6. Пояснити, чому (j, r) ділиться на (i, j)? (стор. 77).

7. Чому ми доведемо, що $(a, n) = r_k$, якщо діятимо, як у доведенні теореми 1? (стор. 78).

8. Чому y_0 є цілим числом? (стор. 79).

9. Пояснити, чому $x = c + \lambda n$ для деякого $\lambda \in \mathbf{Z}$? (стор. 80).

10. Чому $y = y_0 - a\lambda$? (стор. 80).

11. Як знайти c, якщо знати тільки один з розв'язків рівняння (3)? (стор. 80).

12. Перевірити рівність $16^{-1} \pmod{75} = 61$. (стор. 81).

13. Впевнитись, що алгоритм 3 є цілком ідентичним до алгоритму 2, якщо не обчислювати послідовності (15) (стор. 85).

14. Перевірити, що умови (17) стають тривіальними при $k = 1$, а саме $n = n$ та $a = a$ (стор. 86).

5. Задачі

Задача 1. *Використовуючи алгоритм Евкліда* (*алгоритм* 2), *знайти найбільший спільний дільник чисел* 4076 *та* 1024.

Задача 2. *Використовуючи обчислення, зроблені при розв'язанні задачі* 1, *записати* (4076, 1024) *у вигляді лінійної комбінації* 4076 *та* 1024.

Задача 3. *Використовуючи алгоритм Евкліда* (*алгоритм* 2), *знайти найбільший спільний дільник чисел*

a) 1024 *та* 1000; b) 2024 *та* 1024.

Задача 4. *Використовуючи алгоритм Евкліда* (*алгоритм* 2), *знайти найбільший спільний дільник чисел*

a) 2076 *та* 1076; b) 2076 *та* 1776.

Задача 5. *Використовуючи розширений алгоритм Евкліда* (*алгоритм* 3), *виразити* (a, b) *для чисел* a *та* b *з задачі* 3.

Задача 6. *Використовуючи розширений алгоритм Евкліда (алгоритм* 3*), виразити* (a, b) *для чисел* a *та* b *з задачі* 4*.*

Задача 7. *Нехай* $(a, n) = d$*. Довести, що* $(a/d, n/d) = 1$*.*

Задача 8. *Нехай* a, b, c *— три натуральні числа. Довести, що* $(ac, bc) = c(a, b)$*.*

Задача 9. *Спростувати наступне твердження: якщо* $(a, b) = 1 = (b, c)$*, то* $(a, c) = 1$*.*

Задача 10. *Спростувати наступне твердження: якщо* $(a, b) = 2 = (b, c)$*, то* $(a, c) = 2$*.*

Задача 11. *Нехай* $p_1, \dots, p_n$ *— різні прості числа,* $a = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$*,* $b = p_1^{\beta_1} \dots p_n^{\beta_n}$*. Довести, що* $(a, b) = p_1^{\min\{\alpha_1,\beta_1\}} \dots p_n^{\min\{\alpha_n,\beta_n\}}$*.*

Задача 12. *Найменшим спільним кратним двох натуральних чисел* a *та* b *називається найменше натуральне число, яке ділиться і на* a*, і на* b*. Це число позначається* $[a, b]$*. Довести, що*

a) *якщо* p *— просте число,* $a = p^{\alpha}$*,* $b = p^{\beta}$*, то* $[a, b] = p^{\max\{\alpha,\beta\}}$*;*
b) *якщо* p_1, p_2 *— два різних простих числа,* $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$*,* $b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2}$*, то* $[a, b] = p_1^{\max\{\alpha_1,\beta_1\}} p_2^{\max\{\alpha_2,\beta_2\}}$*;*
c) *якщо* $p_1, \dots, p_n$ *— різні прості числа,* $a = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$*,* $b = p_1^{\beta_1} \dots p_n^{\beta_n}$*, то* $[a, b] = p_1^{\max\{\alpha_1,\beta_1\}} \dots p_n^{\max\{\alpha_n,\beta_n\}}$*.*

Задача 13. *Довести, що*

$$[a, b] \cdot (a, b) = ab.$$

Задача 14. *Довести, що* $(a, b) \mid [a, b]$*.*

Задача 15. *Довести, що* $[ka, kb] = k[a, b]$*.*

Задача 16. *Чи є вірними наступні твердження?*

a) *Найменше спільне кратне двох простих чисел дорівнює їхньому добутку.*
b) *Найменше спільне кратне двох послідовних натуральних чисел дорівнює їхньому добутку.*

c) *Найменше спільне кратне двох різних простих чисел дорівнює їхньому добутку.*
d) *Якщо* $(a, b) = 1$, *то* $[a, b] = ab$.
e) *Якщо* $p \nmid a$, *то* $[p, a] = pa$.

Задача 17. *Чи є вірними наступні твердження?*

a) *Якщо* $[a, b] = 1$, *то* $a = 1 = b$.
b) *Якщо* $[a, b] = b$, *то* $a = 1$.
c) *Якщо* $[a, b] = b$, *то* $a \mid b$.
d) *Якщо* $[a, b] = ab$, *то* $a = b$.
e) *Якщо* $[a, b] = ab$ *and* $[b, c] = bc$, *то* $[a, c] = ac$.

Задача 18. *Розглянемо прямокутник* P_1 *розміру* 23×13 *(див. лівий малюнок). Найбільший квадрат* K_1, *який можна в нього вписати, має розмір* 13×13. *Найбільший квадрат* K_2, *який можна вписати в* $P_2 = P_1 \setminus K_1$, *має розмір* 10×10. *В* $P_3 = P_2 \setminus K_2$ *можна вписати три квадрати розміру* 3×3. *Після цього залишаються три квадрати розміру* 1×1 *(див. правий малюнок).*

Рис. 1. *Прямокутник* P_1

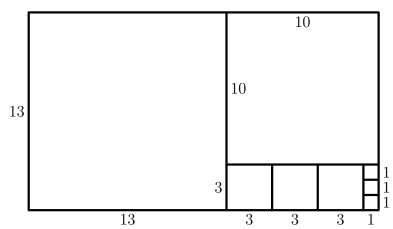


Рис. 2. *Вписані квадрати*

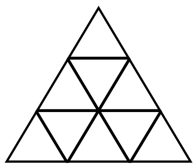
Запишемо тепер дії алгоритму Евкліда для знаходження $(23, 13)$:

$$
\begin{aligned}
23 &= 1 \cdot 13 + 10 \\
13 &= 1 \cdot 10 + 3 \\
10 &= 3 \cdot 3 + 1 \\
3 &= 3 \cdot 1.
\end{aligned}
$$

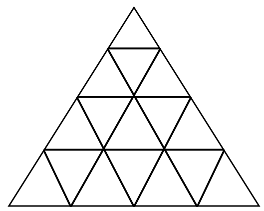
a) *Чи бачите ви зв'язок між обчисленнями в алгоритмі Евкліда та заповненням прямокутника квадратами?*

b) *Чи є цей звязок універсальним?*

Задача 19. *Шоколадка має форму правильного трикутника зі стороною* n. *Грають двоє гравців. На кожному кроці дозволяється відламати частину по одній з внутрішніх ліній й передати залишок іншому гравцеві. Переможцем стає той, хто отримує останній шматочок, який вже не має внутрішніх ліній. З'ясуйте, хто стане переможцем такої гри при* $n = 3$ *та* $n = 4$.



$n = 3$



$n = 4$

БІОГРАФІЇ

Евклід, *грец.* $E\nu\kappa\lambda\varepsilon\iota\delta\eta\zeta$ (близько 365–близько 300 до Р. Х.), старогрецький математик і визнаний основоположник математики.

Евклід

Наукова діяльність Евкліда проходила в Александрійській бібліотеці — суспільній інституції, що являла собою бібліотечний, науковий, навчальний, інформаційно-аналітичний, і культурологічний комплекс.*

Основна праця Евкліда "*Начала*" (латинізована назва "*Елементи*") включає в себе 13 книжок, у яких міститься систематизований виклад геометрії, а також деяких питань теорії чисел.

Книги з такою ж назвою, в яких послідовно викладалися всі основні факти геометрії і теоретичної арифметики, складалися раніше Гіппократом Хіосським, Леонтом і Февдієм. Проте "*Начала*" Евкліда витіснили всі ці твори з ужитку і протягом більш ніж двох тисячоліть

* Місто Александрія знаходиться зараз у Єгипті. Александрійська бібліотека заснована, як вважається, Птолемеєм I на початку третього століття до Р. Х. Значення цієї величезної бібліотеки важко переоцінити для елінського світу: у ній зберігалися сотні тисяч папірусних сувій, які використовувались вченими для розвитку науки.

залишалися базовим підручником геометрії. Створюючи свій підручник, Евклід включив в нього багато з того, що було створене його попередниками, обробивши цей матеріал і звівши його воєдино.

У рукописах, що дійшли до нас, до тринадцяти книг Евкліда додані ще дві: XIV книга належить александрійцу Гипсиклу (біля 200 р. до Р. Х.), а XV книгу створено під час життя Ісідора Мілетського, будівельника храму св. Софії в Константинополі (початок VI ст. Р. Х.).

Коментарі до "*Начал*" в античності складали Герон, Порфирій, Папп, Прокл, Симплікій. Зберігся коментар Прокла до I книги, а також коментар Паппа до X книги (у арабському перекладі).

У створенні і розвитку науки нового часу "*Начала*" зіграли важливу ідейну роль; вони залишаються і донині зразком математичного строгості.

Алгоритм знаходження найбільшого спільного дільника двох чисел (алгоритм 2) в "*Началах*" описано двічи, спочатку у книзі VII (для знаходження найбільшого спільного дільника двох натуральних чисел), а потім у книзі X (для знаходження найбільшої загальної міри двох однорідних величин). В обох випадках Евклід надав геометричний опис алгоритму.

Цей алгоритм не було відкрито Евклидом, оскільки згадка про нього є вже в "*Топіках*" Аристотеля. Давньогрецькі математики називали цей алгоритм $\alpha\nu\theta\nu\phi\alpha\iota\rho\varepsilon\sigma\iota\zeta$, тобто "взаємне віднімання".

Про життя Евкліда мало що відомо, крім того, що він жив і викладав в Александрії. Тим не менш, існує багато фольклорних цитат, приписуваних Евкліду. Наприклад, він нібито був учителем правителя Птолемея I, який царював з 306 р. до Р. Х. Якось Птолемей запитав у Евкліда, чи є простіший спосіб вивчити геометрію. Евклід нібито відповів, що у геометрії не існує царської дороги.**

** Про це написав Прокл у коментарях до книги I Евклідівських "*Начал*". Вираз "царська дорога" став крилатим ще в античні часи; так називали найбільш швидкий, легкий й розумний спосіб досягнути своєї мети. Вираз з'явився після того, як Геродот у своїй "*Історії*" із захопленням описав спосіб доставки пошти у V сторіччі до Р. Х. під час правління персидського царя Дарія, який побудував для цього спеціальну дорогу.