)dy - xydx = 0$.

14. $(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0$.

15. Знайдіть частинний розв'язок (частинний інтеграл) диференціального рівняння.

$y' = 2x(x^2 + y)$, $y(0) = 0$.

16. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння $xydy = (y^2 + x)dx$.

Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння

17. а) $y'' - 2y' + 10y = 0$;

б) $y'' + y' - 2y = 0$;

в) $y'' - 2y' = 0$.

18. $y'' - 3y' + 2y = (34 - 12x)e^{-x}$.

19. $y'' - 6y' + 34y = 18\cos 5x + 60\sin 5x$.

20. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початкові умови.

$$y'' - 14y' + 53y = 53x^3 - 42x^2 + 59x - 14,$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 7.$$

21. Дослідіть збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+5)(n+6)}$ і знайдіть його суму.

Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n/2}}{3^n}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{2^n} \right)^{3n}$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}$.

25. Дослідіть на збіжність і абсолютну збіжність знакопечерговий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[4]{n^5}}.$$

26. Знайдіть область збіжності функціональних рядів

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+8)^n}{n^2}$.

27. Запишіть ряд Маклорена функції $f(x) = x^3 \operatorname{arctg} x$. Вкажіть область збіжності отриманого ряду до цієї функції.

28. Користуючись розкладом у степеневий ряд відповідно підбраної функції, обчисліть $\operatorname{arctg} \pi/10$ із заданою точністю $\alpha = 0,001$.

29. Розвиньте у ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi, \pi)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ x/2 + 1, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

30. Розвиньте у ряд Фур'є періодичну з періодом $\omega = 2l$ функцію

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x < 0, \\ x, & 0 < x \leq 1. \end{cases} \quad l = 1.$$

31. Розвиньте у ряд Фур'є за косинусами функцію $f(x) = 1 - 2x$, задану на відрізку $[0, \pi]$.

Варіант 6

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції

а) $z = \sqrt{y^2 + x^2 - 5}$;

б) $z = \arccos \frac{x}{y^2} + \arcsin(1 - y)$.

2. Обчисліть значення частинних похідних функції $u = \ln \cos(x^2 y^2 + z)$ у точці

$$M_0 \left(0, 0, \frac{\pi}{4} \right).$$

3. Знайдіть повний диференціал функції

$$z = \cos(x^2 - y^2) + x^3.$$

4. Обчисліть значення похідної складеної функції $u = \ln(e^x + e^y)$, де $x = t^2$, $y = t^3$ при $t = 1$.

5. Знайдіть $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо

$$z = f(t), \quad t = \frac{x}{y}.$$

6. Для функції $z = \ln(e^x + e^y)$, точки $P_0(1,1)$ та вектора $\vec{a} = \{1,1\}$ знайдіть

$$\text{grad } z(P_0) \text{ і } \frac{\partial z}{\partial \vec{a}}(P_0).$$

7. Обчисліть наближено $(1.94)^2 e^{0.12}$.

8. Доведіть, що функція $z = xy + \frac{y^2}{x}$ задовольняє

$$\text{рівняння } x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z.$$

9. Дослідіть на екстремум функцію $z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5$.

10. Знайдіть умовний екстремум функції $z = xy$ при $2x + 3y - 5 = 0$.

11. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8$ в заданій області $D: y = 0, x + y = 1, x = 0$.

Знайдіть загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

12. $(1 + e^x)yy' = e^x$.

13. $y' + y + y^2 = 0$.

14. $y^2 + x^2 y' = xy y'$.

15. Знайдіть частинний розв'язок (частинний інтеграл) диференціального рівняння.

$$y' - y = e^x, \quad y(0) = 1.$$

16. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння $xy' + 2y + x^2 y^3 e^x = 0$.

Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння

17. а) $y'' - 4y = 0$;

б) $y'' + 2y' + 17y = 0$;

в) $y'' - y' - 12y = 0$.

18. $y'' - 6y' + 10y = 51e^{-x}$.

19. $y'' - 2y' = (4x + 4)e^{2x}$.

20. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початкові умови.

$$y'' + 6y = e^x(\cos 4x - 8\sin 4x),$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 5.$$

21. Дослідіть збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - 2^n}{10^n} \text{ і знайдіть його суму.}$$

Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами

22.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (n+3)}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdots (2n+3)}$$

23.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 + 5n + 8}{3n^2 - 2} \right)^n$$

24.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+2)}$$

25. Дослідіть на збіжність і абсолютну збіжність знакопечерговий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

26. Знайдіть область збіжності функціональних рядів

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} (2+x)^n$.

27. Запишіть ряд Тейлора функції $f(x) = e^x$ в околі точки $x_0 = 1$ та знайдіть область його збіжності.

28. Користуючись розкладом у степеневий ряд відповідно підбраної функції, обчисліть $\ln 3$ із заданою точністю $\alpha = 0,0001$.

29. Розвиньте у ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi, \pi)$.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & -\pi \leq x < 0, \\ 0, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

30. Розвиньте у ряд Фур'є періодичну з періодом $\omega = 2l$ функцію $f(x) = x$, задану на інтервалі $1 < x < 3, l = 1$.

31. Розвиньте у ряд Фур'є за синусами функцію $f(x) = -3x$, задану на відрізку $[0, \pi]$.

Варіант 7

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції

а) $z = \arccos(x + y)$;

б) $z = \ln x - x \ln \sin y$.

2. Обчисліть значення частинних похідних функції

$u = 27\sqrt[3]{x + y^2 + z^3}$ у точці $M_0(3, 4, 2)$.

3. Знайдіть повний диференціал функції

$z = \ln(3x^2 - 2y^2)$.

4. Обчисліть значення похідної складеної функції

$u = x^y$, де $x = e^t$, $y = \ln t$ при $t = 1$.

5. Знайдіть $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо

$z = f(t)$, $t = xy$.

6. Для функції

$z = x^2 + 2xy + y^2$, точки $P_0(1, 2)$

та вектора $\vec{a} = \{3, 4\}$ знайдіть

$\text{grad } z(P_0)$ і $\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}(P_0)$.

7. Обчисліть наближено $e^{1.15 \cdot 1.1}$.

8. Доведіть, що функція

$z = \frac{1}{x^2 + y^2}$ задовольняє

рівняння $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

9. Дослідіть на екстремум функцію

$z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10$.

10. Знайдіть умовний

екстремум функції $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

при $x + y = 2$.

11. Знайдіть найбільше і найменше значення функції

$z = 2x^3 - xy^2 + y^2$ в заданій

області $D: y = 0, y = 6, x = 1$.

Знайдіть загальний розв'язок (загальний інтеграл)

диференціального рівняння.

12. $\sin y \cos x dy = \cos y \sin x dx$.

13. $y^2 \ln x dx - (y - 1) x dy = 0$.

14. $xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$.

15. Знайдіть частинний розв'язок (частинний інтеграл) диференціального рівняння.

$xy' + y + xe^{-x^2} = 0$, $y(1) = 0,5e^{-1}$.

16. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння $yx^3 \sin y = xy' - 2y$.

Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння

17. а) $y'' + y' - 6y = 0$.

б) $y'' + 9y' = 0$;

в) $y'' - 4y' + 20y = 0$.

18. $y'' + y = 2\cos x - 4\sin x$.

19. $y'' + 2y' + y = 4x^3 + 24x^2 + 22x - 4$.

20. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початкові умови.

$$y'' - 4y' + 20y = 16xe^x,$$

$$y(0) = 1, y'(0) = 2.$$

21. Дослідіть збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+9)(2n+7)}$ і знайдіть його суму.

Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n n^7$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctg \frac{1}{5^n}\right)^n$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

25. Дослідіть на збіжність і абсолютну збіжність знакопечерговий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2}.$$

26. Знайдіть область збіжності функціональних рядів

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{2n-1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n (n+3)}$.

27. Запишіть ряд Маклорена функції $f(x) = e^{3x}$. Вкажіть область збіжності отриманого ряду до цієї функції.

28. Користуючись розкладом у степеневий ряд відповідно підбраної функції, обчисліть $\operatorname{ch} 2$ із заданою точністю $\alpha = 0,0001$.

29. Розв'яньте у ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi, \pi)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ 3-x, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

30. Розв'яньте у ряд Фур'є періодичну з періодом $\omega = 2l$ функцію

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \leq x < 0, \\ x, & 0 \leq x < 1, \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases} \quad l = 2$$

31. Розв'яньте у ряд Фур'є за косинусами функцію $f(x) = 2-x$, задану на відріжку $[0, \pi]$.

Варіант 8

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції

а) $z = 3x + \frac{y}{2 - x + y}$;

б) $z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}}$.

2. Обчисліть значення частинних похідних функції $u = \arctg(xy^2 + z)$, у точці $M_0(2, 1, 0)$.

3. Знайдіть повний диференціал функції $z = 5xy^2 - 3x^3y^4$.

4. Обчисліть значення похідної складеної функції $u = e^{y-2x}$, де $x = \sin t$, $y = t^3$, при $t = 0$.

5. Знайдіть $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $z = \phi(\xi; \eta)$, $\xi = xy$, $\eta = \frac{x}{y}$.

6. Для функції $z = 2xy - y^3 + x$, точки $P_0(-1, 2)$ та вектора $\vec{a} = \{-3, 4\}$ знайдіть $\text{grad } z(P_0)$ і $\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}(P_0)$.

7. Обчисліть наближено $\arctg\left(\frac{1.96}{0.9} - 1\right)$.

8. Доведіть, що функція $z = \frac{y^2}{3x} + \ln(xy)$ задовольняє

рівняння $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0$.

9. Дослідіть на екстремум функцію

$z = x^2 + y^2 + xy + x - y + 1$.

10. Знайдіть умовний екстремум функції $z = xy^2$ при $x + 2y = 1$.

11. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$ в заданій області $D: y = 0, y = 1, x = 0, x = 1$.

Знайдіть загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

12. $\sec^2 x \operatorname{tg} y dy + \sec^2 y \operatorname{tg} x dx = 0$.

13. $(x + xy^2)dy + ydx - y^2 dx = 0$.

14. $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$.

15. Знайдіть частинний розв'язок (частинний інтеграл) диференціального рівняння $\cos y dx = (x + 2 \cos y) \sin y dy$, $y(0) = \pi/4$.

16. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння $(2x^2 y \ln y - x)y' = y$.

Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння

17. а) $y'' - 4y' + 5y = 0$;

б) $y'' - 49y = 0$;

в) $y'' + 2y' - 3y = 0$.

18. $y'' + 6y' + 10y = 74e^{3x}$.

19. $y'' - 4y' = 8 - 16x$.

20. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початкові умови.

$$y'' - 12y' + 36y = 32 \cos 2x + 24 \sin 2x, \quad y(0) = 2, \\ y'(0) = 4.$$

21. Дослідіть збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n - 3^n}{12^n} \text{ і знайдіть його суму.}$$

Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами

22.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 7 \cdot 13 \cdots (6n - 5)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n + 1)}.$$

23.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n + 1))^{2n}}.$$

24.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{3^n}.$$

25. Дослідіть на збіжність і абсолютну збіжність знакопозитивний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

26. Знайдіть область збіжності функціональних рядів

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n^2} (2+x)^{n^2}$.

27. Запишіть ряд Тейлора функції $f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$ в околі

точки $x_0 = 1$ та знайдіть область його збіжності.

28. Користуючись розкладом у степеневий ряд відповідно підбраної функції, обчисліть π із заданою точністю $\alpha = 0,00001$.

29. Розв'яжіть у ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi, \pi)$.

$$f(x) = \begin{cases} x - 2, & -\pi \leq x < 0, \\ 0, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

30. Розв'яжіть у ряд Фур'є періодичну з періодом $\omega = 2l$ функцію $f(x) = 10 - x$, задану на інтервалі $5 < x < 15$, $l = 5$.

31. Розв'яжіть у ряд Фур'є за синусами функцію $f(x) = 3 - 5x$, задану на відрізку $[0, \pi]$.

Варіант 9

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції

а) $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$;

б) $z = \arccos \frac{3(x - y)}{2 + (x - y)^2}$.

2. Обчисліть значення частинних похідних функції

$u = \arcsin \left(\frac{x^2}{y} - z \right)$ у точці

$M_0(2, 5, 0)$.

3. Знайдіть повний диференціал функції

$z = \arcsin(x + y)$.

4. Обчисліть значення похідної складеної функції

$u = x^2 e^{-y}$, де $x = \sin t$,

$y = \sin^2 t$ при $t = \frac{\pi}{2}$.

5. Знайдіть $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо

$z = \phi(\xi; \eta; \zeta)$, $\xi = x^2 + y^2$,

$\eta = x^2 - y^2$; $\zeta = 2xy$

6. Для функції

$z = \ln(x^2 - y^2)$, точки $P_0(2, 1)$ та

вектора $\vec{a} = \{-3, 4\}$ знайдіть

$\text{grad } z(P_0)$ і $\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}(P_0)$.

7. Обчисліть наближено

$\arctg \frac{1,02}{0,97}$.

8. Доведіть, що функція

$z = ye^{y + \frac{x^2}{2y^2}}$

задовольняє

рівняння

$(x^2 - y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = xyz$.

9. Дослідіть на екстремум функцію $z = 4x - 4y - x^2 - y^2$.

10. Знайдіть умовний екстремум функції $z = x + 2y$

при $x^2 + y^2 = 5$.

11. Знайдіть найбільше і найменше значення функції

$z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$ в

заданій області D : $y = 0$,

$x + y = 3$, $x = 1$.

Знайдіть загальний розв'язок (загальний інтеграл)

диференціального рівняння.

12. $(\sin(x + y) + \sin(x - y))dx =$

$= -\frac{dy}{\cos y}$.

13. $y' + 2y - y^2 = 0$.

14. $xy' - y = (x + y) \ln\left(\frac{x + y}{x}\right)$.

15. Знайдіть частинний розв'язок (частинний інтеграл)

диференціального рівняння

$x^2 y' + xy + 1 = 0$, $y(1) = 0$.

16. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння $2y' - x/y = xy/(x^2 - 1)$.

Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння

17. а) $y'' - 5y' + 4y = 0$;

б) $y'' + 7y' = 0$;

в) $y'' + 16y = 0$.

18. $y'' - 3y' + 2y = 3\cos x + 19\sin x$.

19. $y'' - 2y' + y = 4e^x$.

20. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початкові умови.

$$y'' + y = x^3 - 4x^2 + 7x - 10,$$

$$y(0) = 2, y'(0) = 3.$$

21. Дослідіть збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+7)(n+6)}$ і знайдіть його суму.

Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n(n+1)}{5^n}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n/(n+1))^{n^2}}{2^n}$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1}$.

25. Дослідіть на збіжність і абсолютну збіжність

знакопочерговий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+1)n}.$$

26. Знайдіть область збіжності функціональних рядів

а) $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln x)^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{\sqrt[3]{n+1}\sqrt{n^2+1}}$.

27. Запишіть ряд Маклорена функції $f(x) = \cos \frac{2x^3}{3}$. Вкажіть

область збіжності отриманого ряду до цієї функції.

28. Користуючись розкладом у степеневий ряд відповідно підбраної функції, обчисліть $\lg e$ із заданою точністю $\alpha = 0,0001$.

29. Розвиньте у ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi, \pi)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ 4x - 3, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

30. Розвиньте у ряд Фур'є періодичну з періодом $\omega = 2l$ функцію

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x < 0, \\ 1/2, & x = 0, \\ x, & 0 < x \leq 1. \end{cases} \quad l = 1.$$

31. Розвиньте у ряд Фур'є за косинусами функцію $f(x) = 5x + 1$, задану на відрізьку $[0, \pi]$.

Варіант 10

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції

а) $z = \ln(x^2 + y^2 - 3)$;

б)

$$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4}.$$

2. Обчисліть значення частинних похідних функції

$$u = \sqrt{z} \sin\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{у точці}$$

$$M_0(2, 0, 4).$$

3. Знайдіть повний диференціал функції

$$z = \arctg(2x - y).$$

4. Обчисліть значення похідної складеної функції

$$u = \ln(e^{-x} + e^y), \quad \text{де } x = t^2,$$

$$y = t^3 \text{ при } t = -1.$$

5. Знайдіть $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо

$$z = \arctg \frac{\alpha}{\beta}, \quad \alpha = x \sin 2y,$$

$$\beta = x \cos y.$$

6. Для функції $z = \ln(xy^2 + 1)$, точки $P_0(1, 1)$ та вектора

$$\vec{a} = \{-3, -4\} \text{ знайдіть } \text{grad } z(P_0)$$

$$\text{і } \frac{\partial z}{\partial \vec{a}}(P_0).$$

7. Обчисліть наближено $\frac{\sin 1.48}{2^{2.95}}$.

8. Доведіть, що функція

$$z = x \sin \frac{y}{x^2} \quad \text{задовольняє}$$

$$\text{рівняння } x \frac{\partial z}{\partial x} + 2y \frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

9. Дослідіть на екстремум функцію $z = 6x - 6y - 3x^2 - 3y^2$.

10. Знайдіть умовний екстремум функції

$$z = 8 - 2x - 4y \quad \text{при}$$

$$x^2 + 2y^2 = 12.$$

11. Знайдіть найбільше і найменше значення функції

$$z = x^2 + 2xy - 10 \quad \text{в заданій}$$

$$\text{області } D: y = 0, y = x^2 - 4.$$

Знайдіть загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

$$12. (y^2 + 3)dx - \frac{e^x}{x} y dy = 0.$$

$$13. xyu' = \frac{1 + x^2}{1 - y^2}.$$

$$14. xy' = y \cos \ln \frac{y}{x}.$$

15. Знайдіть частинний розв'язок (частинний інтеграл) диференціального рівняння

$$yx' + x = 4y^3 + 3y^2, \quad y(2) = 1.$$

16. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння $xu' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$.

Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння

17. а) $y'' - 6y' + 8y = 0$;

б) $y'' + 5y' = 0$;

в) $y'' + 4y' + 5y = 0$.

18. $y'' + 6y' + 9y = (48 + 8x)e^x$.

19. $y'' + 4y' + 20y = 4\cos 4x - 52\sin 4x$.

20. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початкові умови.

$$y'' - y = (14 - 16x)e^{-x},$$

$$y(0) = 0, y'(0) = -1.$$

21. Дослідіть збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 5^n}{15^n} \text{ і знайдіть його суму.}$$

Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n^n}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{5^n} \right)^{3n}$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n(n+1)}$.

25. Дослідіть на збіжність і абсолютну збіжність знако-

почерговий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n\sqrt[3]{n}}$.

26. Знайдіть область збіжності функціональних рядів

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{8^n(n^2+1)}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n \ln(1+n)}$.

27. Запишіть ряд Тейлора функції $f(x) = \sin \frac{\pi x}{4}$ в околі

точки $x_0 = 2$ та знайдіть область його збіжності.

28. Користуючись розкладом у степеневий ряд відповідно підбраної функції, обчисліть e^2 із заданою точністю $\alpha = 0,001$.

29. Розв'яжіть у ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi, \pi)$.

$$f(x) = \begin{cases} 5-x, & -\pi \leq x < 0, \\ 0, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

30. Розв'яжіть у ряд Фур'є періодичну з періодом $\omega = 2l$ функцію $f(x) = 5x - 1$, задану на інтервалі $-5 < x < 5$, $l = 5$.

31. Розв'яжіть у ряд Фур'є за синусами функцію $f(x) = 7 - 3x$, задану на відрізку $[0, \pi]$.

Варіант 11

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції

а) $z = \sqrt{2x^2 - y^2}$;

б) $z = \sqrt{\frac{4x - y^2}{\ln(1 - x^2 - y^2)}}$.

2. Обчисліть значення частинних похідних функції

$u = \frac{y}{\sqrt{x^2 + z^2}}$ у точці

$M_0(-1, 1, 0)$.

3. Знайдіть повний диференціал функції

$z = \operatorname{arctg}(2x - y)$.

4. Обчисліть значення похідної складеної функції

$u = e^{y-2x-1}$, де $x = \cos t$,

$y = \sin t$ при $t_0 = \frac{\pi}{2}$.

5. Знайдіть $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо

$z = f(u)$, $u = xy + \frac{y}{2x}$.

6. Для функції $z = \operatorname{arctg}(x^2 y)$, точки $P_0(-2, 1)$

та вектора $\vec{a} = \{6, 8\}$ знайдіть

$\operatorname{grad} z(P_0)$ і $\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}(P_0)$.

7. Обчисліть наближено (3.1)^{1.02}.

8. Доведіть, що функція $z = \sin(x - y) + \ln(x + y)$

задовольняє рівняння

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

9. Дослідіть на екстремум функцію

$z = x^2 + y^2 + xy - 6x - 9y$.

10. Знайдіть умовний екстремум функції

$z = 16 - 10x - 24y$ при $x^2 + y^2 = 169$.

11. Знайдіть найбільше і найменше значення функції

$z = xy - 2x - y$, в заданій області $D: y = 0, y = 4, x = 0,$

$x = 3$. Знайдіть загальний розв'язок (загальний інтеграл)

диференціального рівняння.

12. $\sin x \operatorname{tg} y dx - \frac{dy}{\sin x} = 0$.

13. $(x + xy^3)dx + (x^2 y^2 - y^2)dy = 0$.

14. $(y + \sqrt{xy})dx = xdy$.

15. Знайдіть частинний розв'язок (частинний інтеграл)

диференціального рівняння.

$(2x + y)dy = ydx + 4 \ln y dy$,

$y(0) = 1$.

16. Знайдіть загальний розв'язок диференціального

рівняння $xy^2 y' = y^3 + x^2$.

Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння

17. а) $4y'' - 8y' + 3y = 0$;

б) $y'' - 3y' = 0$;

в) $y'' - 2y' + 10y = 0$.

18. $y'' + 5y' = 72e^{2x}$.

19. $y'' - 6y' + 13y = 34e^{-3x}$.

20. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початкові умови.

$$y'' + 8y' + 16y = 16x^2 - 16x + 66,$$
$$y(0) = 3, y'(0) = 0.$$

21. Дослідіть збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+9)(n+10)}$$
 і знайдіть його суму.

Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами

22. $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{2\pi}{3^n}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n+3))^n}$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{n^2+1}$.

25. Дослідіть на збіжність і абсолютну збіжність знакопочерговий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{(n+1)n}$$

26. Знайдіть область збіжності функціональних рядів

а) $\sum_{n=1}^{\infty} (n(n+1))x^n$.

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x+10)^n}{n^n}$.

27. Запишіть ряд Маклорена функції $f(x) = \frac{2}{1-3x^2}$. Вкажіть

область збіжності отриманого ряду до цієї функції.

28. Користуючись розкладом у степеневий ряд відповідно підбраної функції, обчисліть $\cos 2^\circ$ із заданою точністю $\alpha = 0,001$.

29. Розв'яжіть у ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi, \pi)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ 3x-1, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

30. Розв'яжіть у ряд Фур'є періодичну з періодом $\omega = 2l$ функцію

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -3 < x \leq 0, \\ x, & 0 < x < 3. \end{cases} \quad l = 3.$$

31. Розв'яжіть у ряд Фур'є за косинусами функцію $f(x) = -2x-1$, задану на відрізку $[0, \pi]$.

Варіант 12

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції

а) $z = \frac{4xy}{x-3y+1}$;

б) $z = \arcsin(2y(1+x^2)-1)$.

2. Обчисліть значення частинних похідних функції

$u = \arctg\left(\frac{xz}{y^2}\right)$ у точці

$M_0(2, 1, 1)$.

3. Знайдіть повний диференціал функції

$z = \sqrt{x^2 + y^2} - 2xy$.

4. Обчисліть значення похідної складеної функції

$u = \arcsin \frac{x}{y}$, де $x = \sin t$,

$y = \cos t$ при $t_0 = \pi$.

5. Знайдіть $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо

$z = v^3 + \sqrt{uw} + \cos u$, $v = xy$;

$w = x^2 - y$, $u = x + y$.

6. Для функції

$z = x^3 - 2xy + y^2$, точки

$P_0(-2, -1)$ та вектора

$\vec{a} = \{-6, -8\}$ знайдіть $\text{grad } z(P_0)$

і $\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}(P_0)$.

7. Обчисліть наближено $\arctg \frac{0.97}{1.02}$.

8. Доведіть, що функція

$z = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ задовольняє

рівняння $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$.

9. Дослідіть на екстремум функцію $z = (x-2)^2 + 2y^2 - 10$.

10. Знайдіть умовний екстремум функції $z = x^2 - y^2$ при $x + 2y - 6 = 0$.

11. Знайдіть найбільше і найменше значення функції

$z = 0,5x^2 - xy$ в заданій області

$D: y = 8, y = 2x^2$.

Знайдіть загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

12. $y' = \frac{e^{2x}}{\ln y}$.

13. $(1 + y^2)dx - (y + yx^2)dy = 0$.

14. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$.

15. Знайдіть частинний розв'язок (частинний інтеграл) диференціального рівняння.

$y' = y/(3x - y^2)$, $y(0) = 1$.

16. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння $(x+1)(y' + y^2) = -y$.

Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння

17. а) $y'' + 4y' + 20y = 0$;

б) $y'' - 16y = 0$;

в) $y'' - 3y' - 10y = 0$.

18. $y'' - 5y' - 6y = 3\cos x + 19\sin x$.

19. $y'' + 2y' - 3y = (12x^2 + 6x - 4)e^x$.

20. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початкові умови.

$$y'' + 10y' + 34y = -9e^{-5x},$$
$$y(0) = 0, y'(0) = 6.$$

21. Дослідіть збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - 3^n}{15^n}$ і знайдіть його суму. Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n/2}}{n!}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2 + 4n + 5}{6n^2 - 3n - 1} \right)^{n^2}$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+3)}$.

25. Дослідіть на збіжність і абсолютну збіжність знакопозитивний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+5}{3^n}.$$

26. Знайдіть область збіжності функціональних рядів

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n} x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{n^2}}{(n+1)^n}$.

27. Запишіть ряд Тейлора функції $f(x) = \frac{1}{2x+5}$ в околі точки $x_0 = 3$ та знайдіть область його збіжності.

28. Користуючись розкладом у степеневий ряд відповідно підбраної функції, обчисліть $\sqrt[3]{80}$ із заданою точністю $\alpha = 0,001$.

29. Розв'яжіть у ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi, \pi)$.

$$f(x) = \begin{cases} 3 - 2x, & -\pi \leq x < 0, \\ 0, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

30. Розв'яжіть у ряд Фур'є періодичну з періодом $\omega = 2l$ функцію $f(x) = 3 - x$, задану на інтервалі $-2 < x < 2, l = 2$.

31. Розв'яжіть у ряд Фур'є за синусами функцію $f(x) = x + 3$, задану на відрізку $[0, \pi]$.

Варіант 13

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції

а) $z = \frac{\sqrt{xy}}{x^2 + y^2}$;

б) $z = \sqrt{z(2-z)} + \ln(4-x^2)$.

2. Обчисліть значення частинних похідних функції

$u = \ln \sin\left(x - 2y + \frac{z}{4}\right)$ у точці

$M_0\left(1, \frac{1}{2}, \pi\right)$.

3. Знайдіть повний диференціал функції $z = e^{x+y-4}$.

4. Обчисліть значення похідної складеної функції

$u = \arccos \frac{2x}{y}$, де $x = \sin t$,

$y = \cos t$ при $t = \pi$.

5. Знайдіть $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо

$z = u^2 w + w^2 u$, $u = x + \cos x$,

$w = x - \sin y$.

6. Для функції

$z = x^2 + xy - y^3$, точки $P_0(1, -2)$

та вектора $\vec{a} = \{-6, -8\}$ знайдіть

$\text{grad } z(P_0)$ і $\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}(P_0)$.

7. Обчисліть наближено

$\sin 29^\circ \text{ tg } 31^\circ$

8. Доведіть, що функція

$u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ задовольняє

рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

9. Дослідіть на екстремум функцію $z = (x-5)^2 + y^2 + 1$.

10. Знайдіть умовний екстремум функції $z = x^2 + y^2$ при $x - 2y - 5 = 0$.

11. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$ в заданій області $D: y = 0, x + y = 1, x = 0$.

Знайдіть загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

12. $3e^x \sin y dx + (1 - e^x) \cos y dy = 0$.

13. $y' = 2xy + x$.

14. $y = x(y' - \sqrt[3]{e^y})$.

15. Знайдіть частинний розв'язок (частинний інтеграл) диференціального рівняння.

$(1 - 2xy)y' = y(y - 1)$, $y(0) = 1$.

16. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння $xy' + y = -xy^2$.

Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння

17. а) $9y'' + 6y' + y = 0$;

б) $y'' + y = 0$;

в) $y'' - 4y' - 21y = 0$.

18. $y'' - 8y' + 12y = 36x^4 - 96x^3 + 24x^2 + 16x - 2$.

19. $y'' + 4y' + 4y = 6e^{-2x}$.

20. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початкові умови.

$y'' - 6y' + 25y = (32x - 12)\sin x$,
 $y(0) = 4$, $y'(0) = 0$.

21. Дослідіть збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+7)(n+8)}$ і знайдіть його суму.

Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n(n+3)!}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{n^2}$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n^2+5}$.

25. Дослідіть на збіжність і абсолютну збіжність знакопечерговий ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{3n-1}$.

26. Знайдіть область збіжності функціональних рядів

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{\sqrt{n}}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\ln^3(n+1)}}{n+1} (x+1)^n$.

27. Запишіть ряд Маклорена функції $f(x) = e^{3x}$. Вкажіть область збіжності отриманого ряду до цієї функції.

28. Користуючись розкладом у степеневий ряд відповідно підбраної функції, обчисліть $\ln 5$ із заданою точністю $\alpha = 0,001$.

29. Розв'яжіть у ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi, \pi)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ (\pi - x)/2, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

30. Розв'яжіть у ряд Фур'є періодичну з періодом $\omega = 2l$ функцію

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ -1, & 1 < x < 2. \end{cases}, l = 1.$$

31. Розв'яжіть у ряд Фур'є за косинусами функцію $f(x) = 2 - 7x$, задану на відрізку $[0, \pi]$.

Варіант 14

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції

а) $z = \arcsin \frac{x}{y}$;

б) $z = \ln(x \ln(y - x))$.

2. Обчисліть значення частинних похідних функції

$$u = \frac{y}{x} + \frac{z}{y} - \frac{x}{z} \quad \text{у точці}$$

$$M_0(1, 1, 2).$$

3. Знайдіть повний диференціал функції

$$z = \cos(3x + y) - x^2.$$

4. Обчисліть значення похідної складеної функції

$$u = \frac{x^2}{y+1}, \quad \text{де } x = 1 - 2t,$$

$$y = \arctg t \text{ при } t = 0.$$

5. Знайдіть $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо

$$z = \varphi(\xi; \eta),$$

$$\xi = x^2 + y^2, \eta = 2x - 3y.$$

6. Для функції

$$z = 2x^2 + y^2x - 4y, \quad \text{точки}$$

$$P_0(2, 2) \text{ та вектора } \vec{a} = \{6, -8\}$$

знайдіть $\text{grad } z(P_0)$ і $\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}(P_0)$.

7. Обчисліть наближено

$$\sqrt{(1.01)^3 + (2.02)^3}.$$

8. Доведіть, що функція

$$z = \arctg \frac{y}{x} \quad \text{задовольняє}$$

$$\text{рівняння } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0.$$

9. Дослідіть на екстремум функцію $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

10. Знайдіть умовний екстремум функції $z = 3x + 4y$ при $9x^2 + 4y^2 = 1$.

11. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $z = 2x^2 + 3y^2 + 1$ в заданій

$$\text{області } D: y = 0, y = \sqrt{9 - \frac{9}{4}x^2}.$$

Знайдіть загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

12. $3^{x^2+y} dy + x dx = 0$.

13. $y - xy' = 3(1 + x^2 y')$.

14. $y' = \frac{y}{x} - 1$.

15. Знайдіть частинний розв'язок (частинний інтеграл) диференціального рівняння

$$xy' - y = e^x, \quad y(1) = 0.$$

16. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння $y' - xy = -y^3 e^{-x^2}$.

Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння

17. а) $2y'' + 3y' + y = 0$;

б) $y'' - 6y' + 9y = 0$;

в) $y'' + 4y' + 8y = 0$.

18. $y'' + 8y' + 25y = 18e^{5x}$.

19. $y'' + 3y' = 10 - 6x$.

20. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початкові умови.

$$y'' + 25y = e^x (\cos 5x - 10 \sin 5x),$$

$$y(0) = 3, y'(0) = -4.$$

21. Дослідіть збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 7^n}{14^n}$$

і знайдіть його суму.

Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами

22.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 6 \cdot 11 \cdots (5n - 4)}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4n - 1)}$$
.

23.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{\pi}{n^3} \right)^{2n}$$
.

24.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2 - n + 1}$$
.

25. Дослідіть на збіжність і абсолютну збіжність знакопечерговий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n - 1}$$

26. Знайдіть область збіжності функціональних рядів

а)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{5^{n+1} n}$$
;

б)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (2 - x)^n \sin \frac{\pi}{2^n}$$
.

27. Запишіть ряд Тейлора функції $f(x) = \ln(5x + 3)$ в околі точки $x_0 = 2/5$ та знайдіть область його збіжності.

28. Користуючись розкладом у степеневий ряд відповідно підбраної функції, обчисліть $\sqrt[6]{738}$ із заданою точністю $\alpha = 0,001$.

29. Розв'яжіть у ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi, \pi)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ 1 - 4x, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

30. Розв'яжіть у ряд Фур'є періодичну з періодом $\omega = 2l$ функцію

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -2 < x < 0, \\ 2, & 0 < x < 2. \end{cases}, l = 2.$$

31. Розв'яжіть у ряд Фур'є за синусами функцію $f(x) = 8x - 3$, задану на відрізку $[0, \pi]$.

Варіант 15

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції

а) $z = \ln(y^2 - x^2)$;

б) $z = 1 + \sqrt{2xy - (x^2 + y^2)}$.

2. Обчисліть значення частинних похідних функції

$$u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - z^2}} \quad \text{у точці}$$

$$M_0(1, 2, 2).$$

3. Знайдіть повний диференціал функції

$$z = \operatorname{tg} \frac{x+y}{x-y}.$$

4. Обчисліть значення похідної складеної функції

$$u = \frac{x}{y}, \quad \text{де } x = e^t, \quad y = 2 - e^{2t} \quad \text{при } t = 0.$$

5. Знайдіть $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо

$$z = f(t), \quad t = \frac{x^2}{y}$$

6. Для функції

$$z = 13 \ln(x^3 y^2 + 1), \quad \text{точки } P_0(1, -1) \text{ та вектора } \vec{a} = \{5, 12\}$$

знайдіть $\operatorname{grad} z(P_0)$ і $\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}(P_0)$.

7. Обчисліть наближено $(3, 1)^{1,02}$.

8. Доведіть, що функція

$$z = \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{4y}} \quad \text{задовольняє}$$

$$\text{рівняння } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

9. Дослідіть на екстремум функцію $z = 2xy - 2x^2 - 4y^2$.

10. Знайдіть умовний екстремум функції

$$z = 8x^2 + 9y^2 \quad \text{при } 4x + 2y - 1 = 0.$$

11. Знайдіть найбільше і найменше значення функції

$$z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1 \quad \text{в заданій області } D: \quad y = 0, \quad x + y = -1, \quad x = -3.$$

Знайдіть загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

12. $y' = e^{x^2} x(1 + y^2)$.

13. $2xyu' = 1 - x^2$.

14. $xy' + x + y = 0$.

15. Знайдіть частинний розв'язок (частинний інтеграл) диференціального рівняння

$$y = x(y' - x \cos x), \quad y(\pi/2) = 0.$$

16. Знайдіть загальний розв'язок диференціального

$$\text{рівняння } xy' - 2\sqrt{x^3 y} = y.$$

Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння

17. а) $y'' - 10y' + 21y = 0$;

б) $y'' + 4y' = 0$;

в) $y'' - 2y' + 2y = 0$.

18. $y'' - 9y' + 20y = 126e^{-2x}$.

19. $y'' + 10y' + 25y = 40 - 200x^3 - 240x^2 + 52x$.

20. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початкові умови.

$$y'' + 2y' + 5y = -8e^{-x} \sin 2x,$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 6.$$

21. Дослідіть збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}$$
 і знайдіть його суму.

22. Дослідіть на збіжність

ряди з додатними членами

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+3)!}$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{4n}\right)^n$.

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^{n-1}}$.

26. Дослідіть на збіжність і абсолютну збіжність знакопочерговий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n-1)3^n}.$$

27. Знайдіть область збіжності функціональних рядів

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{5^{n+1}n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-2x)^n}{n - \ln^2 n}$.

28. Запишіть ряд Маклорена функції $f(x) = \frac{1}{1+x}$. Вкажіть

область збіжності отриманого ряду до цієї функції.

29. Користуючись розкладом у степеневий ряд відповідно підбраної функції, обчисліть $\operatorname{arctg} 1/2$ із заданою точністю $\alpha = 0,001$.

30. Розвиньте у ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi, \pi)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ 1 - 4x, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

31. Розвиньте у ряд Фур'є періодичну з періодом $\omega = 2l$ функцію

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & 1 < x < 2, \quad l = 3. \\ 3 - x, & 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

32. Розвиньте у ряд Фур'є за косинусами функцію

$f(x) = -x - 2$, задану на відрізьку $[0, \pi]$.

Варіант 16

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції

а) $z = \frac{x^3 y}{x - y + 3}$;

б) $z = \ln xy + \arccos \frac{9}{x^2 + y^2}$.

2. Обчисліть значення частинних похідних функції $f(x, y, z) = \ln(y^2 + x) - \sqrt{x^2 z^2}$ у точці $M_0(5, 2, 3)$.

3. Знайдіть повний диференціал функції $z = \operatorname{ctg} \frac{y}{x}$.

4. Обчисліть значення похідної складеної функції $u = \ln(e^{-x} + e^{-2y})$, де $x = t^2$, $y = \cos t$ при $t = 1$.

5. Знайдіть $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо

$$z = \varphi(\xi; \eta), \quad \xi = x^2 - y^2, \quad \eta = xy.$$

6. Для функції $z = 13 \operatorname{arctg}(xy^3)$, точки $P_0(3, 1)$ та вектора $\vec{a} = \{-5, 12\}$ знайдіть $\operatorname{grad} z(P_0)$ і $\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}(P_0)$.

7. Обчисліть наближено $(1, 04)^{2,03}$

8. Доведіть, що функція $z = e^{-x}(x - y)$ задовольняє рівняння $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial z}{\partial y} = z$.

9. Дослідіть на екстремум функцію

$$z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3.$$

10. Знайдіть умовний екстремум функції

$$z = x^2 + y^2 - xy - 4x \quad \text{при} \quad 2x + 3y - 12 = 0.$$

11. Знайдіть найбільше і найменше значення функції

$$z = 3x^2 + 3y^2 - x - y + 1 \quad \text{в} \quad \text{заданій області } D: \quad y = 0, \quad x - y = 1, \quad x = 5.$$

Знайдіть загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

12. $(\cos(x - 2y) + \cos(x + 2y))y' = \sec x$.

13. $(x^2 - 1)y' - xy = 0$.

14. $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$.

15. Знайдіть частинний розв'язок (частинний інтеграл) диференціального рівняння $(xy' - 1)\ln x = 2y$, $y(e) = 0$.

16. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння $y' + xy = (xy)^3$.

Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння

17. а) $y'' + 6y' = 0$;

б) $y'' + 10y' + 29y = 0$;

в) $y'' - 8y' + 7y = 0$.

18. $y'' + 36y = 36 - 36x^3 + 66x$.

19. $y'' + 4y' + 20y = 4\cos 4x - 52\sin 4x$.

20. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початкові умови.

$$y'' - 10y' + 25y = e^{5x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

21. Дослідіть збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n - 2^n}{14^n}$ і знайдіть його суму.

Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами

22. $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \operatorname{tg} \frac{2\pi}{5^n}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{((n+1)/n)^{n^2}}$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+4)}$.

25. Дослідіть на збіжність і абсолютну збіжність знакопочерговий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n}.$$

26. Знайдіть область збіжності функціональних рядів

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}}$.

27. Запишіть ряд Тейлора функції $f(x) = \ln \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$ в околі точки $x_0 = 1$ та знайдіть область його збіжності.

28. Користуючись розкладом у степеневий ряд відповідно підбраної функції, обчисліть $\sqrt[3]{e}$ із заданою точністю $\alpha = 0,00001$.

29. Розв'яньте у ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi, \pi)$.

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2, & -\pi \leq x < 0, \\ 0, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

30. Розв'яньте у ряд Фур'є періодичну з періодом $\omega = 2l$ функцію $f(x) = 2x - 3$ задану на інтервалі $-3 < x < 3$, $l = 3$.

31. Розв'яньте у ряд Фур'є за синусами функцію $f(x) = 2 + x$, задану на відрізок $[0, \pi]$.

Варіант 17

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції

а) $z = \arccos(x + 2y)$;

б) $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{y^2 - 4}$.

2. Обчисліть значення частинних похідних функції $u = \sqrt{z}x^y$ у точці $M_0(1, 2, 4)$.

3. Знайдіть повний диференціал функції $z = xy^4 - 3x^2y + 1$.

4. Обчисліть значення похідної складеної функції $u = \sqrt{x + y^2} + 3$, де $x = \ln t$, $y = t^2$ при $t = 1$.

5. Знайдіть $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо

$$z = v^2 + \sqrt{w} - \sin u, \quad v = x + y; \\ w = x^2 - y, \quad u = xy.$$

6. Для функції $z = x^2 + y^2 - 3x + 2y$, точки $P_0(1, 1)$ та вектора $\vec{a} = \{3, 4\}$

знайдіть $\text{grad } z(P_0)$ і $\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}(P_0)$.

7. Обчисліть наближено $\sqrt{(4,05)^2 + (2,93)^2}$.

8. Доведіть, що функція $z = 4e^{-2y} + (2x + 4y - 3)e^{-y} - x - 1$ задовольняє рівняння

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial y} + x + z = 0.$$

9. Дослідіть на екстремум функцію $z = 2xy - 5x^2 - 3y^2 + 2$.

10. Знайдіть умовний екстремум функції $z = xy$ при $x^2 + y^2 = 1$.

11. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $z = 2x^2 + 2xy - 0,5y^2 - 4x$ в заданій області $D: y = 2x, y = 2, x = 0$.

Знайдіть загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

12. $\text{ctg } x \cos^2 y dx + \sin^2 x \text{tg } y dy = 0$.

13. $(xy^2 + y^2)dy + xdx = 0$.

14. $x dy - y dx = \sqrt{x^2 + y^2} dx$.

15. Знайдіть частинний розв'язок (частинний інтеграл) диференціального рівняння $(2e^y - x)y' = 1, y(0) = 0$.

16. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння $y' = \frac{x}{y} e^{2x} + y$.

Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння

17. а) $y'' + 25y = 0$;

б) $y'' + 6y' + 9y = 0$;

в) $y'' + 2y' + 2y = 0$.

18. $y'' + y = -4\cos x - 2\sin x$.

19. $y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5$.

20. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початкові умови.

$$y'' + y' - 12y = (16x + 22)e^{4x},$$

$$y(0) = 3, y'(0) = 5.$$

21. Дослідіть збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4)(n+3)}$ і знайдіть його суму.

Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2 + 3)}{(n+1)!}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n+1))^{3^n}}$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{2\pi}{3^n}$.

25. Дослідіть на збіжність і абсолютну збіжність знакопечерговий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n}$$

26. Знайдіть область збіжності функціональних рядів

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(0,1)^n x^{2n}}{n}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$.

27. Запишіть ряд Маклорена функції $f(x) = \operatorname{ch}(2x^3)$. Вкажіть область збіжності отриманого ряду до цієї функції.

28. Користуючись розкладом у степеневий ряд відповідно підбраної функції, обчисліть $\sin 1^\circ$ із заданою точністю $\alpha = 0,0001$.

29. Розв'яньте у ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi, \pi)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ 4 - 2x, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

30. Розв'яньте у ряд Фур'є періодичну з періодом $\omega = 2l$ функцію

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1,5 \\ -1, & 1,5 < x < 3. \end{cases}, l = 3.$$

31. Розв'яньте у ряд Фур'є за косинусами функцію $f(x) = 2x + 5$, задану на відріжку $[0, \pi]$.

Варіант 18

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції

а) $z = \arcsin(2x - y)$;

б) $u = \arccos \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$.

2. Обчисліть значення частинних похідних функції

$$u = \frac{-z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{у точці}$$

$$M_0(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

3. Знайдіть повний диференціал функції

$$z = \ln(x + xy - y^2).$$

4. Обчисліть значення похідної складеної функції

$$u = \arcsin \frac{x^2}{y}, \quad \text{де } x = \sin t,$$

$$y = \cos t \quad \text{при } t = \pi.$$

5. Знайдіть $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо

$$z = u^2 + \sqrt{uw} + \operatorname{tg} v, \quad v = x^2 + y;$$

$$w = x^2 - y; u = x + y.$$

6. Для функції

$$z = x - 3y + \sqrt{3xy}, \quad \text{точки}$$

$$P_0(3, 4) \text{ та вектора } \vec{a} = \{-3, 2\}$$

знайдіть $\operatorname{grad} z(P_0)$ і $\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}(P_0)$.

7. Обчисліть наближено $\sin 29^\circ \operatorname{tg} 31^\circ$

8. Доведіть, що функція $u = \ln(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$

задовольняє рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{3}{x + y + z}.$$

9. Дослідіть на екстремум функцію $z = xy(12 - x - y)$.

10. Знайдіть умовний екстремум функції

$$z = x^2 + 3y^2 + x - y \quad \text{при}$$

$$x + y = 1.$$

11. Знайдіть найбільше і найменше значення функції

$$z = x^2 - 2xy + 2,5y^2 - 2x \quad \text{в}$$

$$\text{заданій області } D: y = 0, y = 2,$$

$$x = 0, x = 2.$$

Знайдіть загальний розв'язок (загальний інтеграл)

диференціального рівняння.

$$12. \sin xy' = y \cos x + 2 \cos x.$$

$$13. (1 + x^3)y^3 dx -$$

$$-(y^2 - 1)x^3 dy = 0.$$

$$14. (4x^2 + 3xy + y^2) dx =$$

$$= 6 \cos 3x - 33 \sin 3x.$$

15. Знайдіть частинний розв'язок (частинний інтеграл)

диференціального рівняння

$$xy' + (x + 1)y = 3x^2 e^{-x}, \quad y(1) = 0.$$

16. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння $xu' + x = -ux^2$.

Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння

17. а) $y'' - 3y' = 0$.

б) $y'' - 7y' - 8y = 0$;

в) $y'' + 4y' + 13y = 0$.

18. $y'' + 2y' - 24y = 6\cos 3x - 33\sin 3x$.

19. $y'' + 2y' + y = (12x - 10)e^{-x}$.

20. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початкові умови.

$$y'' - 2y' + 5y = 5x^2 + 6x - 12,$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 2.$$

21. Дослідіть збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + 5^n}{20^n}$ і знайдіть його суму.

Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+3)!}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{3n}\right)^{n^2}$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)}$.

25. Дослідіть на збіжність і абсолютну збіжність знако-почерговий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3n^2 + 1}$.

26. Знайдіть область збіжності функціональних рядів

а) $\sum_{n=1}^{\infty} (\lg x)^n$. б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(2n-1)2^n}$.

27. Запишіть ряд Тейлора функції $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4+x}}$ в околі точки $x_0 = -3$ та знайдіть область його збіжності.

28. Користуючись розкладом у степеневий ряд відповідно підбраної функції, обчисліть $\sqrt[3]{8,36}$ із заданою точністю $\alpha = 0,001$.

29. Розв'яжіть у ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi, \pi)$.

$$f(x) = \begin{cases} x + \pi/2, & -\pi \leq x < 0, \\ 0, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

30. Розв'яжіть у ряд Фур'є періодичну з періодом $\omega = 2l$ функцію $f(x) = 3 - |x|$ задану на інтервалі $-5 < x < 5$, $l = 5$.

31. Розв'яжіть у ряд Фур'є за синусами функцію $f(x) = 5 - x$, задану на відрізку $[0, \pi]$

Варіант 19

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції

а) $z = \ln(9 - y^2 - x^2)$;

б) $z = \sqrt{\log_a(x^2 + y^2)} + \ln(x + y)$, ($0 < a < 1$).

2. Обчисліть значення частинних похідних функції $u = \ln(x^3 + \sqrt[3]{y - z})$ у точці $M_0(2, 1, 8)$.

3. Знайдіть повний диференціал функції $z = 2x^2y^2 + x^3 - y^3$.

4. Обчисліть значення похідної складеної функції $u = \frac{y^2}{x}$, де $x = 1 - 2t$, $y = 1 + \operatorname{arctg} t$ при $t = 0$.

5. Знайдіть $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $z = f(u)$, $u = xy + \frac{2y}{x^2}$.

6. Для функції $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, точки $P_0(3, 4)$ та вектора $\vec{a} = \{-3, 2\}$ знайдіть $\operatorname{grad} z(P_0)$ і $\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}(P_0)$.

7. Обчисліть наближено $\operatorname{arctg} \frac{0,97}{1,02}$.

8. Доведіть, що функція

$$u = \frac{x - y}{z - t} + \frac{t - x}{y - z}$$
 задовольняє

$$\text{рівняння } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

9. Дослідіть на екстремум функцію $z = xy - x^2 - y^2 + 9$.

10. Знайдіть умовний екстремум функції $z = x^2 + y^2$ при $3x + 4y - 12 = 0$.

11. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $z = xy - 3x - 2y$ в заданій області $D: y = 0, y = 4, x = 0, x = 4$.

Знайдіть загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

12. $1 + (1 + y')e^y = 0$.

13. $xy' - y = y^2$.

14. $(x - y)ydx - x^2dy = 0$.

15. Знайдіть частинний розв'язок (частинний інтеграл) диференціального рівняння.

$$(x + y^2)dy = ydx, \quad y(0) = 1.$$

16. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння $x(x - 1)y' + y^3 = xy$.

Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння

17. а) $y'' - 3y' - 4y = 0$;

б) $y'' + 6y' + 13y = 0$;

в) $y'' + 2y' = 0$.

18. $y'' + 6y' + 13y = -75 \sin 2x$.

19. $y'' - 4y = (-24x - 10)e^{2x}$.

20. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початкові умови.

$$y'' + 8y' + 16y = 16x^3 + 24x^2 - 10x + 8, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3.$$

21. Дослідіть збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4)(n+5)}$ і знайдіть його суму.

Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n!}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{3^n} \right)^n$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^{2n}}$.

25. б) Дослідіть на збіжність і абсолютну збіжність знакопечерговий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

26. Знайдіть область збіжності функціональних рядів

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[3]{n+2}}{n+1} (x-2)^n$.

27. Запишіть ряд Маклорена функції $f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x}}$. Вкажіть

область збіжності отриманого ряду до цієї функції.

28. Користуючись розкладом у степеневий ряд відповідно підбраної функції, обчисліть $\ln 10$ із заданою точністю $\alpha = 0,0001$.

29. Розвиньте у ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi, \pi)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ 6x - 5, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

30. Розвиньте у ряд Фур'є періодичну з періодом $\omega = 2l$ функцію

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -4 < x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ 2, & 0 < x < 4. \end{cases}, \quad l = 4.$$

31. Розвиньте у ряд Фур'є за косинусами функцію $f(x) = 2(x-1)$, задану на відріжку $[0, \pi]$.

Варіант 20

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції

а) $z = \sqrt{3 - x^2 - y^2}$;

б) $z = \arcsin \frac{y-1}{x}$.

2. Обчисліть значення частинних похідних функції

$u = \frac{z}{x^4 + y^2}$ у точці $M_0(2, 3, 25)$.

3. Знайдіть повний диференціал функції

$z = \sqrt{3x^2 - 2y^2} + 5$.

4. Обчисліть значення похідної складеної функції

$u = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}$, де $x = \sin t$, $y = \cos t$

при $t = \frac{\pi}{4}$.

5. Знайдіть $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо

$z = \phi(\xi; \eta; \zeta)$, $\xi = x^3 + y^3$,

$\eta = x^2 y^2$, $\zeta = 3x^2 y$.

6. Для функції $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$,

точки $P_0(-1, 1)$ та вектора $\vec{a} = \{2, -3\}$ знайдіть $\operatorname{grad} z(P_0)$ і

$\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}(P_0)$.

7. Обчисліть наближено $\cos 58^\circ \operatorname{ctg} 46^\circ$

8. Доведіть, що функція $z = y \cos^2(x - y)$ задовольняє рівняння $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y}$.

9. Дослідіть на екстремум функцію

$z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$.

10. Знайдіть умовний екстремум функції $z = x^2 + y^2$ при $xy = 2$.

11. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $z = x^2 + xy - 2$ в заданій області $D: y = 0, y = 4x^2 - 4$.

Знайдіть загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

12. $y' \operatorname{ctg} x + y = 2$.

13. $\sqrt{y^2 + 1} dx = xy dy$.

14. $xy + y^2 = (2x^2 + xy) y'$.

15. Знайдіть частинний розв'язок (частинний інтеграл) диференціального рівняння

$(\sin^2 y + x \operatorname{ctg} y) y' = 1$,

$y(0) = \pi/2$.

16. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння $2x^3 y y' + 3x^2 y^2 + 1 = 0$.

Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння

17. а) $y'' - 10y' + 16y = 0$;

б) $y'' + 25y' = 0$;

в) $y'' - 8y' + 16y = 0.$

18. $y'' + 5y' =$
 $= 39\cos 3x - 105\sin 3x.$

19. $y'' + 6y' + 9y = 72e^{3x}.$

20. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початкові умови.

$y'' - 2y' + 37y = 36e^{-x} \cos 6x,$
 $y(0) = 0, y'(0) = 6.$

21. Дослідіть збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - 4^n}{20^n}$ і знайдіть його суму. Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4n-1)}.$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n}\right)^{n^2}.$

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)3^n}.$

25. б) Дослідіть на збіжність і абсолютну збіжність знакопечерговий ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n5^n}.$

26. Знайдіть область збіжності функціональних рядів

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{(2n+1)^2 \sqrt{3^n}};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{2n \cdot 4^n}.$

27. Запишіть ряд Тейлора функції $f(x) = \cos x$ в околі точки $x_0 = \pi/4$ та знайдіть область його збіжності.

28. Користуючись розкладом у степеневий ряд відповідно підібраної функції, обчисліть $\arcsin 1/3$ із заданою точністю $\alpha = 0,001.$

29. Розв'яньте у ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi, \pi).$

$f(x) = \begin{cases} 7 - 3x, & -\pi \leq x < 0, \\ 0, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

30. Розв'яньте у ряд Фур'є періодичну з періодом $\omega = 2l$ функцію $f(x) = 1 + x$ задану на інтервалі $-1 < x < 1, l = 1.$

31. Розв'яньте у ряд Фур'є за синусами функцію $f(x) = 8x + 3$, задану на відрізку $[0, \pi].$

Варіант 21

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції

а) $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 5}}$;

б) $z = \sqrt{x \sin y}$.

2. Обчисліть значення частинних похідних функції

$u = 8\sqrt{x^3 + y^2 + z}$ у точці $M_0(3, 2, 1)$.

3. Знайдіть повний диференціал функції

$z = \arcsin \frac{x+y}{x}$.

4. Обчисліть значення похідної складеної функції

$u = \sqrt{y + x^2 + 3}$, де $x = \ln t$, $y = t^2$ при $t = 1$.

5. Знайдіть $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо

$z = e^{uv} \ln(u+w)$, $u = 2x^2$,
 $v = 1 - 3y^2$, $w = x - y$

6. Для функції

$z = \sqrt{4 + x^2 + y^2}$, точки $P_0(2, 1)$ та вектора $\vec{a} = \{-2, 3\}$ знайдіть

$\text{grad } z(P_0)$ і $\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}(P_0)$.

7. Обчисліть наближено $\sqrt{(1, 01)^3 + (2, 02)^3}$.

8. Доведіть, що функція

$z = \frac{y^3}{x^2} - x^2 - y^2$ задовольняє

рівняння

$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - x^2 - y^2$.

9. Дослідіть на екстремум функцію $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$.

10. Знайдіть умовний екстремум функції $z = xy$ при $2x + 3y - 5 = 0$.

11. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $z = x^2 y(4 - x - y)$ в заданій області $D: y = 0, y = 6 - x, x = 0$.

Знайдіть загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

12. $\frac{e^{-x^2} dy}{x} + \frac{dx}{\cos^2 y} = 0$.

13. $y' - xy^2 = 2xy$.

14. $(x^2 - 2xy)y' = xy - y^2$.

15. Знайдіть частинний розв'язок (частинний інтеграл) диференціального рівняння $(x+1)y' + y = x^3 + x^2$, $y(0) = 0$.

16. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння $\frac{dx}{x} = (\frac{1}{y} - 2x)dy$.

Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння

17. а) $y'' - 3y' - 18y = 0$;

б) $y'' - 6y' = 0$;

в) $y'' + 2y' + 5y = 0$.

18. $y'' - 4y' + 29y = 104 \sin 5x$.

19. $y'' + 16y = 80e^{2x}$.

20. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початкові умови.

$$y'' - 8y' = 16 + 48x^2 - 128x^3, \\ y(0) = -1, y'(0) = 14.$$

21. Дослідіть збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)(2n+1)}$ і знайдіть його суму.

Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами

22. $\sum_{n=1}^{\infty} (3n-1) \sin \frac{\pi}{4^n}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2 - n - 1}{7n^2 + 3n + 4} \right)^n$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^3 \sqrt{n}}$.

25. Дослідіть на збіжність і абсолютну збіжність знакопозитивний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}.$$

26. Знайдіть область збіжності функціональних рядів

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^n (x+1)^n}{n^n 2^{n-1}}$.

27. Запишіть ряд Маклорена функції $f(x) = \operatorname{sh} x$. Вкажіть область збіжності отриманого ряду до цієї функції.

28. Користуючись розкладом у степеневий ряд відповідно підбраної функції, обчисліть $\lg 7$ із заданою точністю $\alpha = 0,001$.

29. Розв'яжіть у ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi, \pi)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ \pi/4 - x/2, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

30. Розв'яжіть у ряд Фур'є періодичну з періодом $\omega = 2l$ функцію

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -2 < x < 0, \\ -1/2, & x = 0, \\ x/2, & 0 < x < 2. \end{cases}, l = 2.$$

31. Розв'яжіть у ряд Фур'є за косинусами функцію $f(x) = 7 + 3x$, задану на відрізку $[0, \pi]$.

Варіант 22

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції

а) $z = 4x + \frac{y}{2x - 5y}$;

б) $u = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - R^2}}$ ($r < R$).

2. Обчисліть значення частинних похідних функції $u = \ln(\sqrt[5]{x} + \sqrt[4]{y} - z)$ у точці $M_0(1, 1, 1)$.

3. Знайдіть повний диференціал функції $z = \operatorname{arcsctg}(x - y)$.

4. Обчисліть значення похідної складеної функції $u = \arcsin \frac{x}{2y}$, де $x = \sin t$, $y = \cos t$ при $t = \pi$.

5. Знайдіть $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо

$$z = \cos(2u + 4v^2 - w),$$

$$u = \frac{x}{y}, v = \frac{\sqrt{x}}{\ln y}, w = xy.$$

6. Для функції $z = x^2 + y^2$, точки $P_0(3, 2)$ та вектора

$\vec{a} = \{3, 2\}$ знайдіть $\operatorname{grad} z(P_0)$ і $\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}(P_0)$.

7. Обчисліть наближено $\ln 2,73 - (1,03)^{2,73}$.

8. Доведіть, що функція $z = \frac{y}{(x^2 - y^2)^2}$ задовольняє

$$\text{рівняння } \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

9. Дослідіть на екстремум функцію $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$.

10. Знайдіть умовний екстремум функції $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

при $x + y = 2$.

11. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в заданій області $D: y = -1, y = 2, x = 0, x = 2$.

Знайдіть загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

12. $e^x \sin y dx + \operatorname{tg} y dy = 0$.

13. $2x^2 y y' + y^2 = 2$.

14. $x^2 y' = y(x + y)$.

15. Знайдіть частинний розв'язок (частинний інтеграл) диференціального рівняння

$$x(y' - 2y) + x^2 = 0, y(1) = 0.$$

16. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння $y' + x\sqrt[3]{y} = 3y$.

Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння

17. а) $y'' - 6y' + 13y = 0$;

б) $y'' - 8y' = 0$;

в) $y'' - 2y' - 15y = 0$.

18. $y'' - 4y' + 5y = (24\sin x + 8\cos x)e^{-2x}$.

19. $y'' + 4y' = 15e^x$.

20. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початкові умови.

$y'' + 12y' + 36y = 72x^3 - 18$,
 $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

21. Дослідіть збіжність ряду

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 7^n}{21^n}$ і знайдіть його суму.

Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n!}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2n-1}$.

25. Дослідіть на збіжність і абсолютну збіжність

знакопечерговий ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3}{\ln(n+1)}$.

26. Знайдіть область збіжності функціональних рядів

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{\sqrt{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}$.

27. Запишіть ряд Тейлора функції $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ в околі

точки $x_0 = 2$ та знайдіть область його збіжності.

28. Користуючись розкладом у степеневий ряд відповідно підбраної функції, обчисліть \sqrt{e} із заданою точністю $\alpha = 0,0001$.

29. Розв'яньте у ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi, \pi)$.

$f(x) = \begin{cases} 6x - 2, & -\pi \leq x < 0, \\ 0, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

30. Розв'яньте у ряд Фур'є періодичну з періодом $\omega = 2l$ функцію $f(x) = 2x + 2$ задану на інтервалі $1 < x < 3$, $l = 2$.

31. Розв'яньте у ряд Фур'є за синусами функцію $f(x) = -7x$, задану на відрізьку $[0, \pi]$.

Варіант 23

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції

$$\text{а) } z = \frac{\sqrt{3x-2y}}{x^2+y^2+4}; \quad \text{б)}$$

$$z = \sqrt{(x^2+y^2-2a^2)(a^2-x^2-y^2)} \quad (a > 0).$$

2. Обчисліть значення частинних похідних функції

$$u = \frac{-2x}{\sqrt{z^2+y^2}} \quad \text{у точці}$$

$$M_0(3, 0, 1).$$

3. Знайдіть повний диференціал функції

$$z = \sqrt{3x^2 - y^2} + x.$$

4. Обчисліть значення похідної складеної функції

$$u = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}, \quad \text{де } x = \sin t, \quad y = \operatorname{tg}^2 t$$

$$\text{при } t = \frac{\pi}{4}.$$

5. Знайдіть $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо

$$z = w^2 + uv, \quad u = 1 + x^2,$$

$$v = \ln(x+y), \quad w = x \operatorname{tg} y.$$

6. Для функції

$$z = 5x^2y - 3xy^3 + y^4, \quad \text{точки}$$

$$P_0(-2, 3) \text{ та вектора } \vec{a} = \{-5, 12\}$$

знайдіть $\operatorname{grad} z(P_0)$ і $\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}(P_0)$.

7. Обчисліть наближено $\sin 29^\circ \operatorname{tg} 31^\circ$.

8. Доведіть, що функція

$$u = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3(y+z) +$$

$$+ \frac{1}{2}x^2yz + (y-x)(z-x)$$

задовольняє рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = xyz.$$

9. Дослідіть на екстремум функцію $z = xy(6-x-y)$.

10. Знайдіть умовний екстремум функції $z = xy^2$ при $x+2y=1$.

11. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $z = 4(x-y) - x^2 - y^2$ в заданій області $D: x+2y=4, x-2y=4, x=0$.

Знайдіть загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

$$12. (1 + e^{3y})xdx = e^{3y}dy.$$

$$13. y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}.$$

$$14. xy' + y(\ln \frac{y}{x} - 1) = 0.$$

15. Знайдіть частинний розв'язок (частинний інтеграл) диференціального рівняння $xy' + y = \sin x$, $y(\pi/2) = 2/\pi$.

16. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння $xy' + y = y^2 \ln x$.

Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння

17. а) $y'' + 2y' + y = 0$;

б) $y'' - 4y' = 0$;

в) $y'' + 6y' + 25y = 0$.

18. $y'' + 16y = 8\cos 4x$.

19. $y'' + y' - 2y = 9\cos x - 7\sin x$.

20. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початкові умови.

$$y'' + 3y' = (40x + 58)e^{2x},$$
$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$$

21. Дослідіть збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)(2n+5)}$ і знайдіть його суму.

Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{\sqrt{n7^n}}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{3n} \right)^{2n}$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3 + 2}$.

25. Дослідіть на збіжність і абсолютну збіжність

знакопочерговий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{(n+1)5^n}.$$

26. Знайдіть область збіжності функціональних рядів

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^{n+1}}{n^3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{n^2}}{n^n}$.

27. Запишіть ряд Маклорена функції $f(x) = e^{-x^4}$. Вкажіть область збіжності отриманого ряду до цієї функції.

28. Користуючись розкладом у степеневий ряд відповідно підібраної функції, обчисліть $\cos 10^\circ$ із заданою точністю $\alpha = 0,0001$.

29. Розв'яжіть у ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi, \pi)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ 4 - 9x, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

30. Розв'яжіть у ряд Фур'є періодичну з періодом $\omega = 2l$ функцію

$$f(x) = \begin{cases} 3, & -3 < x < 0, \\ 3/2, & x = 0, \\ -x, & 0 < x < 3. \end{cases}, \quad l = 3.$$

31. Розв'яжіть у ряд Фур'є за косинусами функцію $f(x) = 1 - 3x$, задану на відрізку $[0, \pi]$.

Варіант 24

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції

а) $z = \frac{5}{4 - x^2 - y^2}$;

б) $u = \arcsin \frac{z}{x^2 + y^2}$.

2. Обчисліть значення частинних похідних функції

$u = ze^{\frac{(x^2+y^2)}{2}}$ у точці $M_0(0, 0, 1)$.

3. Знайдіть повний диференціал функції

$z = y^2 - 3xy - x^4$.

4. Обчисліть значення похідної складеної функції

$u = \sqrt{y + x + 3}$, де $x = \ln t$, $y = t^2$ при $t = 1$.

5. Знайдіть $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо

$z = u^2 - wv + \frac{1}{\cos w}$,

$u = xy, v = \sqrt{x + y}, w = x - y^2$

6. Для функції $z = x^2 - 2xy + 3y - 1$, точки $P_0(1, 2)$ та вектора $\vec{a} = \{5, 12\}$

знайдіть $\text{grad } z(P_0)$ і $\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}(P_0)$.

7. Обчисліть наближено $\cos 61^\circ \text{ctg } 44^\circ$

8. Доведіть, що функція

$z = x \cos(x + y) + ye^{x+y}$

задовольняє рівняння

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

9. Дослідіть на екстремум функцію $z = (x - 1)^2 + 2y^2$.

10. Знайдіть умовний екстремум функції $z = x + 2y$

при $x^2 + y^2 = 5$.

11. Знайдіть найбільше і найменше значення функції

$z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$ в заданій області $D: y = 0, y = x + 1, x = 3$.

Знайдіть загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

12. $3^{y^2 - x^2} = \frac{yy'}{x}$.

13. $y' \sqrt{y^2 + 1} = \frac{x^2}{y}$.

14. $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$.

15. Знайдіть частинний розв'язок (частинний інтеграл)

диференціального рівняння

$(x^2 - 1)y' - xy = x^3 - x$,

$y(\sqrt{2}) = 1$.

16. Знайдіть загальний розв'язок диференціального

рівняння $x dx = (x^2/y - y^3) dy$.

Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння

17. а) $y'' - 6y' + 8y = 0$;

б) $y'' + 10y' = 0$;

в) $4y'' + 4y' + y = 0$.

18. $y'' + 9y = 9x^4 + 12x^2 - 27$.

19. $y'' + 2y' + y = (18x + 8)e^{-x}$.

20. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початкові умови.

$$y'' - 9y' + 18y = 26\cos x - 8\sin x,$$
$$y(0) = 0, y'(0) = 2.$$

21. Дослідіть збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n - 3^n}{21^n}$ і знайдіть його суму.

Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами

22.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n - 3)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n - 2)}$$
.

23.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n} \right)^{5n}$$
.

24.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{4n}$$
.

25. Дослідіть на збіжність і абсолютну збіжність знакопочерговий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n+1}$$
.

26. Знайдіть область збіжності функціональних рядів

а)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt[3]{n}}$$
;

б)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^{2n}}{2n}$$
.

27. Запишіть ряд Тейлора функції $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$ в околі точки $x_0 = -2$ та знайдіть область його збіжності.

28. Користуючись розкладом у степеневий ряд відповідно підбраної функції, обчисліть $\frac{1}{\sqrt[3]{30}}$ із заданою точністю $\alpha = 0,001$.

29. Розв'яжіть у ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi, \pi)$.

$$f(x) = \begin{cases} x/3 - 3, & -\pi \leq x < 0, \\ 0, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

30. Розв'яжіть у ряд Фур'є періодичну з періодом $\omega = 2l$ функцію $f(x) = 1 - |x|$ задану на інтервалі $-3 < x < 3$, $l = 3$.

31. Розв'яжіть у ряд Фур'є за синусами функцію $f(x) = -1 - 4x$, задану на відрізьку $[0, \pi]$.

Варіант 25

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції

а) $z = \ln(2x - y)$;

б) $u = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

2. Обчисліть значення частинних похідних функції

$u = \frac{\sin(x - y)}{z}$ у точці

$M_0 \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \sqrt{3} \right)$.

3. Знайдіть повний диференціал функції

$z = \arccos(x + y)$.

4. Обчисліть значення похідної складеної функції

$u = \frac{y}{x}$, де $x = e^t$, $y = 1 - e^{2t}$ при $t = 0$.

5. Знайдіть $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо

$z = \phi(\xi; \eta)$, $\xi = \sin xy$, $\eta = \frac{y}{x}$.

6. Для функції $Z = \frac{x^2 - y^2}{2}$,

точки $P_0(2, 1)$ та вектора $\vec{a} = \{1, 1\}$ знайдіть $\text{grad } z(P_0)$ і

$\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}(P_0)$.

7. Обчисліть наближено $(1, 04)^{2, 03}$.

8. Доведіть, що функція

$z = \text{tg } xy + e^{\frac{x}{y}}$ задовольняє рівняння

$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

9. Дослідіть на екстремум функцію

$z = x^2 + y^2 - xy + x + y$.

10. Знайдіть умовний екстремум функції

$z = 8 - 2x - 4y$ при $x^2 + 2y^2 = 12$.

11. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $z = z(x, y)$ в заданій області D .

$z = -9x^2 + 6xy - 9y^2 + 4x + 4y$,

$D: y = 0, y = 2, x = 0, x = 1$.

Знайдіть загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

12. $\cos y dx =$

$= 2\sqrt{1 + x^2} dy + \cos y \sqrt{1 + x^2} dy$.

13. $y'(y + 1) = \frac{y}{\sqrt{1 - x^2}} + xy$.

14. $(y^2 - 2xy)dx - x^2 dy = 0$.

15. Знайдіть частинний розв'язок (частинний інтеграл) диференціального рівняння

$(1 - x^2)y' + xy = 1, y(0) = 1$.

16. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння $y' + 2xy = x^3 y^3$.

Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння

17. а) $9y'' - 6y' + y = 0$;

б) $y'' + 5y = 0$;

в) $y'' + 6y' + 8y = 0$.

18. $y'' - 12y' + 40y = 2e^{6x}$.

19. $y'' - 14y' + 49y = 144 \sin 7x$.

20. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початкові умови.

$$y'' + 8y' = 18x + 60x^2 - 32x^3,$$

$$y(0) = 5, y'(0) = 2.$$

21. Дослідіть збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$ і знайдіть його суму.

Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{4n!}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{((n+1)/n)^{n^2}}{5^n}$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 1}$.

25. Дослідіть на збіжність і абсолютну збіжність знакопо-

черговий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n}{(2n+1)^n}.$$

26. Знайдіть область збіжності функціональних рядів

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n \sqrt{3n-1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n \cdot 9^n}$.

27. Запишіть ряд Маклорена функції $f(x) = 2^{-x^2}$. Вкажіть область збіжності отриманого ряду до цієї функції.

28. Користуючись розкладом у степеневий ряд відповідно підбраної функції, обчисліть $\sqrt[10]{1080}$ із заданою точністю $\alpha = 0,001$.

29. Розв'яжіть у ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi, \pi)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ 10x - 3, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

30. Розв'яжіть у ряд Фур'є періодичну з періодом $\omega = 2l$ функцію

$$f(x) = \begin{cases} -2, & -4 < x < 0, \\ -1/2, & x = 0, \\ 1 + x, & 0 < x < 4. \end{cases}, l = 4.$$

31. Розв'яжіть у ряд Фур'є за косинусами функцію $f(x) = 3(1-x)$, задану на відріжку $[0, \pi]$.

Варіант 26

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції

а) $z = \frac{7x^3y}{x-4y}$;

б) $u = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - z^2}} \quad (r < R)$.

2. Обчисліть значення частинних похідних функції

$u = \sqrt{z} \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})$ у точці $M_0(4, 1, 4)$.

3. Знайдіть повний диференціал функції

$z = \ln(y^2 - x^2 + 3)$.

4. Обчисліть значення похідної складеної функції

$u = \arcsin \frac{2x}{y}$, де $x = \sin t$,
 $y = \cos t$ при $t = \pi$.

5. Знайдіть $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо

$z = \operatorname{tg} uw - w^2 u$, $u = y + \ln x$,
 $w = xy$.

6. Для функції $Z = x^2 + \frac{1}{2}y^2$,

точки $P_0(2, -1)$ та вектора

$\vec{a} = \{4, 3\}$ знайдіть $\operatorname{grad} z(P_0)$ і $\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}(P_0)$.

7. Обчисліть наближено $\ln(\sqrt[3]{0,98} + \sqrt[4]{1,03} - 1)$.

8. Доведіть, що функція $z = \frac{y}{(x^2 - y^2)^5}$ задовольняє

рівняння $\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{z}{y^2} = 0$.

9. Дослідіть на екстремум функцію

$z = x^2 + y^2 + xy - 2x - y$.

10. Знайдіть умовний екстремум функції

$z = 16 - 10x - 24y$ при $x^2 + y^2 = 169$.

11. Знайдіть найбільше і найменше значення функції

$z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y$ в заданій області $D: y = 0, y = x + 2, x = 2$.

Знайдіть загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

12. $y' \sqrt{1-x^2} - \cos^2 y = 0$.

13. $(x^2 + 1)y' + y \sqrt{1+x^2} = xy$.

14. $(x + 2y)dx + xdy = 0$.

15. Знайдіть частинний розв'язок (частинний інтеграл) диференціального рівняння.

$$y' \operatorname{ctg} x - y = 2 \cos^2 x \operatorname{ctg} x, \\ y(0) = 0.$$

16. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння $y' + y = x/y^2$.

Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння

17. а) $y'' + 6y' + 10y = 0$;

б) $y'' - 5y' + 4y = 0$;

в) $y'' - 4y' + 4y = 0$.

18. $y'' + 4y' =$
 $= (2 \sin 2x + 24 \cos 2x) e^x$.

19. $y'' + 9y = 10e^{3x}$.

20. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початкові умови.

$$y'' - 3y' + 2y = -\sin x - 7 \cos x, \\ y(0) = 2, y'(0) = 7.$$

21. Дослідіть збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 8^n}{24^n}$ і знайдіть його суму.

Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 7 \cdot 12 \cdots (5n-3)}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{2n+1} \right)^n$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2 + 5}$.

25. Дослідіть на збіжність і абсолютну збіжність знакоперерговий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n+5}}$.

26. Знайдіть область збіжності функціональних рядів

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{\sqrt{2n-1}}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (x-2)^n}{(n+1) \ln(n+1)}$.

27. Запишіть ряд Тейлора функції $f(x) = \sin x$ в околі точки $x_0 = a$ та знайдіть область його збіжності.

28. Користуючись розкладом у степеневий ряд відповідно підібраної функції, обчисліть e^{-1} із заданою точністю $\alpha = 0,0001$.

29. Розвиньте у ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi, \pi)$.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x/4, & -\pi \leq x < 0, \\ 0, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

30. Розвиньте у ряд Фур'є періодичну з періодом $\omega = 2l$ функцію $f(x) = 4x - 3$ задану на інтервалі $-5 < x < 5$, $l = 5$.

31. Розвиньте у ряд Фур'є за синусами функцію $f(x) = 0,5x + 2$, задану на відрізьку $[0, \pi]$.

Варіант 27

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції

а) $z = \sqrt{1-x-y}$;

б) $z = \sqrt{x-y^2} + \ln xy$.

2. Обчисліть значення частинних похідних функції

$$u = \frac{xz}{x-y} \text{ у точці } M_0(3, 1, 1).$$

3. Знайдіть повний диференціал функції

$$z = 2 - x^3 - y^3 + 5x.$$

4. Обчисліть значення похідної складеної функції

$$u = \ln(e^{2x} + e^y), \text{ де } x = t^2,$$

$$y = t^4 \text{ при } t = 1.$$

5. Знайдіть $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо

$$z = \operatorname{arccotg} \frac{u}{v^2},$$

$$u = x^2 \sin 2y, v = x - \cos^2 y.$$

6. Для функції

$$z = \arcsin \frac{x}{x+y}, \text{ точки } P_0(3; 4) \text{ та}$$

вектора $\vec{a} = \{-1, 1\}$ знайдіть

$$\operatorname{grad} z(P_0) \text{ і } \frac{\partial z}{\partial \vec{a}}(P_0).$$

7. Обчисліть наближено $(1, 02)^{2,04} - \ln 1,02$.

8. Доведіть, що функція

$$z = \frac{y^2}{3x} + \arcsin(xy) \text{ задовольняє}$$

$$\text{рівняння } x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0.$$

9. Дослідіть на екстремум функцію

$$z = x^2 + y^2 - xy + 9x - 6y + 20.$$

10. Знайдіть умовний екстремум функції $z = x^2 - y^2$

$$\text{при } x + 2y - 6 = 0.$$

11. Знайдіть найбільше і найменше значення функції

$$z = 4 - 2x^2 - y^2, \text{ в заданій}$$

$$\text{області } D: y = 0, y = \sqrt{1-x^2}.$$

Знайдіть загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

$$12. e^x \operatorname{tg} y dx = (1 - e^x) \sec^2 y dy.$$

$$13. (x + x^2) y dx + (1 + y^2) dy = 0.$$

$$14. (2x - y) dx + (x + y) dy = 0.$$

15. Знайдіть частинний розв'язок (частинний інтеграл) диференціального рівняння

$$x^2 y' = 2xy + 3, y(1) = -1.$$

16. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y' - y \operatorname{tg} x + y^2 \cos x = 0.$$

Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння

$$17. \text{ а) } 4y'' + 8y' - 5y = 0;$$

б) $y'' - y = 0$;

в) $y'' - 6y' + 10y = 0$.

18. $y'' + 2y' + y = 6e^{-x}$.

19. $4y'' - 4y' + y = -25\cos x$.

20. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початкові умови.

$$y'' + 2y' = 6x^2 + 2x + 1, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2.$$

21. Дослідіть збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$$
 і знайдіть його суму.

Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)!}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{\pi}{5n+1} \right)^n$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4}$.

25. Дослідіть на збіжність і абсолютну збіжність знакопечерговий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+5}{3^n}.$$

26. Знайдіть область збіжності функціональних рядів

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2 x^n}{2^n}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 5^n}$.

27. Запишіть ряд Маклорена функції $f(x) = 5^x$. Вкажіть область збіжності отриманого ряду до цієї функції.

28. Користуючись розкладом у степеневий ряд відповідно підбраної функції, обчисліть $\sin \pi/100$ із заданою точністю $\alpha = 0,0001$.

29. Розв'яньте у ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi, \pi)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ x/5 - 2, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

30. Розв'яньте у ряд Фур'є періодичну з періодом $\omega = 2l$ функцію

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & -2 < x < -1, \\ 1, & -1 \leq x \leq 1, \\ 2 - x, & 1 < x < 2, \end{cases}$$

$$l = 2.$$

31. Розв'яньте у ряд Фур'є за косинусами функцію $f(x) = 2 + 3x$, задану на відрізку $[0, \pi]$.

Варіант 28

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції

а) $z = e^{\sqrt{x^2+y^2-1}}$;

б) $z = \arccos \frac{x^2 + y^2}{4} + \arcsin \frac{1}{xy}$.

2. Обчисліть значення частинних похідних функції

$u = \sqrt{x^2 + y^2} - 2xy \cos z$ у точці

$M_0 \left(3, 4, \frac{\pi}{2} \right)$.

3. Знайдіть повний диференціал функції

$z = 7x - x^3 y^2 + y^4$.

4. Обчисліть значення похідної складеної функції

$u = \arctg(x + y)$, де $x = t^2 + 2$,

$y = 4 - t^2$ при $t = 1$.

5. Знайдіть $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо

$z = f(u; v)$, $u = x^2 - y^2$, $v = \frac{x^2}{y}$.

6. Для функції $Z = 3x^4 - xy + 2y^3$, точки

$P_0(1; 2)$ та вектора $\vec{a} = \{2, -1\}$

знайдіть $\text{grad } z(P_0)$ і $\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}(P_0)$.

7. Обчисліть наближено $(0,97)^{2,02}$.

8. Доведіть, що функція $z = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1)$

задовольняє рівняння

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

9. Дослідіть на екстремум функцію $z = xy - 3x^2 - 2y^2$.

10. Знайдіть умовний екстремум функції $z = x^2 + y^2$ при $x - 2y - 5 = 0$.

11. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $z = 5x^2 + 3xy + y^2 + 4$ в заданій області D : $y = -1$, $y = 1$, $x = -1$, $x = 1$.

Знайдіть загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

12. $y' + \sin(x + y) = \sin(x - y)$.

13. $(xy - x)^2 dy + y(1 - x)dx = 0$.

14. $2x^3 y' = y(2x^2 - y^2)$.

15. Знайдіть частинний розв'язок (частинний інтеграл) диференціального рівняння

$y' + 2xy = xe^{-x^2}$, $y(0) = 0$.

16. Знайдіть загальний розв'язок диференціального

рівняння $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$.

Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння

17. а) $y'' + 8y' + 25y = 0$;

б) $y'' + 9y' = 0$;
 в) $9y'' + 3y' - 2y = 0$.

18. $y'' + 2y' + 37y = 37x^2 - 33x + 74$.

19. $3y'' - 5y' - 2y = 6\cos 2x + 38\sin 2x$.

20. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початкові умови.

$y'' + 16y = 32e^{4x}$, $y(0) = 2$,
 $y'(0) = 0$.

21. Дослідіть збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n - 3^n}{24^n}$ і знайдіть його суму.

Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^3}{(2n)!}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctg \frac{1}{2n-1} \right)^{2n}$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+4}$.

25. Дослідіть на збіжність і абсолютну збіжність знакопочерговий ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2n+7} \right)^n$.

26. Знайдіть область збіжності функціональних рядів

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{6^n \sqrt[3]{n}}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)^{2n} (x-1)^n}{(3n-2)^{2n}}$.

27. Запишіть ряд Тейлора функції $f(x) = \ln(5x+3)$ в околі точки $x_0 = 1$ та знайдіть область його збіжності.

28. Користуючись розкладом у степеневий ряд відповідно підібраної функції, обчисліть $\sqrt[4]{90}$ із заданою точністю $\alpha = 0,001$.

29. Розвиньте у ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi, \pi)$.

$f(x) = \begin{cases} 2x-11, & -\pi \leq x < 0, \\ 0, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$

30. Розвиньте у ряд Фур'є періодичну з періодом $\omega = 2l$ функцію

$f(x) = \begin{cases} -1/2, & -6 < x < 0, \\ 1, & 0 < x < 6. \end{cases}, l = 6.$

31. Розвиньте у ряд Фур'є за синусами функцію

$f(x) = 4 - 3x$, задану на відрізку $[0, \pi]$.

Варіант 29

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції

а) $z = \frac{1}{x^2 + y^2 - 6}$;

б) $z = \frac{y}{\sqrt{x+y}} + \frac{x}{\sqrt{x-y}}$.

2. Обчисліть значення частинних похідних функції $u = ze^{-xy}$ у точці $M_0(0, 1, 1)$.

3. Знайдіть повний диференціал функції $z = e^{y-x}$.

4. Обчисліть значення похідної складеної функції $u = \sqrt{y^2 + x^2 + 3}$, де $x = \ln t$, $y = t^3$ при $t = 1$.

5. Знайдіть $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо

$$z = f(u; v), \quad u = \sin x^2 + \cos y^2, \\ v = xy.$$

6. Для функції $z = x^3 + 3x^2 + 6xy + y^2$, точки $P_0(5; 13)$ та вектора $\vec{a} = \{-1, -1\}$ знайдіть $\text{grad } z(P_0)$ і $\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}(P_0)$.

7. Обчисліть наближено $(1, 03)^{2,04}$

8. Доведіть, що функція $z = e^{-xy}$ задовольняє рівняння

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \\ + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2xyz = 0.$$

9. Дослідіть на екстремум функцію $z = 3(y+2)^2 + x^2$.

10. Знайдіть умовний екстремум функції $z = 3x + 4y$ при $9x^2 + 4y^2 = 1$.

11. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $z = x^2 + 2xy - y^2 + 4x$ в заданій області $D: y = 0, y + x + 2 = 0, x = 0$.

Знайдіть загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

12. $y' \cos^3 y - \cos(2x + y) = \cos(2x - y)$.

13. $(x^2 y - y)^2 y' = x^2 y - y + x^2 - 1$.

14. $(2\sqrt{xy} - y)dx + xdy = 0$.

15. Знайдіть частинний розв'язок (частинний інтеграл) диференціального рівняння

$$y' - 3x^2 y - x^2 e^{x^3} = 0, \quad y(0) = 0.$$

16. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння $y' - y + y^2 \cos x = 0$.

Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння

17. а) $6y'' + 7y' - 3y = 0$;

б) $y'' + 16y = 0$;

в) $4y'' - 4y' + y = 0$.

18. $6y'' - y' - y = 3e^{2x}$.

19. $y'' + 4y' + 29y = 26e^{-x}$.

20. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початкові умови.

$$y'' + 5y' + 6y = 52\sin 2x,$$

$$y(0) = -2, \quad y'(0) = -2.$$

21. Дослідіть збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+5)(3n+2)}$ і знайдіть його суму.

Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n(2n-1)}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(\ln(n+5))^2}$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n^2+3}$.

25. Дослідіть на збіжність і абсолютну збіжність знакопосередній ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(3n-2)!}$$

26. Знайдіть область збіжності функціональних рядів

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{1}{n} x^n$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{(n+1)\ln(n+1)}$.

27. Запишіть ряд Маклорена функції $f(x) = x \cos \sqrt{x}$. Вкажіть область збіжності отриманого ряду до цієї функції.

28. Користуючись розкладом у степеневий ряд відповідно підбраної функції, обчисліть $\frac{1}{\sqrt[7]{136}}$ із заданою точністю $\alpha = 0,001$.

29. Розв'яжіть у ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi, \pi)$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ 3x - 8, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

30. Розв'яжіть у ряд Фур'є періодичну з періодом $\omega = 2l$ функцію

$$f(x) = \begin{cases} -2x, & -2 < x < 0, \\ 2, & x = 0, \\ 4, & 0 < x < 2, \end{cases}, \quad l = 2.$$

31. Розв'яжіть у ряд Фур'є за косинусами функцію $f(x) = 5 - 2x$, задану на відрізьку $[0, \pi]$.

Варіант 30

1. Знайдіть і зобразіть область визначення функції

а) $z = \frac{4xy}{x^2 - y^2}$;

б) $z = \sqrt{\frac{x^2 + 2x + y^2 - 3}{2x - x^2 - y^2}}$.

2. Обчисліть значення частинних похідних функції $u = \arcsin(x\sqrt{y}) - yz^2$ у точці $M_0(0, 4, 1)$.

3. Знайдіть повний диференціал функції $z = \arctg(2x - y)$.

4. Обчисліть значення похідної складеної функції $u = \arctg(xy)$, де $x = t + 3$, $y = e^t$ при $t = 0$.

5. Знайдіть $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $z = u^2 + e^u v^2$, $v = e^{2(x-y)}$, $u = \sin xy$.

6. Для функції $z = x^2 - 2xy$, точки $P_0(1; -1)$ та вектора $\vec{a} = \{-1, 2\}$ знайдіть $\text{grad } z(P_0)$ і $\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}(P_0)$.

7. Обчисліть наближено $\cos 59^\circ \text{ctg } 46^\circ$.

8. Доведіть, що функція $z = \ln(x + e^{-y})$ задовольняє рівняння $\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

9. Дослідіть на екстремум функцію $z = 2(x + y) - x^2 - y^2$.

10. Знайдіть умовний екстремум функції $z = 8x^2 + 9y^2$ при $4x + 2y - 1 = 0$.

11. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $z = 2x^2y - x^3y - x^2y^2$ в заданій області $D: y = 0, x + y = 6, x = 0$.

Знайдіть загальний розв'язок (загальний інтеграл) диференціального рівняння.

12. $(\sin(2x + y) + \sin(2x - y))dx = \frac{dy}{\sin y}$.

13. $\sqrt{1 - y^2} dx + y\sqrt{1 - x^2} dy = 0$.

14. $(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$.

15. Знайдіть частинний розв'язок (частинний інтеграл) диференціального рівняння $xy' + y = \ln x + 1$, $y(1) = 0$.

16. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння $y' = x\sqrt{y} + \frac{xy}{x^2 - 1}$.

Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння

17. а) $9y'' - 6y' + y = 0$;

б) $y'' - 2y' = 0$;

в) $y'' + 12y' + 37y = 0$

18. $2y'' + 7y' + 3y = 2\sin 3x$.

19. $4y'' + 3y' - y = 11\cos x - 7\sin x$.

20. Знайдіть частинний розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початкові умови.

$$y'' - 4y = 8e^{2x}, \quad y(0) = 1,$$

$$y'(0) = -8.$$

21. Дослідіть збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n - 2^n}{18^n} \text{ і знайдіть його суму.}$$

Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n} \cdot 2^n}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{n+3}{2n+5} \right)^n$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+6)}$.

25. Дослідіть на збіжність і абсолютну збіжність знакопечерговий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right).$$

26. Знайдіть область збіжності функціональних рядів

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^{2n}}{2n}$.

27. Запишіть ряд Тейлора функції $f(x) = \frac{1}{x+3}$ в околі

точки $x_0 = 1$ та знайдіть область його збіжності.

28. Користуючись розкладом у степеневий ряд відповідно підбраної функції, обчисліть

$$\frac{1}{\sqrt[3]{e}} \text{ із заданою}$$

точністю $\alpha = 0,001$.

29. Розвиньте у ряд Фур'є періодичну з періодом 2π функцію $f(x)$, задану на інтервалі $(-\pi, \pi)$.

$$f(x) = \begin{cases} 7x-1, & -\pi \leq x < 0, \\ 0, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

30. Розвиньте у ряд Фур'є періодичну з періодом $\omega = 2l$ функцію $f(x) = |x| - 3$ задану на інтервалі $-4 < x < 4$, $l = 4$.

31. Розвиньте у ряд Фур'є за синусами функцію $f(x) = 2 - 3x$, задану на відрізьку $[0, \pi]$.

