16. Показати, що якщо $m = p_1^{i_1} \dots p_k^{i_k}$ та $n = q_1^{j_1} \dots q_k^{j_l}$ є взаємно простими, то серед серед $p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_l$ немає однакових чисел. (стор. 136).

17. Довести, що теорема 3 випливає з (12) та (4). (стор. 138).

7. Задачі

Задача 1. *За допомогою лінійного шифра з параметрами $a = 23$, $b = 7$ зашифрувати повідомлення* `СЕКРЕТ`. *Чи можна вживати параметр $a = 21$ для $L_{a,b}$ шифру?*

Задача 2. *За допомогою лінійного шифра з параметрами $a = 23$, $b = 7$ зашифрувати повідомлення* `SECRET`, *використовуючи латинський алфавіт. Чи можна вживати параметр $a = 21$ для $L_{a,b}$ шифру?*

Задача 3. *Результатом застосування лінійного шифра з параметрами $a = 23$, $b = 7$ отримано фразу* `ЄЩХБФШАЕ`. *Знайти текст, який було зашифровано.*

Задача 4. *Результатом застосування лінійного шифра з параметрами $a = 15$, $b = 6$ до фрази англійською отримано* `SQETCPQ`. *Знайти текст, який було зашифровано.*

Задача 5. *Довести, що (10) випливає з (9).*

Задача 6. *Проаналізувати таблицю 1 й висловити гіпотезу стосовно парності функції $\phi(n)$. Довести цю гіпотезу.*

Задача 7. *Показати, що $\phi(5186) = \phi(5187) = \phi(5188)$.*

Задача 8. *Показати, що для кожного натурального n виконуеться властивість*

$$\phi(2n) = \begin{cases} \phi(n), & \text{якщо } n \text{ непарне,} \\ 2\phi(n), & \text{якщо } n \text{ парне.} \end{cases}$$

Задача 9. *Знайти остачу від ділення 7^{1020} на 15.*

Задача 10. *Знайти остачу від ділення 79^{1776} на 24.*

Задача 11. *Визначити останню цифру числа* 17^{6666}.

Задача 12. *Розв'язати рівняння* $\phi(x) = x/3$.

Задача 13. *Розв'язати рівняння* $\phi(2x) = \phi(3x)$.

Задача 14. *Розв'язати рівняння* $\phi(x) = 2$.

Задача 15. *Довести, що* $\phi\left(n^2\right) = n\phi(n)$.

Задача 16. *Нехай* $m \mid n$. *Довести, що* $\phi(mn) = m\phi(n)$.

Задача 17. *Нехай* $d = (m, n)$. *Довести, що*

$$\phi(mn) = \phi(m)\,\phi(n)\,\frac{d}{\phi(d)}.$$

Задача 18. *Нехай* $d = (m, n)$, $K = [m, n]$. *Довести, що* $\phi(m)\,\phi(n) = K\phi(d)$.

Задача 19. *Для* $n = 7, 10, 12, 17$ *підрахувати*

$$\sum_{d \mid n} \phi(d)\,. \tag{14}$$

На основі обчисленъ висунути гіпотезу стосовно значення цієї суми у загальному випадку.

Задача 20. *Довести, що сума* (14) *дорівнює* n *для будь-якого* n. *Цей результат отримав Ф. Гаус.*

Задача 21. *Для* $n = 7, 10, 12, 17$ *підрахувати*

$$\sum_{d \mid n} (-1)^{n/d}\phi(d)\,. \tag{15}$$

На основі обчисленъ висунути гіпотезу стосовно значення цієї суми у загальному випадку.

Задача 22. *Позначимо через* T_n *суму* (15). *Довести, що*

$$T_n = \begin{cases} -n, & n \text{ є непарним}, \\ 0, & n \text{ є парним}. \end{cases}$$

Задача 23. *Нехай* p *є простим числом.*

(a) *Знайти* $\phi(1) + \phi(p)$.

(b) *Нехай* $\alpha > 1$ *є натуральним числом. Знайти суму*

$$\phi(1) + \phi(p) + \cdots + \phi(p^{\alpha}).$$

Задача 24. *Нехай* $(a, b) = 1$. *Розглянемо таблицю*

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & b \\ b+1 & b+2 & b+3 & \dots & 2b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ (a-1)b+1 & (a-1)b+2 & (a-1)b+3 & \dots & ab. \end{array}$$

У яких стовбчиках цієї таблиці знаходяться числа, які є взаємно простими з числом b*? Скільки у кожному з цих стовбчиків чисел, які є взаємно простими з* a*? Доведіть мультиплікативність функції Ойлера на підставі відповідей на попередні два питання.*

Задача 25. *Відомо, що* $(m, n) > 1$. *Яке з чисел є більшим* $\phi(mn)$ *чи* $\phi(m)\,\phi(n)$*?*

Задача 26. *Коло розділено n точками на n рівних частин. Скільки існує різних замкнених ламаних з n рівних ланцюгів з вершинами у ціх точках?*

Задача 27. *Чи існує степень трійки, яка закінчується на 0001?*

Задача 28. *З використанням функції* $\phi(n)$ *знайти правило, за яким утворено початок послідовності* $1, 2, 2, 4, 4, 4, 6, 8, 6, \dots$.

Задача 29. *Скільки існує правильних нескоротних дробів зі знаменником 150?*

Задача 30. *Знайти кількість натуральних чисел n, які не перевищують 615 та мають властивість $(n, 615) = 15$.*

Задача 31. *Чи існує границя $\phi(n)/n$ при $n \to \infty$? Довести, що*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\phi(n)}{n} = 0, \qquad \limsup_{n\to\infty} \frac{\phi(n)}{n} = 1.$$

Задача 32. *Нехай $0 < \delta < 1$. Довести, що*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\phi(n)}{n^{1-\delta}} = \infty.$$

Задача 33. *Нехай f — мультиплікативна функція. Довести, що якщо*

$$\lim_{p^m\to\infty} f(p^m) = 0$$

(тут p — просте число), то $f(n) \to 0$ при $n \to \infty$.