НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

«На правах рукопису»

УДК _____

«До захисту допущено»

Завідувач кафедри

_____ Клесов О.І.

(підпис) (ініціали, прізвище)

“___”_____20__ р.

Магістерська дисертація

освітньо-кваліфікаційного рівня “Магістр”

зі спеціальності 8.04020101 «Математика»
на тему: «Дослідження швидкості зростання випадкового полімера»

Виконала: студентка VI курсу, групи ОМ-31м
Маджара Катерина Михайлівна _____ _____
(прізвище, ім’я, по батькові) (підпис)

Керівник доктор фізико-математичних наук, професор
Пилипенко А.Ю. _____ _____
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали) (підпис)

Консультант «Охорона праці та безпека в надзвичайних ситуаціях»
(назва розділу)

доцент Мітюк Л. О. _____ _____
(вчені ступінь та звання, прізвище, ініціали) (підпис)

Рецензент кандидат фізико-математичних наук, старший
науковий співробітник інституту геофізики НАН України
ім. С. І. Субботіна, Арясова О. В. _____ _____
(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали) (підпис)

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.

Студент _____

(підпис)

Київ - 2015 року

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

Факультет Фізико – математичний

Кафедра Математичного аналізу та теорії ймовірностей

Освітньо-кваліфікаційний рівень «магістр»

Напрям підготовки 8.04020101 « Математика »

Спеціальність 8.04020101 « Математика »

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ Клесов О.І.

(підпис)

«__» _____ 2015р.

ЗАВДАННЯ

НА МАГІСТЕРСЬКУ ДИСЕРТАЦІЮ СТУДЕНТУ

Маджарі Катерині Михайлівні

1. Тема дисертації: «Дослідження швидкості зростання випадкового полімера»

науковий керівник дисертації: Пилипенко Андрій Юрійович, доктор фіз.-мат. наук, професор,

затверджені наказом по університету від «__» _____ 20__р. №_____

2. Строк подання студентом: дисертації «__» _____ 20__р.

3. Об'єкт дослідження: випадкові полімери

4. Предмет дослідження: знаходження швидкості зростання випадкового полімеру

5. **Перелік завдань, які потрібно розробити :**

1) знайти математичне сподівання ширини випадкового полімеру;

2) знайти середню масу випадкового полімеру.

6. Орієнтовний перелік ілюстрованого матеріалу:

7. Орієнтовний перелік публікацій:

тринадцята Міжнародна студентська науково-практична інтернет конференція «Innovations in Science and Technology», Київ 01-10 грудня 2014

8. Консультанти розділів дисертації:

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв
Основна частина	д-р. ф.-м. наук, проф. Пилипенко А.Ю.		
Охорона праці та безпека в надзвичайних ситуаціях	доц. Мітюк Л. О.		

9. **Дата видачі завдання:** «__» _____ 20__р.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Строк виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1.	Вивчення літератури з теорії харківських процесів		
2.	Вивчення задач кристалізації		
3.	Знаходження випадкового сподівання ширини та середню масу випадкового полімеру у випадку розміру частинок 1×1		
4.	Знаходження випадкового сподівання ширини та середню масу випадкового полімеру у випадку розміру частинок $1 \times m$		
5.	Дослідження умов охорони праці		
6.	Оформлення роботи		

Студент _____ Маджара К.М.

(підпис) (ініціали, прізвище)

Науковий керівник дисертації _____ Пилипенко А.Ю.

(підпис) (ініціали, прізвище)

Реферат

Магістерська дисертація ст., джерел

В магістерській дисертації розглянуто задачу про утворення випадкового полімеру. Досліджено середню ширину та середню масу випадкового полімеру для яких було знайдено явні формули.

Зокрема було встановлено, що середня ширина має лінійний ріст із часом, а середня маса – квадратичний.

Ключові слова: випадковий полімер, ланцюг Маркова, гіллясті процеси.

ЗМІСТ

ВСТУП 8

Розділ 1. Основні теоритичні відомості 11

Математичне сподівання 11

Геометричний закон розподіл 11

Ланцюг Маркова 12

Розділ 2. Дослідження швидкості зростання випадкового полімеру. 14

2.1 Дослідження швидкості зростання випадкового полімеру у випадку розміру частинок $\mathbf{1} \times \mathbf{1}$. 14

2.2 Дослідження швидкості зростання випадкового полімеру у випадку коли не обмежена ширина частинок 23

2.2.1. Постановка задачі, та формулювання основних теорем. 23

2.2.2 Доведення поставлених теорем. 28

2.3. Знаходження $\boldsymbol{\alpha}$ та $\boldsymbol{\beta}$ для попередніх задач 34

Розділ 3 ОХОРОНА ПРАЦІ ТА БЕЗПЕКА В НАДЗВИЧАЙНИХ СИТУАЦІЯХ 46

3.1 ОЦІНКА ВАЖКОСТІ ТА НАПРУЖЕНОСТІ ПРАЦІ 46

3.2. АНАЛІЗ ПСИХОЛОГІЧНИХ АСПЕКТІВ УМОВ ПРАЦІ. 47

3.3. НОРМУВАННЯ ПРАЦІ. ВИБІР ОПТИМАЛЬНОГО РЕЖИМУ ПРАЦІ ТА ВІДПОЧИНКУ. 49

3.4. САНІТАРІЯ ТА ГІГІЄНА РОБОЧОГО МІСЦЯ. 51

3.4.1. ВИМОГИ ДО ПРИМІЩЕННЯ 52

3.4.2. ВИМОГИ ДО ОРГАНІЗАЦІЇ РОБОЧОГО МІСЦЯ 53

3.5. ОХОРОНА ПРАЦІ ПРИ ВИКОРИСТАННІ ТЕХНІЧНИХ ЗАСОБІВ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ДІЯЛЬНОСТІ ПРИ ВИКОНАННІ ДИПЛОМНОЇ РОБОТИ. 54

ВСТУП

Людину завжди оточували різноманітні природні явища на кшталт снігопадів, дощів, веселок, вітрів тощо. Здавна люди пояснювали все це, як якусь найвищу силу, але з часом почали задавати питання чому ж дме вітер, йде дощ, як утворюються замети, сніжинки , піщані пагорби, що трапляється з водою при дуже холодній температурі, та чому інколи метал може стати м’яким тощо. І чим більше часу проходило тим більше люди, що називали себе вченими знаходили відповіді. Таким чином на сьогоднішній день ми маємо наукове обґрунтування майже всіх природних явищ, з котрими людині вдалося зустрітись за тисячоліття існування.

Чим більше часу плине, тим більше людство розвивається. І тепер багатьох людей цікавить можливість створення подібних до реальності комп’ютерних моделей за для створення більш реалістичних фільмів, можливості відбудувати найближчі до дійсності варіанти розвитку еволюції, що в свою чергу дало б багато відповідей на питання людства, що існують на сьогодні, також це дало б гарну можливість для отримання більш точних передбачень природних катаклізмів, що потенційно могло б врятувати тисячі життів, створення тепличних умов для отримання природних ресурсів, що знаходяться на межі виснаження.

Яким же чином утворюються замети, сніжинки, піщані пагорби, як в загалі відбувається кристалізація? Ці питання задавали собі багато розумних чоловіків.

Р. Мейл і В. Джонсон на симпозіумі, що відбувся в США в Детройті (жовтень 1938р.) представили проблему затвердіння вирішенням завдання про розрахунок кінетики об'ємної кристалізації металу, що охолоджується з рідкого стану. Центральним у методі Мейла-Джонсона став розгляд фіктивного механізму кристалізації, при якому: а) центри можуть виникати

рівномірно у всьому об'ємі, а не тільки в незатверділому; б)зародки ростуть не стикаючись, не помічаючи один одного, подібно хвилям на поверхні води.

Модель Мейла – Джонсона була піддана критиці, одним з критиків був Аврамі. Він загалом погоджувався, проте, на його думку, в моделі була потрібна додаткова аргументація, більш переконлива , ніж висунута авторами доповіді також він поставив під сумніви формулу, яка обраховувала число зародків, що виникли в інтервалі який розглядався. Модель яку представив сам Аврамі виявилась хибною.

Надалі в цій проблемі свої роботи оприлюднив А. Н. Колмогоров. Він підійшов до вирішення завдання зовсім з іншої сторони , хоча вихідні уявлення про протікання процесу кристалізації у нього ті ж , що і в моделі Мейла - Джонсона. Основний внесок, зроблений Колмогоровим в статистичну теорію кристалізації полягає в чіткому формулюванні аксіом моделі і в методі отримання результату. Метод Колмогорова вийшов математично строгим , і тому одержувані формули виявляються наслідком вихідних посилок, та логічна простота і витонченість методу дозволяють розвинути і використовувати його для вирішення широкого кола споріднених завдань. Саме цим шляхом далі розвивалася ймовірнісно - феноменологічна теорія кристалізації.

В сучасності в трішки іншому руслі розглядається задача про «Кавові плями», на зараз цим займався Пітер Юнкер. Юнкеру було цікаво, які причини кільцевих плям кави. У 1997 році група фізиків з'ясувала, чому кавова пляма утворює кільце. У міру того як кава випаровується, рідина від центру спрямовується до краю краплі, захоплюючи кавові частинки разом з собою. Крапля починає вирівнюватися. Зрештою, залишається тонке кільце, оскільки частинки кави все кинулися до краю краплі.

Основою всіх моделей, що розглядали процеси кристалізації є випадковий полімер. Фігури, що утворювались були результатом злипання великої кількості випадкових частинок, що в цілому утворили випадковий полімер. Дана теорія є порівняно новою та зараз активно розвивається. Зокрема це

пов’язано з моделями які досліджуються в теорії кристалів, медицині, генетиці, біології.

В магістерській дисертації була розглянута наступна модель утворення випадкового полімеру. Вважається, що на початковий полімер випадковим чином падають «сніжинки», які приклеюються до нього , якщо дотикаються, або пролітають повз. Цей процес нагадує утворення «нової планети» при зіткненні з метеоритами. Задачею дослідження є вивчення швидкості зросту із часом фігури, яка утворюється.

Дана задача пов’язана з такими галузями теорії випадкових процесів, як теорія випадкових полімерів, теорія випадкових блукань у випадковому середовищі та теорія гіллястих процесів. Тут «прилипання» нової частинки до полімеру можна розглядати як «народження» нової частинки, де предком є частинка до якої вона прилипла.

Перші моделі теорії гіллястих процесів належать Гальтону, який вивчав задачу про виродження фамілії у 1873 році. Бурхливий розвиток теорія отримала у XX-му столітті, в 1947 році Колмогоров запропонував термін «гіллясті процеси», таким чином роботу Гальтона за термінологією називають гіллястими процесами з одним типом частинок та дискретним часом.

В США в тому ж році з’явились аналогічні дослідження, що були пов'язані з розробкою атомної зброї, роботи з теорії гіллястих процесів були засекречені на п'ять років у зв'язку з побоюваннями, що теорія може служити загальною моделлю деяких ядерних ланцюгових реакцій, поки академік Я. Б. Зельдович не дав висновок, що роботи можуть бути опубліковані.

Розділ 1. Основні теоритичні відомості

Математичне сподівання

Введемо поняття математичного сподівання дискретних (д.в.в.) і неперервних випадкових величин (н.в.в.) та розглянемо їх властивоті.

Нехай ξ - дискретна випадкова величина із заданим законом розподілу ймовірностей: $P\ (\xi\ = x_i) = p_i, i\ \geq 1$ який показано нижченаведеною таблицею.

ξ	x_1	x_2	x_3	...	x_i	...	x_n.
$P(\xi = x_1)$	p_1	p	p_3.	...	p_i		p..

Таблиця 2.2

Математичним сподіванням (mathematical expectation) M(ξ)= M ξ дискретної випадкової величини називається сума парних добутків всіх можливих значень випадкової величини на відповідні їм імовірності:

$$M\,\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n + \cdots .$$

Якщо ряд є абсолютно збіжним.

Геометричний закон розподіл

Нехай проводяться незалежні випробування, в кожному з яких ймовірність появи події *A* дорівнює *p (0 < p < 1),* а не появи *q = 1- p*. Випробування закінчуються, як тільки відбувається подія *A*. Таким

чином, якщо подія A відбулась в k-му випробуванні, то попередніх k - 1 випробуваннях X є : x_1=1, x_2=2, …

Нехай в перших k-1 випробуваннях подія A не відбулася, а в k-му випробуванні з'явилась. Тоді ймовірність дорівнює

$$P(X = x_k) = q^{k-1}p \qquad (1)$$

Поклавши $k=1,2, \ldots$ у формулі (1), отримаємо геометричну прогресію з першим членом Р і знаменником q $(0<q<1)$: $p, qp, q^2p, \ldots q^{k-1}p, \ldots$ тому розподіл називається геометричним.

$$M(X) = \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}p = p\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = p\frac{d}{dq}\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = p\frac{d}{dq}\left(\frac{1}{1-q}\right) =$$
$$= \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}, \qquad a \quad D(x) = \frac{1-p}{p^2}. \qquad (7)$$

Ланцюг Маркова

Послідовність дискретних випадкових величин $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ називається ланцюгом Маркова (з дискретним часом), якщо

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n)$$
.

Тобто майбутні значення послідовності залежать лише від теперішнього стану і не залежать від минулих.

Матриця $P(n)$, де

$$P_{ij}(n) \equiv \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$$

називається ма́трицею ймовірностей переходу на n-му кроці, а вектор $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots)^\top$, де

$p_i \equiv \mathbb{P}(X_0 = i)$ — початковим розподілом ланцюга Маркова.

Очевидно, матриця ймовірностей переходу є стохастичною, тобто

$$\sum_{j=1}^{\infty} P_{ij}(n) = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

.

Ланцюг Маркова називається однорідним якщо:

$$P_{ij}(n) = P_{ij}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

або еквівалентно:

$$\Pr(X_{n+1} = j | X_n = i) = \Pr(X_n = j | X_{n-1} = i)$$

для всіх n.

Розділ 2. Дослідження швидкості зростання випадкового полімеру.

2.1 Дослідження швидкості зростання випадкового полімеру у випадку розміру частинок $\mathbf{1 \times 1}$.

Розглянемо наступну задачу

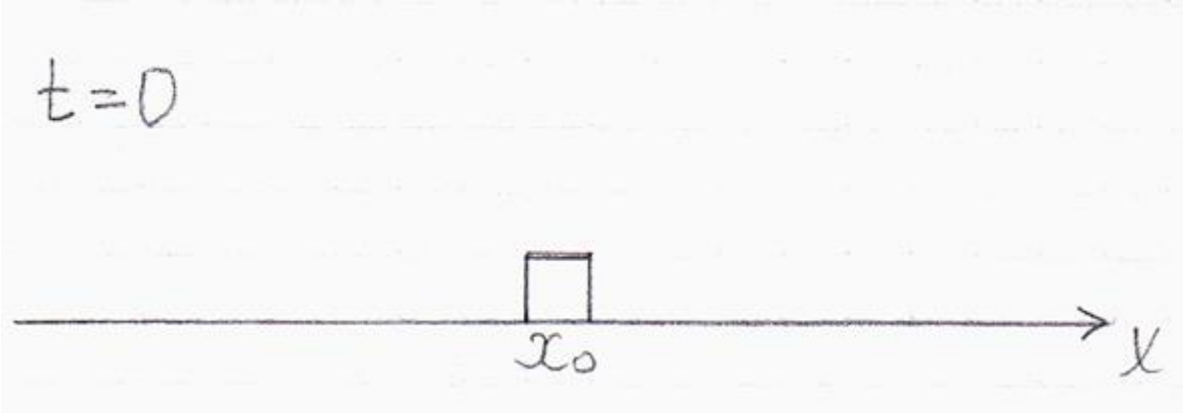
Припустимо, що на осі X лежить нульовий квадрат (вважаємо, що його розмір 1×1 та маса $m = 1$ од.)

Кожний момент часу t на вісь з будь якої цілочислової точки з ймовірністю p незалежно один від одного падають такі самі квадратики розміром 1×1 та залишаються на вісі за наступним законом:

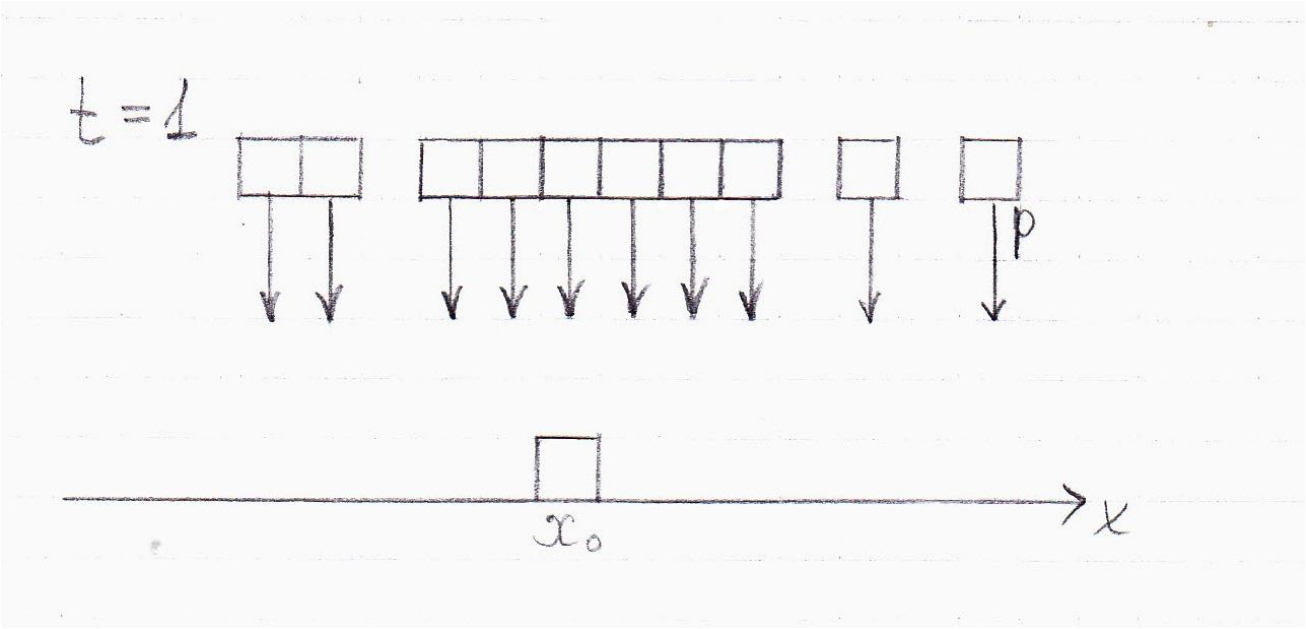
Якщо квадратики дотикаються, то вони злипаються. При чому, якщо сукупність зліплених квадратиків дотикається до нульового, то вона залишається на осі X.

В іншому випадку пролітають крізь вісь та губляться.

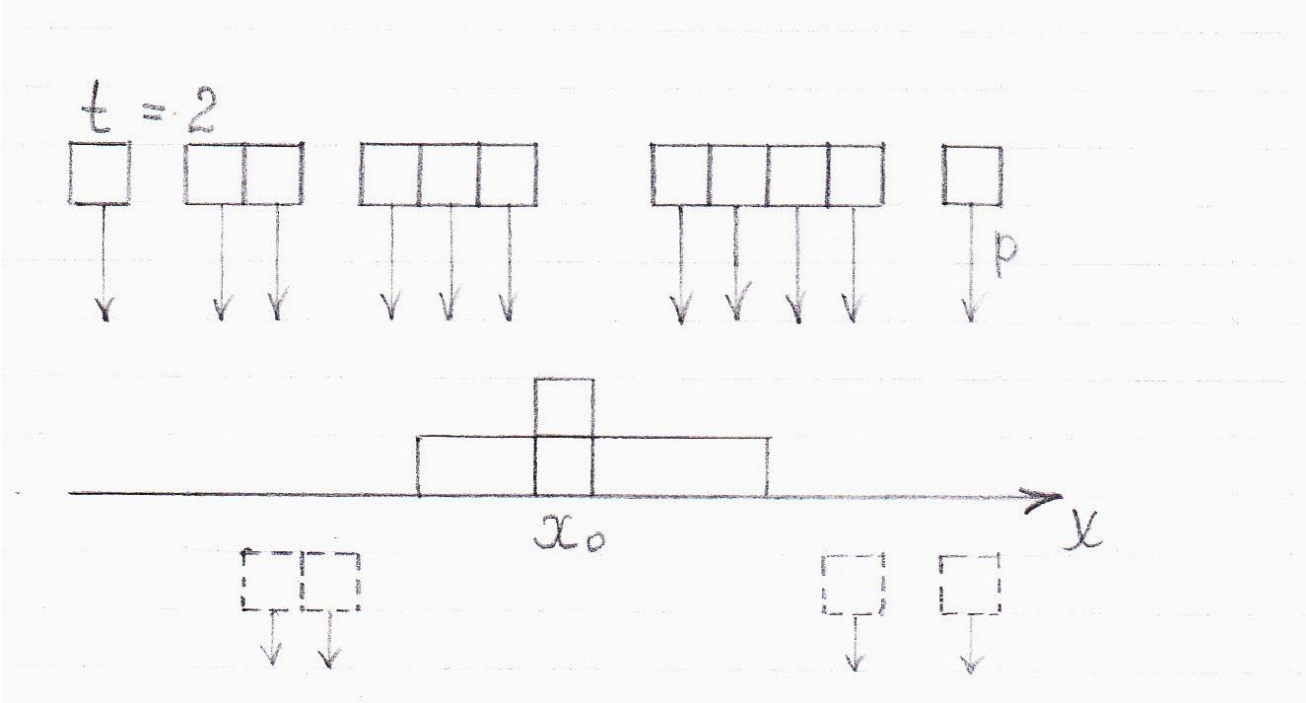
Метою даного розділу є знаходження математичного сподівання маси фігури, що залишається на вісі X після моменту N.



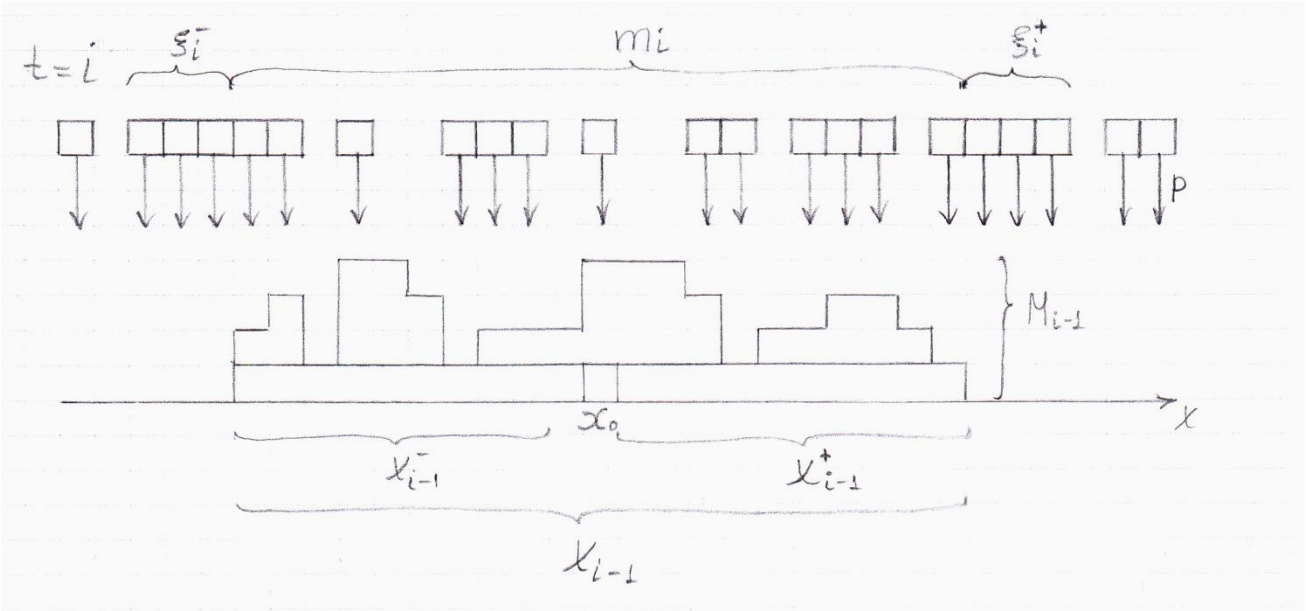
Мал. 1



Мал. 2



Мал. 3



Мал. 4

Введемо позначення

m_i– випадкова величина приросту маси зверху над утвореною фігурою в момент часу i;

M_i– випадкова величина що позначає загальну масу утвореної фігури в час i;

$X_i^{\pm}$– розмах лівого та правого країв в час i;

$X_i = 1 + X_i^{+} + X_i^{-} -$ ширина фігури в час i;

$\xi_i{}^{\pm}$– випадкова величина приросту лівого та правого краю в момент часу i.

Наприклад на малюнку 1.4

m_i= 13 одиниць,

$M_i = 72$ одиниці,

$X_i = 27$ одиниць,

$\xi_i{}^{+} = 3$ одиниці,

$\xi_i{}^{-} = 3$ одиниці.

Розв'язок.

Розглянемо падіння квадратів з правої сторони від фігури, що знаходиться ні вісі.

В перший момент часу на вісі залишаються всі квадратики, що впали праворуч від початкового (нульового), а у всі інші моменти часу від утвореної фігури, один за одним до виникнення першої ситуації, коли квадратик не впав .

Розглянемо приріст з боків в момент часу $t = 1$

p – ймовірність того, що квадратик впаде – «успіх»

$q = 1 - p$ – ймовірність того, що квадратик не впаде – «невдача».

Приріст з правого краю

$$P(1,2,3,\dots,n \text{ квадратики впали та прилипли, а } n+1 \text{ не впав})$$
$$= P\left(n^{\text{ий}} \text{ квадратик впав та прилип}\right) \times$$
$$\times P\left(n+1^{\text{ий}} \text{ квадратик не впав}\right) = p^n q = p^n(1-p), n \geq 0.$$

Аналогічно розглядається приріст з лівого краю, та прирости в момент часу $t = i$

$$P(1,2,3,\dots,m \text{ квадратики впали та прилипли, а } m+1 \text{ не впав}) =$$
$$= p^m(1-p), m \geq 0$$

Час $t = i$

Приріст з правого краю

$$P^+(\text{на i} - \text{тому кроці } 1,2,3,\dots,n \text{ квадратики впали та прилипли, а } n$$
$$+ 1 \text{ не впав}) = p^n(1-p), n \geq 0.$$

лівого краю

$$P^+\left(\begin{matrix}\text{на i} - \text{тому кроці } 1,2,3,\dots,m \text{ квадратики впали та прилипли, а} \\ m+1 \quad \text{не впав}\end{matrix}\right)$$
$$== p^m(1-p), m \geq 0.$$

Тобто ми маємо приріст з боків за геометричним розподілом,

$$P\left(\xi_i^{\mp} = n\right) = p^n(1-p), n \geq 0.$$

Неважко помітити що $\{\xi_i^{\pm}\}$ – незалежні однаково розподілені випадкові величини з геометричним розподілом

Запишемо рівняння маси фігури, що утворюється для кожного моменту часу t

$t = 0$ $M_0 = 1$ – Це випливає з умов задачі. В нульовий момент часу на вісі є тільки один квадратик, що має масу в одну одиницю.

$t = 1 \quad M_1 = M_0 + \ m_1 + \xi_1{}^{\pm}$

$t = 2 \quad M_2 = M_1 + \ m_2 + \xi_2{}^{\pm}$

. . . . . .

$t = i \quad M_i = M_{i-1} + \ m_i + \xi_i{}^{\pm}.$

Розглянемо математичне сподівання маси фігури, що утворюється для кожного моменту часу t.

$t = 0 \quad EM_0 = E1 = 1$

$t = 1 \quad EM_1 = EM_0 + \ Em_1 + E\xi_1{}^{\pm}$

$t = 2 \quad EM_2 = EM_1 + \ Em_2 + E\xi_2{}^{\pm}$

. . . . . .

$$t = i \quad EM_i = EM_{i-1} + \ Em_i + E\xi_i{}^{\pm}. \qquad (1)$$

Приріст з боків та приріст маси зверху є незалежними одна від одної.

Оскільки ξ_i має геометричний розподіл, то математичне сподівання нам відоме

$$E\xi_i = \frac{p}{q}\,. \qquad (2)$$

Подивимось чому дорівнює математичне сподівання приросту маси згори

$$Em_i = E\sum_l m_i \mathbb{I}_{(\text{розмах дорівнює } l)} =$$

$$= \sum_l P(\text{розмах дорівнює } l)\, E(\, m_i/\text{розмах на } i-1-\text{му кроці дорівнює } l\,)$$

$$= \sum_l P(\text{розмах дорівнює } l)(1p + 0q) =$$

$$= \sum_l P(\text{розмах дорівнює } l)(lp + 0ql) =$$

$$= \sum_l P(\text{розмах на } i-1-\text{му кроці дорівнює } l)\, pl =$$

$$= p\sum_l P(\text{розмах на } i-1-\text{му кроці дорівнює } l)\, l =$$

$$= pE(\text{ширини фігури}),$$

де $E(\text{ширини фігури}) = E_i \sum_l (\xi_{i-1}^+ + \xi_{i-1}^-) + 1 = 2\frac{p}{q}(i-1) + 1$;

$$EX_{i-1} = 1 + \sum_{j=0}^{i-1}(\xi_j^+ + \xi_j^-) = 1 + 2\frac{p}{q}(i-1)\,;$$

Отже $Em_i = p\left(\, 1 + 2\frac{p}{q}(i-1)\right).$ (3)

Виведемо рекурентне рівняння

$t = 0 \quad M_0 = 1$

$t = 1 \quad M_1 = M_0 + \, m_1 + \xi_1{}^{\pm}$

$t = 2 \quad M_2 = M_0 + \, m_1 + \xi_1{}^{\pm} + \, m_2 + \xi_2{}^{\pm} = M_0 + \, m_1 + m_2 + \xi_1{}^{\pm} + \xi_2{}^{\pm}$

.....

$t = i \quad M_i = M_{i-1} + \, m_i + \xi_i{}^{\pm} = \, M_0 + \, \sum_{k=1}^{i} m_k + \sum_{k=1}^{i}(\xi_k^+ + \xi_k^-).$ (4)

Скориставшись тим, що математичне сподівання маси фігури, що утворюється знаходиться за формулою (1) , та підставивши (4) в (1) отримаємо наступне

$$EM_i = E\left(M_0 + \sum_{k=1}^{i} m_k + \sum_{k=1}^{i} (\xi_k^+ + \xi_k^-)\right). \quad (5)$$

Підставимо в (5) зазначені вище (2) та (3)

$$EM_i = 1 + \sum_{k=1}^{i-1} p * (1 + 2\frac{p}{q}k) \ + 2\frac{p}{q}i \quad (6)$$

Скористаємось формулою для обрахування суми перших n членів арифметичної прогресії

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

$$\sum_{k=1}^{i} p * 2\frac{p}{q}ik = \frac{2\frac{p^2}{q} + 2\frac{p^2}{q}(i-1)}{2} * i = \frac{(pi)^2}{q} \quad (7)$$

Підставивши (7) в (6) отримаємо

$$EM_i = \ 1 + pi + \frac{(pi)^2}{q} + 2\frac{p}{q}i \quad (8)$$

Приведемо подібні, та використаємо правило : $q = \ 1 - p$

$$EM_i = \frac{p^2(i^2 - i) + p(3i - 1) + 1}{1 - p}$$

Отже з отриманих результатів можна скласти Теорему

Теорема.

За умовами поставленої задачі1 математичне сподівання маси фігури в момент часу i *буде зростати за наступним законом*

$$EM_i = \frac{p^2(i^2 - i) + p(3i - 1) + 1}{1 - p},$$

де

p *– ймовірність того, що квадратик впаде – «успіх»,*

i *– момент часу.*

Більш того для ширини фігури маємо збіжність майже напевно

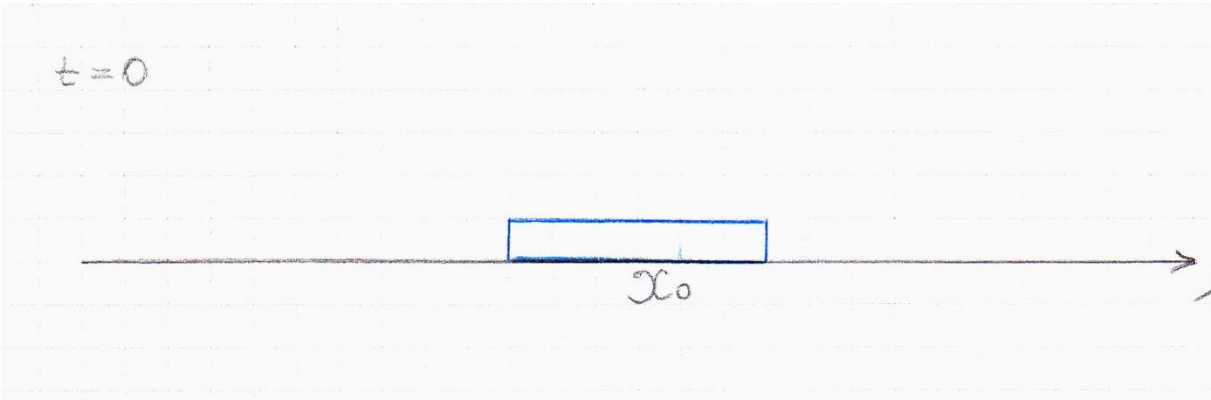
$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} \to \frac{2p}{q}.$$

2.2 Дослідження швидкості зростання випадкового полімеру у випадку коли не обмежена ширина частинок

2.2.1. Постановка задачі, та формулювання основних теорем.

В даному параграфі розглядається узагальнення *задачі 1,* коли падають не квадратики, а прямокутники.

Припустимо, що на осі X лежить нульовий прямокутник, що має розмір $1 \times m$, де $m = \overline{0, N}$ і його маса дорівнює m.



Мал.5

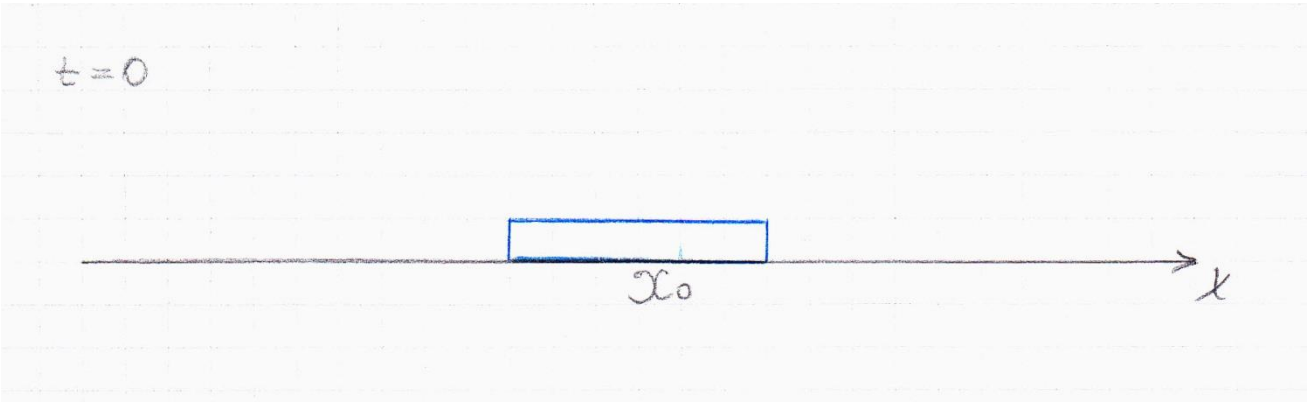
Кожний момент часу t на вісь з будь якої цілої точки з ймовірністю $p_m, m = \overline{0, N}$ незалежно один від одного на вісь падає прямокутник розміром $1 \times m$. Вважаємо, що прямокутник впав з тієї точки, в якій знаходиться його лівий кінець.

Прямокутники залишаються на вісі за наступним законом:

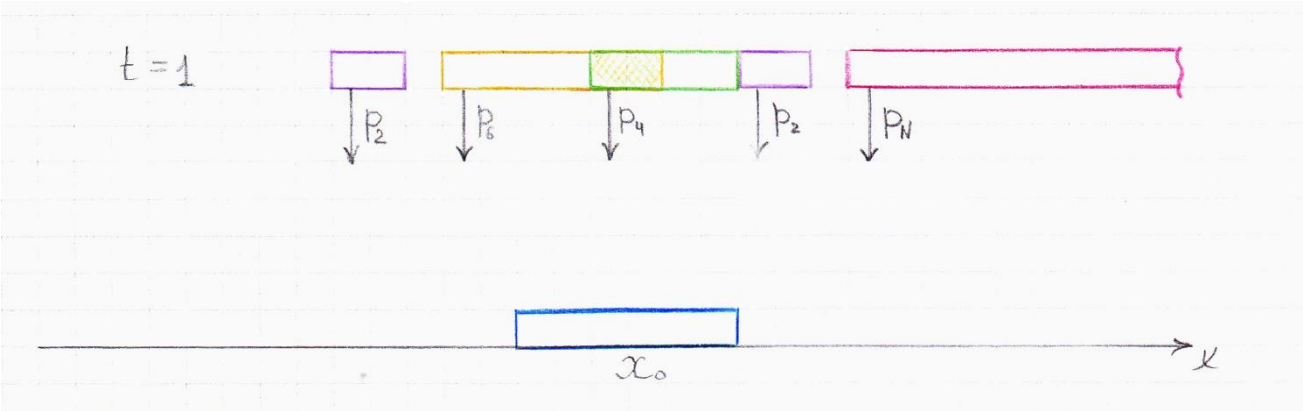
З боків:

Всі прямокутники, які дотикаються один одного або перетинаються злипаються. Якщо один з них дотикається до нульового прямокутника (а далі до фігури, що утворилась на попередньому кроці) то вони залишаються

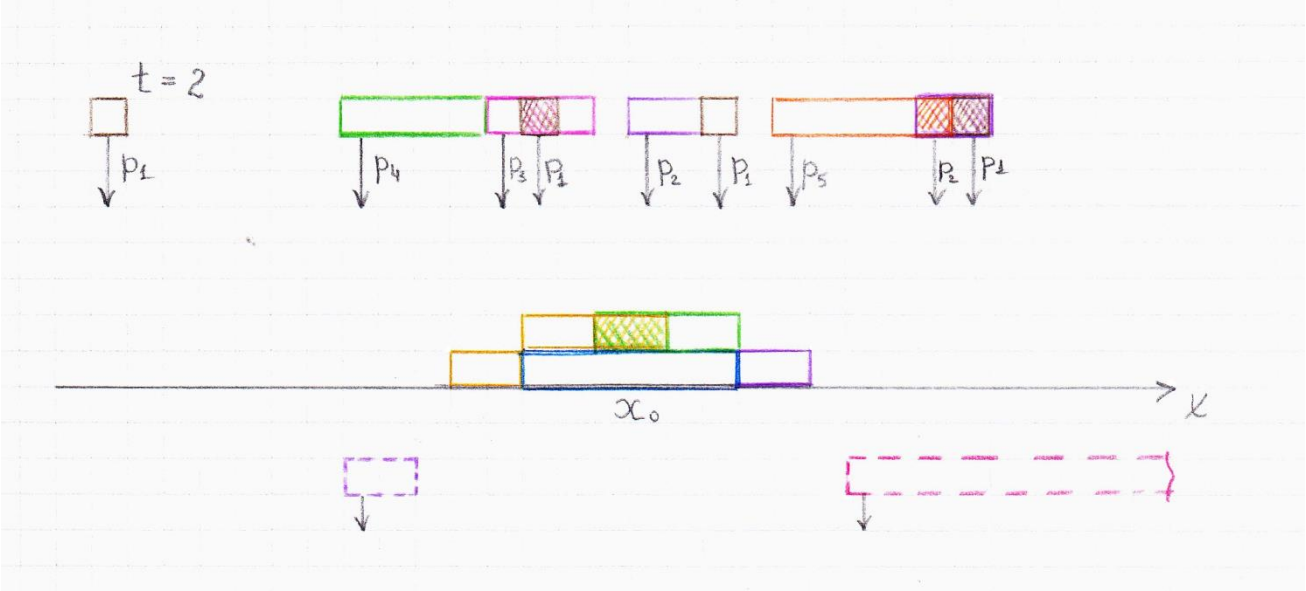
на прямій (наче в грі “тетріс”). Інакше вони пролітають вниз повз вісь не затримуючись.



Мал. 6



Мал. 7

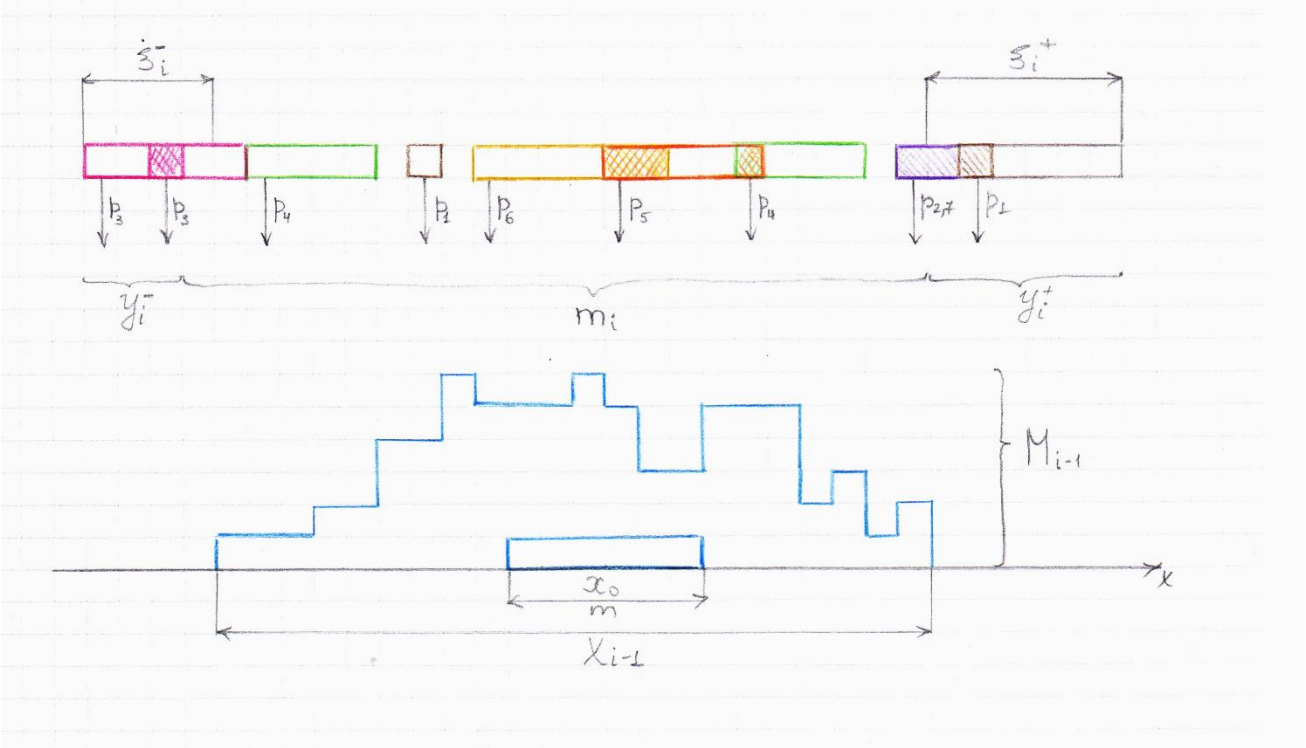


Мал. 8

З гори:

Прямокутники що падають на нульовий прямокутник, а далі на фігуру , що утворилась на попередньому кроці, - прилипають зверху. Також якщо частина прямокутника виходить за межі утвореної фігури, то ця частина падає на вісь де і залишається. Аналогічно, якщо частинка прямокутника потрапляє на поверхню фігури, то вона прилипає згори.

Вважається, що маса прямокутника дорівнює його площині, тобто прямокутник розміром $1 \times l$ має масу l одиниць.



Мал. 9

Введемо позначення

m_i – випадкова величина, що відповідає приросту маси згори в момент часу i;

M_i – випадкова величина, що відповідає загальній масі фігури в момент часу i;

X_i – випадкова величина , що відповідає ширині розмаху країв фігури в момент часу i;

$\xi_i^{\mp}$ – випадкова величина, що відповідає приросту розмаху фігури з лівого та правого країв в момент часу i;

$y_i^{\mp}$ – випадкова величина, що відповідає приросту маси з боків в момент часу i;

m – довжина нульового прямокутника;

2α – математичне сподівання приросту довжини з лівого та правого країв;

2β – математичне сподівання приросту маси з лівого та правого країв;

λ – математичне сподівання маси прямокутника.

Зазначимо, що $\{\xi_i^+\}$ незалежно однаково розподілені випадкові величини, $\{\xi_i^-\}$ незалежно однаково розподілені випадкові величини, $\{y_i^+\}$ незалежно однаково розподілені випадкові величини, $\{y_i^-\}$ незалежно однаково розподілені випадкові величини. Але $\{y_i\}$ та $\{\xi_i\}$ можуть бути залежні.

Ясно, що з симетрії випливає наступне

$E\xi_i^+ = E\xi_i^-$ та $Ey_i^+ = Ey_i^-$.

Позначимо ці математичні сподівання α та β відповідно.

Теорема 2.1

За умов поставленої задачі 2 математичне сподівання розмаху фігури в момент часу i знаходиться за наступним законом

$EX_i = m + 2i\alpha.$

Теорема 2.2

За умов задачі 2 математичне сподівання маси фігури в момент часу i буде знаходитись за наступним законом

$$EM_i = m(1 + i\lambda) + 2i(\beta + (i - 1)\alpha\lambda).$$

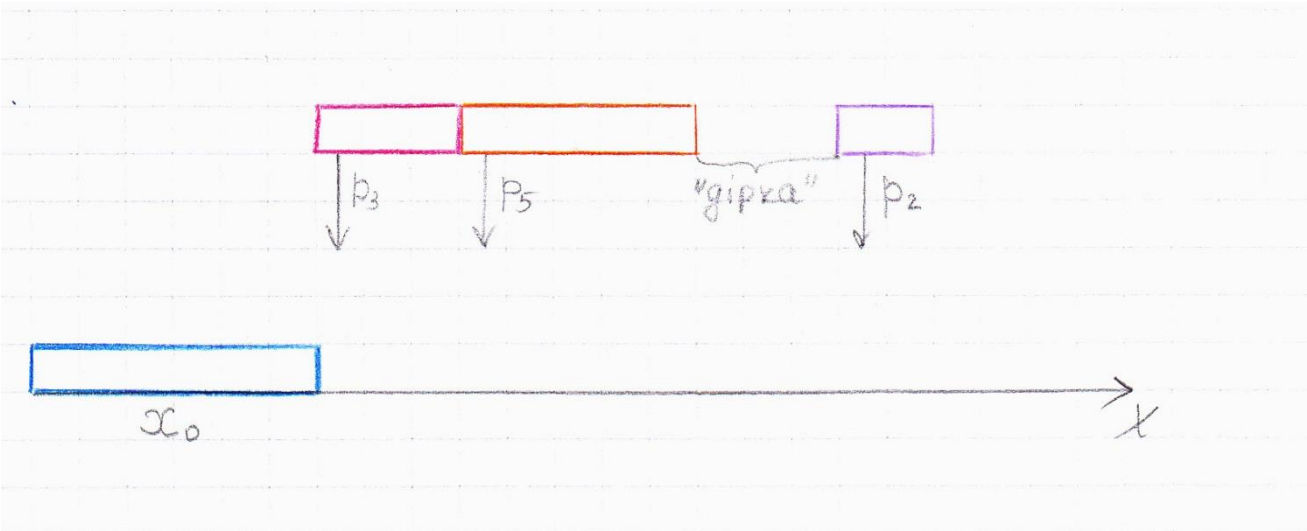
Зауваження: альфа та бетта були знайдені в параграфі 2.3.

2.2.2 Доведення поставлених теорем.

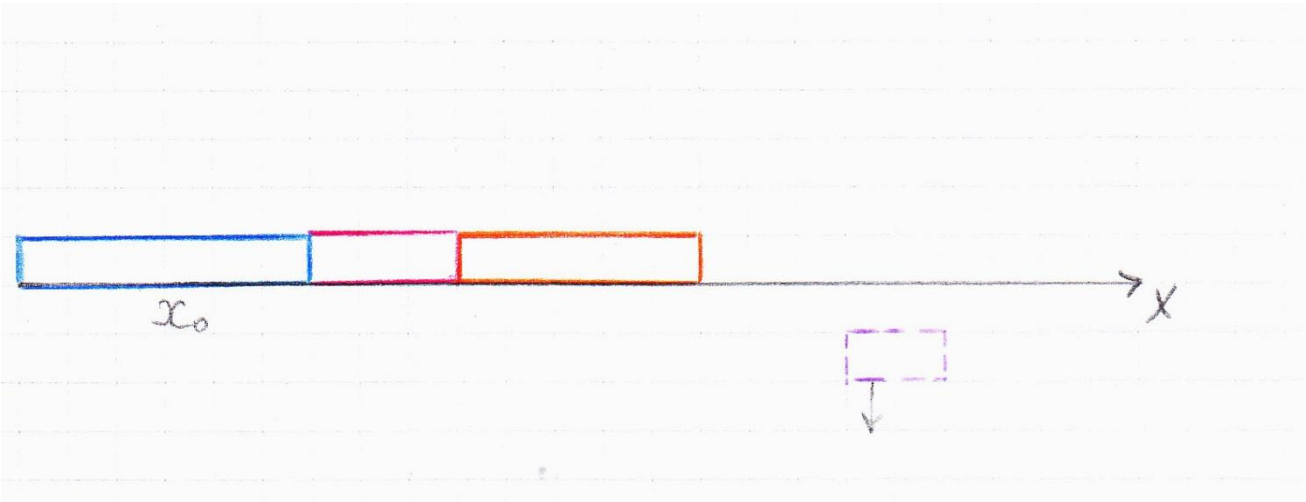
Доведемо *Теорему 2.1*

Розглянемо падіння прямокутників з правої сторони:

На вісі залишаються всі прямокутники, що впали праворуч від нульового , а далі всі, що впали праворуч від фігури, що утворилась на попередньому кроці до виникнення першої ситуації коли утвориться «дірка». Тобто в даній точці не впав прямокутник і відсутній «хвостик» з лівих прямокутників.

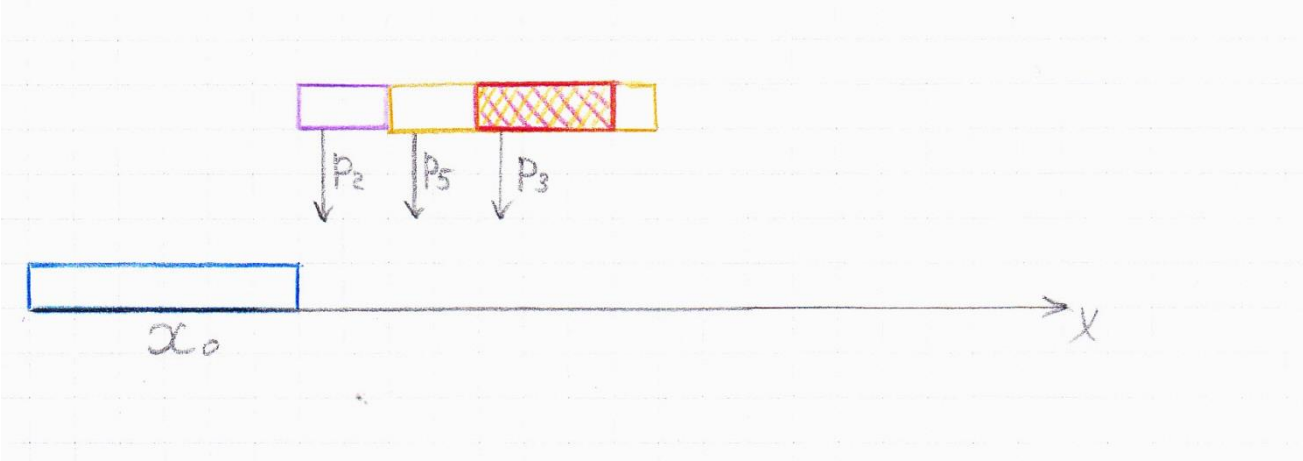


Мал.10



Мал. 11

Вважаємо, що якщо прямокутники перетинаються, то вони ніби то накладаються один на одного.



Мал. 12

З лівої сторони – аналогічно.

Розглянемо розмах фігури

В момент часу $t = 0$ на вісі знаходиться прямокутник довжиною m

$$X_0 = m.$$

В момент часу $t = 1$ на вісь падають прямокутники , та деякі з них приклеюються з ліва та з права до нульового прямокутника.

$$X_1 = m + \xi_1^+ + \xi_1^-.$$

В наступних кроках, до вже утвореної фігури будуть прилипати прямокутники аналогічно.

$X_2 = X_1 + \xi_2^+ + \xi_2^-,$

…….

$$X_i = X_{i-1} + \xi_i^+ + \xi_i^-.$$

Розпишемо детальніше отримане рівняння на $i -$ му кроці

$$X_i = X_{i-2} + \xi_{i-1}^+ + \xi_{i-1}^- + \xi_i^+ + \xi_i^-$$

$$X_i = X_{i-3} + \xi_{i-2}^+ + \xi_{i-2}^- + \xi_{i-1}^+ + \xi_{i-1}^- + \xi_i^+ + \xi_i^-$$

$$X_i = X_{i-4} + \xi_{i-3}^{+} + \xi_{i-3}^{-} + \xi_{i-2}^{+} + \xi_{i-2}^{-} + \xi_{i-1}^{+} + \xi_{i-1}^{-} + \xi_i^{+} + \xi_i^{-}$$

…….

$$X_i = m + \xi_1^{+} + \xi_1^{-} + \xi_2^{+} + \xi_2^{-} + \cdots + \xi_{i-3}^{+} + \xi_{i-3}^{-} + \xi_{i-2}^{+} + \xi_{i-2}^{-} + \xi_{i-1}^{+} + \xi_{i-1}^{-} +$$

$$+\xi_i^{+} + \xi_i^{-};$$

$$X_i = m + \sum_{r=1}^{i} (\xi_r^{+} + \xi_r^{-}).$$

Обчислимо математичне сподівання

$$EX_i = Em + E\sum_{r=1}^{i} (\xi_r^{+} + \xi_r^{-})$$

З умов ми знаємо, що

$$E\xi_i^{+} = E\xi_i^{-} = \alpha.$$

Використовуючи все вище наведене отримаємо наступне

$$EX_0 = Em = m$$

Оскільки довжина нульового прямокутника це якась константа m .

$$EX_1 = m + 2\alpha,$$

$$EX_2 = m + 2\alpha + 2\alpha,$$

……..

$$EX_i = m + \sum_{r=1}^{i} 2\alpha = m + 2i\alpha.$$

Таким чином *теорема 2.1* доведена. ■

Доведемо *теорему 2.2*

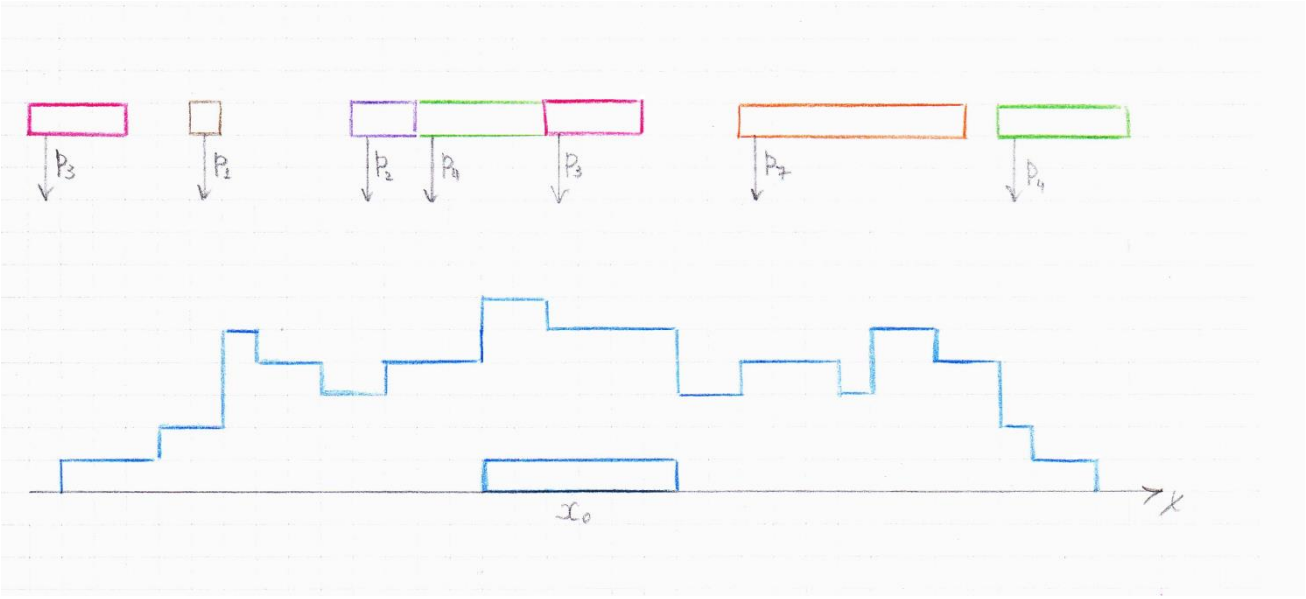
Розглянемо масу фігури в момент часу $t = 0$

$M_0 = m,$

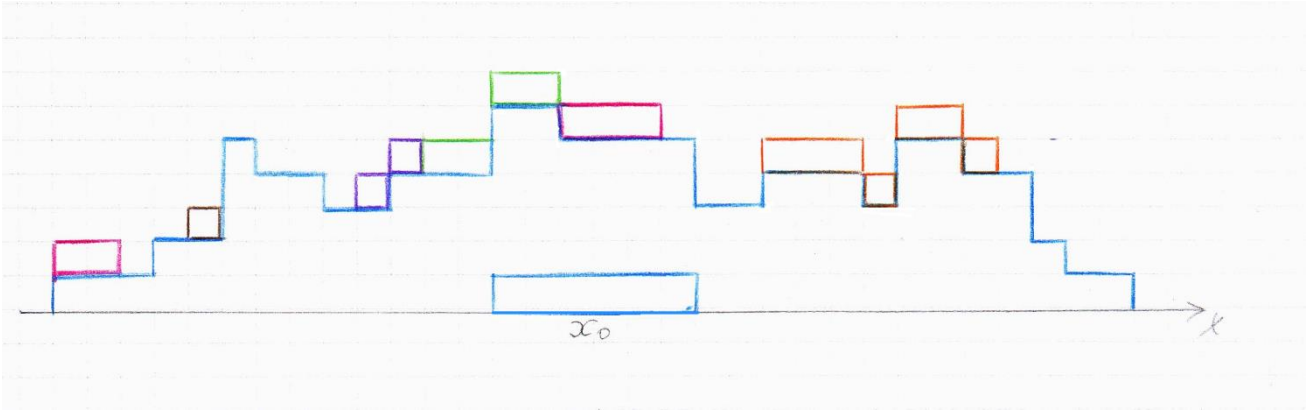
В цей момент на вісі лежить нульовий прямокутник довжиною m. З умов задачі відомо, що маса дорівнює площині прямокутника, тобто m.

В момент $t = 1$

Розглянемо падіння прямокутників згори



Мал.13



Мал.14

Вважаємо, що прямокутники, які падають згори на вже створену на минулому кроці фігуру – приклеюються зверху.

Тож в час $t = 1$ до прямокутника додається маса прямокутників що прилипли з боків та згори.

$$M_1 = m + m_1 + y_1^+ + y_1^-$$

Далі аналогічно

$$M_2 = M_1 + y_2^+ + y_2^- + m_2,$$

……

$$M_i = M_{i-1} + y_i^+ + y_i^- + m_i.$$

Розпишемо детальніше отримане рівняння на $i -$ му кроці

$$M_i = M_{i-2} + y_{i-1}^+ + y_{i-1}^- + y_i^+ + y_i^- + m_{i-1} + m_i$$

$$M_i = M_{i-3} + y_{i-2}^+ + y_{i-2}^- + y_{i-1}^+ + y_{i-1}^- + y_i^+ + y_i^- + m_{i-2} + m_{i-1} + m_i$$

$$M_i = M_{i-4} + y_{i-3}^+ + y_{i-3}^- + y_{i-2}^+ + y_{i-2}^- + y_{i-1}^+ + y_{i-1}^- + y_i^+ + y_i^- + m_{i-3} + m_{i-2} + m_{i-1} + m_i$$

……

$$M_i = m + y_1^+ + y_1^- + y_2^+ + y_2^- + \cdots + y_{i-3}^+ + y_{i-3}^- + y_{i-2}^+ + y_{i-2}^- + y_{i-1}^+ + y_{i-1}^- + y_i^+ + y_i^- + m_1 + m_2 + \cdots + m_{i-3} + m_{i-2} + m_{i-1} + m_i$$

$$M_i = m + \sum_{r=1}^{i} (y_r^+ + y_r^- + m_r).$$

Обчислимо математичне сподівання маси фігури в час t

$$EM_0 = Em = m$$

$$EM_i = Em + E\sum_{r=1}^{i} (y_r^+ + y_r^- + m_r)$$

З умов задачі нам відомо, що

$$Ey_i^+ = Ey_i^- = \beta.$$

$$EM_i = m + \sum_{r=1}^{i} 2\beta + E\sum_{r=1}^{i} m_r$$

Розглянемо окремо математичне сподівання приросту маси згори.

Доведемо, що

$$Em_i = (\text{середня ширина фігури на } i-1-\text{му кроці}) * \\ * (\text{математичне сподівання сніжинки}) = \lambda EX_{i-1} \qquad (*)$$

Дійсно

$$Em_i = E\sum_k \left(\mathbb{I}_{X_{i-1}=k} m_i\right) = \sum_k E\left(\mathbb{I}_{X_{i-1}=k} m_i\right) = \\ = \sum_k P(X_{i-1} = k)\, E(m_i | X_{i-1} = k) = \\ = \sum_k P(X_{i-1} = k) \sum_{l=1}^{k} Em_{i,l},$$

де $m_{i,l}$ – маса, яка впала згори на l – ту позицію зліва у фігури, яка утворилась на кроці $(i-1)$.

З симетрії випливає, що всі $Em_{i,l}$ однакові, оскільки

$m_{i,l} = \sum_{j=1}^{m} \mathbb{1}_{\{\text{в точку } (l-j) \text{ впав прямокутник з шириною } >j\}}$, то

$Em_{i,l} = \sum_{j=1}^{N}(p_j + p_{j+1} + \cdots + p_N) = \cdots = \sum_{j=1}^{N} jp_j = \sum_{j=0}^{N} jp_j = \lambda,$

таким чином формулу (*) доведено.

З *теореми 2.1* ми маємо EX_i.

Тоді

$Em_i = (m + 2(i-1)\alpha)\lambda.$

Отже отримаємо рівняння для математичного сподівання маси на кроці i.

$$EM_i = m + 2i\beta + i(m + 2(i-1)\alpha)\lambda,$$

$$EM_i = m(1 + i\lambda) + 2i(\beta + (i-1)\alpha\lambda)$$

2.3. Знаходження $\boldsymbol{\alpha}$ та $\boldsymbol{\beta}$ для попередніх задач

Для знаходження $\boldsymbol{\alpha}$ та $\boldsymbol{\beta}$ розв'яжемо наступну допоміжну задачу:

Нехай множина $(-\infty,\ i]$, де $0 \le i \le N$ зафіксована на Ox і до неї прилипають нові прямокутники, які ми будемо незалежно кидати над точками 0,1,2,… і так далі (правила прилипання такі ж , як в вихідній задачі).

Позначимо через S_i –величину правого краю утвореної фігури, $s_i = ES_i$.

Z_i – маса нової утвореної маси справа від 0, $z_i = EZ_i$.

Помітимо, що

$$\alpha = E(S_N) - N = s_N - N, \qquad \beta = z_N - \sum_{j=1}^{N} p_j j\, N = z_N - \lambda N$$

Аналогічно виводу системи лінійних рівнянь для середнього часу, який приводить ланцюг Маркова до потрапляння у множина, можна перевірити, що

$\{s_i\}$ та $\{z_i\}$ – задовольняють системам лінійних рівнянь.

$$\begin{cases} s_0 = \sum_{j=1}^{N} p_j + \sum_{j=1}^{N} p_j s_{j-1} \\ s_i = 1 + (p_0 + \cdots + p_i)s_{i-1} + (p_{i+1}s_i + \cdots + p_N s_{N-1}); \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_0 = \sum_{j=1}^{N} p_j j + \sum_{j=1}^{N} p_j z_{j-1} = \lambda + \sum_{j=1}^{N} p_j z_{j-1} \\ z_i = \lambda + (p_0 + \cdots + p_i)z_{i-1} + \sum_{j=i+1}^{N} p_j z_{j-1}\,. \end{cases}$$

Перевіримо для випадків, коли N = 1, 2, 3

Випадок N = 1

$$\begin{cases} s_0 = p_1 + p_1 s_0 \\ s_1 = 1 + s_0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} s_0 = \dfrac{p_1}{1-p_1} \\ s_1 = \dfrac{1}{1-p_1} \end{cases},$$

На справді, в випадку приросту довжини фігури при довжині квадратика 1×1 ми бачимо, що припущення виконується.

$$\begin{cases} z_0 = p_1 + p_1 z_0 \\ z_1 = p_1 + z_0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} z_0 = \dfrac{p_1}{1-p_1} \\ z_1 = \dfrac{p_1(2-p_1)}{1-p_1} \end{cases},$$

Отже в цьому випадку маємо

$$\alpha = \frac{1}{1-p_1} - 1 = \frac{p_1}{1-p_1};$$

$$\beta = \frac{p_1(2-p_1)}{1-p_1} - p_1 = \frac{p_1}{1-p_1}.$$

Звідси з теорем 2.1 та 2.2

$$EX_i = m + 2i\frac{p_1}{1-p_1},$$

$$EM_i = m(1 + i\lambda) + 2i\left(\frac{p_1}{1 - p_1} + (i - 1)\frac{p_1}{1 - p_1}\lambda\right).$$

Що співпадає з результатами задачі 2.

Випадок N = 2

$$\begin{cases} s_0 = (p_1 + p_2) + p_1 s_0 + p_2 s_1 \\ s_1 = 1 + (p_0 + p_1)s_0 + p_2 s_1 \\ s_2 = 1 + s_1 \end{cases},$$

Выразимо s_1 через s_0 та підставимо в вирази

$$\begin{cases} s_0 = (p_1 + p_2) + p_1 s_0 + p_2 \dfrac{1 + (p_0 + p_1)s_0}{p_0 + p_1} \\ s_1 = \dfrac{1 + (p_0 + p_1)s_0}{p_0 + p_1} \\ s_2 = 1 + \dfrac{1 + (p_0 + p_1)s_0}{p_0 + p_1} \end{cases},$$

Знайдемо s_0:

$$s_0 - p_1 s_0 - p_2 \frac{(p_0 + p_1)s_0}{p_0 + p_1} = p_1 + p_2 + \frac{p_2}{p_0 + p_1},$$

$$\frac{s_0\big(p_0 + p_1 - p_1(p_0 + p_1) - p_2(p_0 + p_1)\big)}{p_0 + p_1} = \frac{(p_1 + p_2)(p_0 + p_1) + p_2}{p_0 + p_1},$$

$$\frac{s_0\big((1-p_1-p_2)(p_0+p_1)\big)}{p_0+p_1}=\frac{(p_1+p_2)(p_0+p_1)+p_2}{p_0+p_1},$$

$$s_0=\frac{(p_1+p_2)(p_0+p_1)+p_2}{\big((1-p_1-p_2)(p_0+p_1)\big)}.$$

Підставимо знайдене s_0 у вирази

$$\begin{cases} s_0=\dfrac{(p_1+p_2)(p_0+p_1)+p_2}{\big((1-p_1-p_2)(p_0+p_1)\big)} \\ s_1=\dfrac{1+(p_0+p_1)}{p_0+p_1}\times\dfrac{(p_1+p_2)(p_0+p_1)+p_2}{\big((1-p_1-p_2)(p_0+p_1)\big)} \\ s_2=1+\dfrac{1+(p_0+p_1)}{p_0+p_1}\times\dfrac{(p_1+p_2)(p_0+p_1)+p_2}{\big((1-p_1-p_2)(p_0+p_1)\big)} \end{cases}.$$

$$\begin{cases} z_0=p_1+2p_2+p_1z_0+p_2z_1 \\ z_1=p_1+2p_2+(p_1+p_0)z_0+p_2z_1, \\ z_2=p_1+2p_2+z_1 \end{cases}$$

Выразимо z_0 через z_1 та підставимо в вирази

$$\begin{cases} z_0=\dfrac{p_1+2p_2+p_2z_1}{1-p_1} \\ z_1=p_1+2p_2+(p_1+p_0)\dfrac{p_1+2p_2+p_2z_1}{1-p_1}+p_2z_1 \\ z_2=p_1+2p_2+z_1 \end{cases}$$

Знайдемо z_1:

$$z_1 - (p_1 + p_0)\frac{p_2 z_1}{1 - p_1} - p_2 z_1 = p_1 + 2p_2 + (p_1 + p_0)\frac{p_1 + 2p_2}{1 - p_1},$$

$$\frac{z_1(1 - p_1) - (p_1 + p_0)p_2 z_1 - p_2(1 - p_1)z_1}{1 - p_1} =$$

$$= \frac{(1 - p_1)(p_1 + 2p_2) + (p_1 + p_0)(p_1 + 2p_2)}{1 - p_1},$$

$$z_1 \frac{(1 - p_1) - (p_1 + p_0)p_2 - p_2(1 - p_1)}{1 - p_1} = \frac{(1 + p_0)(p_1 + 2p_2)}{1 - p_1},$$

$$z_1 = \frac{(1 + p_0)(p_1 + 2p_2)}{(1 - p_1)(1 - p_2) - (p_1 + p_0)p_2}.$$

Підставимо знайдене z_1 у вирази

$$\begin{cases} z_0 = \dfrac{p_1 + 2p_2 + p_2 \dfrac{(1 + p_0)(p_1 + 2p_2)}{(1 - p_1)(1 - p_2) - (p_1 + p_0)p_2}}{1 - p_1} \\ z_1 = \dfrac{(1 + p_0)(p_1 + 2p_2)}{(1 - p_1)(1 - p_2) - (p_1 + p_0)p_2} \\ z_2 = p_1 + 2p_2 + \dfrac{(1 + p_0)(p_1 + 2p_2)}{(1 - p_1)(1 - p_2) - (p_1 + p_0)p_2} \end{cases}.$$

Отже в цьому випадку маємо

$$\alpha = 1 + \frac{1 + (p_0 + p_1)}{p_0 + p_1} \times \frac{(p_1 + p_2)(p_0 + p_1) + p_2}{\big((1 - p_1 - p_2)(p_0 + p_1)\big)} - 2\,;$$

$$\beta = \frac{(1+p_0)(p_1+2p_2)}{(1-p_1)(1-p_2)-(p_1+p_0)p_2} - p_1 - 2p_2.$$

Випадок N = 3

$$\begin{cases} s_0 = \dfrac{(1-p_0)(1-p_3)(p_0+p_1)+1+p_0+p_1+p_2}{p_0(1-p_3)(p_0+p_1)} \\ s_1 = \dfrac{(1-p_0)(1-p_3)(p_0+p_1)+1+2p_0+p_1+p_2}{p_0} \\ s_2 = \dfrac{p_0+(1-p_3)\big((1-p_0)(1-p_3)(p_0+p_1)+1+2p_0+p_1+p_2\big)}{p_0(1-p_3)} \\ s_3 = 1+\dfrac{p_0+(1-p_3)\big((1-p_0)(1-p_3)(p_0+p_1)+1+2p_0+p_1+p_2\big)}{p_0(1-p_3)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_0 = (p_1+2p_2+3p_3)\dfrac{(1-p_3)(p_0+p_1)+p_2+2p_3}{p_0(1-p_3)(p_0+p_1)} \\ z_1 = \dfrac{(p_1+2p_2+3p_3)((1-p_3)(p_0+p_1)+p_0+p_2+2p_3)}{p_0(1-p_3)(p_0+p_1)} \\ z_2 = \dfrac{(p_1+2p_2+3p_3)\big((1-p_3)(p_0+p_1)+2p_0+p_2+2p_3\big)}{p_0(1-p_3)(p_0+p_1)} \\ z_3 = \dfrac{(p_1+2p_2+3p_3)\big((1-p_3)(p_0+p_1)+3p_0+p_2+2p_3\big)}{p_0(1-p_3)(p_0+p_1)} \end{cases}$$

Звідки знаходимо α і β використовуючи формули

$$\alpha = s_N - N, \qquad \beta = z_N - \lambda N$$

Розглянемо загальний випадок, де $\boldsymbol{p_i = \frac{1}{N+1}}$.

$$\begin{cases} s_0 = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N+1} + \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N+1} s_{j-1} \\ s_i = 1 + \left(\frac{1}{N+1} + \cdots + \frac{1}{N+1}\right) s_{i-1} + \left(\frac{1}{N+1} s_i + \cdots + \frac{1}{N+1} s_{N-1}\right); \end{cases}$$

$$\begin{cases} s_0 = \frac{N}{N+1} + \frac{1}{N+1} \sum_{j=1}^{N} s_{j-1} \\ s_i = 1 + \frac{i}{N+1} s_{i-1} + \frac{1}{N+1} (s_i + \cdots + s_{N-1}); \end{cases}$$

Розглянемо різницю i −того та $i+1$ членів.

$$s_i = 1 + \frac{i}{N+1} s_{i-1} + \frac{1}{N+1} (s_i + \cdots + s_{N-1}),$$

$$s_{i+1} = 1 + \frac{i+1}{N+1} s_i + \frac{1}{N+1} (s_{i+1} + \cdots + s_{N-1}),$$

$$(s_{i+1} - s_i) = \frac{i+1}{N+1} s_i - \frac{i}{N+1} s_{i-1} - \frac{1}{N+1} s_i,$$

$$(s_{i+1} - s_i) = \frac{i}{N+1} (s_i - s_{i-1}) = \frac{i}{N+1} \left(\frac{i-1}{N+1} (s_{i-1} - s_{i-2}) \right) =$$

$$= \frac{i!}{(N+1)^i} (s_1 - s_0) = \frac{i!}{(N+1)^i} \Delta s_0.$$

$$s_{i+1} = s_0 + (s_1 - s_0) + (s_2 - s_1) + \cdots + (s_{i+1} - s_i)$$

$$= s_0 + \sum_{k=0}^{i} \frac{k!}{(N+1)^k} \Delta s_0.$$

Використаємо отримане для $(s_1 - s_0)$

$$s_0 = \frac{N}{N+1} + \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^{N-1} s_j,$$

$$s_1 = 1 + \frac{2}{N+1}s_0 + \frac{1}{N+1}\sum_{j=1}^{N-1} s_j,$$

$$\Delta s_0 = s_1 - s_0 = \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+1}s_0 = \frac{1}{N+1}(1+s_0).$$

$$s_N = 1 + s_0 + \frac{1}{N+1}(1+s_0)(\sum_{k=0}^{N-1}\frac{k!}{(N+1)^k})$$

$$s_0 = \frac{N}{N+1} + \frac{1}{N+1}\sum_{j=1}^{N-1}(s_0 + \frac{1}{N+1}(1+s_0)(\sum_{k=0}^{N-1}\frac{k!}{(N+1)^k}))$$

Подивимось на результат, коли N =2

$$s_0 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{1}(s_0 + \frac{1}{3}(1+s_0)(\sum_{k=0}^{1}\frac{k!}{(3)^k})),$$

$$s_0 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(s_0 + \frac{1}{3}(1+s_0)\left(1+\frac{1}{3}\right)\right),$$

$$s_0 = \frac{2}{3} + \frac{7}{9}s_{0,}$$

$$s_0 = 3,$$

$$\Delta s_0 = s_1 - 3 = \frac{1}{3} + \frac{3}{3},$$

$$s_1 = 4\frac{1}{3},$$

$$s_2 = 1 + 4\frac{1}{3} = 5\frac{1}{3},$$

$$\alpha = 3\frac{1}{3}.$$

$$\begin{cases} z_0 = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N+1} j + \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N+1} z_j = \lambda + \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N+1} z_{j-1} \\ z_i = \lambda + \left(\frac{1}{N+1} + \cdots + \frac{1}{N+1}\right) z_{i-1} + \sum_{j=i+1}^{N} \frac{1}{N+1} z_{j-1} . \end{cases}$$

Для зручності обрахуємо λ

Скористаємось формулою для суми n перших членів арифметичної прогресії

$$\lambda = \frac{0 + \frac{N}{N+1}}{2}(N+1) = \frac{N}{2}.$$

$$\begin{cases} z_0 = \frac{N}{2} + \frac{1}{N+1} \sum_{j=1}^{N} z_{j-1} \\ z_i = \frac{N}{2} + \frac{i}{N+1} z_{i-1} + \frac{1}{N+1} \sum_{j=i+1}^{N} z_{j-1} . \end{cases}$$

Розглянемо різницю i −того та $i+1$ членів.

$$z_i = \frac{N}{2} + \frac{i}{N+1} z_{i-1} + \frac{1}{N+1} \sum_{j=i+1}^{N} z_{j-1},$$

$$z_{i+1} = \frac{N}{2} + \frac{i+1}{N+1} z_i + \frac{1}{N+1} \sum_{j=i+2}^{N} z_{j-1},$$

$$z_{i+1} - z_i = \frac{i}{N+1}(z_i - z_{i-1}) = \cdots = \frac{i!}{(N+1)^i} \Delta z_0,$$

$$z_N = \frac{(N-1)!}{(N+1)^{(N-1)}}\Delta z_0 + z_i$$

$$= \frac{(N-1)!}{(N+1)^{(N-1)}}\Delta z_0 + \frac{(N-2)!}{(N+1)^{(N-2)}}\Delta z_0 + z_{i-1} == \cdots$$

$$= \Delta z_0 \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(k)!}{(N+1)^k} + z_0$$

$$z_1 = \frac{N}{2} + \frac{2}{N+1} z_0 + \frac{1}{N+1} \sum_{j=2}^{N} z_{j-1},$$

$$z_0 = \frac{N}{2} + \frac{1}{N+1} \sum_{j=1}^{N} z_{j-1},$$

$$\Delta z_0 = z_1 - z_0 = \frac{1}{N+1} z_0 ,$$

$$z_N = \frac{1}{N+1} z_0 \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(k)!}{(N+1)^k} + z_0,$$

$$z_0 = \frac{N}{2} + \frac{1}{N+1} \sum_{j=1}^{N} (\frac{1}{N+1} z_0 \sum_{k=0}^{j-1} \frac{(k)!}{(N+1)^k} + z_0),$$

Подивимось на результат, коли N =2

$$z_0 = 1 + \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{2} \left(\frac{1}{3} z_0 \sum_{k=0}^{j-1} \frac{(k)!}{(3)^k} + z_0 \right),$$

$$z_0 = 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} z_0 + z_0 + \frac{1}{3} z_0 \sum_{k=0}^{1} \frac{(k)!}{(3)^k} + z_0 \right)$$

$$z_0 = 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} z_0 + z_0 + \frac{4}{9} z_0 + z_0 \right)$$

$$z_0 = \frac{81}{56},$$

$$z_1 = \frac{1}{3} z_0 \sum_{k=0}^{1} \frac{(k)!}{(3)^k} + z_0,$$

$$z_1 = \frac{27}{56}\frac{4}{3} + \frac{81}{56} = \frac{113}{56},$$

$$z_2 = 1 + \frac{113}{56} = \frac{169}{56};$$

$$\beta = \frac{169}{56} - 2 = \frac{57}{56}.$$

Розділ 3 ОХОРОНА ПРАЦІ ТА БЕЗПЕКА В НАДЗВИЧАЙНИХ СИТУАЦІЯХ

Виконання дипломної роботи на сам перед є виконанням наукових досліджень теоретичного характеру в області математики. Такі дослідження супроводжуються потужною розумовою діяльністю, яка зазвичай відбувається вумовах замкнених приміщень на кшталт аудиторій в навчальних закладах, залів бібліотек, кімнат в жилих приміщеннях, тощо. Задля покращення умов для якісної розумової діяльності, слід звернути особливу увагу на правильну організацію робочого місця і дотримання усіх правил безпеки.

3.1 ОЦІНКА ВАЖКОСТІ ТА НАПРУЖЕНОСТІ ПРАЦІ

Для об’єктивної оцінки умов праці на виробництві проводиться атестація робочих місць за умовами праці. Основна мета атестації полягає у врегулюванні відносин між роботодавцем і працівниками у галузі реалізації прав на належні й безпечні умови праці. Результати атестації використовуються для цілеспрямованої і планомірної роботи, спрямованої на покращення умов праці, зниження рівня травматизму і захворюваності, а також для надання пільг і компенсацій, передбачених чинним законодавством, таких як скорочена тривалість робочого часу, додаткова оплачувана відпустку, пільгова пенсія, оплата праці у підвищеному розмірі. Для проведення атестації робочих місць та встановлення пріоритету в проведенні оздоровчих заходів використовується гігієнічна класифікація праці за показниками шкідливості та небезпечності факторів виробничого середовища, важкості та напруженості трудового процесу. Виходячи з принципів гігієнічної класифікації, умови праці поділяються на 4 класи: оптимальні, допустимі, шкідливі та небезпечні (екстремальні).

1-й клас – ОПТИМАЛЬНІ умови праці – такі умови, при яких зберігається не лише здоров’я працюючих, а й створюються передумови для підтримання високого рівня працездатності.

2-й клас – ДОПУСТИМІ умови праці – характеризуються такими рівнями факторів виробничого середовища і трудового процесу, які не перевищують встановлених нормативів.

3-й клас – ШКІДЛИВІ умови праці – характеризуються такими рівнями шкідливих виробничих факторів, які перевищують нормативи і здатні завдавати несприятливого впливу організму працюючого та/або його нащадкам.

4-й клас – НЕБЕЗПЕЧНІ (ЕКСТРЕМАЛЬНІ) умови праці – характеризуються такими рівнями шкідливих факторів виробничого середовища і трудового процесу, вплив яких протягом робочої зміни (або ж її частини) створює загрозу для життя, високий ризик виникнення важких форм гострих професійних уражень.

Оцінка важкості трудового процесу здійснюється на підставі обліку фізичного динамічного навантаження, маси вантажу, що підіймається і переміщується, загального числа стереотипних робочих рухів, величини статичного навантаження, робочої пози, ступеню нахилу корпусу, переміщень в просторі.

Оцінка напруженості трудового процесу здійснюється на підставі обліку факторів, що характеризують напруженість праці, а саме, інтелектуальні, сенсорні, емоційні навантаження, ступінь монотонності праці, режим роботи.

3.2. АНАЛІЗ ПСИХОЛОГІЧНИХ АСПЕКТІВ УМОВ ПРАЦІ.

На відміну від фізичної, розумова праця супроводжується меншими витратами енергетичних запасів, але це не свідчить про її легкість. Основним працюючим органом під час такого виду праці виступає мозок. При інтенсивній інтелектуальній діяльності потреба мозку в енергії підвищується і становить 15-20% від загального об'єму енергії, яка витрачається в організмі. При цьому вживання кисню 100 г кори головного мозку в 5 разів

більше, ніж витрати скелетними м'язами тієї ж ваги при максимальному фізичному навантаженні.

Для розумової праці характерні: велика кількість стресів, мала рухливість, вимушена статична поза – все це зумовлює застійні явища у м'язах ніг, органах черевної порожнини і малого тазу, погіршення постачання мозку киснем, зростання потреби в глюкозі. При розумовій праці погіршується робота 15 органів зору: стійкість ясного бачення, гострота зору, адаптаційна можливість ока. Розумовій праці властивий найбільший ступінь зосередження уваги – в середньому у 5-10 разів вище, ніж при фізичній праці. Розвивається особливий стан організму – втома, що з часом може перетворитися на перевтому. Все це призводить до порушення нормального фізіологічного функціонування організму.

При розумовій праці мають місце зсуви в вегетативних функціях людини: підвищення кров’яного тиску, зміни електрокардіограми, вентиляції легень і вживання кисню, підвищення температури тіла. Після закінчення розумової праці втома залишається довше, ніж після фізичної праці, однак навіть у стані перевтоми працівники здатні довгий час виконувати свої обов’язки без особливого зниження рівня працездатності і продуктивності.

Незважаючи на те, що розумова робота не пов’язана з великими енергетичними витратами, вона ставить до організму не менше вимог, призводить до стомлення і перевтоми не менше, ніж інтенсивне фізичне навантаження. У загальному випадку це пов’язано з особливостями діяльності «оператора» у сучасному виробництві:

- з розвитком техніки збільшується число об’єктів, якими необхідно керувати та їхніх параметрів, які необхідно враховувати при цьому;
- розвиваються системи дистанційного керування і людина все більше віддаляється від керованих об’єктів, про динаміку стану яких вона

судить не за даними безпосереднього спостереження, а на підставі сприйняття сигналів, що надходять від реальних об’єктів;

- часто сигнали від об’єктів надходять у кодованому виді, що обумовлює необхідність декодування та уявного співставлення отриманої інформації зі станом реального об'єкта;

- збільшення складності і швидкості виробничих процесів висуває підвищені вимоги до точності дій оператора, швидкості прийняття рішення в здійсненні управлінських функцій; зростає ступінь відповідальності за свої дії, а це призводить до збільшення навантаження на нервово-психологічну діяльність людини.

- для оператора характерне обмеження рухової активності зі 16 зменшенням м’язового навантаження, але пов'язано з використанням переважно малих груп м’язів;

- іноді оператор виконує роботу в умовах ізоляції від звичного соціального середовища;

- підвищення ступеня автоматизації виробничих процесів вимагає від оператора готовності до екстрених дій, при цьому відбувається різкий перехід від монотонної роботи до активних енергійних дій, що призводить до виникнення сенсорних, емоційних і інтелектуальних перевантажень.

3.3. НОРМУВАННЯ ПРАЦІ. ВИБІР ОПТИМАЛЬНОГО РЕЖИМУ ПРАЦІ ТА ВІДПОЧИНКУ.

Серед факторів підвищення ефективності праці особливе місце належить раціональному режиму праці і відпочинку. Від його структури залежить динаміка втоми, відновлюваність функцій організму, працездатність і здоров’я, надійність і продуктивність праці.

Під режимом праці і відпочинку розуміють загальну тривалість трудової діяльності протягом доби, тижня, місяця, року, частоту і тривалість періодів трудової активності і перерв у процесі цієї активності, співвідношення і чергування цих періодів. Режим праці включає характеристики самого трудового процесу: інтенсивність чи екстенсивність, а також допустиму тривалість дії шкідливих факторів. Раціональний, фізіологічно обґрунтований режим праці і відпочинку повинен відповідати таким вимогам:

- запобігати ранньому і надмірному розвиткові втоми працівників;
- сприяти збереженню високої працездатності і оптимального функціонального стану організму працівників протягом зміни;
- забезпечувати високу продуктивність праці;
- сприяти ефективному відновленню фізіологічних функцій під час відпочинку.

Ефективність режиму праці і відпочинку оцінюється критеріями працездатності і функціонального стану працівників, економічними, гігієнічними та соціальними критеріями.

Працездатність і функціональний стан працівника характеризуються системою фізіологічних і психологічних показників, а також тривалістю і співвідношенням періодів впрацювання, стійкої працездатності і втоми; стійкістю фізіологічних функцій протягом робочого дня; часом відновлення функціональних показників по закінченню роботи.

Розробка режимів праці і відпочинку передбачає:

- детальне вивчення характеру роботи, ліквідацію організаційних неполадок, оптимізацію виробничого середовища;

- проведення хронометражних спостережень робочого дня для встановлення періодів роботи і відпочинку;
- вивчення особливостей динаміки працездатності та графічний її аналіз на основі фізіологічних, психологічних і виробничих показників;
- раціоналізацію трудових процесів і впровадження заходів по запобіганню перевтоми працівників.

Упорядкування режиму праці і відпочинку передбачає регулювання таких трьох його параметрів, як загальний робочий час, тривалість періодів роботи і тривалість періодів відпочинку. Таким чином, фізіологічною закономірністю є стабільність допустимої величини часу відпочинку при різних допустимих величинах часу роботи. Енергетичним фізіологічним оптимумом вважається фізична робота з потужністю, яка дорівнює половині або четвертій частині максимальної потужності. Оптимальний темп рухів при тривалій роботі і оптимальному зусиллі становить третину від максимального темпу. У виробничих умовах оптимальний темп робочих рухів не перевищує 20% максимально доступного темпу, а в деяких умовах – 10% максимальної величини. Разом з тим, несприятливі умови праці створюють додаткове функціональне навантаження на організм працівника, що зумовлює необхідність скорочення періодів роботи і збільшення часу відпочинку, а також скорочення робочого часу. У цьому випадку розробляються так звані компенсаторні режими праці і відпочинку.

3.4. САНІТАРІЯ ТА ГІГІЄНА РОБОЧОГО МІСЦЯ.

Санітарно-гігієнічні вимоги до робочих місць в офісах регулюються:

1. Законом України "Про охорону праці" (поточна редакція від 16.09.2008);
2. Правилами охорони праці під час експлуатації електронно-обчислювальних машин, затверджених наказом Державного комітет

України з промислової безпеки, охорони праці та гірничого нагляду від 26 березня 2010 року N 65 (далі – Правила) та іншими нормативно-правовими актами;

3. Гігієнічною класифікацією праці за показниками шкідливості та небезпечності факторів виробничого середовища, важкості та напруженості трудового процесу N 4137-86, затвердженою МОЗ СРСР 12.08.86р та іншими нормативно-правовими актами. Відповідно до ч.1 ст.13 Закону України «Про охорону праці», роботодавець зобов'язаний створити на робочому місці в кожному структурному підрозділі умови праці відповідно до нормативно-правових актів.

3.4.1. ВИМОГИ ДО ПРИМІЩЕННЯ

Площу приміщень, в яких розташовують персональні комп'ютери, визначають згідно з чинними нормативними документами з розрахунку на одне робоче місце, обладнане ПК:

- площа – не менше 6,0 м2;
- обсяг – не менше 20,0 м3, з урахуванням максимальної кількості осіб, які одночасно працюють у зміні;
- робочі місця повинні бути розташовані на відстані не менше ніж 1 м від стіни з вікном;
- відстань між бічними поверхнями комп'ютерів має бути не меншою за 1,2 м;
- відстань між тильною поверхнею одного комп'ютера та екраном іншого не повинна бути меншою 2,5 м;
- прохід між рядами робочих місць має бути не менше 1 м. Заземлені конструкції, що знаходяться в приміщеннях (батареї опалення, водопровідні труби, кабелі із заземленим відкритим екраном тощо),

мають бути надійно захищені діелектричними щитками або сітками від випадкового дотику.

Також в цих приміщеннях повинні бути медичні аптечки першої допомоги та система автоматичної пожежної сигналізації з димовими пожежними сповіщувачами та переносними вуглекислотними вогнегасниками з розрахунку 2 шт. на кожні 20 м2 площі приміщення. Підходи до засобів пожежогасіння повинні бути вільними.

3.4.2. ВИМОГИ ДО ОРГАНІЗАЦІЇ РОБОЧОГО МІСЦЯ

Конструкція робочого місця користувача ПК має забезпечувати підтримання оптимальної робочої пози з такими ергономічними характеристиками: ступні ніг – на підлозі або на підставці для ніг; стегна – в горизонтальній площині; передпліччя – вертикально; лікті – під кутом 70°- 90° до вертикальної площини; зап’ястя зігнуті під кутом не більше 20° відносно горизонтальної площини; нахил голови – 15°-20° відносно вертикальної площини.

Висота робочої поверхні столу для ПК має бути в межах 680-800 мм, а ширина – забезпечувати можливість виконання операцій в зоні досяжності моторного поля.

Рекомендовані розміри столу: висота – 725 мм, ширина – 600-1400 мм, глибина – 800-1000 мм. 58 Робочий стіл для ПК повинен мати простір для ніг висотою не менше 600 мм, шириною не менше 500 мм, глибиною на рівні колін не менше 450 мм, на рівні витягнутої ноги – не менше 650 мм. Монітор та клавіатура мають розташовуватися на оптимальній відстані від очей користувача, але не ближче 600 мм, з урахуванням розміру алфавітно-цифрових знаків та символів. Розташування монітору має забезпечувати зручність зорового спостереження у вертикальній площині під кутом ±30° від лінії зору працівника. Клавіатуру слід розміщувати на поверхні столу або на спеціальній, врегульованій за висотою, робочій поверхні окремо від столу на відстані 100- 300 мм від краю, ближчого до працівника. Кут нахилу

клавіатури має бути в межах 5°-15°. Відносно вікон робоче місце повинно бути розміщено так, щоб природне світло було збоку, краще з лівого, та забезпечувався коефіцієнт природної освітленості не нижче 1,5%. Робоче місце, обладнане ПК повинно бути розташоване так, щоб уникнути потрапляння прямого світла в очі. Джерела штучного світла рекомендується розташувати з обох сторін від екрану паралельно напрямку зору Як джерело світла при штучному освітленні повинні застосовуватися, як правило, люмінесцентні лампи типу ЛБ. Допускається у світильниках місцевого освітлення застосовувати лампи розжарювання. Яскравість світильників загального освітлення в зоні кутів випромінювання від 50° до 90° відносно вертикалі в подовжній і поперечній площинах повинна складати не більше 200 кд/кв. м, а захисний кут світильників повинен бути не більшим за 40°. 59

3.5. ОХОРОНА ПРАЦІ ПРИ ВИКОРИСТАННІ ТЕХНІЧНИХ ЗАСОБІВ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ДІЯЛЬНОСТІ ПРИ ВИКОНАННІ ДИПЛОМНОЇ РОБОТИ.

Основні шкідливі та небезпечні фактори, що можуть впливати на організм людини під час роботи з персональним комп’ютером (ПК), такі:

- підвищений рівень електромагнітних випромінювань;
- підвищений рівень іонізуючих випромінювань;
- підвищений рівень статичної електрики;
- підвищена напруженість електростатичного поля;
- підвищена чи понижена іонізація повітря;
- підвищена яскравість світла;
- пряма і відбита блискітливість;
- підвищене значення напруги в електромережі, замикання якої може статися крізь тіло людини;

- статичні перевантаження кістково-м’язового апарату та динамічні локальні перевантаження м’язів кистей рук;
- перенапруження зорового аналізатора;
- розумове перенапруження;
- емоційні перевантаження;
- монотонність праці.

Аби запобігти несприятливим наслідкам для здоров’я, у приміщеннях, де застосовується комп’ютерна техніка, потрібно:

- провести інструментальний контроль – заміряти та оцінити виробничі фактори на робочих місцях і в приміщеннях (виконують спеціально акредитовані/атестовані лабораторії);
- нормалізувати стан фізичних факторів на підставі рекомендацій, розроблених за результатами інструментального контролю;
- оцінити ергономічні параметри робочих місць, зокрема спеціальних меблів для користувачів ЕОМ;
- розробити та включити до посадових інструкцій доповнення, що враховують специфіку праці з використанням ЕОМ.

Працівники, які працюють з ЕОМ і ПЕОМ, підлягають обов’язковим медичним оглядам:

- попереднім – коли влаштовуються на роботу;
- періодичним – протягом трудової діяльності.

У Порядку проведення медоглядів працівників певних категорій, затвердженому наказом Міністерства охорони здоров’я України від 21.05.2007 р. № 246, наведено перелік протипоказань, коли не дозволено

працювати з ЕОМ. Тому лікар, який здійснює медогляд, у разі потреби зробить відповідний запис у картці пацієнта. Проте слід указати, що медогляди повинні проходити користувачі ПЕОМ з ВДТ, тобто моніторів з електропроменевими трубками. Для TFT-, плазмових та інших моніторів Міністерство охорони здоров'я України на цей час таку вимогу не встановило.