МІЖНАРОДНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ФІНАНСІВ

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Методичні вказівки до виконання типового розрахунку
студентів напрямку підготовки

ЗАТВЕРДЖЕНО
Навчально-методичною
Радою Університету
Протокол №
Від .

Київ-2006

Теорія ймовірностей і математична статистика (методичні вказівки до виконання типового розрахунку)

Укладачі: Булдигін В.В., д.фіз.н., проф.
Буценко Ю.П., к.фіз-мат.н., доц.
Диховичний О.О., к.фіз-мат.н.

Рецензент: Рущицький Я.Я., д.фіз.-мат.н.,проф.

Редактор: Стеценко О.О., к.п.н.

Відповідальний за випуск: Толпеко А.І., к.т.н., доц.

Комп'ютерний набір: Ружинська Н.Ю.

ЗМІСТ

1. Мета і завдання дисципліни 4
2. Тематичний план курсу 4
3. Зміст тем курсу 5
4. Тематика лекцій 7
5. Плани практичних завдань 9
6. Самостійна робота студентів 11
7. Методичні рекомендації до виконання завдань для самостійної роботи 13
8. Завдання для самостійних робіт 13
9. Перелік основних питань для підготовки до заліку 24
10. Методичні рекомендації для студентів заочної форми навчання 25
11. Список літератури 25

1.Мета та завдання дисципліни

Метою дисципліни є послідовне формуванння у студентів знань у галузі методики вивчення випадкових явищ, що у подальшому використовується при вивченні ними курсів «Економетрія», «Статистика» та дає можливість застосовувати їх при дослідженні ринкового середовища.

Завданнями дисципліни є:

- з'ясування об'єктивного характеру наявності випадкового фактору у різноманітних явищах;
- виклад основних імовірнісних схем та формул;
- дослідження поняття випадкової величини, її розподілу та характеристик;
- розгляд систем випадкових величин, їх розподілів та характеристик, зв'язку між компонентами таких систем;
- виклад основних понять та методів математичної статистики;
- розгляд базових методів дисперсійного та кореляціного аналізів;
- знайомство з елементами теорії випадкових процесів.

Вивченню курсу "Теорія ймовірностей" передує вивчення курсу "Вища математика", який являє собою необхідну базу для засвоєння даної дисципліни.

Навчальний час, необхідний для вивченння даної дисципліни(з врахуванням СРС), складає 108 годин, з яких: 36 годин – лекційних, 18 годин – практичних занять, 45 години – самостійна робота студентів, 9-- індивідуальна робота.

2.Тематичний план

Найменування розділів, тем	Розподіл навчального часу					
	Всього	Лекц.	Практ.	Семін.	Лабр.	Індив.	СРС
Розділ 1. Введення до теорії ймовірностей.	20	8	4	-	-	-	8
Тема 1.1. Поняття випадковості та ймовірності.	3	2	-	-	-	-	1
Тема 1.2. Методи безпосереднього обчислення ймовірності.	9	4	2	-	-	-	3
Тема 1.3. Аксіоматичне означення ймовірності.	8	2	2	-	-	-	4
Розділ 2. Схема послідовних випробувань.	10	4	2	-	-	-	4
Тема 2.1. Схема Бернуллі.	5	2	1	-	-	-	2
Тема 2.2. Гауссові апроксимації біноміальної формули	5	2	1	-	-	-	2
Розділ 3. Випадкові величини.	20	8	4	-	-	-	8
Тема 3.1 Дискретні випадкові величини	6	2	2	-	-	-	2
Тема 3.2 Неперервні випадкові величини	10	4	2	-	-	-	4
Тема 3.3 Перетворення випадкових величин	4	2	0	-	-	-	-
Розділ 4 Системи випадкових величин та граничні теореми	20	8	1	-	-	-	8
Тема 4.1 Системи випадкових величин	10	4	2	-	-	-	4
Тема 4.2 Граничні теореми теорії ймовірностей	10	4	2	-	-	-	4
Розділ 5 Елементи математичної статистии	18	8	2	-	-	-	8
Тема 5.1 Первинна обробка випадкових даних	4	2	-	-	-	-	2
Тема 5.2 Оцінювання параметрів розподілу та Числових характеристик Випадкових величин	9	4	1	-	-	-	4
Тема 5.3 Статистичні гіпотези та їх перевірка	5	2	1	-	-	-	2
Тема 5.4 Дисперсійний							

аналіз **Тема 5.6** Кореляційний аналіз **Тема 5.7** Елементи випадкових процесів							
Підсумкова контрольна робота.							

3.Зміст навчального матеріалу.

Розділ 1. Введення до теорії ймовірностей.

Тема 1.1. Поняття випадковості та ймовірності. Поняття випадковості та випадкової події. Основні властивості випадкових подій. Частота та частотне (статистичне) означення ймовірності. Властивості частоти. Простір елементарних подій, відношення між подіями, дії над ними. Дискретний ймовірнісний простір та класичне означення ймовірності.

Тема 1.2. Методи безпосереднього обчислення ймовірностей. Елементи комбінаторики: основні правила, перестановки, розміщення, сполучення. Гіпергеометрична схема випадкового експерименту. Обмеженість класичного означення ймовірності та його узагальнення: нерівноймовірні елементарні події, геометрична ймовірність.

Тема 1.3. Аксіоматичне означення ймовірності. Аксіоми ймовірності. Формула додавання ймовірностей. Умовна ймовірність та формула множення ймовірностей. Формули повної ймовірності та Байєса.

Розділ 2. Схема послідовних виробуваннь.

Тема 2.1. Схема Бернуллі. Послідовні випробування та біноміальний розподіл. Поведінка біноміальних імовірностей та найімовірніше число успіхів. Поліноміальний розподіл. Рідкісні події та формула Пуассона.

Тема 2.2. Гауссові апроксимації біномінальної формули. Локальна теорема Муавра-Лапласа. Інтегральна теорема Муавра-Лапласа. Функція Лапласа та її властивості. Надійні інтервали при оцінці ймовірності події.

Розділ 3. Випадкові величини та системи випадкових величин.

Тема 3.1. Дискретні випакові величини. Випадкова величина у випадку дискретного простору елементарних подій. Функція та таблиця розподілу. Біноміальний, геометричний, гіпергеометричний, пуассонівський розподіли. Числові характеристики дискретних випадкових величин.

Тема 3.2 Неперервні випадкові величини. Щільність та функція розподілу віпадкової величини (загальний випадок). Рівномірний, показниковий, нормальний розподіл. Числові характеристики неперервних випадкових величин.

Тема 3.3. Перетворення випадкових величин. Функція випадкової величини (неперервної та дискретної), її розподіл та числові характеристики. Суміші розподілів.

Тема 3.4. Система випадкових величин. Дискретний та неперервний випадки. Задання розподілу системи абсолютно неперервних випадкових величин за допомогою щільності та функції розподілу, їх властивості. Маргінальні розподіли компонентів системи, їх залежність та незалежність. Числові характеристики систем. Парна кореляція. Коефіцієнт кореляції. Рівняння лінійної регресії.

Розділ 4. Граничні теореми теорії ймовірностей.

Тема 4.1. Граничні теореми теорії ймовірностей. Нерівність та теорема Чебишова. Збіжність послідовностей випадкових величин. Закони великих чисел. Поняття про центральну граничну теорему.

Розділ 5. Елементи математичої статистики.

Тема 5.1. Первинна обробка випадкових даних. Варіаційні ряди, генеральна сукупність та вибірка. Методи формування вибірки. Побудова емпіричного закону розподілу: гістограма, багатокутник розподілу, вибіркова (емпірична) функція розподілу.

Тема 5.2. Оцінювання параметрів розподілу та числових характеристик випадкових величин. Точкові оцінки числових характеристик випадкових величин. Незсуненість, консистентність, асимптотична нормальність оцінок. Методи одержання точкових оцінок параметрів розподілу. Інтервальні оцінки параметрів розподілу, їх надійність та алгоритми побудови (у найпростіших випадках).

Тема 5.3. Статистичні гіпотези та їх перевірка. Поняття гіпотези та їх класифікація. Критичні області при перевірці гіпотез. Порівняння двох сукупностей. Критерії згоди.

Тема 5.4. Дисперсійний аналіз. Моделі експерименту. Однофакторний дисперсійний аналіз. Метод лінійних контрастів.

Тема 5.6. Кореляційний аналіз. Рівняння лінійної регресії. Вибіркова лінійна регресія. Властивості оцінок параметрів. Перевірка значущості. Надійні інтервали.

Тема 5.7 Елементи випадкових процесів. Задачі, що призводять до поняття випадкового процесу. Пуассонівський потік. Поняття системи масового обслуговування.

4. Самостіна робота студентів

Необхідною умовою глибокого засвоєння курсу “Теорія ймовірностей” є самостійна робота студентів, передбачена учбовим планом. Вона грунтується на опрацюванні лекційного матеріалу, учбової літератури, рекомендованої до кожної теми, розв’язанні задач запропонованих для самостійного розв’язку та виконанні розрахунково-графічної роботи. Нижче, відповідно до тем курсу, звертається увага студентів на ті аспекти, дисципліни, які допоможуть їм якнайповніше засвоїти теоретичний матеріал, набути навичок самостійного формулювання та розв’язування ймовірнісно-статистичних задач.

Тема 1. Введення до теорії ймовірностей

При розгляді цієї теми слід звернути увагу на існування широкого кола явищ, що носять випадковий характер, виконання необхідних передумов для їх вивчення математичними методами. Зосередити увагу на множині можливих результатів випадкового експерименту, побудові алгебри подій, що спостерігаються, операціях над подіями.

Необхідно грунтовно вивчити основні підходи до визначення ймовірності, при цьому серйозному самостійному опрацюванню підлягають комбінаторний метод знаходження ймовірностей у класичному сенсі, геометричний підхід до знаходження ймовірностей.

При вивченні практичного застосування формул додавання та множення ймовірностей, повної ймовірності та Байєса особливу увагу слід звернути на поняття несумісних і незалежних подій, “неоднорідність” простору елементарних подій, що веде до “двоступеневої” структури випадкового експерименту, можливість аналізу одержаного результату за допомогою апостеріюрних ймовірностей.

Тема 2. Схема послідовних випробувань

Вивчаючи цю тему, слід звернути увагу на фундаментальну наукову та практичну важливість ймовірносної структури незалежних однорідних випадкових експериментів як біноміального, так і поліноміального типів, необхідно добре засвоїти методи знаходження наймоівірнішого числа успіхів у схемі Бернуллі, область застосування асимптотичних теорем Пуассона (із визначенням відповідної похибки), Муавра-Лапласа (локальної та інтегральної).

Тема 3. Випадкові величини

Поняття випадкової величини дозволяє узагальнити методи вивчення широкого класу випадкових явищ. Основними моментами при цьому є: множина можливих значень випадкової величини і класифікація випадкових величин відповідно до типу цієї множини, способи завдання розподілів випадкової величини. Суттєвою частиною цієї теми є вивчення спеціальних типів розподілу (як дискретних, так і неперервних) із обов’язковим засвоєнням того, при вивченні яких явищ вони найчастіше зустрічаються. Практично важливою є також характеризація випадкових величин за допомогою їх числових характеристик (моментів та інших).

Тема 4. Системи випадкових величин

Суттєвою особливістю прикладних економічних досліджень є необхідність одночасного вивчення сукупностей випадкових величин (переважно залежних). Тому особливої уваги набуває теорія випадкових векторів (систем випадкових величин) для яких, аналогічно до попередньої теми, розглядаються множини можливих значень, розподіли, числові характеристики, а також, що є особливо характерним саме для ймовірносних моделей у економіці, форми зв’язку між ними (кореляційний, функціональний).

Тема 5. Граничні теореми

Необхідність, яка випливає із зауважень до попередньої теми, мати справу у конкретних дослідженнях із сукупностями (часто значними за об'ємом) випадкових факторів, а також проблема надійності статистичних результатів, вимагають хоча б первинного знайомства студентів, які вивчають курс теорій ймовірності, із теоремами про граничну поведінку випадкових послідовностей (в тому числі сум незалежних випадкових величин). При цьому слід звернути увагу на нерівність Чебишева як спосіб оцінки відхилень випадкової величини від її середнього значення (математичного сподівання), а також на можливість використання нормального (гауссівського) розподілу у широкому спектрі ймовірносних моделей, пов'язаних із підсумовуванням незалежних випадкових величин.

Тема 6. Елементи математичної статистики

Дана тема присвячена вивченню як основних понять математичної статистики, так і деяких (найпростіших) методів статистичних досліджень. Необхідно засвоїти методи формування виборки при статистичному дослідженні, способи формування початкового уявлення про розподіл випадкового фактору (гістограма, багатокутник розподілу, емпірична функція розподілу) та перевірки гіпотез, які при цьому формуються. Вельми важливим є також знаходження оцінок числових характеристик розподілів, а також надійних інтервалів для них.

5.Короткі теоретичні відомості та приклади розв'язання типових задач

2.1. **Класичне означення ймовірності.**

Імовірністю події А називається відношення

$$P(A) = m/n$$

числа рівноможливих випадків, які сприяють події А, до загального числа n рівноможливих випадків.

2.2. **Комбінаторні формули.**

Припустимо, що потрібно виконати одну за іншою k дій. Якщо першу дію можна виконати n_1 способами, другу – n_2 способами, третю – n_3 способами й так до k-ї дії, яку можна виконати n_k способами, то всі k дії разом можуть бути виконані $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_k$ способами, в цьому полягає ***головний принцип комбінаторики*** (***правило множення***).

Нехай Ω - множина з n елементів. Довільна k-елементна підмножина множини з n елементів називається ***сполученням з n елементів по k.*** Порядок елементів в підмножині не має значення. Число k-елементних підмножин множини з n елементів позначають C_n^k.

Наприклад, якщо $\Omega = \{a, b, c\}$, тоді {a}, {b}, {c} – всі можливі сполучення з 3 по 1 (з цього випливає, $C_3^1 = 3$); {a, b}{a, c}{b, c} – всі можливі сполучення з 3 по 2 (таким чином, $C_n^2 = 3$).

Число сполучень з n елементів по k знаходиться за формулою

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Множина називається ***впорядкованою***, якщо кожному елементу цієї множини поставлено у відповідність деяке число (номер елемента) від 1 до n (n – число елементів множини) так, що різним елементам відповідають різні числа.

Різні впорядковані множини, відмінні лише порядком елементів (тобто можуть бути отримані з тієї ж множини), називаються ***перестановками*** цієї множини.

Наприклад, перестановки множини $\Omega = \{a, b, c\}$ мають вигляд

{a, b, c}, {a, c, b}, {b, a, c},
{b, c, a}, {c, a, b}, {c, b, a}.

Число перестановок P_n множини, що містить n елементів, визначається за формулою

$$P_n = n!$$

Розглянемо тепер упорядковані підмножини даної множини Ω. Саму множину Ω вважаємо неупорядкованою, тому кожна її підмножина може бути впорядкована будь-яким можливим способом. Число всіх k елементних підмножин множини Ω дорівнює C_n^k. Кожну таку підмножину можна впорядкувати k! способами. Таким чином отримаємо всі впорядковані k-елементні підмножини множини Ω. Число впорядкованих k-елементів підмножин множини, що складається з n елементів, позначається через A_n^k,

$$A_n^k = k!\,C_n^k = n\,(n-1)\ldots(n-k+1).$$

Впорядковані k-елементні підмножини множини з n елементів називаються ***розміщеннями з n елементів по k.*** Різноманітні розміщення із n по k відрізняються або елементами, або їхнім порядком.

Нехай $k_1, k_2, \ldots, k_m$ – цілі невід'ємні числа, причому $\sum_{i=1}^{m} k_i = n$. Уявимо множину A з n елементів у вигляді суми m множин $A_1, A_2, \ldots, A_m$, що містять відповідно $k_1, k_2, \ldots, k_m$ елементів. Позначимо число різних способів такого розбиття на групи через $C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m)$. Воно визначається за формулою

$$C_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_m!}$$

Наведемо ще одну комбінаторну схему, що часто зустрічається при розв'язанні задач: n-елементна множина A є сумою множин $A_1, A_2, \ldots, A_k$, число елементів яких рівне відповідно $n_1, n_2, \ldots, n_k$ $\left(\sum_{i=1}^{k} n_i = n \right)$,

B – m-елементна підмножина множини A, що містить m_1 елементів з A_1, m_2 з

$A_2, \ldots, m_k$ елементів з A_k $\left(\sum_{i=1}^{k} m_i = m \right)$. Число способів, якими можна вибрати таку множину B з A (множини неупорядковані), у силу основного принципу комбінаторики дорівнює

$$C_{n1}^{m1} \times C_{n2}^{m2} \times \ldots \times C_{nk}^{mk}$$

2.3.Геометричне означення ймовірності.

Припустимо, що в результаті досліду в деякій області Ω наугад з'являється точка ω. Потрібно визначити ймовірність P (A) того, що $\omega \in A$, де A — область, що належить Ω, $A \subset \Omega$. За визначенням: $P(A)=m(A)/m(\Omega)$, де $m(A)$ і $m(\Omega)$ — міра області A в області Ω. Під мірою будемо розуміти довжину, площу, об'єм в одно-, дво- і тривимірному випадках відповідно.

2.4.Теорема додавання і формула множення ймовірностей.

Умовною ймовірністю події A за умови, що відбулася подія B, називається число P (A/B), що визначається за формулою

$$P(A/B) = P(AB)/P(B), \quad P(B) \neq 0.$$

З даного визначення випливає формула множення ймовірностей

$$P(AB) = P(A)\,P(B/A) = P(B)\,P(A/B)$$

для двох подій, що допускає наступне узагальнення для n подій:

$$P(A_1, A_2 \ldots A_n) = P(A_1)\,P(A_2/A_1)\,P(A_3/A_1A_2) \ldots P(A_n/A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}).$$

Події A і B називаються незалежними, якщо виконується співвідношення

$$P(AB) = P(A)\,P(B).$$

Теорема. ***Для будь-яких подій* A *і* B *має місце формула***

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB);$$

для **n** *подій — формула*

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i \prec j \le n} P(A_iA_j) +$$

$$+ \sum_{1 \le i \prec j \prec k \le n} P(A_iA_jA_k) - \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1A_2 \ldots A_n).$$

2.5. Формула повної ймовірності, формули Байєса.

Набір подій $H_1, H_2, \ldots, H_n$ називається ***повною групою*** попарно несумісних подій, якщо

$$H_1 + H_2 \ldots + H_n = \Omega \text{ і } H_iH_j = \varnothing, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n, \ i \neq j,$$

де Ω —вірогідна подія; $\varnothing$ — неможлива подія.

Теорема 1. ***Якщо*** **$H_1, H_2, \ldots, H_n$** ***— повна група попарно несумісних подій, причому***
$P(H_1) \neq 0$, $i=1, 2, \ldots, n$, ***то для будь-якої події*** **A** ***має місце рівність (формула повної імовірності)***

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)$$

Теорема 2. ***В умовах теореми*** **1** ***для будь-якої події*** **A,** ***такої, що*** **$P(A) \neq 0$,** ***справедливі формули Байєса***

$$P(H_k/A) = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)}$$

2.6.Схема незалежних випробувань.

Нехай ймовірність появи події A при одиничному випробуванні дорівнює $p>0$. Дослід повторюється n разів, тобто відбувається серія з n незалежних випробувань. Імовірність $P_n(m)$ того, що в результаті цих n дослідів подія A відбудеться m раз (буде m успіхів), визначається за формулою Бернуллі

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad m=0, 1, 2, \ldots, n, \ (1)$$

де $m = 1-p$ – імовірність появи протилежної події A при одиничному випробуванні.

Сукупність чисел, зумовлених формулою (1), називається ***біноміальним розподілом імовірностей.***

Значення $m = m_0$, при якому ймовірність (1) приймає найбільше значення, називається ***найімовірнішим числом успіхів***.

Якщо $(n + 1)p$ — дробове число, то m_0 приймає єдине значення

$$m_0 = [(n+1)p],$$

де [...] — символ цілої частини числа. Якщо величина (n +1) p — ціла, то m0 приймає два значення

$$m_0^{(1)} = (n+1)p - 1 \text{ і } m_0^{(2)} = (n+1)p$$

Розглянемо тепер випадок, коли в результаті кожного з n незалежних випробувань може відбутися одне з k попарно несумісних подій A_1, A_2, ..., A_k із імовірностями p_1, p_2, ..., p_k відповідно ($p_1 + p_2 + ... + p_k = 1$). Позначимо через mі, число тих випробувань, у яких відбулася подія Аі, і=1, 2, ..., k. Тоді ймовірність m_1 появ події A_1, m_2, появ події A_2, ..., m_k, появ події A_k, причому $m_1 + m_2 + ... + m_k = n$, визначається рівністю

$$P_n(m_1, m_2, ... m_k) = \frac{n!}{m_1!\, m_2! ... m_k!} p_1^{m1} p_2^{m2} ... p_k^{mk}$$

Це ***поліноміальний розподіл імовірностей***; при m=2 він перетворюється в ***біноміальний***.

При великих значеннях n (порядку десятків, сотень) для біноміального розподілу застосовують наступні наближені формули:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \tag{2}$$

де $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$;

$$P_n = \left(x_1 \le \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \le x_2 \right) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \tag{3}$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt; \tag{4}$$

$$P_n(m) \approx \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \quad a = np; \tag{5}$$

$$P_n(k_1 \le m \le k_2) \approx \sum_{m=k_1}^{k_2} \frac{a^m}{m!} e^{-a}.$$

(6)

Формула (2) основана на локальній теоремі Муавра—Лапласа, (3) — на інтегральній теоремі Муавра—Лапласа, (5) і (6) — на формулі Пуассона. Асимптотику Муавра—Лапласа [формули (2) і (3)] рекомендується застосовувати у випадку, коли $npq > 9$. У протилежному випадку більш точні результати дає асимптотика Пуассона [формули (5) і (6)].

Зауваження 1. Наближена формула (3) залишається в силі й у тому випадку, коли нерівності, що входять до неї є строгими.

Зауваження 2. Обчислення за формулами (2), (3), (5), (6) виконуються з використанням таблиць I-IV відповідно (див. додаток).

2.7. Закони розподілу і числові характеристики випадкових величин.

Випадковою величиною ξ називається функція $\boldsymbol{\xi = \xi(\omega)}$, визначена на просторі елементарних подій Ω.

Це означення є точним у випадку дискретного простору елементарних подій Ω. У загальному випадку на функцію $\xi(\omega)$ накладається вимога вимірності.

Функцією розподілу випадкової величини ξ називається функція

$$F(x) = P(\xi < x), \quad -\infty < x < \infty$$

Іншими словами, значення функції розподілу F(x) — випадкової величини ξ— є ймовірність того, що ξ приймає значення, менше, ніж x.

Випадкова величина ξ називається ***дискретною***, якщо існує скінченна або зліченна множина чисел x_1, x_2, ..., x_k, ... (без граничних точок), таких, що

$$P(\xi = x_k) = p_k > 0, \quad n=1, 2, \ldots; \quad \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1 .$$

Сукупність значень x_k і відповідних імовірностей p_k називається ***розподілом*** дискретної випадкової величини.

Приклади дискретних розподілів:

1.***Біноміальний розподіл***

$$P(\xi = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, 0 < p < 1, k = 0,1,2,..., n.$$

2.***Розподіл Пуассона***

$$P(\xi = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \quad a > 0, \quad k = 0,1,2,... \quad .$$

3.***Геометричний розподіл***

$$P(\xi = k) = p(1 - p)^{k-1}, \quad 0 < p < 1, \quad k = 1,2,... \quad .$$

4.***Гіпергеометричний розподіл***

$$P(\xi = k) = C_M^k C_{N-M}^{n-k} / C_N^n, k = 0,1,2,..., \min(M, m).$$

Випадкова величина ξ називається ***неперервною*** випадковою величиною, якщо її функція розподілу може бути представлена у вигляді

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)\, dx , \tag{7}$$

де p(x) — деяка невід'ємна функція.

Підінтегральна функція p (x) у формулі (7) називається ***щільністю розподілу*** випадкової величини ξ, $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = 1$.

Приклади неперервних розподілів

1.***Рівномірний розподіл***

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b], \\ 0, & x \notin [a,b], \end{cases} \quad -\infty < a < b < +\infty$$

2.***Нормальний розподіл (з параметрами (a,σ))***

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/2a^2}, \quad -\infty < a < +\infty, \quad \sigma > 1.$$

3.***Показниковий розподіл***

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0, \lambda > 0. \end{cases}$$

4.Розподіл Коші

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

З формули (7) випливає, що в будь-якій точці неперервності p (x) має місце рівність $p(x) = F'(x)$.

Математичним сподіванням дискретної випадкової, величини ξ називається число

$$M\xi = \sum_k x_k p_k \tag{8}$$

Якщо випадкова величина приймає зліченну множину значень, то є необхідною абсолютна збіжність ряду (8). Якщо ряд не збігається абсолютно, то говорять, що випадкова величина не має математичного сподівання.

Математичним сподіванням неперервної випадкової величини ξ називається число

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)\,dx,$$

якщо інтеграл абсолютно збігається.

Дисперсією **Dξ** випадкової величини ξ називається математичне сподівання випадкової величини $(\xi - M\xi)^2$:

$$\mathbf{D\xi = M(\xi - M\xi)^2}.$$

Для дискретної випадкової величини дисперсія обчислюється за формулою

$$D\xi = \sum_k (x_k - M\xi)^2 p_k,$$

для неперервної — за формулою

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^2 p(x)\,dx.$$

Імовірність того, що випадкова величина ξ приймає значення в заданому числовому проміжку, обчислюється за однією з формул:

$$P(x_1 \le \xi < x_2) = F(x_2) - F(x_1),$$

$$P(x_1 \le \xi < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x)\,dx.$$

Двовимірні випадкові величини

Розподіл двох випадкових величин ξ і η, або двовимірної випадкової величини (ξ, η), не вичерпується розподілом кожної з них, тому що при цьому не враховується залежність, що може існувати між ними.

Функція розподілу $F(x, y)$ ***двовимірної випадкової величини*** (ξ, η) визначається як імовірність спільного виконання нерівностей $\xi < x$ та $\eta < y$.

$$F(x, y) = P(\xi < x, \eta < y).$$

Якщо F (x, y) може бути представлена у вигляді

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} p(x, y)\,dx\,dy,$$

де $p(x, y)$ — деяка невід'ємна функція, то двовимірну випадкову величину (ξ, η) називають ***неперервною***, а функцію $p(x, y)$ — ***щільністю*** розподілу двовимірної випадкової величини (ξ, η).

Щільність розподілу $p_\xi(x)$ випадкової величини ξ виражається через спільну щільність $p(x, y)$ у такий спосіб:

$$p_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)\,dy.$$

Аналогічно для щільності розподілу випадкової величини η маємо

$$p_\eta(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)\,dx .$$

На відміну від сумісної щільності розподілу p(x, y) одномірні щільності $p_\xi(x)$ і $p_\eta(y)$ називають ***маргінальними.***

Випадкові величини ξ і η називаються ***незалежними,*** якщо їхня сумісна функція розподілу $F(x, y)$ при будь-яких значеннях аргументів х, у дорівнює добутку маргінальних функцій розподілу $F_\xi(x)$ випадкової величини ξ і $F_\eta(y)$ випадкової величини η:

$$F(x, y)=F_\xi(x)F_\eta(y).$$

Нехай (ξ, η) — неперервна двовимірна випадкова величина з щільністю розподілу $p(x, y)$. Тоді для незалежності ξ і n необхідно і достатньо, щоб сумісна щільність $p(x, y)$ розпадалася в добуток маргінальних щільностей $p_\xi(x)$ і $p_\eta(y)$:

$$p(x, y)=p_\xi(x)p_\eta(y).$$

Коефіцієнт кореляції

Величина M [(ξ —Mξ) (η— Mη)] називається ***коваріацією*** випадкових величин ξ і η, і позначається cov (ξ , η). Якщо (ξ , η) — неперервна двовимірна випадкова величина з щільністю розподілу $p(x, y)$, то

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M\xi)(y-M\eta)p(x, y)\,dxdy .$$

Величина $r=\operatorname{cov}(\xi,\eta)/\sqrt{D\xi D\eta}$ **називається *коефіцієнтом кореляції* випадкових величин** ξ та η.

Властивості коефіцієнта кореляція

1^0. Модуль коефіцієнта кореляції не перевершує одиниці, |r|≤ 1.

2^0. **Якщо** ξ і η — незалежні випадкові величини r=0.

2^0. Обернене твердження невірне: з умови r=0. (некорельованість випадкових величин ξ і η) не випливає незалежність ξ і n.

3^0. **Якщо** ξ **і η пов'язані лінійною залежністю, то |r|=1.**

Властивості математичного сподівання і дисперсії

1^0. **Математичне сподівання сталої дорівнює цій сталій, тобто Mc=c, c=const.**

2^0. **Математичне сподівання суми випадкових величин дорівнює сумі їхніх математичних сподівань, тобто $M(\xi+\eta)=M\xi+M\eta$ (вважається, що M_ξ і M_η існують).**

3^0. **Математичне сподівання добутку незалежних випадкових величин дорівнює добуткові їхніх математичних сподівань, тобто $M(\xi\eta)=M\xi\cdot M\eta$ (вважається, що M_ξ і M_η існують).**

4^0. **Дисперсія сталої дорівнює нулю, тобто, Dc=0, c=const.**

5^0. **Дисперсія суми незалежних випадкових величин дорівнює сумі їхніх дисперсій, тобто $D(\xi+\eta)=D\xi+D\eta$ (вважається, що $D\xi$ і $D\eta$ існують).**

2.8. Характеристичні функції.

Характеристичною функцією $\varphi(t)$ випадкової величини ξ називається математичне сподівання випадкової величини $e^{it\xi}$,

$$\varphi(t)=Me^{it\xi}, \quad t\in(-\infty;+\infty).$$

Для дискретної випадкової величини і для неперервної відповідно маємо:

$$\varphi(t)=\sum_k e^{itx_k}p_k, \quad \varphi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}p(x)\,dx.$$

Щільність розподілу p(x) випадкової величини ξ виражається через характеристичну функцію **φ(t)** за допомогою оберненого перетворення Фур'є

$$p(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\varphi(t)\,dt.$$

Властивості характеристичних функцій

1^0. Характеристична функція **φ (t)** випадкової величини ξ визначена для будь-якого $t\in(-\infty,+\infty)$, причому $|\varphi(t)|\le 1$, $\varphi(0)=1$.

2^0. При зміні знака аргументу значення характеристичної функції змінюється на комплексно-спряжене $\varphi(-t)=\overline{\varphi(t)}$, $-\infty<t<+\infty$..

3^0. Якщо випадкові величини пов'язані співвідношенням $\xi_2=k\xi_1+b$, то

$$\varphi_{\xi_2}(t)=e^{itb}\varphi_{\xi_1}(kt).$$

4^0. Якщо ξ і η— незалежні випадкові величини, то

$$\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_{\xi}(t)\varphi_{\eta}(t).$$

5^0. Якщо існує Мξ, то $M\xi = \varphi'(0)/i$; взагалі, якщо існує Мξ^k, то $M\xi^k = i^{-k}\varphi^{(k)}(0)$.

6^0. Відповідність між множиною функцій розподілу і множиною характеристичних функцій, що встановлюється формулою $\varphi(t) = Me^{it\xi}$, є взаємно однозначним (теорема єдиності) і неперервним (гранична теорема Леві).

2.9. Закони розподілу функцій випадкових аргументів.

Розглянемо неперервну випадкову величину ξ із щільністю розподілу $p_{\xi}(x)$ і іншу випадкову величину η, пов'язану з нею функціональною залежністю $n=\varphi(\xi)$. Функція розподілу $F_{\eta}(y)$ випадкової величини η виражається через щільність розподілу $P_{\xi}(x)$ випадкового аргументу ξ:

$$F_{\eta}(y) = \sum_{k} \int_{\Delta_k(y)} p_{\xi}(x)dx, \qquad (9)$$

де Δ_k *(y)* — інтервали, у яких виконується нерівність $\varphi(x) < y$. Знаходження суми у формулі (9) поширюється на всі зазначені інтервали. Границі інтервалів Δ_k *(y)* залежать від *у* і при заданому конкретному вигляді функції $y = \varphi(x)$ можуть бути виражені як явні функції *у*.

Щільність розподілу P_n (у) випадкової величини n (якщо вона існує) отримана шляхом диференціювання функції розподілу:

$$p_{\eta}(y) = F_{\eta}'(y). \qquad (10)$$

У найпростішому випадку монотонної функції $\eta = \varphi(x)$ використання формул (9) і (10) приводить до виразу

$$p_{\eta}(y) = p_{\xi}[\psi(y)]|\psi'(y)|,$$

де ψ(у) — функція, обернена до функції у=φ (х).

Розглянемо окремо випадок, коли функція розподілу F_{η} (у) має точки розриву $y_1, y_2, \ldots, y_n$ зі стрибками $p_1, p_2 \ldots, p_n$. Це означає існування значень випадкової величини η (що збігаються з точками розриву $y_1, y_2, \ldots, y_n$), яким відповідають ненульові імовірності $p_1, p_2 \ldots, p_n$. У даному випадку щільність розподілу у точках $y_1, y_2, \ldots, y_n$ перетворюється в неперервність.

Математична ідеалізація зазначеного явища спирається на використання ***дельта-функції*** $\delta(y)$, що не є функцією в звичайному розумінні, а являє собою ***узагальнену функцію***. Будемо розглядати $\delta(y)$ як похідну функції одиничного стрибка

$$F_\eta(y) = \begin{cases} 1, & y > 0, \\ 0, & y \le 0. \end{cases}$$

У класичному аналізі функція $\eta(y)$ не диференційована в точці y=0, однак у теорії узагальнених функцій це обмеження знімається; таким чином,

$$\delta(y) = \eta'(y). \qquad (11)$$

Представимо функцію $F_\eta(y)$ у вигляді

$$F_\eta(y) = \tilde{F}_\eta(y) + \sum_{k=1}^{n} p_k \eta(y - y_k),$$

де $\tilde{F}_\eta(y)$ — безперервна («зімкнута») функція.

Згідно з формулами (10) і (11) отримаємо

$$p_\eta(y) = \tilde{p}_\eta(y) + \sum_{k=1}^{n} p_k \delta(y - y_k), \text{ де } \tilde{p}_\eta(y) = \tilde{F}_\eta(y).$$

Нехай тепер (ξ_1, ξ_2), (η_1, η_2) — двовимірні випадкові величини, причому

$$\eta_1 = f_1(\xi_1, \xi_2), \quad \eta_2 = f_2(\xi_1, \xi_2), \qquad (12)$$

де функції f_1 та f_2 вважаються неперервно диференційованими і відображення (12) — взаємно однозначним, тобто існують функції φ_1 та φ_2, такі, що $\xi_1 = \varphi_1(\eta_1, \eta_2)$, $\xi_2 = \varphi_2(\eta_1, \eta_2)$. Тоді щільність розподілу $p_\eta(y_1, y_2)$ двовимірної випадкової величини (η_1, η_2) виразиться через щільність розподілу $p_\xi(x_1, x_2)$ випадкові величини (ξ_1, ξ_2)

$$p_\eta(y_1, y_2) = p_\xi[\varphi_1(y_1, y_2), \varphi_2(y_1, y_2)]|I|, \quad I = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}.$$

2.10 Числові характеристики функцій випадкових величин.

Нехай випадкова величина $\xi = \varphi(\xi)$ є функція випадкової величини ξ. Якщо потрібно визначити лише числові характеристики випадкової величини η, то немає необхідності знаходити її закон розподілу. Числові характеристики виражаються через закон розподілу випадкового аргументу ξ. Так, якщо ξ має щільність розподілу $p_\xi(x)$, то математичне сподівання Mη і дисперсія Dη рівні відповідно

$$M\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) p_\xi(x)\, dx, \quad D\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi(x) - M\eta]^2 p_\xi(x)\, dx.$$

2.11. **Закон великих чисел**.

Під законом великих чисел розуміють ряд теорем, об'єднаних ідеєю стійкості середніх результатів при великому числі випробувань.

Теорема Чебишева Нехай випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ попарно незалежні і $D\xi_i \leq c$, i=1, 2,..., **де с — деяка стала. Тоді при будь-якому** $\varepsilon > 0$ ***виконується граничне співвідношення***

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M\xi_i\right| < \varepsilon\right\} = 1. \qquad \textbf{(13)}$$

Теорема Маркова. ***Нехай випадкові величини*** $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ ***задовольняють умові*** $\frac{1}{n^2} D\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) \to 0$ при $n \to \infty$ ***. Тоді при будь-якому*** $\varepsilon > 0$ ***виконується граничне співвідношення (13).***

Теорема Бернуллі. ***Нехай т — число успіхів у п незалежних випробуваннях, р — імовірність успіху в кожному випробуванні. Тоді при будь-якому*** $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Доведення цих теорем основане на нерівності Чебишева $P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} \leq D\xi/\varepsilon^2$, що є справедливим при будь-якому $\varepsilon > 0$ для будь-якої випадкової величини ξ,що має скіненне математичне сподівання $M\xi$ і скінченну дисперсію $D\xi$.

2.12. **Центральна гранична теорема для однаково розподілених випадкових доданків**.

Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ незалежні однаково розподілені випадкові величини, що мають математичні сподівання $M\xi_i = a$ і дисперсії $D\xi_i = \sigma^2$. Тоді при $n \to \infty$ функція розподілу нормованої суми $\eta_n = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - a)/\sigma\sqrt{n}$ збігається до функції розподілу нормальної випадкової величини з параметрами (0,1), тобто при будь-якому x

$$P(\eta_n < x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz.$$

Звідси отримаємо наближену формулу

$$P\{x_1 < \eta_n < x_2\} \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

справедлива при досить великих n. Вона виражає імовірність виконання нерівності $x_1 < \eta_n < x_2$ через інтеграл імовірності (4) (див. табл. II у додатку).

2.13. Точкові оцінки параметрів розподілу.

Вибіркою називається n-мірна випадкова величина (X_1, X_2..., X_n,) з незалежними однаково розподіленими компонентами X_i, i=l, 2,..., n. Число n називається ***об'ємом вибірки***.

Будь-яка функція h=h (X_1, X_2, ..., X_n) вибіркових значень називається ***статистикою***.

Нехай α — невідомий параметр розподілу випадкової величини ξ.

Статистика

$$\alpha* = \alpha*(X_1, X_2, ..., X_n) \qquad (14)$$

що використовується в наближеній рівності $\alpha \approx \alpha*$, називається ***оцінкою (точковою оцінкою) невідомого параметра за вибіркою.***

2.14 Класифікація оцінок

Бажано, щоб оцінка (14) не давала систематичного завищення чи заниження результатів, тобто, щоб

$$M\alpha*(X_1, X_2,..., X_n) = \alpha.$$

Оцінка $\alpha*$, що має вказані властивості, називається ***незсуненою***. В протилежному випадку вона називається ***зсуненою.***

Якщо при $n \to \infty$ оцінка $\alpha*$ збігається за ймовірністю до істинного значення параметра α :

$$\alpha*(X_1, X_2, ..., X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha \text{, за ймов.}$$

то оцінка $\alpha*$ називається ***консистентною***

Консистентність означає, що при зростанні об'єму вибірки якість оцінки покращується.

Якщо оцінки α_1* і α_2* задовольняють нерівності $M(\alpha_1* - \alpha)^2 < M(\alpha_2* - \alpha)^2$, то оцінка α_1* називається ***ефективнішою***, ніж α_2*. Якщо оцінка $\alpha*$ ефективніша, ніж будь-яка інша, то вона називається ***ефективною.***

2.13 Методи отримання оцінок

1. ***Метод моментів***. Нехай ξ - неперервна випадкова величина з щільністю $p(x, \alpha)$, що залежить від одновимірного невідомого параметру α, тоді математичне сподівання $M\xi$ є функцією α :

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x,\alpha)dx = \mu_1(\alpha).$$

Вибіркове середнє $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ приймає значення, близьке до $M\xi$. Це дозволяє записати рівняння для визначення невідомого параметру α : $\mu_1(\alpha) = \overline{x}$.

Метод моментів аналогічно використовується для дискретних випадкових величин.

2. Метод максимальної вірогідності. Нехай ξ - дискретна випадкова величина з розподілом $P(\xi = a_i) = p_i(\alpha)$, i=1, 2, ...k, де a_i - можливе значення випадкової величини ξ; $p_i(\alpha)$ - відповідні ймовірності, що залежать від невідомого параметру α, причому $\sum_{i=1}^{k} p_1(\alpha) = 1$ при будь-якому допустимому значенні α. Множина значень α_i випадкової величини ξ може бути не лише скінченною, а й зліченною.

Якщо серед вибіркових значень $(x_1, x_2, \dots x_n)$, що розглядаються, число α_i зустрічається n_i разів (n=1, 2, ...,k), то для ймовірності $L(x_1, x_2, \dots x_n; \alpha)$ отримання даної вибірки маємо вираз

$$L(x_1, x_2, \dots x_n; \alpha) = p_1^{n_1}(\alpha)p_2^{n_2}(\alpha)\dots p_k^{n_k}(\alpha) \tag{15}$$

Функція (15) параметра α називається ***функцією вірогідності***, а величина $\alpha*$, при якій функція $L(x_1, x_2, \dots x_n; \alpha)$ досягає максимуму, - ***оцінкою максимальної вірогідності*** невідомого параметру α .

Для неперервної випадкової величини ξ зі щільністю $p(x, \alpha)$, що залежить від невідомого параметру α, метод максимальної правдоподібності залишається в силі. Відмінність полягає у тому, що тепер функція вірогідності $L(x_1, x_2, \dots x_n; \alpha) = p(x_1, \alpha)p(x_2, \alpha)\dots p(x_n, \alpha)$ виражається не через імовірність отримання даної вибірки, а через щільність розподілу n-мірної випадкової величини $(X_1, X_2, \dots X_a)$, що залежить від параметра α. При цьому α є аргументом, значення $x_1, x_2, \dots, x_n$ вважаються фіксованими.

2.14. Надійні інтервали.

Окрім точкових оцінок використовуються так звані ***надійні інтервали:*** вказується не одна точка $\alpha^*(x_1, x_2, \ldots x_n)$, а інтервал $(\underline{\alpha}, \overline{\alpha})$, якому з заданою ймовірністю належить істинне значення параметра α,

$$P(\underline{\alpha} < \alpha < \overline{\alpha}) = \Re . \qquad (16)$$

Число $\Re$, $0 < \Re < 1$ називається ***надійною ймовірністю*** і характеризує надійність отриманої оцінки: чим ближче $\Re$ до одиниці, тим надійніша оцінка (звичайно вибирають $\Re$ =0,9; 0,95 або 0,99).

Величини $\underline{\alpha}$ і $\overline{\alpha}$ називають ***надіними межами***. Вони є функціями вибіркових значень $\underline{\alpha} = \underline{\alpha}(x_1, x_2, \ldots x_n)$, $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}(x_1, x_2, \ldots x_n)$ і, отже, випадковими величинами.

Інтервал $(\underline{\alpha}, \overline{\alpha})$ з випадковими межами $\underline{\alpha} = \underline{\alpha}(x_1, x_2, \ldots x_n)$, $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}(x_1, x_2, \ldots x_n)$, які при будь-якому допустимому значенні $\overline{\alpha}$ задовольняють співвідношенню (16), називається ***надійним інтервалом*** для невідомого параметра α .

Приклади надійних інтервалів

1. Надійний інтервал для математичного сподівання α нормальної випадкової величини при відомій дисперсії σ^2 має вигляд

$$\overline{X} - u_{\Re} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \alpha < \overline{X} + u_{\Re} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} .$$

Тут $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$, величина $u_{\Re}$ визначається за заданою надійною ймовірністю $\Re$ за допомогою табл.V (див. додаток).

2. Надійний інтервал для математичного сподівання α нормальної випадкової величини при невідомій дисперсії σ^2 має вигляд

$$\overline{X} - t_{\Re} \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}} < \alpha < \overline{X} + t_{\Re} \frac{\sigma^*}{\sqrt{n}} .$$

де оцінка σ^* обчислюється за формулою

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2} , \qquad (17)$$

а величина $t_{\Re}$ обчислюється за заданою надійною ймовірністю $\Re$ та обсягом вибірки n за допомогою табл.(див. додаток).

3. Надійний інтервал для дисперсії σ^2 нормальної випадкової величини має вигляд

$$\frac{(n-1)\sigma^{*2}}{\chi^2_2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\sigma^{*2}}{\chi^2_1},$$

де n – обсяг вибірки; σ^2 - оцінка величини σ, що визначається за формулою (17); χ^2_1 та χ^2_2 - корені рівнянь

$$\int_0^{\chi^2_1} P_{n-1}(x)dx = \frac{1-\Re}{2}, \qquad \int_{\chi^2_2}^{+\infty} P_{n-1}(x)dx = \frac{1-\Re}{2}, \tag{18}$$

в яких підінтегральна функція $P_{n-1}(x)dx$ являє собою щільність розподілу хі-квадрат з n-1 ступенями свободи.

Рівняння (18) при заданій надійній ймовірності $\Re$ обчислюються за допомогою табл. VII (див. додаток). При визначенні χ^2_1 входами цієї таблиці служать $v = n-1$ та $\alpha = \frac{1+\Re}{2}$, при визначенні χ^2_2 – $v = n-1$; $\alpha = \frac{1-\Re}{2}$,

4. Нехай n — число незалежних випробувань, m — число появи події А, p — імовірність появи події А в кожному окремому випробуванні. Розглянемо випадок, коли n досить велике, а значення p не занадто близько до нуля або до одиниці так, що можна скористатися асимптотикою Муавра— Лапласа (див. п. 2.6). При цьому надійний інтервал для p має вигляд $p_1 < p < p_2$, де

$$p_{12} = \frac{n}{n+u^2}\left(p^* + \frac{u_\Re^2}{2n} \mp \sqrt{\frac{p^*(1-p^*)}{n} + \left(\frac{u_\Re}{2n}\right)^2}\right), \quad p^* = \frac{m}{n},$$

$u_\Re$ — визначається за заданою надійною ймовірностю $\Re$ за допомогою табл. V (див. додаток).

Розглянемо окремо випадок m =0. При цьому нижня надійна межа дорівнює нулю, верхня $1-\sqrt[n]{1-\Re}$. Аналогічно, при m=n нижня і верхня надійні межі рівні відповідно $\sqrt[n]{1-\Re}$ і одиниці.

2.15. Статистична перевірка гіпотез.

Випадкова величина X, що служить для статистичної перевірки гіпотези, називається **критерієм**. Іноді терміном ***критерій*** позначають не тільки випадкову величину X, але і все правило перевірки в цілому. При цьому X називають ***статистикою критерію.***

Перевірка гіпотези полягає в тому, що якщо значення критерію, що вивчається, належить деякій визначеній множині S, тобто настає подія $\vec{x} \in S$, то основна гіпотеза H_0 відкидається.

Множина S, така, що при появі події $\vec{x} \in S$ основна гіпотеза H_0 відкидається, називається ***критичною множиною*** (для гіпотези H_0)

Подія $\vec{x} \in S$, що полягає в тому, що основна гіпотеза H_0 відкидається, коли вона є істинною, називається ***помилкою першого роду.*** Подія $\vec{x} \notin S$, що полягає в тому, що основна гіпотеза H_0 не відкидається, коли вірна одна з альтернативних гіпотез H_λ, називається ***помилкою другого роду***.

Імовірності P_I і P_{II} помилок першого і другого роду обчислюються в припущеннях про справедливість різних гіпотез — основної H_0 альтернативної H_λ відповідно:

$$P_I = P_{H_0}\{\vec{x} \in S\}, \quad P_{II} = P_{H_\lambda}\{\vec{x} \notin S\}.$$

Імовірність помилки другого роду, а також імовірність

$$P_{H_\lambda}\{\vec{x} \in S\} = 1 - P_{H_\lambda}\{\vec{x} \notin S\} \qquad (19)$$

протилежної події пов'язані з конкретною альтернативною гіпотезою H_λ, тобто можуть залежати від деякого параметра λ.

Функція (19) параметра λ, рівна ймовірності відкинути гіпотезу H_0, якщо гіпотеза H_λ є вірною, називається ***функцією потужності критерію.***

Правило статистичної перевірки гіпотези

1.Задаються малим числом $\alpha > 0$, що називають ***рівнем значущості критерію***; звичайно α =0,05; 0,01 або 0,001. Чим більш небезпечними визнаються помилки першого роду, тим менше значення α повинне бути обране.

2.Визначають критичну множину S з умови виконання нерівності

$$P_I = P_{H_0}\{\vec{x} \in S\} = \alpha. \qquad (20)$$

3.Умовою (20) критична множина визначається неоднозначно. Вибирають ту з можливостей, що забезпечує мінімум імовірності помилки другого роду, або, що те ж саме, максимум потужності критерію.

4.Проводять випробування і отримують значення критерію, що розглядається. Якщо при цьому настає подія $\vec{x} \in S$, то основна гіпотеза H_0 відкидається. У протилежному випадку вважається, що H_0 не суперечить дослідним даним. Результат перевірки гіпотези виражається словами: гіпотеза H_0 відкидається (не відкидається) на рівні значимості α.

2.16. Критерій згоди χ^2.

Критерії, що використовуються для перевірки гіпотези про закон розподілу випадкової величини, називаються ***критеріями згоди*** **.** Нехай основна гіпотеза H_0 полягає в тому, що функція розподілу випадкової величини ξ є цілком визначена функція $F(x)$.

Розіб'ємо числову вісь на r проміжків(розрядів)

$$(-\infty = a_0, a_1), [a_1, a_2), \ldots, [a_{r-1}, a_r = +\infty),$$

де $a_1 < a_2 < \ldots < a_{r-1}$. При справедливій гіпотезі H_0 i-му розряду $[a_{i-1}, a_i)$ відповідає імовірність

$$p_i = F(a_i) - F(a_{i-1}), \quad i = 1,2,\ldots r.$$

З n вибіркових значень $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ випадкової величини ξ у i-й розряд $[a_{i-1}, a_i)$ попадає випадкове число m_i значень $\left(\sum_{i=1}^{r} m_i = n\right)$ Тоді відношення

m_i / n

являє собою частоту попадання вибіркових значень у i-й розряд. Близькість частот m_i / n до імовірностей p_i свідчить на користь основної гіпотези H_0, помітні розходження відкидають гіпотезу H_0. Випадкова величина

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{n}{p_i}\left(\frac{m_i}{n} - p_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i} \qquad (21)$$

характеризує погодженість гіпотези H_0 з дослідними даними. Критерій χ^2 застосовується відповідно до загального правила статистичної перевірки гіпотез. При цьому значення критерію, що розглядається, обчислюється за формулою (21), критична множина вибирається у вигляді напівнеперервного інтервалу $(\chi^2_\alpha, +\infty)$, де величина χ^2_α, знаходиться за допомогою табл. VII (див. додаток). Входами таблиці служать величина $\nu = n - 1$ і рівень значимості α .

Якщо виконується співвідношення $\chi^2 > \chi^2_\alpha$, то говорять, що гіпотеза H_0 відкидається на рівні значимості α. У протилежному випадку вона не суперечить дослідним даним.

Зауваження 1. Число вибіркових значень $m_i, i = 1,2,\ldots,r$ у кожному розряді повинне бути не менше 5—10. Якщо ця умова не виконується, рекомендується поєднувати розряди.

Зауваження 2. Критерій згоди χ^2 застосуємо не тільки у випадку, коли гіпотетична функція розподілу $F(x)$ випадкової величини ξ цілком визначена. Якщо вона залежить від l невідомих параметрів, тобто має вигляд $F(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_l)$, і параметри $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ оцінюються по вибірці методом максимальної правдоподібності (див. П. 2.13), то критерій згоди залишається в силі, тільки входом в табл. VII служить величина $\nu = n - l - 1$.

6. Індивідуальні завдання

Суттєвим елементом самостійної роботи студентив при вивченні курсу “Теорія ймовірностей” є виконання ними розрахунково-графічної роботи. Вона містить задачі, які охоплюють всі розділи курсу. Доцільно виконувати їх безпосередньо після вивчення відповідної теми.

При цьому кожне завдання розрахунково-графічної роботи виконується на окремому аркуші стандартного формату із наведеною його умовою. Титульний аркуш оформляється згідно додатку 1.

Задача 1. Підкидають два гральних кубика. Визначити ймовірність того, що:

а) сума кількостей очок не перевищує N;

б) добуток кількостей очок не перевищує N;

в) добуток кількостей очок ділиться на N. (Див. вихідні дані.)

Задача 2. Є вироби чотирьох гатунків, кількість виробів i-го гатунку дорівнює n_i, $i = 1,2,3,4$. Для контролю навмання беруть m виробів. Визначити ймовірність того, що серед них m_1 першого гатунку, m_2, m_3 та m_4 другого, третього та четвертого гатунку відповідно $\left(\sum_{i=1}^{4} m_i = m\right)$. (Див. вихідні дані).

Задача 3. Серед n лотерейних квитків k виграшних. Навмання взяли m квитків. Визначити ймовірність того, що серед них l виграшних. (Див. вихідні дані.)

Задача 4. На відрізку одиничної довжини навмання з'являється точка. Визначити ймовірність того, що відстань від точки до кінців відрізка перевищує величину $1/k$. (Див. п. 2.3 та вихідні дані.)

Задача 5. Моменти початку двох подій випадково розподілені на проміжку часу від T_1 до T_2. Одна з подій триває 10 хв., інша – t хв. Визначити ймовірність того, що: а) події перетинаються в часі; б) не перетинаються. (Див. вихідні дані.)

Задача 6. Всередині круга радіуса R випадково з'являється точка. Визначити ймовірність того, що вона потрапляє в одну з двох фігур, що не перетинаються і площі яких дорівнюють S_1 та S_2. (Див. вихідні дані.)

Задача 7. В двох партіях k_1 та k_2% якісних товарів відповідно. Навмання обирають по одному виробу з кожної партії. Яка ймовірність виявити серед них: а) хоча б один неякісний; б) два неякісних; в) один якісний і один неякісний? (Див. вихідні дані.)

Задача 8. Ймовірність того, що в ціль влучено з одного пострілу першим стрільцем, дорівнює p_1, а другим – p_2. Перший зробив n_1, другий – n_2 пострілів. Визначити ймовірність того, що в ціль не було влучено жодного разу. (Див. вихідні дані.)

Задача 9. З *1000* ламп n_i належить до i-ї партії, $i=1,2,3$, $\sum_{i=1}^{3} n_i = 1000$. У першій партії 6%, в другій 5%, в третій 4% бракованих ламп. Навмання обирають одну лампу. Визначити ймовірність того, що обрана лампа – бракована. (Див. вихідні дані.)

Задача 10. В магазин надходять вироби одного типу з трьох заводів, причому i-й завод постачає m_i% виробів ($i=1,2,3$). Серед виробів i-го заводу n_i% першого гатунку. Один виріб було куплено. Виявилося, що він першого гатунку. Визначити ймовірність того, що куплений виріб випущено j-м заводом. (Див. вихідні дані.)

Задача 11. **І**мовірність виграшу в лотерею на один квиток дорівнює p. Куплено n квитків. Знайти найімовірніше число виграшних квитків та відповідну ймовірність. (Див. вихідні дані.)

Задача 12. На кожен лотерейний квиток з імовірністю p_1 може випасти великий виграш, з імовірністю p_2 – малий виграш та з ймовірністю p_3 квиток може виявитися без виграшу, $\sum_{i=1}^{3} p_i = 1$. Куплено n квитків. Визначити ймовірність отримання n_1 великих виграшів та n_2 малих. (Див. вихідні дані.)

Задача 13. **І**мовірність помилки в роботі телефонної станції при кожному виклику дорівнює p. Надійшло n викликів. Визначити наближено ймовірність m помилок. Оцінити похібку (Див. вихідні дані.)

Задача 14. **І**мовірність деякої події в кожному з n незалежних випробувань дорівнює p. Визначити ймовірність того, що число m настання події задовольняє наступну нерівність.

Варіанти 1-11: $k_1 \le m \le k_2$.

Варіанти 12-21: $k_1 \le m$.

Варіанти 22-31: $m \le k_2$.

(Див. вихідні дані.)

Задача 15. Дано густину розподілу *p(x)* випадкової величини ξ. Знайти параметр γ, математичне сподівання $M\xi$, дисперсію $D\xi$, функцію розподілу випадкової величини ξ, імовірність виконання нерівності $x_1 < \xi < x_2$. (Див. вихідні дані.)

Варіанти 1-8: $p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\gamma - a}, & x \in (a, b), \\ 0, & x \notin (a, b). \end{cases}$

Варіанти 9-16: $p(x) = \begin{cases} a, & x \in (\gamma, b), \\ 0, & x \notin (\gamma, b). \end{cases}$

Варіанти 17-24: $p(x) = \begin{cases} \gamma, & x \in (a, b), \\ 0, & x \notin (a, b). \end{cases}$

Варіанти 25-31: $p(x) = \begin{cases} a, & x \in \left[\dfrac{b-\gamma}{2}, \dfrac{b+\gamma}{2}\right], \\ 0, & x \notin \left[\dfrac{b-\gamma}{2}, \dfrac{b+\gamma}{2}\right]. \end{cases}$

Задача 16. Густина розподілу ймовірностей випадкової величини ξ має вигляд $p(x) = \gamma e^{ax^2+bx+c}$. Знайти: параметр γ, математичне сподівання $M\xi$, дисперсію $D\xi$, функцію розподілу випадкової величини ξ, імовірність виконання нерівності $x_1 < \xi < x_2$. (Див. вихідні дані.)

Задача 17. За даним законом розподілу випадкової величини знайти характеристичну функцію $\varphi(t)$, математичне сподівання $M\xi$, дисперсію $D\xi$ випадкової величини ξ. (Див. вихідні дані.)

Варіанти 1-10. Біноміальний закон:

$$P(\xi = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad 0 < p < 1, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Варіанти 11-20. Закон Паскаля:

$$P(\xi = k) = \frac{a^k}{(1+a)^{k+1}}, \quad a > 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Варіанти 21-31. Закон Пуассона:

$$P(\xi = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \quad a > 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Задача 18. Дано густину розподілу $p_\xi(x)$ випадкової величини ξ. Знайти густину розподілу $p_\eta(y)$, математичне сподівання $M\eta$ та дисперсію $D\eta$ випадкової величини η, яка являє собою площу однієї з вказаних нижче геометричних фігур.

Варіанти 1-15:

$$p_\xi(x)=\begin{cases}1/(b-a), & x\in[a,b],\\ 0, & x\notin[a,b];\end{cases}$$

в варіантах 1-5 η – площа рівнобічного трикутника зі стороною ξ, в варіантах 6-10 η – площа круга радіуса ξ, в варіантах 11-15 η – площа квадрата зі стороною ξ.

Варіанти 16-31:

$$p_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{2(x-a)}{(b-a)^2}, & x\in[a,b],\\ 0, & x\notin[a,b];\end{cases}$$

в варіантах 16-20 η – площа рівнобічного трикутника зі стороною ξ, в варіантах 21-25 η – площа круга радіуса ξ, в варіантах 26-31 η – площа квадрата зі стороною ξ.

(Див. вихідні дані.)

Задача 19. Випадкова величина ξ має густину розподілу $p_\xi(x)$, вказану в **задачі 18**. Інша випадкова величина η пов'язана з ξ функціональною залежністю $\eta=2\xi^m+1$. Визначити математичне сподівання $M\eta$ та дисперсію $D\eta$ випадкової величини η. (Див. вихідні дані.)

Задача 20. Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити ймовірність того, що випадкова величина ξ відхилиться від свого математичного сподівання $M\xi$ менш, ніж на $N\sigma$, де $\sigma=\sqrt{D\xi}$ - середнє квадратичне відхилення випадкової величини ξ; N - номер варіанта.

Задача 21. Випадкова величина ξ має нормальний розподіл з невідомим математичним сподіванням *a* та відомою дисперсією σ^2. За вибіркою $x_1,x_2,\ldots,x_n$ об'єму *n* обчислено вибіркове середнє $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=a^*$. Визначити інтервал довіри для невідомого параметра розподілу *a* відповідно до заданої довірчої ймовірності P. (Див. вихідні дані.)

Задача 22. Випадкова величина ξ має нормальний розподіл з невідомими математичним сподіванням *a* та дисперсією σ^2. За вибіркою $x_1,x_2,\ldots,x_n$ об'єму *n* обчислено оцінки $a^*=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ та

$$(\sigma^2)^*=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-a^*)^2 \qquad (22)$$

невідомих параметрів. Знайти довірчий інтервал для математичного сподівання *a*, що відповідатиме довірчій імовірності P. (Див. вихідні дані)

Задача 23. В результаті *n* експериментів було отримано незміщену оцінку (22) для дисперсії нормальної випадкової величини. Знайти довірчий інтервал для дисперсії при довірчій імовірності P. (Див. вихідні дані.)

Задача 24. В серії з n пострілів по цілі було m влучень. Знайти довірчий інтервал для ймовірності p влучення в ціль при довірчій ймовірності $P = 0,95$. (Див. вихідні дані.)

ВИХІДНІ ДАНІ

(В першому горизонтальному рядку вказано номер задачі, в лівому стовбчику – номер варіанту)

№	1	2								3				4
	N	n_1	n_2	n_3	n_4	m_1	m_2	m_3	m_4	n	L	m	k	k
1	3	1	2	3	4	1	1	2	3	10	2	4	6	4
2	4	2	2	4	2	1	1	1	2	10	2	3	6	5
3	5	2	3	4	1	1	2	3	1	10	3	5	7	6
4	6	1	4	2	3	1	2	1	2	10	3	5	6	5
5	7	4	2	2	2	3	1	2	1	11	2	5	7	6
6	8	3	2	3	2	2	1	3	1	11	3	4	8	7
7	9	5	1	2	2	3	1	1	1	11	3	5	7	6
8	10	2	5	2	1	1	3	1	1	12	3	8	5	7
9	3	4	2	3	2	2	1	2	1	12	2	8	3	8
10	4	3	3	4	1	2	1	2	1	12	2	5	4	7
11	5	2	3	3	3	1	2	3	1	9	2	4	6	8
12	6	1	3	4	3	1	2	2	1	9	3	5	6	5
13	7	2	3	4	2	1	2	3	1	9	2	3	7	6
14	8	1	2	3	5	1	1	2	3	8	2	4	5	7
15	9	2	3	4	2	1	2	2	1	8	2	5	4	8
16	10	3	2	2	4	2	1	1	1	8	3	4	5	9
17	11	4	3	2	3	2	1	2	1	10	4	6	5	8
18	12	3	3	4	2	2	1	2	2	10	5	7	7	7

19	13	2	4	5	1	2	2	3	1	10	4	6	7	6
20	14	3	4	3	2	2	2	3	2	12	4	8	6	5
21	15	2	5	2	3	1	3	1	2	8	2	3	4	4
22	16	4	4	2	2	2	2	2	1	8	2	3	5	4
23	17	2	7	2	1	1	5	2	1	8	2	4	3	5
24	18	3	1	6	2	2	1	3	1	8	3	5	4	6
25	19	2	2	2	3	1	1	1	2	8	1	4	2	7
26	20	1	3	3	2	1	3	1	1	9	2	3	5	8
27	3	1	4	2	2	0	2	1	1	9	3	4	4	9
28	4	2	3	1	3	1	2	0	1	9	2	6	3	10
29	5	3	1	2	3	0	1	1	2	9	4	5	5	9
30	6	3	2	3	1	2	2	2	0	9	3	5	4	8
31	8	2	3	1	3	2	1	0	2	9	2	3	6	7

№	5			6			7		8			
	T_1*	T_2*	t	R	S_1	S_2	k_1	k_2	P_1	p_2	n_1	n_2
1	9.00	10.00	10	11	2.25	3.52	71	47	0.61	0.55	2	3
2	9.00	11.00	20	12	2.37	3.52	78	39	0.62	0.54	3	2
3	10.00	11.00	10	13	2.49	3.52	87	31	0.63	0.53	2	3
4	10.00	12.00	20	14	2.55	1.57	72	46	0.64	0.52	3	2
5	11.00	12.00	15	11	2.27	5.57	79	38	0.65	0.51	2	3
6	11.00	13.00	15	12	2.39	5.57	86	32	0.66	0.49	3	2
7	9.00	9.30	10	13	2.51	1.57	73	45	0.67	0.48	2	3
8	9.00	11.30	20	14	2.57	3.52	81	37	0.68	0.47	3	2
9	10.00	10.30	15	11	2.29	3.52	85	33	0.69	0.46	2	3
10	10.00	11.30	15	12	2.41	3.52	74	44	0.71	0.45	3	2
11	11.00	11.30	5	13	2.53	3.52	82	36	0.72	0.44	2	3
12	11.00	12.30	5	14	2.59	5.57	84	34	0.73	0.43	3	2
13	12.00	13.00	5	15	2.5	8.7	75	43	0.74	0.42	2	3
14	12.00	12.30	10	16	2.6	8.5	83	35	0.75	0.41	3	2
15	12.00	13.30	5	11	2.2	3.5	76	42	0.76	0.39	2	3
16	13.00	14.00	10	12	2.4	3.5	77	41	0.77	0.38	3	2
17	18.00	19.00	10	13	2.5	3.5	47	71	0.78	0.37	2	3
18	18.00	20.00	20	14	2.6	1.8	39	78	0.39	0.45	3	2
19	17.00	18.00	10	15	2.7	7.9	31	87	0.38	0.46	2	3
20	17.00	19.00	20	16	2.7	8.2	72	46	0.37	0.47	3	2
21	19.00	20.00	15	11	2.3	3.5	38	79	0.36	0.48	2	3
22	19.00	21.00	15	12	2.4	3.5	32	86	0.35	0.49	3	2
23	17.00	17.30	10	13	2.5	3.5	73	45	0.34	0.51	2	3
24	17.00	18.30	20	14	2.6	5.6	81	37	0.33	0.52	3	2
25	16.00	16.30	15	15	2.5	8.7	33	85	0.32	0.53	2	3
26	16.00	17.30	15	11	2.3	5.6	44	74	0.31	0.54	3	2
27	17.00	17.30	5	12	2.4	5.6	36	82	0.29	0.55	2	3
28	17.00	18.30	5	13	2.5	3.5	84	34	0.28	0.56	3	2
29	16.00	17.00	5	14	2.6	5.6	75	43	0.27	0.57	2	3
30	16.00	16.30	10	15	2.7	7.9	83	35	0.26	0.58	3	2
31	16.00	17.30	5	12	2.25	3.52	76	42	0.25	0.59	2	3

* Тут дві останні цифри позначають хвилини.

№	9		10								11	
	n_1	n_2	n	m_1	m_2	m_3	n_1	n_2	n_3	j	p	n
1	100	250	2	50	30	20	70	80	90	1	0,3	10
2	430	180	3	50	30	20	70	80	90	2	0,3	14
3	170	540	1	50	30	20	70	80	90	3	0,3	13
4	520	390	2	60	20	20	70	80	90	1	0,3	12
5	360	600	4	60	20	20	70	80	90	2	0,3	11
6	700	90	5	60	20	20	70	80	90	3	0,3	15
7	240	610	4	40	30	30	80	80	90	1	0,4	11
8	80	710	3	40	30	30	80	80	90	2	0,4	13
9	630	230	1	40	30	30	80	80	90	3	0,4	14
10	500	320	4	40	20	40	90	90	80	1	0,4	10
11	810	70	2	40	20	40	90	90	80	2	0,4	12
12	450	280	3	40	20	40	90	90	80	3	0,4	15
13	270	640	2	70	20	10	70	80	90	1	0,5	12
14	380	470	3	70	20	10	70	80	90	2	0,4	12
15	640	80	2	70	20	10	70	80	90	3	0,5	11
16	160	570	3	60	10	30	80	90	80	1	0,5	13
17	590	200	5	60	10	30	80	90	80	2	0,5	14
18	620	190	2	60	10	30	80	90	80	3	0,5	15
19	730	100	3	50	20	30	90	80	90	1	0,6	13
20	540	200	3	50	20	30	90	80	90	2	0,6	11
21	90	690	2	50	20	30	90	80	90	3	0,6	12
22	220	550	5	30	30	40	70	70	80	1	0,6	10
23	290	700	2	30	30	40	70	70	80	2	0,6	15
24	350	440	4	30	30	40	70	70	80	3	0,6	14
25	470	360	3	20	40	40	90	70	80	1	0,7	14
26	680	230	5	20	40	40	90	70	80	2	0,7	10
27	710	160	3	20	40	40	90	70	80	3	0,7	15
28	180	270	4	10	50	40	70	90	80	1	0,7	11
29	260	620	2	10	50	40	70	90	80	2	0,7	12
30	650	140	2	10	50	40	70	90	80	3	0,7	13
31	230	480	3	20	30	50	70	70	90	1	0,3	13

№	12					13			14			
	N	n_1	n_2	p_1	p_2	m	n	p	n	p	k_1	k_2
1	15	1	2	0,1	0,2	7	1000	0,002	100	0,8	80	90
2	15	2	1	0,15	0,15	7	1000	0,003	100	0,8	85	95
3	15	2	2	0,15	0,15	7	1000	0,004	100	0,8	70	95
4	15	1	1	0,1	0,15	7	1000	0,005	100	0,7	83	93
5	15	3	2	0,2	0,25	7	1000	0,006	100	0,7	50	60
6	15	2	2	0,15	0,2	7	1000	0,007	100	0,7	65	75
7	15	3	1	0,2	0,15	7	1000	0,008	100	0,7	70	80
8	15	1	2	0,13	0,17	7	1000	0,009	100	0,6	40	50
9	15	2	1	0,14	0,16	7	1000	0,01	100	0,75	65	80
10	15	1	3	0,16	0,24	7	1000	0,011	100	0,75	70	85
11	15	3	2	0,17	0,23	8	200	0,01	100	0,75	68	78
12	15	3	1	0,18	0,12	8	300	0,01	100	0,7	60	--
13	15	3	1	0,19	0,11	8	200	0,02	100	0,7	70	--
14	15	3	3	0,2	0,26	8	500	0,01	100	0,7	80	--
15	14	1	3	0,09	0,21	8	300	0,02	100	0,6	65	--
16	14	1	4	0,1	0,21	8	700	0,01	100	0,6	75	--
17	14	2	2	0,11	0,2	8	400	0,02	100	0,6	50	--
18	14	2	4	0,12	0,2	8	900	0,01	100	0,8	70	--
19	14	3	3	0,15	0,2	8	500	0,02	100	0,8	80	--
20	14	2	3	0,2	0,2	8	1000	0,011	100	0,8	90	--
21	14	3	4	0,3	0,2	9	500	0,004	100	0,8	95	--
22	14	2	3	0,1	0,2	9	600	0,005	100	0,3	--	20
23	14	3	4	0,2	0,25	9	400	0,01	100	0,3	--	30
24	14	5	4	0,25	0,35	9	500	0,01	100	0,3	--	40
25	14	4	4	0,21	0,39	9	600	0,01	200	0,4	--	80
26	14	4	3	0,1	0,3	9	1000	0,007	200	0,4	--	90
27	14	2	2	0,25	0,35	9	1000	0,008	200	0,4	--	100
28	14	1	2	0,1	0,15	9	1000	0,009	300	0,8	--	250
29	14	1	1	0,05	0,15	9	1000	0,01	400	0,6	--	270
30	14	1	2	0,1	0,1	9	1000	0,011	400	0,7	--	290
31	14	2	2	0,05	0,05	9	1000	0,012	400	0,8	--	300

№	15				16					17		
	A	*b*	x_1	x_2	*a*	*b*	*c*	x_1	x_2	*n*	*p*	*a*
1	2,5	4	3	3,3	-2	8	-2	1	3	5	0,37	--
2	1,5	3	2	2,6	-2	4/3	-2/3	1/3	2/3	14	0,28	--
3	1,5	2,5	2	2,3	-2	-8	2	-3/2	-1	6	0,53	--
4	1	3,5	2	2,8	-4	6	2	0	3/4	9	0,46	--
5	-1	2	-0,7	1,1	-3	3	-2	1/2	3/2	7	0,18	--
6	-2	1	-1,5	0,3	-4	-6	-2	-3/4	1/4	3	0,67	--
7	-3	5	-2	2	-3	-3	2	-1/2	3/2	8	0,32	--
8	-1,5	2,5	-1	0	-3	-4	2	1/3	4/3	10	0,87	--
9	1	1,8	1,3	1,6	-2	-4/3	2/3	-1/3	2/3	4	0,25	--
10	1	2,4	1,5	2	-3	4	-2	-1/3	5/3	12	0,41	--
11	2	3,5	2,5	3	-2	8	0	1	3	--	--	0,68
12	2	2,8	2,1	2,5	-2	4/3	0	1/3	2/3	--	--	0,35
13	1	2,8	-1	3	-2	-8	0	-3/2	-1	--	--	0,21
14	1	2,6	1,5	3	-4	6	0	0	3/4	--	--	0,89
15	2	3	1	3	-3	3	0	1/2	3/2	--	--	0,72
16	2	4,8	4,5	5	-4	-6	0	-3/4	1/4	--	--	0,43
17	-4	-2	-1	0	-3	-3	0	-1/2	3/2	--	--	0,17
18	-3	-1	-2	0	-3	-4	0	1/3	4/3	--	--	0,95
19	2	4	0	3	-2	-4/3	0	-1/3	2/3	--	--	0,38
20	1	3	0	2	-3	4	0	-1/3	5/3	--	--	0,63
21	1	1,5	0	0,5	-2	8	-1	1	3	--	--	0,026
22	-1	1,5	0	1	-4	6	1	0	3/4	--	--	0,38
23	-1,5	-1	-1	2	-2	-8	1	-3/2	-1	--	--	0,033
24	-1,5	1	-1	1	-4	-6	-1	-3/4	1/4	--	--	0,218
25	0,5	1	0	3	-3	3	-1	1/2	3/2	--	--	0,65
26	0,2	2	0	4	-3	-4	1	1/3	4/3	--	--	0,816
27	0,5	3	0	0,5	-3	-3	1	-1/2	3/2	--	--	0,74
28	0,4	4	1	5	-3	4	-1	-1/3	5/3	--	--	0,015
29	1/4	1	0	3	-2	-4/3	1/3	-1/3	2/3	--	--	0,671
30	0,02	2	0	3	-2	4/3	-1/3	1/3	2/3	--	--	0,324
31	0,05	4	0	10	-1	2	3	-1/3	4/3	--	--	0,57

№	18, 19			21				22				23			24	
	a	*B*	*m*	*a**	n	σ^2	P	*a**	σ^2*	n	P	n	σ^2*	P	n	m
1	0	2	4	110	150	100	0,95	2,1	0,5	31	0,8	14	45	0,98	30	10
2	1	2	3	110	130	100	0,94	2,1	0,5	28	0,9	15	1,5	0,98	30	11
3	2	3	2	110	110	100	0,93	2,1	0,5	26	0,95	10	18	0,8	30	12
4	2	4	5	110	90	100	0,92	2,1	0,5	24	0,98	9	0,2	0,98	30	13
5	3	5	4	120	150	144	0,95	1,7	0,8	31	0,8	12	25	0,96	30	14
6	0	2	3	120	130	144	0,94	1,7	0,8	28	0,9	17	16	0,96	30	15
7	1	3	2	120	110	144	0,93	1,7	0,8	26	0,95	12	42	0,8	30	16
8	2	4	3	120	90	144	0,92	1,7	0,8	24	0,98	13	10	0,96	30	17
9	3	5	4	110	150	100	0,94	2,1	0,5	31	0,9	25	50	0,8	30	18
10	4	6	2	110	130	100	0,93	2,1	0,5	28	0,95	12	8	0,9	30	19
11	0	2	5	110	110	100	0,92	2,1	0,5	26	0,98	10	14	0,98	31	8
12	1	2	4	110	90	100	0,95	2,1	0,5	24	0,8	22	30	0,9	32	8
13	2	3	3	120	150	144	0,94	1,7	0,8	31	0,9	23	8	0,8	33	8
14	2	4	5	120	130	144	0,93	1,7	0,8	28	0,95	7	15	0,96	34	8
15	3	5	4	120	110	144	0,92	1,7	0,8	26	0,98	11	12	0,98	35	8
16	0	2	4	120	90	144	0,95	1,7	0,8	24	0,8	11	56	0,8	36	8
17	1	3	3	110	150	100	0,93	2,1	0,5	31	0,95	14	14	0,8	37	8
18	2	4	2	110	130	100	0,92	2,1	0,5	28	0,98	21	20	0,96	38	8
19	3	5	4	110	110	100	0,95	2,1	0,5	26	0,8	8	3,5	0,98	39	8
20	4	6	3	110	90	100	0,94	2,1	0,5	24	0,9	27	5	0,96	40	8
21	0	2	4	120	150	144	0,93	1,7	0,8	31	0,95	19	40	0,9	31	14
22	1	2	5	120	130	144	0,92	1,7	0,8	28	0,98	20	36	0,9	32	15
23	3	4	6	120	110	144	0,95	1,7	0,8	26	0,8	17	24	0,96	33	16
24	2	4	5	120	90	144	0,94	1,7	0,8	24	0,9	26	32	0,9	34	17
25	3	5	4	110	150	100	0,92	2,1	0,5	31	0,98	24	31	0,98	35	18
26	3	4	3	110	130	100	0,95	2,1	0,5	28	0,8	9	36	0,96	36	19
27	0	2	4	110	110	100	0,94	2,1	0,5	26	0,9	16	4	0,8	37	20
28	1	3	5	110	90	100	0,93	2,1	0,5	24	0,95	15	54	0,8	38	21
29	2	4	4	120	150	144	0,92	1,7	0,8	31	0,98	14	32	0,9	39	22
30	3	5	3	120	130	144	0,95	1,7	0,8	28	0,8	18	48	0,96	40	23
31	4	6	2	120	110	144	0,94	1,7	0,8	26	0,9	16	64	0,98	41	24

7. Приклади розв’язання завдань.

Задача 1. Кидають два гральних кубики. Визначити ймовірність того:
сума кількості очок не первищує N;
добуток кількості очок не первищує N;
добуток кількості очок ділиться на N.

Нехай $N=3$

Розв’язання.

Простір елементарних подій

$\Omega = \{(i, j), i = \overline{1,6}, j = \overline{1,6}\}.$

Очевидно, що $N(\Omega) = 36$.

а) Розглянемо подію A:

$A = \{(i, j) : i + j \le 3\} = \{(1,1); (1,2); (2,1)\} \Rightarrow N(A) = 3.$

За означенням класичної ймовірності:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

b) Розглянемо подію B:

$B = \{(i, j) : i \cdot j \le 3\} = \{(1,1); (1,2); (2,1); (3,1); (1,3)\} \Rightarrow N(C) = 5.$

За означенням класичної ймовірності:

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{5}{36}.$$

c) Розглянемо подію C:

$C = \{(i, j) : 3 \mid i \cdot j\} = \{(1,3); (1,6); (2,3); (2,6); (3,1); (3,2); (3,3); (3,4); (3,5); (3,6);$
$(4,3); (4,6); (5,3); (5,6); (6,1); (6,2); (6,3); (6,4); (6,5); (6,6)\} \Rightarrow N(C) = 20.$

За означенням класичної ймовірності:

$$P(C) = \frac{N(C)}{N(\Omega)} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}.$$

Відповідь а) 1/12 ; b) 5/36 ; c) 5/9 .

Задача 2. Є вироби чотирьох гатунків, кількість виробів i-го гатунку дорівнює n_i, i=1,2,3,4. Для контролю навмання беруть m виробів. Визначити ймовірність того, що серед них m_1 першого гатунку, m_2, m_3 та m_4 другого, третього та четвертого гатунку відповідно $(\sum_{i=1}^{4} m_i = m)$.

Нехай $n_1 = 1, n_2 = 2, n_3 = 3, n_4 = 4, m_1 = 1, m_2 = 1, m_3 = 2, m_4 = 3$.

Розв’язання.

Елементами простору елементарних подій є всі можливі комбінації виробів 1-го, 2-го, 3-го та 4-го гатунків. Розмірність цього простору: $N(\Omega)=C_n^m$, де $n=\sum_{i=1}^{n} n_i = 10$, m=7.

Подія A={вибрали m_1 виробів першого гатунку, m_2, m_3 та m_4 другого, третього та четвертого гатунку відповідно }

Вибрати m_1 виробів 1-го гатунку можливо $C_{n_1}^{m_1}$ способами. Аналогічно для решти виробів.

За основним правилом комбінаторики:

$$N(A)=C_{n_1}^{m_1}\cdot C_{n_2}^{m_2}\cdot C_{n_3}^{m_3}\cdot C_{n_4}^{m_4}$$

За означенням класичної ймовірності:

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{C_{n_1}^{m_1}\cdot C_{n_2}^{m_2}\cdot C_{n_3}^{m_3}\cdot C_{m_4}^{n_4}}{C_n^m}=\frac{C_1^1\cdot C_2^1\cdot C_3^2\cdot C_4^3}{C_{10}^7}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{10\cdot 9\cdot 8/(1\cdot 2\cdot 3)}=\frac{1}{5}.$$

<u>*Відповідь*</u> 1/5.

<u>Зауваження</u>: така імовірносна схема носить назву гіпергеометричної.

Задача 3. Серед n лотерейних квитків k виграшних. Навмання взяли m квитків. Визначити ймовірність того, що серед них l виграшних.

Нехай $n=10, l=2, m=4, k=6$.

<u>*Розв'язання.*</u>

Загальна кількість можливих елементарних подій дорівнює кількості способів, якими можна вибрати m білетів із n, тобто $N(\Omega)=C_n^m$.

А={серед m білетів виявилося l виграшних}

Підрахуємо $N(A)$.

A має місце, якщо серед m білетів l виграшних та m-l невиграшних.

l білетів із k виграшних можна вибрати C_k^l способами. Кількість способів вибору m-l невиграшних білетів - C_{n-k}^{m-l}.

Таким чином, за основним правилом комбінаторики $N(A)=C_k^l\cdot Cn_{n-k}^{m-k}$.

Шукана ймовірність рівна

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{C_k^l\cdot C_{n-k}^{m-l}}{C_n^m}=\frac{C_6^2\cdot C_4^2}{C_{10}^4}=\frac{90}{210}=\frac{3}{7}.$$

<u>*Відповідь*</u> 3/7.

Задача 4. На відрізку одиничної довжини навмання з’являється точка. Визначити ймовірність того, що відстань від точки до кінців відрізка перевищує величину $1/k$.

Нехай $k=4$

Розв’язання.

$\Omega = [0,1]$

$A = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$

$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}.$

де μ - міра Лебега (довжина) на прямій.

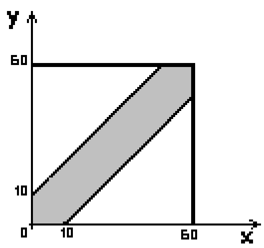
Відповідь 1/2.

Задача 5. Моменти початку двох подій навмання розподілені на проміжку часу від T_1 до T_2. Одна з подій триває 10 хв., інша - t хв. Визначити ймовірність того, що:

події перетинаються у часі ;

не перетинаються.

Нехай $T_1 = 9^{00}$, $T_2 = 10^{00}$, $t = 10$



Розв’язання.

Нехай x – це момент після 9^{00}, коли починається перша подія, y – момент, коли починається друга. Простір елементарних подій складається з усіх можливих комбінацій початку першої та другої подій, тобто:

$\Omega = \{(x, y),\ x \in [0,60],\ y \in [0,60]\}$

а) Оскільки події мають перетнутися у часі, то інтервал часу між початком першої та початком другої подій має не перевищувати 10 хвилин. Якщо A = {події перетнулися у часі}(відповідає зафарбованій області на малюнку), то:

$A = \{(x, y), |x - y| \le 10$

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{60 \cdot 60 - 2 \cdot ((60 - 10)(60 - 10))/2)}{60 \cdot 60} = 1 - \frac{50 \cdot 50}{60 \cdot 60} = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}.$$

b)B = {події не перетнулися у часі}. Тоді

$B = \{(x, y), |x - y| > 10\}$

$$P(B) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{2 \cdot ((60 - 10)(60 - 10))/2)}{60 \cdot 60} = \frac{50 \cdot 50}{60 \cdot 60} = \frac{25}{36}.$$

Або : оскільки *B* є доповненням до *A*, то *P(B)* =1 - *P(A)* = 1 - $\frac{11}{36}$ = $\frac{25}{36}$

μ - міра Лебега (площа) на площині.

<u>Відповідь</u>. a) 11/36; b) 25/36

Задача 6. Всередині круга радіуса *R* випадково з'являється точка. Визначити ймовірність того, що вона потрапляє в одну із двох фігур, що не перетинаються і площі яких дорівнюють s_1 та s_2 .

Нехай $s_1 = 2.25, S_2 = 3.52, R = 11$.

<u>Розв'язання.</u>

$\mu(\Omega) = \pi \cdot R^2 \approx 3.14 \cdot 11^2 = 379.94$

Оскільки фігури не перетинаються, то:

$\mu(A) = S_1 + S_2 = 2.25 + 3.52 = 5.77$

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{5.77}{379.94} \approx 0.015 .$$

<u>Відповідь</u>. 0.015.

Задача 7. В двох партіях k_1 та k_2 відсотків якісних товарів відповідно. Навмання вибирають по одному виробу з кожної партії . Яка ймовірність виявити серед них:

хоча б один неякісний;

два неякісних;

один якісний і один неякісний;

Нехай $k_1 = 71; k_2 = 47$

<u>Розв'язання.</u>

Нехай A_1 ={виявили неякісний виріб в першій партії}

A_2= {виявили неякісний виріб в другій партії}

a) A = {серед вибраних виявили хоча б один неякісний виріб}, тоді

A = $A_1 \cup A_2$

Таким чином , враховуючи, що вибір якісного чи неякісного виробу з однієї партії не залежить від того, який за якістю виріб з другої партії:

$$P(A) = P(\overline{A_1}) + P(\overline{A_2}) - P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) =$$

$$= (1 - \frac{k_1}{100}) + (1 - \frac{k_2}{100}) - (1 - \frac{k_1}{100})(1 - \frac{k_2}{100}) = 1 - \frac{k_1 k_2}{10000} =$$

$$= 1 - \frac{71 \cdot 47}{10000} = 1 - 0.3337 = 0.6663$$

b) B = {серед вибраних обидва вироби виявилися неякісними}.

$B = \overline{A_1} \cap \overline{A_2}$.

$$P(B) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}) =$$

$$= (1 - \frac{k_1}{100}) \cdot (1 - \frac{k_2}{100}) = (1 - \frac{71}{100}) \cdot (1 - \frac{47}{100}) = 0.29 \cdot 0.53 = 0.1537 .$$

c) C = {серед вибраних виявили один якісний і один неякісний вироби}.

$C = (\overline{A_1} \cap A_2) \cup (A_1 \cap \overline{A_2}) = C_1 \cup C_2$, де $C_1 = \overline{A_1} \cap A_2$, $C_2 = A_1 \cap \overline{A_2}$.

Оскільки $C_1 \cap C_2 = \varnothing$, то:

$$P(C) = P(C_1) + P(C_2) = P(\overline{A_1} \cap A_2) + P(A_1 \cap \overline{A_2}) = P(\overline{A_1})P(A_2) + P(A_1)P(\overline{A_2}) =$$

$$= (1 - \frac{k_1}{100}) \cdot \frac{k_2}{100} + (1 - \frac{k_2}{100}) \cdot \frac{k_1}{100} = \frac{k_1}{100} + \frac{k_2}{100} - \frac{2k_1k_2}{10000} =$$

$$= \frac{71}{100} + \frac{47}{100} - \frac{2 \cdot 71 \cdot 47}{10000} = \frac{118}{100} - \frac{6674}{10000} = 0.5226$$

<u>Відповідь</u> a)0.6663, b)0.1537, c)0.5226.

Задача 8. Імовірність того, що в ціль влучено з одного пострілу першим стрільцем дорівнює p_1, а другим - p_2. Перший зробив n_1, другий - n_2 пострілів. Визначити ймовірність того, що в ціль не було влучено жодного разу.

Нехай $p_1 = 0.61$, $p_2 = 0.55$, $n_1 = 2$, $n_2 = 3$.

<u>Розв'язання.</u> Імовірність того, що в ціль не влучено з одного пострілу першим стрільцем дорівнює $(1 - p_1)$ = 1 – 0.61 = 0.39.

Імовірність того, що в ціль не влучено з одного пострілу другим стрільцем дорівнює $(1 - p_2)$ = 1 – 0.55 = 0.45.

Нехай A = {жоден із стрільців не влучив ні разу},

A_i = {перший стрілець не влучив на i–тому вистрілі, i = 1,2},

B_j = { другий стрілець не влучив на j–тому вистрілі, j = 1,2,3 }.

Тоді $A = A_1 \cap A_2 \cap B_1 \cap B_2 \cap B_3$,

$P(A) = P(A_1)\, P(A_2)\, P(B_1)\, P(B_2)\, P(B_3) =$

$= 0.39^2 \cdot 0.45^3 \approx 0.1521 \cdot 0.0911 \approx 0.0139$

Відповідь 0.0139

Задача 9. З 1000 ламп n_i належить до *i*-ої партії, $i=1,2,3, \sum_{i=1}^{3} n_i = 1000$. У першій партії 6% , в другій – 5%, в третій – 4% бракованих ламп. Навмання обирають одну лампу. Визначити ймовірність того, що обрана лампа бракована.

$n_1 = 100$, $n_2 = 250$

Розв'язання.

$n_3 = 1000 - (n_1 + n_2) = 650$. Сформуємо систему гіпотез:

H_1 = {обрали лампу з першої партії} $P(H_1) = \frac{n_1}{1000}$ =0.1,

H_2 = {обрали лампу з другої партії} $P(H_2) = \frac{n_2}{1000}$ =0.25,

H_3 = {обрали лампу з третьої партії} $P(H_3) = \frac{n_3}{1000}$ =0.65.

Позначимо через A подію, яка полягає у тому, що лампа бракована.

Тоді $P(A|H_1) = 0.06$,

$P(A|H_2) = 0.05$,

$P(A|H_3) = 0.04$.

За формулою повної ймовірності:

$P(A) = P(A|H_1)\,P(H_1) + P(A|H_2)\,P(H_2) + P(A|H_3)\,P(H_3) =$

$= 0.06 \cdot 0.1 + 0.05 \cdot 0.25 + 0.04 \cdot 0.65 = 0.0445$

Відповідь 0.0445.

Задача 10. В магазин надходять вироби одного типу з трьох заводів, причому *i*-й завод постачає $m_i\%$ виробів ($i = 1,2,3$). Серед виробів *i*-го заводу $n_i\%$ першого гатунку. Один виріб було куплено. Виявивилося, що він першого гатунку. Визначити ймовірність того, що куплений виріб випущено *j*–м заводом.

Нехай $m_1 = 50$, $m_2 = 30$, $m_3 = 20$, $n_1 = 70$, $n_2 = 80$, $n_3 = 90$, $j = 1$.

Розв'язання.

Сформуємо систему гіпотез:

H_1 = {куплений виріб випущено першим заводом}, $P(H_1) = 0.5$,

H_2 = {куплений виріб випущено другим заводом}, $P(H_2) = 0.3$,

H_3 = {куплений виріб випущено третім заводом}, $P(H_3) = 0.2$.

Позначимо: A = {купили виріб першого гатунку}. Тоді:

$P(A|H_1) = 0.7$

$P(A|H_2) = 0.8$
$P(A|H_3) = 0.9.$
За формулою Байєса:

$$P(H_1|\,A) = \frac{P(H_1)\cdot P(A\,|\,H_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(H_i)P(A\,|\,H_i)} = \frac{0.5\cdot 0.7}{0.5\cdot 0.7+0.3\cdot 0.8+0.2\cdot 0.9} = \frac{0.35}{0.77}\approx 0.45$$

<u>*Відповідь*</u> 0.45.

Задача 11. Імовірність виграшу в лотерею на один квиток дорівнює p. Куплено n квитків. Знайти найімовірніше число виграшних квитків та відповідну ймовірність.
Нехай $p = 0.3$, $n = 10$.

<u>*Розв'язання.*</u>
Позначимо найімовірніше число виграшів через m, тоді $(n + 1)p = (10 +1)0.3 = 11\cdot 0.3 = 3.3$, то $m = [(n + 1)p] = 3$
Якщо A = {буде m виграшних білета}, то $P(A) = C_n^m p^m(1-p)^{n-m} = C_{10}^3(0.3)^3(0.7)^7 = 120\cdot 0.027\cdot 0823543 \approx 0.27$

<u>*Відповідь*</u> 3; 0.27.

Задача 12. На кожен лотерейний квиток з ймовірністю p_1 може випасти великий виграш, з ймовірністю p_2 - малий виграш та з ймовірністю p_3 квиток може виявитися без виграшу, $\sum_{i=1}^{3} p_i = 1.$ Куплено n квитків. Визначити ймовірність отримання n_1 великих виграшів та n_2 малих.

Нехай $n = 15,\, n_1 = 1,\, n_2 = 2,\, p_1 = 0.1,\, p_2 = 0.2.$

<u>*Розв'язання.*</u> Нехай A = {отримали n_1 великих виграшів та n_2 малих},
Кожен з n білетів може принести або великий виграш, або малий, або бути зовсім невиграшним. Імовірність останнього випадку дорівнює $p_3 = (1 - p_1 - p_2) = 1 - 0.1 - 0.2 = 0.7$.
Щоб подія А мала місце необхідно, щоб n_1 білетів принесли великий виграш, n_2 білетів – малий і $(n - n_1 - n_2)$ білетів були невиграшними.
Таким чином, відповідно до поліноміальної формули:

$$P(A) = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,(n-n_1-n_2)!}\,p_1^{n_1}\cdot p_2^{n_2}\cdot(1-p_1-p_2)^{n-n_1-n_2} = \frac{15!}{1!\cdot 2!\cdot(15-1-2)!}0.1^1\cdot 0.2^2\cdot(1-0.1-0.2)^{15-1-2} =$$

$$= \frac{15\cdot 14\cdot 13}{2}0.1\cdot 0.04\cdot 0.7^{12}\approx 15\cdot 14\cdot 13\cdot 0.002\cdot 0.0138\approx 0.075$$

<u>*Відповідь*</u> 0.075

Задача 13. Ймовірність помилки в роботі телефонної станції при кожному виклику дорівнює p. Надійшло n викликів. Визначити наближено ймовірність m помилок, оцінити похибку.

Нехай $m = 7, n = 1000, p = 0.002$ . .

Розв'язання. A = {трапилося m помилок}

Тоді, використовуючи форму Пуассона, маємо

$$P(A) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m} \approx e^{-np}\frac{(np)^m}{m!} = e^{-2}\frac{2^7}{7!} \approx 0.00336$$

$$\left| P(A) - e^{-np}\frac{(np)^m}{m!} \right| < np^2 = 0{,}121 \ .$$

Відповідь 0.00336

Задача 14. Ймовірність деякої події в кожному з n незалежних випробувань дорівнює p. Визначити наближено ймовірність того, що число m подій, які трапились, задавольняє наступній нерівності $k_1 \le m \le k_2$.

Нехай $n = 100, p = 0.8, k_1 = 80, k_2 = 90$.

Розв'язання. За умовою q=1-0.8=0.2.

Скористаємось інтегральною теоремою Муавра-Лапласа:

$$P_{100}(k_1 \le m \le k_2) = P_{100}\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) =$$

$$= P_{100}\left(\frac{80 - 100 \cdot 0.8}{\sqrt{100 \cdot 0.8 \cdot 0.2}} \le \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{90 - 100 \cdot 0.8}{\sqrt{100 \cdot 0.8 \cdot 0.2}}\right) = P_{100}\left(0 \le \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \le 2{,}5\right) \approx$$

$$\approx \Phi(2{,}5) - \Phi(0) = 0.49379 - 0 = 0.49379$$

Відповідь 0.49379

Задача 15. Дано густину розподілу $p(x)$ випадкової величини Знайти параметр γ, математичне сподівання $M\xi$, дисперсію $D\xi$, функцію розподілу випадкової величини ξ, ймовірність виконання нерівності $x_1 < \xi < x_2$, якщо

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\gamma-a}, x\in[a,b],\\ 0, x\notin[a,b].\end{cases}.$$

Нехай $a=2.5, b=4, x_1=3, x_2=3.3.$

Розв'язання.

1) Знайдемо значення параметра γ.

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)dx=\int_{2.5}^{4}\frac{1}{\gamma-2.5}dx=\frac{1.5}{\gamma-2.5}\Rightarrow\gamma=4.$$

2) Знайдемо математичне сподівання $M\xi$

$$M\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)dx=\int_{2.5}^{4}\frac{2}{3}xdx=\frac{13}{4}.$$

3) Знайдемо дисперсію $D\xi$

$$D\xi=M\xi^2-(M\xi)^2,$$

$$M\xi^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2p(x)dx=\frac{2}{3}\int_{2.5}^{4}x^2dx=\frac{387}{36},$$

$$D\xi=\frac{387}{36}-\left(\frac{13}{4}\right)^2=\frac{3}{16};$$

4) Знайдемо функцію розподілу випадкової величини ξ

$$F_\xi(x)=P(-\infty<\xi<x)=\begin{cases}0, x<2.5,\\ \int_{2.5}^{x}\frac{2}{3}dx, 2.5\le x<4,\\ 1, 4\le x.\end{cases}=\begin{cases}0, x<2.5,\\ \dfrac{2x-5}{3}, 2.5\le x<4,\\ 1, 4\le x.\end{cases}$$

5) Знайдемо ймовірність виконання нерівності $3<\xi<3.3$

$$P(3<\xi<3.3)=\int_{3}^{3.3}p(x)dx=\int_{3}^{3.3}\frac{2}{3}dx=\frac{1}{5}.$$

Задача 16. Густина розподілу ймовірностей випадкової величини ξ має вигляд $P(\xi=k)=\gamma e^{ax^2+bx+c}$. Знайти: γ, математичне сподівання $M\xi$, дисперсію $D\xi$, функцію розподілу випадкової величини ξ, ймовірність виконання нерівності $x_1<\xi<x_2$.

$a=-2, b=8, c=-2, x_1=1, x_2=3.$

Розв'язання.

1) Знайдемо значення параметра γ.

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\gamma e^{-2x^2+8x-2}dx=\gamma\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-2)^2+6}dx=\gamma e^6\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-2)^2}dx=\begin{vmatrix}\text{заміна}\\ t=x-2\\ dx=dt\end{vmatrix}=\gamma e^6\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2t^2}dt=$$

$$=\begin{vmatrix}\text{заміна}\\ \sqrt{2}t=z\\ dt=\dfrac{dz}{\sqrt{2}}\end{vmatrix}=\gamma e^6\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-z^2}dz=\gamma e^6\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\pi}$$

$$\Rightarrow\ \gamma=\frac{e^{-6}\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}.$$

Пояснення.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}dy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{+\infty}e^{-r^2}rdr=2\pi\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}e^{-r^2}dr^2=\pi.$$

$$\Rightarrow\ \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}.$$

2) Знайдемо математичне сподівання $M\xi$

$$M\xi=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)xdx=\frac{e^{-6}\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2x^2+8x-2}xdx=\frac{e^{-6}\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}e^6\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-2)^2}xdx=\begin{vmatrix}\text{заміна}\\ t=x-2\\ dx=dt\end{vmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2t^2}(t+2)dt=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2t^2}tdt+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2t^2}dt=\frac{\sqrt{2}}{(-2)2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2t^2}d(-2t^2)+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-z^2}dz=$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{\pi}}e^{-2t^2}\Big|_{-\infty}^{\infty}+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi}=0+2=2.$$

3) Знайдемо дисперсію $D\xi$

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2;$$

$$M\xi^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)x^2dx = \frac{e^{-6}\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2+8x-2}x^2dx = \frac{e^{-6}\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2(x-2)^2+6}x^2dx = \left|\begin{array}{l} заміна \\ t = x-2 \\ dx = dt \end{array}\right| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t^2}(t+2)^2dt =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t^2}t^2dt + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t^2}tdt + \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2t^2}dt =$$

$$= \left|\begin{array}{l} заміна \\ \sqrt{2}t = z \\ dt = \dfrac{dz}{\sqrt{2}} \end{array}\right| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\frac{z^2}{2}dz + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}\frac{z}{\sqrt{2}}dz + \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}dz =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}z^2dz + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{(-2)}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}d(-z^2) + \frac{4}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}dz =$$

$$= I + 0 + \frac{4}{\sqrt{\pi}}\cdot\sqrt{\pi} = I + 4 = \frac{1}{4} + 4 = 4\frac{1}{4}.$$

Пояснення.

$$I = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}z^2dz = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} z^2\frac{1}{(-2z)}de^{-z^2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{1}{(-2)}\int_{-\infty}^{+\infty} zde^{-z^2} =$$

$$= -\frac{1}{4\sqrt{\pi}}ze^{-z^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}dz =$$

$$= 0 + \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi} = \frac{1}{4}$$

Таким чином

$$D\xi = 4\frac{1}{4} - 2^2 = \frac{1}{4}.$$

4) Знайдемо функцію розподілу випадкової величини ξ

$$P(\xi < x) = \int_{-\infty}^{x} p(x)dx = \int_{-\infty}^{x} e^{-x^2}dx.$$

5) Знайдемо ймовірність виконання нерівності $1 < \xi < 3$.

$$P(1 < \xi < 3) = P(\xi < 3) - P(\xi < 1) = \int_{-\infty}^{3} e^{-x^2}dx -. \int_{-\infty}^{1} e^{-x^2}dx = \int_{1}^{3} e^{-x^2}dx.$$

Задача 17. За даним законом розподілу випадкової величини знайти характеристичну функцію $\varphi(t)$, математичне сподівання $M\xi$, дисперсію $D\xi$ $D\xi$ випадкової величини ξ.

$$p(\xi = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, 0 < p < 1, k = 0,1,..., n. ..$$

Розв'язання.

1) Знайдемо математичне сподівання $M\xi$

$$M\xi = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} k = \sum_{k=1}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} k = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} k =$$

$$= pn \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot ((n-1)-(k-1))!} \cdot p^{k-1} \cdot (1-p)^{(n-1)-(k-1)} =$$

$$= pn \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k! \cdot ((n-1)-k)!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{(n-1)-k} = pn \cdot 1 = pn = 0.37 \cdot 5 = 1.85.$$

2) Знайдемо дисперсію $D\xi$

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$$

$$M\xi^2 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} k^2 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} k(k-1) + \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} k =$$

$$= \sum_{k=2}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} k(k-1) + pn = \sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} k(k-1) + pn =$$

$$= p^2 n(n-1) \cdot \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)! \cdot ((n-2)-(k-2))!} \cdot p^{k-2} \cdot (1-p)^{(n-2)-(k-2)} + pn =$$

$$= p^2 n(n-1) \cdot \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{k! \cdot ((n-2)-k)!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{(n-2)-k} + pn = p^2 n(n-1) \cdot 1 + pn = p^2 n(n-1) + pn$$

$$= (0.37)^2 \cdot 5(5-1) + 0.37 \cdot 5 = 4.588.$$

Знайдемо характеристичну функцію $\varphi(t)$

$$\varphi(t) = Me^{it\xi} = \sum_{k=0}^{n} e^{itk} \cdot C_n^k p^k (1-p)^k = \sum_{k=0}^{5} e^{itk} \cdot C_5^k (0.37)^k (0.63)^{5-k} =$$

$$= (0.63)^5 + e^{it}(0.37)(0.63)^4 + e^{2it}(0.37)^2(0.63)^3 + e^{3it}(0.37)^3(0.63)^2 + e^{4it}(0.37)^4(0.63) + e^{5it}(0.37)^5 \approx$$

$$\approx 0.01 + e^{it} \cdot 0.37 \cdot 0.16 + e^{2it} \cdot 0.14 \cdot 0.25 + e^{3it} \cdot 0.05 \cdot 0.3969 + e^{4it} \cdot 0.02 \cdot (0.63) + e^{5it} \cdot 0.013 \approx$$

$$\approx 0.01 + e^{it} \cdot 0.22 + e^{2it} \cdot 0.03 + e^{3it} \cdot 0.02 + e^{4it} \cdot 0.01 + e^{5it} \cdot 0.01$$

Задача 18. Дано густину розподілу $p_\xi(x)$ випадкової величини ξ. Знайти густину розподілу $p_\eta(y)$, математичне сподівання $M\eta$, дисперсію

$D\eta$ випадкової величини η, яка є площею рівнобічного трикутника зі стороною ξ. Густина розподілу наступна

$$p_\xi(x)=\begin{cases}1/(b-a),\ x\in[a,b],\\ 0,\ x\notin[a,b].\end{cases}\ldots$$

Нехай a=0, b=2

Розв'язання. $\eta=\frac{\xi^2\sqrt{3}}{4}$

1) Знайдемо густину розподілу $p_\eta(y)$

$$F_\eta(y)=P(\eta<y)=P(\frac{\xi^2\sqrt{3}}{4}<y)=P(\xi^2<\frac{4y}{\sqrt{3}})=P\left(-\frac{2\sqrt{y}}{\sqrt[4]{3}}<\xi<\frac{2\sqrt{y}}{\sqrt[4]{3}}\right)=$$

$$=P\left(\xi<\frac{2\sqrt{y}}{\sqrt[4]{3}}\right)-P\left(\xi<-\frac{2\sqrt{y}}{\sqrt[4]{3}}\right)$$

$$p_\eta(y)=F'_\eta(y)=p\left(\xi<\frac{2\sqrt{y}}{\sqrt[4]{3}}\right)\frac{1}{\sqrt[4]{3}\sqrt{y}}+p\left(\xi<-\frac{2\sqrt{y}}{\sqrt[4]{3}}\right)\frac{1}{\sqrt[4]{3}\sqrt{y}}=p\left(\xi<\frac{2\sqrt{y}}{\sqrt[4]{3}}\right)\frac{1}{\sqrt[4]{3}\sqrt{y}}$$

$$\left(x\in[0,2]\Rightarrow\frac{2\sqrt{y}}{\sqrt[4]{3}}\in[0,2]\Rightarrow y\in[0,\sqrt{3}],\quad x\in[0,2]\Rightarrow-\frac{2\sqrt{y}}{\sqrt[4]{3}}\in[0,2]\Rightarrow y=0\right)$$

Таким чином з врахуванням

$$p_\xi(x)=\begin{cases}1/2,\ x\in[0,2],\\ 0,\ x\notin[0,2].\end{cases}.$$

$$p_\eta(y)=\begin{cases}0,\ y<0\\ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{y}},0\le y\le\sqrt{3}\\ 0,\ y>\sqrt{3}\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt[4]{3}\sqrt{y}},\ x\in[0,\sqrt{3}],\\ 0,\ x\notin[0,\sqrt{3}].\end{cases}$$

2)Знайдемо математичне сподівання $M\eta$

$$M\eta=\int_0^{\sqrt{3}}y\,p(y)dy=\int_0^{\sqrt{3}}y\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{y}}dy=\frac{1}{2\sqrt[4]{3}}\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{y}\,dy=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

3) Знайдемо дисперсію $D\eta$

$$D\eta=M\eta^2-(M\eta)^2$$

$$M\eta^2=\int_0^{\sqrt{3}}y^2p(y)dy=\int_0^{\sqrt{3}}y^2\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{y}}dy=\frac{1}{2\sqrt[4]{3}}\int_0^{\sqrt{3}}y^{3/2}dy=\frac{1}{2\sqrt[4]{3}}\left.\frac{2y^{\frac{5}{2}}}{5}\right|_0^{\sqrt{3}}=\frac{3}{5}$$

Значить

$$D\eta = \frac{3}{5} - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{3}{5} - \frac{1}{3} = \frac{8}{15}$$

Задача 19. Випадкова величина ξ має густину розподілу вказану в задачі 18. Інша випадкова величина η пов'язана з ξ функціональною залежністю $\eta = 2\xi^m + 1$. Визначити математичне сподівання $M\eta$ та дисперсію $D\eta$ випадкової величини η.

Нехай $a=0$, $b=2$, $m=4$

Розв'язання.

$$\eta = 2\xi^m + 1 = 2\xi^4 + 1.$$

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, x \in [0,2], \\ 0, x \notin [0,2]. \end{cases}.$$

1)Знайдемо математичне сподівання $M\eta$

$$M\eta = \int_0^2 (2x^4 + 1)\,p_\xi(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 (2x^4 + 1)dx = \int_0^2 x^4 dx + \frac{1}{2}\int_0^2 dx = \left.\frac{x^5}{5}\right|_0^2 + \left.\frac{1}{2}x\right|_0^2 = \frac{32}{5} + 1 = \frac{37}{5}$$

2) Знайдемо дисперсію $D\eta$

$$D\eta = M\eta^2 - (M\eta)^2$$

$$M\eta^2 = \frac{1}{2}\int_0^2 (2x^4 + 1)^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^2 (4x^8 + 4x^4 + 1)dx =$$

$$= 2\int_0^2 x^8 dx + 2\int_0^2 x^4 dx + \frac{1}{2}\int_0^2 dx = 2\left.\frac{x^9}{9}\right|_0^2 + 2\left.\frac{x^5}{5}\right|_0^2 + \left.\frac{1}{2}x\right|_0^2 = \frac{1024}{9} + \frac{64}{5} + 1 = \frac{5741}{45}$$

Значить

$$D\eta = \frac{5741}{45} - \left(\frac{37}{5}\right)^5 = \frac{5741}{45} - \frac{1369}{25} = \frac{16384}{225} \approx 72.82.$$

Задача 20. Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що випадкова величина ξ відхиля'ється від свого математичного очікування $M\xi$ менш, ніж на $N\sigma$, де $\sigma = \sqrt{D\xi}$ -середнє квадратичне відхилення випадкової величини ξ; N– номер варіанта.

Нехай $N=1$

Розв'язання.

$$\sigma = \sqrt{D\xi} \Rightarrow \sigma^2 = D\xi$$

Нерівність Чебишева:

$$P(|\xi - M\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

Імовірність того, що випадкова величина відхиляється не менше ніж на $N\sigma$ задовольняє нерівність

$$P(|\xi - M\xi| \geq N\sigma) \leq \frac{\sigma^2}{(N\sigma)^2}, \text{ звідки}$$

$$P(|\xi - M\xi| \geq \sigma) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

Тоді ймовірність того, що випадкова величина відхиляється від свого математичного сподівання менше ніж на $N\sigma = \sigma$ рівна

$$P(|\xi - M\xi| < \sigma) \leq 1 - 1 = 0$$

<u>*Відповідь*</u> 0.

Задача 21. Випадкова величина ξ має нормальний розподіл з невідомим математичним очікуванням a та відомою дисперсією σ^2. За вибіркою $(x_1, x_2, ..., x_n)$ об'єму n обчислено вибіркове середнє $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = a*$. Визначити інтервал довіри для невідомого параметра розподілу a відповідно до заданої ймовірності довіри Р.

Нехай $a* = 110; \sigma^2 = 100; n = 150; P = 0.95$.

<u>*Розв'язання.*</u>

$\sigma^2 = 100 \Rightarrow \sigma = 10$.

Знайдемо інтервал довіри $\left(a* - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; a* + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, де

t задовольняє ріність $2\Phi(t) = P$. Із таблиці знайдемо *t*=1.96.

Підставивши всі дані, одержимо:

$$110 - 1.96 . \frac{10}{\sqrt{150}} < \alpha < 110 + 1.96 . \frac{10}{\sqrt{150}} \Rightarrow 108.4 < \alpha < 111.6.$$

<u>*Відповідь*</u> $108.4 < \alpha < 111.6$.

Задача 22. Випадкова величина ξ має нормальний розподіл з невідомим математичним сподіванням a та відомою дисперсією σ^2. За вибіркою $(x_1, x_2, ..., x_n)$ об'єму n обчислено оцінки

$$a* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

та

$$(\sigma*)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a*)^2 \qquad (22)$$

невідомих параметрів. Знайти інтервал довіри для математичного сподівання a, що відповідатиме ймовірності довіри Р.

Нехай $a* = 2.1; (\sigma*)^2 = 0.5; n = 31; P = 0.9.$

Розв'язання.

$(\sigma*)^2 = 0.5 \Rightarrow \sigma* \approx 0.71$.

Знайдемо інтервал довіри:

$\left(a* - t_p \frac{\sigma*}{\sqrt{n}}; a* + t_\rho \frac{\sigma*}{\sqrt{n}}\right)$, де

t_p задовільняє рівність $2\int_0^{t_p} S_{n-1}(x)dx = P$, де $S_{n-1}(x)$ -густина розподілу Ст'юдента с т-1 степенями свободи. Знаходимо t_p із таблиці, $t_{p=}2{,}048$

$2.1 - 1.697\ (0.71/\sqrt{31}) < \alpha < 2.1 + 1.697\ (0.71/\sqrt{31})$

$2.1 - 1.697\ (0.128) < \alpha < 2.1 + 1.697\ (0.128)$.

$1.88274 < \alpha < 2.37216$

Відповідь $1.88274 < \alpha < 2.37216$

Задача 23. В результаті n експериментів було отримано незміщену оцінку $\sigma* = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2}$ для дисперсії нормальної випадкової величини . Знайти інтервал довіри для дисперсії при ймовірності довіри Р.

Нехай $(\sigma*)^2 = 45; n = 14; P = 0.98$.

Розв'язання.

Знайдемо інтервал довіри:

$\frac{(n-1)(\sigma*)^2}{\chi^2_{(2)}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)(\sigma*)^2}{\chi^2_{(1)}}$, де

$\chi^2_{(1)}$ та $\chi^2_{(2)}$ - визначаються зі співвідношень:

$\int_0^{\chi^2_{(1)}} p_{n-1}(x)dx = \frac{1-P}{2}$, $\int_{\chi^2_{(2)}}^{\infty} p_{n-1}(x)dx = \frac{1-P}{2}$, де $p_{n-1}(x)$ - густину розподілу хі –квадрат з n – 1 степенями свободи.

Шукаємо $\chi^2_{(1)}$ та $\chi^2_{(2)}$ за таблицею, розподілу x_i – квадрат причому для $\chi^2_{(1)}$: $\nu = n - 1 = 13$, $\alpha = \dfrac{1+P}{2} = 0.99$,

для $\chi^2_{(2)}$: $\nu = n - 1 = 13$, $\alpha = \dfrac{1-P}{2} = 0.1$.

Маємо $\chi^2_{(1)} = 19.81$, $\chi^2_{(2)} = 4.11$

Таким чином:

$$\frac{13 \cdot 45}{19.81} < \sigma^2 < \frac{13 \cdot 45}{4.11}$$

$29.53 < \sigma^2 < 142.34$

Відповідь $29.53 < \sigma^2 < 142.34$

Задача 24. В серії з n пострілів по цілі було m влучень. Знайти інтервал довіри для ймовірності p влучання в ціль при ймовірності довіри Р.

Нехай $n = 30;\ m = 10;\ P = 0.95$.

Розв'язання.

$$\omega = \frac{m}{n} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$

t задовольняє ріність $2\Phi(t) = P$. Із таблиці знайдемо t=1.96.

Знайдемо межі довірчого інтервалу

$$p_1 = \frac{n}{t^2 + n}\left(\omega + \frac{t^2}{2n} - t\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n} + (\frac{t}{2n})^2}\right) \approx 0.89 \cdot \left(\frac{1}{3} + 0.064 - 1.96\sqrt{\frac{1}{135} + 0.001}\right) \approx 0.19,$$

$$p_2 = \frac{n}{t^2 + n}\left(\omega + \frac{t^2}{2n} + t\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n} + (\frac{t}{2n})^2}\right) \approx 0.89 \cdot \left(\frac{1}{3} + 0.064 - 1.96\sqrt{\frac{1}{135} + 0.001}\right) \approx 0.51.$$

Таким чином ми визначили інтервал довіри:

$$p_1 < p < p_2 \Rightarrow 0.19 < p < 0.51.$$

Відповідь $0.19 < p < 0.51$.

8. Перелік основних питань

1. Випадкові події, випадковий експеримент, частотне та класичне означення ймовірності, її властивості.
2. Елементи комбінаторики: основна теорема, перестановки, розміщення, сполучення.
3. Аксіоматичне означення ймовірності, операції над подіями, формула додавання ймовірностей.
4. Геометричні ймовірності. Задача про зустріч.
5. Умовна ймовірність. Формула множення ймовірностей. Залежні та незалежні події.
6. Формули повної ймовірності та Байєса.
7. Схема та формула Бернуллі.
8. Поведінка ймовірностей у схемі Бернуллі. Поліноміальна формула.
9. Формула Пуассона, оцінка похибки при її використанні.
10. Локальна та інтегральна теореми Муавра-Лапласа.
11. Дискретні випадкові величини, їх розподіли та числові характеристики.
12. Неперервні випадкові величини: щільність та функція розподілу, їх властивості, числові характеристики неперервних випадкових величин.
13. Початкові та центральні моменти випадкових величин, математичне сподівання та дисперсія, їх властивості.
14. Біноміальний розподіл.
15. Геометричний розподіл.
16. Гіпергеометричний розподіл.
17. Пуассонівський розподіл.
18. Рівномірний розподіл.
19. Показниковий розподіл.
20. Нормальний розподіл.
21. Логістичний розподіл.
22. Розподіл Парето.
23. Функція випадкової величини: розподіл та моменти.

24. Система випадкових величин: задання розподілу, ймовірність попадання в область, маргінальні розподіли, залежність та незалежність випадкових величин.
25. Числові характеристики систем випадкових величин. Коваріація і коефіцієнт кореляції. Функція кількох випадкових величин.
26. Збіжність послідовностей випадкових величин. Нерівність Чебишева та закони великих чисел.
27. Збіжність послідовностей випадкових величин. Центральна гранична теорема.
28. Варіаційний ряд, генеральна сукупність, вибірка та її формування
29. Емпіричні закони розподілу.
30. Точкові оцінки параметрів розподілу.
31. Інтервальні оцінки параметрів розподілу.
32. Критерії згоди.
33. Однофакторний дисперсійний аналіз.
34. Метод лінійних контрастів
35. Кореляційний аналіз.
36. Рівняння лінійної регресії.
37. Перевірка значущості та надійні інтервали для параметрів регресії.
38. Поняття випадкового процесу.
39. Пуассонівський потік.
40. Система масового обслуговування.

9. Література

Основна література:

1. Булдигін В.В., Буценко Ю.П., Диховичний О.О. Теорія ймовірностей(Конспект лекцій).- К.:1999.
2. Барковський В.В., Барковська Н.В., Лопатін О.К. Математика для економістів. Теорія ймовірностей та математична статистика.- К.:1997.
3. Волощенко А.Б. Теория вероятностей и математическая статистика для инженеров-економистов.- К.: 1972.
4. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика .- М.:1980.
5. Карасев О.В. Теория вероятностей и математическая статистика.- М.:1979.
6. Четыркин Е.М., Калихман И.Л. Вероятность и статистика. - М.: 1982.
7. Чудесенко В.Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики (Типовые расчеты). - М.: 1983.

Додаткова література:

1. Боярский А.К. Математика для экономистов. - М.:1961.

2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. - М.: 1975.
3. Кильчевская Е.М., Лозовик В.И. и др. Методические указания к типовому расчету по курсу «Теории вероятностей». - К.: 1983.
4. Ковтун Н.В., Столяров Г.С. Загальна теорія статистики. - К.: 1996.
5. Крынский Х.Е. Математика для экономистов. - М.: 1970.
6. Ланге О. Введение в эконометрику. - М.:1972.
7. Леоненко М.М., Мішура Ю.С., Пархоменко В.М., Яренко М.Й. Теоретико-ймовірнісні та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці.- К.: 1995.
8. Стремский В.В., Ремизова М.П., Буценко Ю.П. Методические указания к практическим занятиям по теории вероятностей. - К.:1987.
9. Харламов А.И. и др. Общая теория статистики. - М.: 1994.
10. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. - М.:1987.

Додаток 1.

МІЖНАРОДНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ФІНАНСІВ

РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНА РОБОТА
ПО КУРСУ
“ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І
МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА”

Студента_________________
____
(факультету, курсу)
група__ __________________
____
(прізвище, ім'я, по-батькові)
Варіант №________________

“Зараховано”

____
(дата)
____
(вчене звання, П.І.Б. викладача)

____
(підпис)

Київ – 2002