НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»

Фізико-математичний факультет
(повна назва інституту/факультету)

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей
(повна назва кафедри)

«На правах рукопису»
УДК 519.21

«До захисту допущено»

Завідувач кафедри
________ Клесов О.І.
(підпис) (ініціали, прізвище)

“___” _____________20__ р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

зі спеціальності 8.04020101 «Математика»

на тему: «Дослідження розподілу ланцюга Маркова в момент виходу із множини»

Виконала: студентка VI курсу, групи ОМ-41м
(шифр групи)

Бризгалова Тетяна Сергіївна __________
(прізвище, ім’я, по батькові) (підпис)

Науковий керівник доктор фізико-математичних наук, професор

Пилипенко А.Ю. __________
(посада, науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали) (підпис)

Консультант «Охорона праці та безпека в надзвичайних ситуаціях»
(назва розділу)

доцент Мітюк Л.О. __________
(науковий ступінь, вчене звання, , прізвище, ініціали) (підпис)

Рецензент науковий співробітник інституту математики НАН України

Руденко О.В. __________
(посада, науковий ступінь, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали) (підпис)

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студент _____________
(підпис)

Київ – 2016 року

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

Інститут (факультет) Фізико-математичний факультет
(повна назва)

Кафедра Математичного аналізу та теорії ймовірностей
(повна назва)

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Спеціальність 8.04020101 «Математика»
(код і назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри
__________ Клесов О.І.
(підпис) (ініціали, прізвище)

« 4 » лютого 2016 р.

ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію студенту

Бризгаловій Тетяні Сергіївні
(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема «Дослідження розподілу ланцюга Маркова в момент виходу із множини»,

науковий керівник дисертації доктор фізико-математичних наук, професор Пилипенко А.Ю. ,
(прізвище, ім'я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом по університету від « 23 » лютого 2016 р. № 870 с

2. Термін подання студентом дисертації: 15.06.2016р.

3. Об'єкт дослідження: випадкове блукання

4. Предмет дослідження: розподіл точки досягнення певного вертикального екрану та гранична поведінка цього розподілу

5. Перелік завдань, які потрібно розробити:

1) ознайомитись із теорією про випадкове блукання у нескінченній смузі;

2) розглянути простіші випадки блукання, коли можливий тільки рух вперед, або на тому ж рівні;

3) отримати результати для загального випадку;

4)розглянути умови існування та єдиності розв'язку;

5) розглянути конкретні приклади та показати, що отримані результати дійсно працюють на практиці.

6. Орієнтовний перелік ілюстративного матеріалу: 19 слайдів

7. Орієнтовний перелік публікацій -

8. Консультанти розділів дисертації*

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв
Охорона праці та безпека в надзвичайних ситуаціях	Доцент Мітюк Л.О.		

9. Дата видачі завдання: 05.02.2016р.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1	Вивчення теорії про випадкове блукання у смузі	01.04.2015р.-01.09.2016р.	виконав
2	Вивчення задачі на частинних випадках, коли рух можливий тільки на крок вперед, або на тому ж рівні	01.09.2016р.-20.12.2016р.	виконав
3	Узагальнення на більш загальний випадок руху в смузі. Знаходження матриць перехідних ймовірностей та стаціонарного розподілу	20.12.2016р.-01.02.2016р.	виконав
4	Доведення допоміжних лем для встановлення існування та єдиності розвязку	01.02.2016р.-01.04.2016р.	виконав
5	Аналіз та перевірка отриманих результатів на конкретному прикладі. Написання макросу для підрахунку матриць вищих порядків методом послідовних наближень	01.04.2016р.-15.05.2016р.	виконав

Студент ______________ Бризгалова Т.С.
(підпис) (ініціали, прізвище)

Науковий керівник дисертації ______________ Пилипенко А.Ю.
(підпис) (ініціали, прізвище)

* Консультантом не може бути зазначено наукового керівника магістерської дисертації.

Реферат

Магістерська дисертація: 61 сторінка, 16 посилань

В магістерській дисертації досліджується випадкове блукання у нескінченній смузі з перехідними ймовірностями, однорідними відносно зсувів вздовж горизонтальної осі.

Мета роботи полягає в знаходженні розподілу точки досягнення певного вертикального екрану та граничної поведінки цього розподілу при прямуванні цього екрану на нескінченність.

Ключові слова: ланцюг Маркова, ергодична теорема, теорема Фробеніуса

Реферат

Магистерская диссертация, 61 страница, 16 ссылок

В магистерской диссертации исследуется случайное блуждание в бесконечной полосе с переходными вероятностями, однородными относительно сдвигов вдоль горизонтальной оси.

Цель работы состоит в нахождении распределения точки достижения определенного вертикального экрана и граничного поведения этого распределения при стремлении этого экрана на бесконечность.

Ключевые слова: цепь Маркова, эргодичная теорема, теорема Фробениуса.

Abstract

Master’s thesis: 61 pages, 16 links

A Markov chain in an infinite tube is studied. It is assumed that transition probabilities are translative invariant with respect to the horizontal shifts.

The aim of the thesis is to find the chain distribution at the instant of a vertical screen hitting time and the limit behavior of this distribution when the screen tends to infinity.

Key words: Markov’s chain, ergodic theorem, Frobenius’ theorem

Зміст

Вступ

Поняття випадкового процесу з’явилось на початку минулого століття і тісно пов’язане з іменами таких видатних вчених, як А.А. Марков, А.Н. Колмогоров, О.Я.Хинчин, Є.Є.Слуцький, Н.Вінер та інших.

В наші дні це поняття є одним із центральних не тільки в теорії ймовірностей, але й в інженерній справі, економіці, організації виробництва, теорії зв’язку. Теорія випадкових процесів належить до категорії найшвидше розвиваючихся математичних дисциплін, що й не дивно, адже цей факт значною мірою визначається її глибинним зв’язком з практичним застосуванням.

Особливе місце в теорії випадкових процесів займають Марковські процеси. Одним з перших вчених, хто встановив результат про граничну поведінку перехідних ймовірностей і зробив вагомий вклад в розвиток стохастичної математики, був А.А. Марков, який довів ергодичну теорему про збіжність до стаціонарного розподілу.

В магістерській дисертації досліджується випадкове блукання у нескінченній смузі фіксованої ширини з перехідними ймовірностями, однорідними відносно зсувів вздовж горизонтальної осі. Як результат роботи - отримані формули для знаходження матриць перехідних ймовірностей досягнення певного вертикального екрану та досліджена гранична поведінка розподілу при прямуванні цього екрану на нескінченність.

Важливим результатом послужили теорема Фробеніуса та метод послідовних наближень, з допомогою яких було доведено існування та єдиність розв’язку.

Також розглянуті різні випадки ланцюга Маркова як в загальному випадку, так і для конкретних значень перехідних ймовірностей, які виражаються через інтенсивності переходу.

Як підсумок, дані результати були перевірені за допомогою обчислень в Microsoft Excel та за допомогою SQL-запиту. Обидва методи підтвердили, що отримана матриця дійсно є стохастичною.

Розділ 1. Теоретичні відомості

1.1. Ланцюг Маркова. Означення, класифікація станів та основні теореми

<u>Означення.</u> Кажуть, що послідовність випадкових величин X_n зі значеннями в скінченній або зліченній множині I утворює *ланцюг Маркова з дискретним часом* (л.М.д.ч.), або, коротко, ланцюг Маркова з початковим розподілом λ і матрицею перехідних ймовірностей P, якщо $\forall\ i_0, \dots, i_n \in I$ спільний розподіл

$P(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n)$ задається формулою:

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) = \lambda_{i_0} p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{n-1} i_n}.$$

цьому випадку ми кажемо, що (X_n) – ланцюг Маркова з параметрами (λ, P) або (λ, P) – ланцюг Маркова.

<u>Теорема.</u> Якщо (X_n) – ланцюг Маркова з параметрами (λ, P), то:

а) умовна ймовірність

$$P(X_{n+1} = j | X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i)$$

рівна умовній ймовірності $\mathrm{P}(\mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{j} |\ \mathrm{X}_n = \mathrm{i})$ і співпадає з p_{ij}. Еквівалентно, умовний розподіл X_{n+1} при умові $X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i$ не залежить від $i_0, \dots, i_{n-1}$ і співпадає з $\left(p_{ij}, j \in I\right)$, тобто з i – м рядком матриці P.

б) ймовірність $P(X_n = i)$ того, що в момент n система знаходиться в стані і рівна $(\lambda P^n)_i$.

в) елемент матриці $p_{ij}{}^{(n)}$ матриці P^n співпадає з умовною ймовірністю

$P(X_{k+n} = j | X_k = i)$, тобто задає ймовірність переходу зі стану i в стан j за n кроків.

г) ймовірність загального вигляду задається наступною формулою:

$$P\left(X_{k_1} = i_1, X_{k_2} = i_2, \dots., X_{k_n} = i_n\right) = (\lambda P^{k_1})_{i_1} (P^{k_2 - k_1})_{i_1 i_2} \dots (P^{k_n - k_{n-1}})_{i_{n-1} i_n} \quad [5]$$

Означення. Будемо говорити, що стан E_k *досяжний* зі стану E_j, якщо існує таке $n \geq 0$, що $p_{jk}^{(n)} > 0$ (тобто, якщо існує додатня ймовірність потрапити зі стану E_j в стан E_k, включаючи випадок $E_k = E_j$).

Означення. Множина станів C називається *замкнутою*, якщо ніякий стан поза C не може бути досягнутим ні з якого стану, що входить в C. Найменша замкнута множина, яка включає C, називається *замиканням* C.

Якщо деякий стан E_k утворює замкнуту множину, то він називається *поглинаючим станом*.

Теорема. Якщо в матриці P^n викреслити всі рядки і стовбці, відповідні станам, які не входять в замкнуту множину C, залишиться матриця, для якої виконуються основні рівняння:

$$p_{jk}^{(n+1)} = \sum_{\mu} p_{j\mu} p_{\mu k}^{(n)};$$

$$p_{jk}^{(m+n)} = \sum_{\mu} p_{j\mu}^{(m)} p_{\mu k}^{(n)}.$$

Це значить, що ми отримаємо ланцюг Маркова, визначений на C, і цей ланцюг можна вивчати незалежно від інших станів. [15]

Означення. Стани i та jназиваються *сполучними*, якщо $i \to j, j \to i$.

Розглянемо довільний, але фіксований стан E_j і допустимо, що в момент 0 система знаходиться в E_j. Щоразу, коли система повертається в E_j, відновлюється початкове положення і процес починається спочатку. Таким чином, повернення в E_j являється рекурентною подією.

Кожен стан E_j характеризується своїм розподілом часу $\{f_j^n\}$, де f_j^n – ймовірність того, що перше повернення в E_j відбудеться в момент n.

Сума

$$f_j = \sum_{n=1}^{\infty} f_j^{(n)}$$

є ймовірністю того, що, виходячи із E_j, система коли-небудь повернеться в E_j. Стан E_j називається *зворотнім*, якщо $f_j = 1$; в цьому випадку середній час повернення буде рівним

$$\mu_j = \sum_{n=1}^{\infty} n f_j^{(n)}.$$

Ми будемо називати E_j *нульовим* станом, якщо $\mu_j = \infty$.

<u>Критерій зворотності.</u> Стан E_j *незворотній*, якщо $f_j < 1$.

Можна перевірити, що для незворотного стану E_j необхідно та достатньо виконання наступної умови:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} < \infty \tag{1}$$

в цьому випадку (1) автоматично вірно при будь-якому E_i, який сполучний з E_j.

<u>Означення.</u> Стан E_i називається *зворотнім*, якщо

$$P(\tau_i < \infty | X(0) = i) = 1,$$

де $\tau_i = inf\{n \geq 1 : X_n = i\}$ – момент першого досягнення E_i.

<u>Означення.</u> Стан E_j є *зворотнім нульовим* станом, якщо $f_j = 1$, але середній час повернення μ_j безкінечний. Для цього необхідно та достатньо, щоб

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \infty, \qquad \text{але } p_{jj}^{(n)} \to 0.$$

В цьому випадку $p_{jj}^{(n)} \to 0$ при $n \to \infty$ для будь-якого i.

<u>Означення.</u> Стан E_j називається *періодичним* з періодом $t \geq 1$, якщо $p_{jj}^{(n)} = 0$ для будь-якого n не кратного t і $t -$ найменше ціле число, яке задовольняє цю властивіть (тобто, система не може повернутися в E_j за час, відмінний від $t, 2t, 3t, \dots$).

Якщо стан E_j є зворотнім і неперіодичим, то

$$p_{jj}^{(n)} \to \mu_j^{-1} f_{ij} \text{ при } n \to \infty$$

і зокрема,

$$p_{jj}^{(n)} \to \mu_j^{-1} \text{ при } n \to \infty \tag{1.4}$$

Якщо стан E_j нульовий, то варто покласти μ_j^{-1}=0

<u>Означення.</u> Якщо стан E_j зворотній і має період t, то співвідношення (1.4) слід замінити іншим співвідношенням:

$$p_{jj}^{(nt)} \to t\mu_j^{-1} \text{ при } n \to \infty$$

Зворотній стан, який не є ні нульовим, ні періодичним, будемо називати *ергодичним*. [15]

<u>Означення.</u> Розподіл ймовірностей $\{\pi_k\}$ називається *стаціонарним*, якщо

$$\pi_j = \sum_i \nu_i p_{ij} \tag{1.5}$$

<u>Теорема.</u> Незвідний неперіодичний ланцюг Маркова належить одному з двох класів:

а) якщо всі стани незворотні, або всі стани нульові, то $p_{jk}^{(n)} \to 0$ при $n \to \infty$ для будь-якої пари індексів j, k і не існує стаціонарного розподілу;

б)якщо всі стани ергодичні, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} p_{jk}^{(n)} = \pi_k > 0,$

де $\pi_k -$ величина, обернена середньому часу повернення в E_k. В цьому випадку $\{\pi_k\}$ – стаціонарний розподіл і не існує ніяких інших стаціонарних розподілів.

<u>Означення.</u> *Періодом* стану i називається число

$$d(i) = \text{НСД}\left\{n \geq 1 : p_{ii}^{(n)} > 0\right\}. \text{ [15].}$$

<u>Теорема Маркова.</u> Нехай ланцюг Маркова з не більш ніж зліченою кількістю станів $E = \{1, 2, \dots\}$ і матрицею перехідних ймовірностей $P = \{p_{ij}\}$ такий, що всі стани сполучні і період ∀ стану =1. Тоді для всіх i та j існують границі

$$\lim_n p_{ij}^n = \pi_j,$$

які не залежать від i.

Більш того

а)

$$\sum_i \pi_j \leq 1, \sum_i \pi_i p_{ij} = \pi_j;$$

б) або всі $\pi_j = 0$, або ж $\sum_i \pi_j = 1$;

в) якщо всі $\pi_j = 0$, то стаціонарний розподіл не існує;

якщо ж $\sum_i \pi_j = 1$, то $\Pi = (\pi_1, \pi_2, ..)$ утворює єдиний стаціонарний розподіл.

г) якщо $E -$ скінченне, то стаціонарний розподіл $\exists$.[5]

1.2. *Ланцюг Маркова з неперервним часом*

Означення. *Ланцюг Маркова з неперервним часом,* A −матрицею і початковим розподілом λ – сімейство таких випадкових величин $(X_t, t \geq 0)$ зі значеннями в I, що:

а) $P(X_0 = i) = \lambda_i$,

б) для будь-яких $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ і будь-яких станів

$i_0, \dots, i_n \in I$ виконується рівність

$$P\big(X_0 = i_0, X_{t_1} = i_1, \dots, X_{t_n} = i_n\big) =$$

$$= \lambda_{i_0} p_{i_0 i_1}(t_1) p_{i_1 i_2}(t_2 - t_1) \dots p_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1}),$$

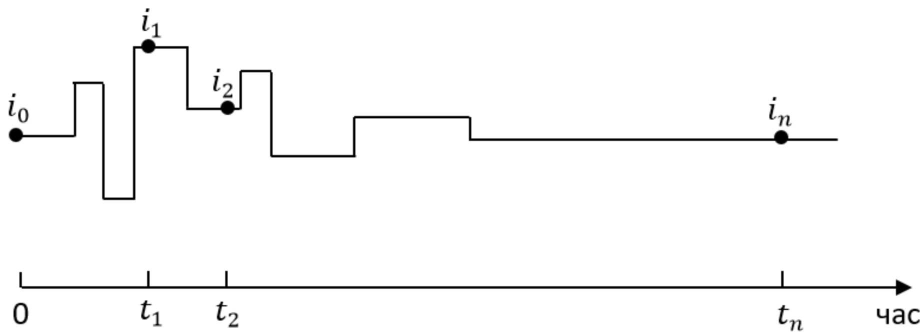


Рис.1

де $p_{ij}(t)$ − елемент матриці $P(t) = e^{tA}$.

Типова траєкторія ланцюга Маркова з неперервним часом зображена на Рис. 1

Ланцюг Маркова з неперервним часом (X_t) *з генератором A має наступні властивості:* при умові, що $X_t = i, q_i = -q_{ii} > 0,$ залишковий час перебування R_i в стані i має експоненціальний розподіл з параметром $q_i = -q_{ii}$:

$$P(R_i \geq \tau | X_t = i) = P(X_{t+s} = i, \forall\, 0 \leq s < \tau | X_t = i) = e^{-q_i \tau}.$$

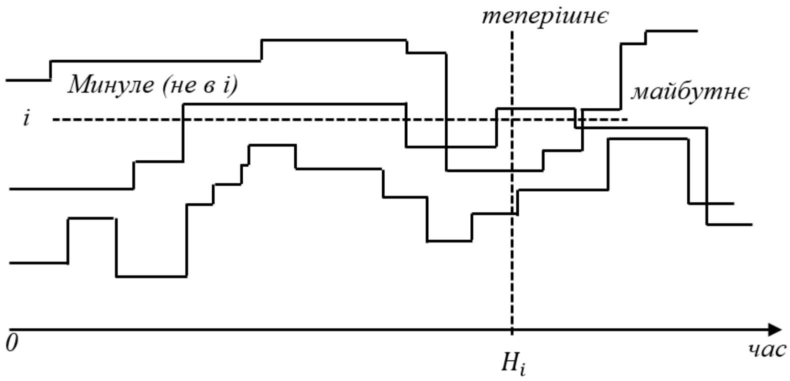


Рис.2

Далі, в момент часу $t + R_i$ ланцюг здійснює стрибок в стан j з ймовірністю $\widehat{p_{ij}} = q_{ij}/q_i$.

$$P\left(X_{t+R_i} = j \middle| X_t = i\right) = q_{ij}/q_i$$

Рис.3

Якщо для стану i виконується умова $q_i = 0$, то $q_{ij} = 0, \forall j$; такий стан називається поглинаючим (Рис.3). Відповідна діаграма не містить стрілок, які виходять зі стану i.

Будь-яка A −матриця має стаціонарний розподіл, тобто власний вектор-рядок $\pi = (\pi_j)$ з нульовим власним значенням і невід’ємними елементами, для яких $\sum_i \pi_i = 1$.

Насправді будь-яка A-матриця має стаціонарний розподіл, тобто власний вектор-рядок $\pi = \pi_i$ із нульовим власним значенням і невід’ємними компонентами, для яких $\sum_i \pi_i = 1$. Зокрема, 0 є власним значенням будь-якої А-матриці.

Як і в випадку дискретного часу, якщо

$$P(t) \to \Pi = \begin{array}{c} \pi^{(1)} \\ \pi^{(2)} \\ \vdots \\ \pi^{(m)} \end{array} \begin{pmatrix} - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \end{pmatrix},$$

то кожен рядок $\pi^{(i)}$є стаціонарним розподілом:

$$\pi^{(i)}P(t) = (\Pi P(t))^{(i)} = (\lim_{\tau \to \infty} P(\tau)P(t))^{(i)} = (\lim_{\tau \to \infty} P(\tau + t))^{(i)} = \pi^{(i)}. \qquad [16]$$

1.3. *Лінійні оператори та операції над ними*

При дослідженні структури лінійного оператора A в $\mathbb{R}$ значну роль відіграють вектори x, для яких

$$Ax = \lambda x, \qquad \lambda \in K, x \neq 0. \tag{2.1}$$

Такі вектори називаються *власними векторами*, а відповідні їм числа λ – *характеристичними*, або *власними числами* матриці A.

Для знаходження характеристичних чисел та власних векторів оператора A виберемо довільно базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ в $\mathbb{R}$. Нехай

$$x = \sum_{i=k}^{n} x_i e_i$$

і $A = \|a_{ik}\|_1^n$ – матриця, яка відповідає оператору A в базисі $e_1, e_2, \dots, e_n$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{2.2}$$

Рівняння (2.2) представляє собою алгебраїчне рівняння степені n відносно λ і називається *характеристичним рівнянням* матриці $A = \|a_{ik}\|_1^n$. Ліва частина цього рівняння називається *характеристичним многочленом*.

Таким чином, кожне характеристичне число λ лінійного оператора A є коренем характеристичного рівняння (2.2). [2]

<u>Означення.</u> Матриця $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ називається додатньою $A > 0$, якщо всі $a_{ij} > 0$. [7]

<u>Теорема Перона (1907р.).</u> Додатня матриця $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ завжди має дійсне додатне власне значення r, яке є простим коренем її характеристичного многочлена $\chi_A(x)$ і яке більше абсолютних значень інших власних чисел. Цьому максимальному власному числу r відповідає додатній власний вектор $\vec{z}^T = (z_1, \dots z_n)^T$.

<u>Наслідок.</u> Нехай $A = (a_{ij})$ – додатня матриця. Тоді матриця

$$P = r^{-1}\begin{pmatrix} z_1^{-1} & & \cdots & & \\ & z_2^{-1} & & 0 & \\ & & \cdots & & \\ & 0 & \cdots & \cdots & \\ & & \cdots & \cdots & z_n^{-1} \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} z_1 & & \cdots & & \\ & z_2 & & 0 & \\ & & \cdots & & \\ & 0 & \cdots & \cdots & \\ & & \cdots & \cdots & z_n \end{pmatrix}$$

є стохастичною.[6]

Для знаходження оберненої матриці корисним буде зведення її до трьохдіагональної, тому розглянемо один із методів знаходження оберненої матриці до трьохдіагональної.

Трьохдіагональною матрицею називається матриця вигляду [14]

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & a_2 & & & 0 \\ a_2 & b_2 & a_3 & & \\ & a_3 & b_3 & a_4 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & a_n \\ 0 & & & a_n & b_n \end{pmatrix}$$

Для знаходження оберненої до неї скористаємось розкладом вигляду:

$$A = DQC, D = (d_{ij}), Q = (q_{ij}), C = (c_{ij}),$$

де

$$d_{ij} = \begin{cases} b_i + C_i a_i, & i = j, C_1 = 0, \\ 0, & i \neq j; \end{cases}$$

$$q_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ \dfrac{a_i}{b_i + C_i a_i}, & i = j+1, j = 1,2, \dots, n-1, \\ 0, & \text{в інших випадках;} \end{cases}$$

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ -C_j, & i = j-1, j = 2,3, \dots, n, \\ 0, & \text{в інших випадках;} \end{cases}$$

З умов симетрії матриці A отримаємо рекурентну залежність для коефіцієнтів C_i:

$$C_1 = 0, \quad C_i = -\frac{a_i}{b_{i-1} + C_{i-1} a_{i-1}}, \qquad 2 \leq i \leq n.$$

Матрицю, обернену до A отримаємо в результаті добутку обернених матриць:

$$A^{-1} = C^{-1} Q^{-1} D^{-1}. \qquad [1]$$

Розділ 2. Дослідження випадкового блукання

2.1. Постановка задачі

Розглянемо однорідний ланцюг Маркова $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ з фазовим простором $E = \mathbb{Z} \times \{0,1,\dots,m\}$. Тобто, $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ – випадкове блукання у нескінченній смузі шириною m (Рис.1).

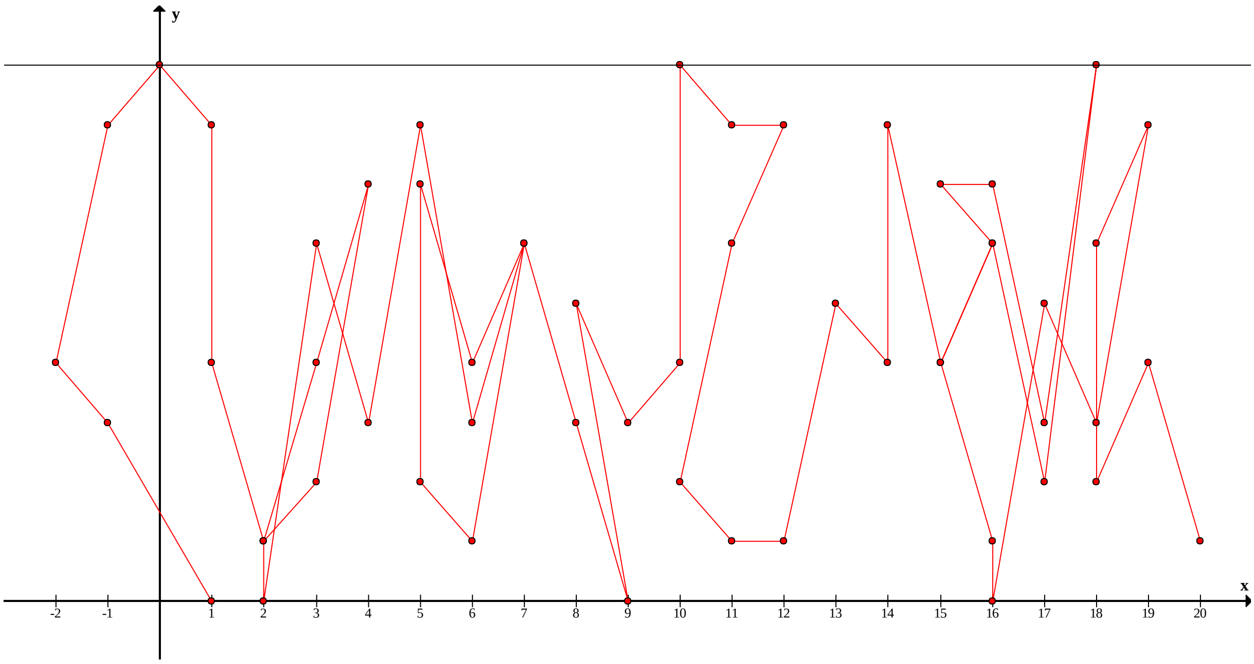


Рис.1

Припустимо, що перехідні ймовірності задовольняють умову:

$$\forall \{(i,j),(k,l)\} \in E \ \forall n \ \in \mathbb{Z}: p_{(i,j),(k,l)} = p_{(i+n,j),(k+n,l)} \qquad (2.1)$$

Тут $p_{(i,j)(k,l)}$ – перехідна ймовірність зі стану (i,j) в стан (k,l).

Умова (2.1) означає, що перехідні ймовірності ланцюга Маркова $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ однорідні відносно горизонтальних зсувів.

Також будемо припускати, що $p_{(i,j)(k,l)} = 0$, якщо $|i-k| > 1$, тобто зсув можливий не більш ніж на одну позицію відносно осі абсцис.

Додамо також припущення, що всі стани ланцюга Маркова $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ сполучні.

Введемо наступні матриці P, R, Q:

$P = \left(p_{ij}\right) = (p_{(0,i)(1,j)})$ – матриця перехідних ймовірностей на наступний рівень;

$R = \left(r_{ij}\right) = (p_{(0,i)(0,j)})$ – матриця перехідних ймовірностей на той же рівень;

$Q = \left(q_{ij}\right) = (p_{(0,i)(-1,j)})$ – матриця перехідних ймовірностей на попередній рівень.

Постановка задачі. *Нехай* $Z_n = (X_n, Y_n)$, $\tau_n = inf\{k \geq 1 : X_k = n\} -$ *момент потрапляння на* $n -$ й *рівень (по горизонталі). Знайти* $P\left(Y_{\tau_n} = j\right)$ *та* $\lim_{n\to\infty} P\left(Y_{\tau_n} = j\right)$.

Будемо припускати, що всі стани ланцюга Маркова сполучні, тобто

$$\forall i: \sum_j p_{ij} > 0.$$

2.2. Частинні випадки

1. Розглянемо випадок, коли ланцюг Маркова $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ відразу потрапив на наступний рівень, тобто $R = Q = 0$. Це означає, що з кожним кроком частинка переходитиме на наступний рівень і рівно за n кроків досягне рівня n. Тобто, маємо рівняння наступного вигляду:

$$X = P.$$

Стаціонарний розподіл для даного випадку знаходиться з розв'язку наступної системи рівнянь:

$$X\pi = \pi, \tag{2.2}$$

де $\pi = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \vdots \\ \pi_n \end{pmatrix} -$ стаціонарний розподіл.

2. Розглянемо випадок, коли випадкове блукання відбувається при умові, що $Q = 0$. Це означає, що при кожному кроці частинка може залишитись на тому ж рівні, або перейти на наступний, але ніяк не на попередній.

Позначимо через $\xi = inf\{n \geq 0: X_\xi = 1\}-$ перший момент потрапляння ланцюга Маркова $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ на наступний рівень, тут $Z_n = (X_n, Y_n)$ – положення випадкового блукання в момент часу $n, n \in \mathbb{Z}_+$.

Позначимо $x_{ij} = P_i\left(Z_\xi = (1, j)\right)$, тоді

$$x_{ij} = P_i(\text{потрапили в } j \text{ за 1й крок}) +$$

$$+P_i\big(\text{за 1й крок залишились на тому ж рівні, а потім потрапили в } (1, j)\big)$$

$$= p_{ij} + \sum_k P_i\big(Z_1 = (0, k), X_\xi = j, \xi \geq 2\big) =$$

$$= p_{ij} + \sum_k P_i\big(Z_1 = (0, k)\big)\, P_i(X_\xi = j, \xi \geq 2 \,|Z_1 = (0, k))$$

$$= p_{ij} + \sum_k r_{ik} x_{kj}. \qquad (2.3)$$

Систему рівнянь (2.3) можна зобразити в матричному вигляді:

$$X = P + RX.$$

Отже, скориставшись правилами операцій з матрицями, маємо:

$$X = P(E - R)^{-1}, \qquad (2.4)$$

якщо обернена матриця в (2.4) дійсно існує. Перевіримо це твердження.

Лема 1. *Обернена матриця рівна*

$$(E - R)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} R^n.$$

Доведення. Для доведення леми скористаємось теоремою Фробеніуса, згідно з якою, якщо $R \geq 0$, то завжди існує додатне власне значення r, яке є простим коренем її характеристичного многочлена $\chi_R(x)$.

Розглянемо матрицю $B > 0$ таку, що сума елементів будь-якого рядка матриці $(R + B)$ буде рівною 1. Маємо

$$r_{ij} + b_{ij} = r_{ij}\left(1 + \frac{b_{ij}}{r_{ij}}\right) \geq r_{ij}(1 + \varepsilon),$$

де $\varepsilon = \min\limits_{i,j} \frac{b_{ij}}{r_{ij}} > 0$.

Маємо $R + B \geq (1 + \varepsilon)R$.

Піднесемо ліву і праву частини до n −го степеня, отримаємо:

$$(R + B)^n \geq (1 + \varepsilon)^n R^n,$$

звідси

$$R^n \leq \frac{1}{(1+\varepsilon)^n}(R + B)^n.$$

Матриця $(R + B)$ – матриця переходу ланцюга Маркова, а отже, $(R + B)^n -$ матриця переходу ланцюга Маркова за n кроків, тобто, також стохастична матриця.

Так як

$$\frac{1}{(1 + \varepsilon)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

а значить, максимальний корінь характеристичного многочлена < 1, а це значить, що всі інші корені

$$|\lambda_k| < \lambda_{max} < 1.$$

$$\forall\, i, j: r_{ij} \leq C(\lambda_{max})^n;$$

$$(E - R)\left(\sum_{k=0}^{\infty} R^k\right) = \lim_{n\to\infty}((E - R)\sum_{k=0}^{n} R^k) = \lim_{n\to\infty}(E - R^{n+1}) = E.$$

Домноживши обидві частини рівності зліва на $(E - R)^{-1}$,отримаємо

$$\sum_{n=0}^{\infty} R^n = (E - R)^{-1},$$

Що й треба було довести.

2.3. *Загальний випадок*

Розглянемо загальний випадок, коли випадкове блукання відбувається в нескінченій смузі шириною m з наступними матрицями перехідних ймовірностей $P \neq 0, R \neq 0, Q \neq 0$.

Позначимо $x_{ij} = P_i\left(Z_\xi = (1, j)\right)$, тоді аналогічно попередньому випадку, маємо:

$$x_{ij} = P_i(\text{потрапили в } j \text{ за 1й крок}) +$$

$$+P_i(\text{за 1й крок залишились на тому ж рівні, а потім потрапили в } j)$$

$$P_i(\text{потрапили за 1й крок в } (j-1), \text{потім потрапили в } j) = p_{ij} +$$

$$\sum_k r_{ik} x_{kj} + \sum_k \sum_l P_i\big(Z_1 = (0,k), X_{\tau_1} = l, X_{\tau_2} = j\big) = p_{ij} + \sum_k r_{ik} x_{kj} +$$

$$\sum_k \sum_l P_i\big(Z_1 = (0,k)\big) \cdot P_i\big(X_{\tau_1} = l, X_{\tau_2} = j\big) | P_i\big(Z_1 = (0,k)\big) = p_{ij} +$$

$$\sum_k r_{ik} x_{kj} + \sum_k P_i\big(Z_1 = (0,k)\big) \cdot \sum_l P_i\big(X_{\tau_1} = l, X_{\tau_2} = j\big) | P_i\big(Z_1 = (0,k)\big)$$

$$= p_{ij} + \sum_k q_{ik} \sum_l P_i\left(X_{\tau_1} = l \middle| Z_1 = (0,k)\right) \cdot P_i\left(X_{\tau_2} = j \middle| Z_1 = (0,k)\right) =$$

$$= p_{ij} + \sum_k r_{ik} x_{kj} + \sum_k q_{ik} \sum_l x_{lk} x_{lj} \qquad (2.5)$$

Зобразимо систему (2.5) у матричному вигляді:

$$X = P + RX + QX^2 \qquad (2.6)$$

2.4. *Існування та єдиність розв'язку*

Покажемо, що існує єдиний розв'язок рівняння (2.6) в класі невід'ємних матриць.

Введемо наступне означення:

<u>Означення 1.</u> *Нехай* $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) -$ *матриці розмірності* $n \times n$. *Будемо говорити, що* $A \le B$, *якщо* $\forall i, j$: $a_{ij} \le b_{ij}$.

В ході розв'язку задачі нам знадобляться наступні леми:

<u>Лема 2</u>. *Якщо* $A \ge 0, B \ge 0$, *то* $AB \ge 0$.

Дійсно, так як кожен елемент a_{ij} і b_{ij} – невід'ємний, то і кожен елемент матриці AB буде невід'ємним, так як він утворений сумою добутків відповідних елементів матриць A і B.

<u>Лема 3</u>. *Якщо* $B \ge A \ge 0,\ D \ge C \ge 0$, *то* $DB \ge AC$, *зокрема* (2.7)

$$B^2 \ge A^2.$$

<u>Доведення.</u>

Нехай $A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij}),\ C = (c_{ij}),\ D = (d_{ij})$. Елемент добутку матриць представимо у вигляді сум наступним чином:

$$DB = \left(\sum_j d_{ij} b_{jk}\right)_{i,k=1}^{n};$$

$$AC = \left(\sum_j a_{ij} c_{jk}\right)_{i,k=1}^{n}.$$

Так як $d_{ij} \ge c_{ij},\ b_{jk} \ge a_{jk}$ і всі елементи невід'ємні, то відповідно, і для їхнього добутку буде справедливою нерівність $d_{ij} b_{jk} \ge a_{ij} c_{jk}$, а отже, звідси слідує, що $DB \ge AC$.

Як частинний випадок, коли $B = D$ і $A = C$, можна переписати (2.7) як

$$B^2 \geq A^2.$$

Лема доведена.

Для доведення існування єдиності розв'язку системи (2.6) скористаємось методом послідовних наближень і перепишемо систему наступним чином:

$$X_{n+1} = P + RX_n + Q(X_n)^2 \tag{2.8}$$

Нам знадобляться наступні допоміжні твердження:

1. $\forall n: X_n \geq 0$

Так як $X_0 = 0 -$ нульова матриця, то $X_1 = P > 0,\ X_2 = P + RP + QP^2 > 0$. Кожен наступний елемент послідовності буде залежати від попереднього, який представляє собою суму невід'ємних матриць. Тому в силу цих міркувань і леми 2 дане твердження є вірним.

2. $X_0 \leq X$, *де* $X = \|x_{ij}\| -$ *матриця перехідних ймовірностей.*

Це очевидно в силу того, що X – невід'ємна матриця, а $X_0 -$ нульова матриця.

3. $\forall n: X_n \leq X.$ (2.9)

Для доведення даного твердження скористаємось методом математичної індукції.

Перевіримо базис індукції:

$n = 0$: $X_0 \leq X$ із попереднього пункту, тобто, твердження виконується.

Припустимо, що нерівність (2.9) виконується для $n - 1$, тобто $X_{n-1} \leq X$, або $X_{n-1} - X \leq 0$.

Покажемо, що твердження вірне і для n, тобто, перевіримо, що:

$X_n \leq X.$

Підставимо в дану нерівність (2.6) і (2.8), отримаємо наступну нерівність:

$$P + RX_{n-1} + QX_{n-1}{}^2 \leq P + RX + QX^2,$$

$$R(X_{n-1} - X) + Q(X_{n-1}{}^2 - X^2) \leq 0.$$

Застосувавши леми1 і леми2, переконуємось у правильності нерівності (2.9).

4. $\forall n$: $X_{n+1} \geq X_n$.

Доведемо твердження 4 методом математичної індукції. Спочатку перевіримо виконання нерівності для $n = 0$:

$X_1 \geq X_0 \Leftrightarrow P \geq X_0 -$ виконується, так як $P -$ невід'ємна матриця.

Нехай нерівність виконується для $n - 1$, тобто $X_n \geq X_{n-1} \Leftrightarrow X_n - X_{n-1} \geq 0$.

Покажемо, що вірно і для n: $X_{n+1} \geq X_n$.

$$P + RX_n + QX_n{}^2 \geq P + RX_{n-1} + QX_{n-1}{}^2$$

$$R(X_n - X_{n-1}) + Q(X_n{}^2 - X_{n-1}{}^2) \geq 0$$

Остання нерівність виконується в силу сформульованих раніше леми1 і леми2.

<u>Означення 2.</u> *Будемо говорити, що послідовність матриць* $\{X_n\}_{n\geq 0}$ *називається зростаючою, якщо* $\forall n$: $X_n \geq X_{n-1}$.

Із пунктів 1-4 випливає, що послідовність $\{X_n\}_{n\geq 0}$ є зростаючою. Оскільки всі елементи матриць є перехідними ймовірностями, то вони обмежені 1. В силу цих міркувань можна зробити висновок, що границя послідовності X_n існує.

Позначимо $X^* = lim X_n$.

X^* задовольняє рівнянню (2.6). Дійсно, в (2.7) можна перейти до границі, оскільки операції додавання та множення матриць дають в результаті неперервну функцію. Відмітимо також, що в силу пункту 3 $X^* \leq X$.

Залишається перевірити, що (2.6) має не більше одного невід'ємного розв'язку.

Відмітимо, що $X = \sum \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots PRQQRRP}$ - сума всіх можливих комбінацій із букв P, R, Q, таких, що виконується умова:

$$\text{кількість букв } Q + \text{кількість букв } P = 1 \qquad (*)$$

$$\forall\, k \leq n\text{: кількість букв } Q \text{ до номера } k \geq \text{кількість букв } P.$$

Покладемо $R = 0$, тоді:

$$X_1 = P;$$

$$X_2 = P + QX_1^2 = P + QP^2;$$

$$X_3 = P + QX_2^2 = P + Q(P + QX_1^2)^2 = P + Q(P + QP^2)^2 = P + Q(P + QP^2) *$$
$$(P + QP^2) = P + QP^2 + QPQP^2 + Q^2P^3 + Q^2P^2QP^2;$$

$$X_5 = P + QX_4^2 = P + Q(P + QX_3^2)^2 = P + Q(P + Q(P + QX_2^2)^2)^2 =$$
$$= P + Q(P + Q(P + Q(P + QX_1^2)^2)^2 = P + Q(P + Q(P + Q(P + QP^2)^2)^2.$$

Таким чином помітили певну закономірність:

$$X_n = \underbrace{P + Q}\,(\underbrace{P + Q}_{(n-2)\text{разів}}\;(\ldots(P + QP^2)^2 \ldots)^2,$$

причому, кількість степенів 2 також $= (n-2)$.

Так як $X \geq X_n \geq X_{n-1}$, що було показано раніше, а

$$X = \sum_{\substack{\text{всі можливі}\\ \text{комбінації,}\\ \text{що задовольняють}\\ \text{умову } (*)}} QPQ \ldots\ldots\ldots. = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\substack{\text{всі слова}\\ \text{довжини } k,\\ \text{що задовольняють}\\ \text{умову } (*)}} (\ldots\ldots) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \left(\sum_{\substack{\text{всі слова}\\ \text{довжини } k,\\ \text{що задовольняють}\\ \text{умову } (*)}} (\ldots) \right).$$

Відмітимо, що $\forall N\ \exists\ n$

$$X_n \geq \sum_{k=1}^{N} \left(\sum_{\substack{\text{всі слова} \\ \text{довжини } k, \\ \text{що задовольняють} \\ \text{умову } (*)}} (\dots) \right)$$

Перейдемо до границі і скористаємось тим, що $X^* \leq X,$як було доведено раніше:

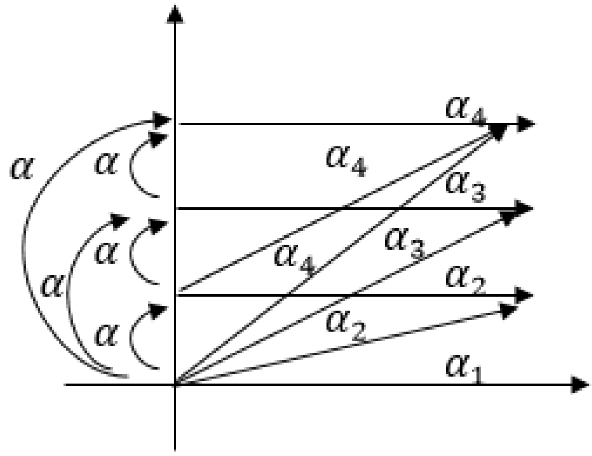
$$X^* = \lim_{n\to\infty} X_n \geq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N} (\sum_{k=1}^{N} \left(\sum_{\substack{\text{всі слова} \\ \text{довжини } k, \\ \text{що задовольняють} \\ \text{умову } (*)}} (\dots) \right)) = X.$$

З цього слідує, що $X^* = X$, причому, розвязок єдиний.

Розділ 3. Приклади

1. Розглянемо випадок ланцюга Маркова з неперервним часом.

Нехай для даного випадку ланцюг Маркова має наступні інтенсивності переходу:



$$\lambda_{(k,i)(k,j)} = \alpha, \quad \forall\, k, i, j$$

$$\lambda_{(k,i)(k+1,j)} = \alpha_j.$$

Рис. 2

Ймовірності переходу виражаються через інтенсивності наступним співвідношенням:

$$p_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{\sum_{k \neq i} \lambda_{ik}}.$$

В даному випадку матриці перехідних ймовірностей матимуть наступний вигляд:

$$P = \begin{pmatrix} \dfrac{\lambda_1}{(m-1)\alpha + \sum \lambda_j} & \cdots & \dfrac{\lambda_m}{(m-1)\alpha + \sum \lambda_j} \\ \cdots & & \cdots \quad \cdots \\ \dfrac{\lambda_1}{(m-1)\alpha + \sum \lambda_j} & \cdots & \dfrac{\lambda_m}{(m-1)\alpha + \sum \lambda_j} \end{pmatrix};$$

$$R=\begin{pmatrix} 0 & \frac{\alpha}{(m-1)\alpha+\sum\lambda_j} & \cdots & \frac{\alpha}{(m-1)\alpha+\sum\lambda_j} \\ \frac{\alpha}{(m-1)\alpha+\sum\lambda_j} & 0 & \cdots & \frac{\alpha}{(m-1)\alpha+\sum\lambda_j} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \frac{\alpha}{(m-1)\alpha+\sum\lambda_j} & \frac{\alpha}{(m-1)\alpha+\sum\lambda_j} & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Як було виведено раніше, $X=(E-R)^{-1}P$. (3.1)

$$E-R=\begin{pmatrix} 1 & \frac{-\alpha}{(m-1)\alpha+\sum\lambda_j} & \cdots & \frac{-\alpha}{(m-1)\alpha+\sum\lambda_j} \\ \frac{-\alpha}{(m-1)\alpha+\sum\lambda_j} & 1 & \cdots & \frac{-\alpha}{(m-1)\alpha+\sum\lambda_j} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \frac{-\alpha}{(m-1)\alpha+\sum\lambda_j} & \frac{-\alpha}{(m-1)\alpha+\sum\lambda_j} & \cdots & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{\alpha}{m\alpha+\sum\lambda_j}\begin{pmatrix} \frac{m\alpha+\sum\lambda_j}{\alpha} & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \frac{m\alpha+\sum\lambda_j}{\alpha} & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ -1 & -1 & \cdots & \frac{m\alpha+\sum\lambda_j}{\alpha} \end{pmatrix}.$$

Для випадку, коли значення на діагоналі $=1$ шляхом обчислень оберненої матриці вищих порядків m було встановлено, що обернена матриця $(E-R)^{-1}$ матиме наступний вигляд:

$$\begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ b & b & \cdots & a \end{pmatrix},$$

де

$$b=-\frac{1}{2(m-2)},$$

$$a=-(m-3)b=\frac{(m-3)}{2(m-2)}.$$

Беручи до уваги той факт, що добуток матриці на її обернену матрицю дає в результаті одиничну, знайдемо коефіцієнти a,b для нашого випадку. Для зручності позначимо

$$\frac{-\alpha}{(m-1)\alpha+\sum\lambda_j}=\mu,$$

маємо:

$$\begin{pmatrix} 1 & \mu & \cdots & \mu \\ \mu & 1 & \cdots & \mu \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \mu & \mu & \dots & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ b & b & \dots & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Перемноживши матриці, отримаємо наступне:

$$\begin{pmatrix} a+\mu(m-1)b & b+\mu a+\mu(m-2)b & \cdots & b+\mu a+\mu(m-2)b \\ b+\mu a+\mu(m-2)b & a+\mu(m-1)b & \cdots & b+\mu a+\mu(m-2)b \\ \cdots & \cdots & \ddots & \\ b+\mu a+\mu(m-2)b & b+\mu a+\mu(m-2)b & \dots & a+\mu(m-1)b \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо невідомі параметри з системи рівнянь:

$$\begin{cases} a+\mu(m-1)b=1; \\ b+\mu a+\mu(m-2)b=0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=1-\mu(m-1)b; \\ b+\mu(1-\mu(m-1)b)+\mu(m-2)b=0. \end{cases}$$

$$b=\frac{-\mu}{1-\mu^2(m-1)+\mu(m-2)}.$$

Зауважимо, що знаменник b для нашої задачі $\neq 0$, бо

$$\mu=\frac{-\alpha}{(m-1)\alpha+\sum\lambda_j}\neq 0$$

В силу того, що $(m-1)\neq 0$, а α і λ_j – інтенсивності переходу, тобто, вони існують і > 0.

Підставимо знайдене b в вираз для a і остаточно отримаємо:

Як результат вище виконаних операцій, маємо:

$$(E-R)^{-1}=\begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ b & b & \dots & a \end{pmatrix},$$

де

$$a = 1 - \mu(m-1)b, \tag{3.2}$$

$$b = \frac{-\mu}{1 - \mu^2(m-1) + \mu(m-2)}, \tag{3.3}$$

$$\mu = \frac{-\alpha}{(m-1)\alpha + \sum \lambda_j}. \tag{3.4}$$

Наступним кроком знайдемо безпосередньо матрицю X:

$$X = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ b & b & \cdots & a \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1}{(m-1)\alpha+\sum\lambda_j} & \cdots & \frac{\lambda_m}{(m-1)\alpha+\sum\lambda_j} \\ \cdots & & \cdots \quad \cdots \\ \frac{\lambda_1}{(m-1)\alpha+\sum\lambda_j} & \cdots & \frac{\lambda_m}{(m-1)\alpha+\sum\lambda_j} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1}{(m-1)\alpha+\sum\lambda_j}(a+b(m-1)) & \cdots & \frac{\lambda_m}{(m-1)\alpha+\sum\lambda_j}(a+b(m-1)) \\ \cdots & & \cdots \quad \cdots \\ \frac{\lambda_1}{(m-1)\alpha+\sum\lambda_j}(a+b(m-1)) & \cdots & \frac{\lambda_m}{(m-1)\alpha+\sum\lambda_j}(a+b(m-1)) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{(a+b(m-1))}{((m-1)\alpha+\sum\lambda_j)} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_m \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_m \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{X = \frac{(a+b(m-1))}{((m-1)\alpha+\sum\lambda_j)} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_m \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_m \end{pmatrix}} \tag{3.5}$$

де μ, a, b знаходяться із $(3.2) - (3.4)$.

Знайдемо матрицю X на прикладі конкретних значень інтенсивностей переходу.

Розглянемо конкретну систему, в якій

$m = 3,\ \ \alpha = 1,\ \ \lambda_1 = 2,\ \ \lambda_2 = 3,\ \ \lambda_3 = 4,$ і знайдемо значення μ, a та b:

$$\mu = \frac{-1}{2+9} = -\frac{1}{11};$$

$$b = \frac{1}{11\left(1 - \frac{2}{121} - \frac{1}{11}\right)} = \frac{11}{108};$$

$$a = 1 + \frac{2}{11} * \frac{11}{108} = \frac{110}{108}.$$

Підставимо знайдені значення в (5) і в результаті отримаємо матрицю X:

$$X = \frac{\frac{110}{108} + \frac{22}{108}}{2+9}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{3}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{3}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{3}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

<u>*Зауваження.*</u> Сума елементів кожного рядка матриці $X = 1$, що свідчить про те, що дана матриця дійсно є стохастичною.

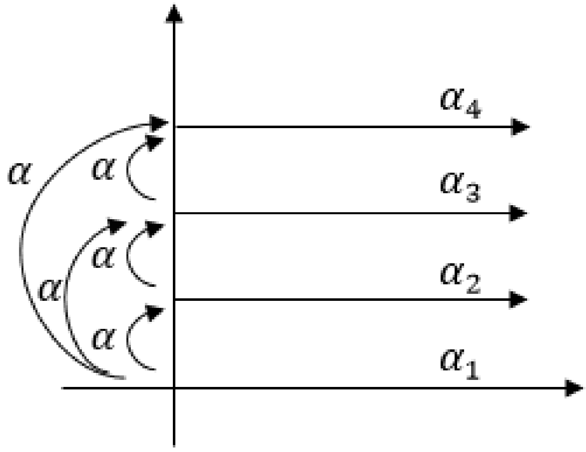
Знайдемо стаціонарний розподіл. Для цього складемо систему рівнянь та знайдемо її розв’язок:

$$\begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{3}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{3}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{3}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} = (\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3);$$

$$\begin{cases} \frac{2}{9}\pi_1 + \frac{3}{9}\pi_2 + \frac{4}{9}\pi_3 = \pi_1; \\ \frac{2}{9}\pi_1 + \frac{3}{9}\pi_2 + \frac{4}{9}\pi_3 = \pi_2; \\ \frac{2}{9}\pi_1 + \frac{3}{9}\pi_2 + \frac{4}{9}\pi_3 = \pi_3; \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi_1 = \frac{1}{3}; \\ \pi_2 = \frac{1}{3}; \\ \pi_3 = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

2. Розглянемо ще один випадок з наступними інтенсивностями переходу:



$$\lambda_{(k,i)(k,j)} = \alpha, \quad \forall\, k, i, j$$

$$\lambda_{(k,i)(k+1,j)} = \begin{cases} \alpha_j, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Рис. 3

Матриці переходу матимуть наступний вигляд:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + m\alpha} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + m\alpha} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\lambda_m}{\lambda_m + m\alpha} \end{pmatrix};$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\alpha}{\lambda_1 + m\alpha} & \cdots & \frac{\alpha}{\lambda_1 + m\alpha} \\ \frac{\alpha}{\lambda_2 + m\alpha} & 0 & & \frac{\alpha}{\lambda_2 + m\alpha} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\alpha}{\lambda_m + m\alpha} & \frac{\alpha}{\lambda_m + m\alpha} & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

$$E-R=\begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{\alpha}{\lambda_1+m\alpha} & \cdots & -\dfrac{\alpha}{\lambda_1+m\alpha} \\ -\dfrac{\alpha}{\lambda_2+m\alpha} & 1 & & -\dfrac{\alpha}{\lambda_2+m\alpha} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -\dfrac{\alpha}{\lambda_m+m\alpha} & -\dfrac{\alpha}{\lambda_m+m\alpha} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо загальний випадок розмірності 2×2 :

$$E-R=\begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{\alpha}{\lambda_1+m\alpha} \\ -\dfrac{\alpha}{\lambda_2+m\alpha} & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо обернену матрицю. Для початку порахуємо визначник:

$$|E-R|=1-\frac{\alpha}{\lambda_1+m\alpha}*\frac{\alpha}{\lambda_2+m\alpha}=\frac{\lambda_1\lambda_2+m\alpha(\lambda_1+\lambda_2)+\alpha^2(m^2-1)}{(\lambda_1+m\alpha)(\lambda_2+m\alpha)}$$

$$(E-R)^{-1}=\frac{1}{|E-R|}*\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\alpha}{\lambda_1+m\alpha} \\ \dfrac{\alpha}{\lambda_2+m\alpha} & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{(\lambda_1+m\alpha)(\lambda_2+m\alpha)}{\lambda_1\lambda_2+m\alpha(\lambda_1+\lambda_2)+\alpha^2(m^2-1)}\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\alpha}{\lambda_1+m\alpha} \\ \dfrac{\alpha}{\lambda_2+m\alpha} & 1 \end{pmatrix}.$$

Маємо:

$$X=(E-R)^{-1}P=\frac{(\lambda_1+m\alpha)(\lambda_2+m\alpha)}{\lambda_1\lambda_2+m\alpha(\lambda_1+\lambda_2)+\alpha^2(m^2-1)}\begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\alpha}{\lambda_1+m\alpha} \\ \dfrac{\alpha}{\lambda_2+m\alpha} & 1 \end{pmatrix}$$

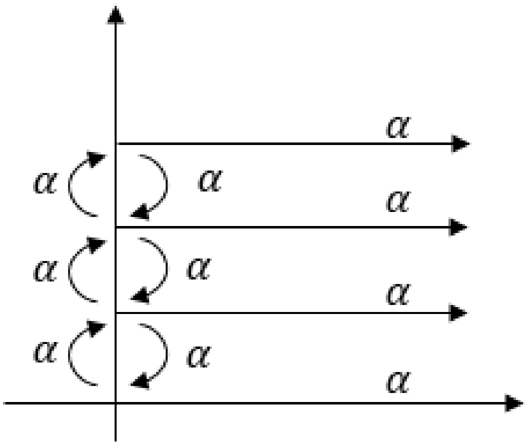
$$*\begin{pmatrix} \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+m\alpha} & 0 \\ 0 & \dfrac{\lambda_2}{\lambda_2+m\alpha} \end{pmatrix}=\frac{(\lambda_1+m\alpha)(\lambda_2+m\alpha)}{\lambda_1\lambda_2+m\alpha(\lambda_1+\lambda_2)+\alpha^2(m^2-1)}*$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 + m\alpha} & \dfrac{\lambda_2\alpha}{(\lambda_1 + m\alpha)(\lambda_2 + m\alpha)} \\ \dfrac{\lambda_1\alpha}{(\lambda_1 + m\alpha)(\lambda_2 + m\alpha)} & \dfrac{\lambda_2}{\lambda_2 + m\alpha} \end{pmatrix}.$$

Для матриць вищих порядків обчислення аналогічні.

3. Розглянемо випадок з наступними інтенсивностями переходу для системи, зображеної на Рис.4:

$$\lambda_{(k,i)(k,j)} = \begin{cases} \alpha, & i = j+1, i = j-1, \quad j = 1, \dots, m-1; \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$



$$\lambda_{(k,i)(k+1,j)} = \begin{cases} \alpha, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Рис. 4

Побудуємо матриці перехідних ймовірностей:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & & \dots & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix};$$

$$R=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \dots & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix};$$

$$E-R=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Дана матриця є трьохдіагональною, або як її ще називають, матрицею Якобі. Скористаємось результатами, викладеними в статті Б. Бухбергера та Г.А. Ємельяненко "Методы обращения трехдиагональных матриц".

Для подальшого знаходження оберненої матриці зведемо її до наступного вигляду:

$$E-R=\begin{pmatrix} b_1 & a_2 & & & 0 \\ a_2 & b_2 & a_3 & & \\ & a_3 & b_3 & a_4 & \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & a_m \\ 0 & & & a_m & b_m \end{pmatrix}.$$

Для цього початкову матрицю помножимо на наступну:

$$(E-R)*A=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{6} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & \frac{1}{6} & 1 \end{pmatrix}=$$

$$
= \begin{pmatrix} b_1 & -\frac{1}{3} & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & b_2 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & b_{m-1} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & & -\frac{1}{3} & b_m \end{pmatrix}.
$$

Причому, відмітимо, що

$$
b_i = \begin{cases} \frac{17}{18}, & i = 2, \quad i = (m-1); \\ 1, & \text{в інших випадках} \end{cases}
$$

Отриману матрицю можна представити, як добуток

$$
(E - R) * A = CDN,
$$

де

$$
C = (c_{ij}), \qquad D = (d_{ij}), \qquad N = (n_{ij}).
$$

$$
c_{ij} = \begin{cases} b_i + C_i a_i, & i = j, C_1 = 0 \\ 0, & i \neq j \end{cases};
$$

$$
d_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ \frac{a_i}{b_i + C_i a_i}, & i = j + 1, j = 1,2, \dots, m - 1; \\ 0, & \text{в інших випадках} \end{cases}
$$

$$
n_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ -C_j, & i = j - 1, j = 2,3, \dots, m; \\ 0, & \text{в інших випадках} \end{cases}
$$

а з умов симетрії матриці $(E - R)$ маємо рекурсивну залежність для коефіцієнтів C_i:

$$
C_i = -\frac{a_i}{b_{i-1} + C_{i-1} a_{i-1}} = \frac{1}{3(b_{i-1} - \frac{1}{3} C_{i-1})}, \qquad 2 \leq i \leq m.
$$

Тоді

$$(E-R)^{-1} = AN^{-1}D^{-1}C^{-1}.$$

Знайдемо, якого вигляду набувають матриці C, D, N для нашого випадку:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & \frac{17}{18}-\frac{1}{3}C_2 & 0 & \cdots & & 0 & \\ 0 & 0 & 1-\frac{1}{3}C_3 & & & & \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ & & & & 1-\frac{1}{3}C_{m-2} & 0 & 0 \\ & & & \cdots & 0 & \frac{17}{18}-\frac{1}{3}C_{m-1} & 0 \\ & 0 & & & 0 & 0 & 1-\frac{1}{3}C_m \end{pmatrix};$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & & & \\ -\frac{1}{3(\frac{17}{18}-\frac{1}{3}C_2)} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \\ 0 & -\frac{1}{3(1-\frac{1}{3}C_3)} & 1 & & 0 & & \\ & \vdots & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & & \cdots & -\frac{1}{3(\frac{17}{18}-\frac{1}{3}C_{m-1})} & 1 & 0 \\ 0 & & & & 0 & -\frac{1}{3(1-\frac{1}{3}C_m)} & 1 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & & & 0 \\ 0 & 1 & -C_3 & \cdots & & 0 & \\ & 0 & 1 & & & 0 & \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ & & 0 & & 1 & -C_{m-1} & 0 \\ & & & \cdots & 0 & 1 & -C_m \\ 0 & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Наступним кроком знайдемо їх обернені матриці.

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & \frac{18}{17-6C_2} & 0 & \cdots & & 0 & \\ 0 & 0 & \frac{3}{3-C_3} & & & & \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ & & & & \frac{3}{3-C_{m-2}} & 0 & 0 \\ & & & \cdots & 0 & \frac{18}{17-6C_{m-1}} & 0 \\ & 0 & & & 0 & 0 & \frac{3}{3-C_m} \end{pmatrix};$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & 0 & \\ (-1)^{1+2}d_{21} & 1 & 0 & \cdots & & & \\ d_{21}d_{32} & (-1)^{2+3}d_{32} & 1 & & & & \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ (-1)^{m-1}d_{21}d_{32}\ldots d_{(m-2),(m-3)} & (-1)^{m}d_{32}\ldots d_{(m-2),(m-3)} & (-1)^{m+1}d_{43}\ldots d_{(m-2),(m-3)} & & 1 & 0 & 0 \\ (-1)^{m}d_{21}d_{32}\ldots d_{(m-1),(m-2)} & (-1)^{m+1}d_{32}\ldots d_{(m-1),(m-2)} & (-1)^{m+2}d_{43}\ldots d_{(m-1),(m-2)} & \cdots & (-1)^{2m-3}d_{(m-1),(m-2)} & 1 & 0 \\ (-1)^{m+1}d_{21}d_{32}\ldots d_{m,(m-1)} & (-1)^{m+2}d_{32}\ldots d_{m,(m-1)} & (-1)^{m+3}d_{43}\ldots d_{m,(m-1)} & & d_{(m-1),(m-2)}d_{m,(m-1)} & (-1)^{2m-1}d_{m,(m-1)} & 1 \end{pmatrix};$$

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & (-1)^{1+2}n_{12} & n_{12}n_{23} & \cdots & & (-1)^{2m}n_{12}n_{23}\cdots n_{(m-1),m} \\ 0 & 1 & (-1)^{2+3}n_{23} & n_{23}n_{34} & & \\ & 0 & 1 & (-1)^{3+4}n_{34} & & \\ & & 0 & \ddots & & n_{(m-2),(m-1)}n_{(m-1),m} \\ & & & 0 & 1 & (-1)^{(m-1)+m}n_{(m-1),m} \\ & 0 & & & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Покажемо, якого вигляду набуде матриця X для випадку розмірності 4×4. Знайдемо спочатку коефіцієнти C_i:

$$C_i = \frac{1}{3\left(b_{i-1} - \frac{1}{3}C_{i-1}\right)};$$

$$C_1 = 0;$$

$$C_2 = \frac{1}{3};$$

$$C_3 = \frac{1}{3\left(\frac{17}{18} - \frac{1}{9}\right)} = \frac{2}{5};$$

$$C_4 = \frac{1}{3\left(1 - \frac{1}{3} * \frac{6}{15}\right)} = \frac{30}{73}.$$

Для того, щоб переконатись, що матриці складені вірно, порахуємо

$$(E-R)*A=CDN:$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{17}{18} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{17}{18} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{73}{90} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{63}{73} \end{pmatrix} *$$

$$* \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{30}{73} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{73}{189} & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{30}{73} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Перемноживши матриці в правій частині, переконаємось у вірності рівності. Тому перейдемо до знаходження обернених матриць, аналогічно тому, як було описано і виведено вище:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{90}{73} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{73}{63} \end{pmatrix};$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{12}{73} & \frac{30}{73} & 1 & 0 \\ \frac{4}{63} & \frac{10}{63} & \frac{73}{189} & 1 \end{pmatrix};$$

$$N^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{15} & \frac{4}{73} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{12}{73} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{30}{73} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$X=(E-R)^{-1}=AN^{-1}D^{-1}C^{-1}P=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & 1 \end{pmatrix}*\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{15} & \frac{4}{73} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{12}{73} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{30}{73} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}*\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{12}{73} & \frac{30}{73} & 1 & 0 \\ \frac{4}{63} & \frac{10}{63} & \frac{73}{189} & 1 \end{pmatrix}*$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{90}{73} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{73}{63} \end{pmatrix}*\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}619 & 0{,}238 & 0{,}095 & 0{,}048 \\ 0{,}238 & 0{,}476 & 0{,}190 & 0{,}095 \\ 0{,}095 & 0{,}190 & 0{,}476 & 0{,}238 \\ 0{,}048 & 0{,}095 & 0{,}238 & 0{,}619 \end{pmatrix}.$$

Зауваження. Підсумувавши елементи кожного рядка матриці, отримаємо в сумі 1, що є підтвердженням вірності виконаних обчислень.

Знайдемо стаціонарний розподіл для даного випадку.

Для цього складемо систему рівнянь:

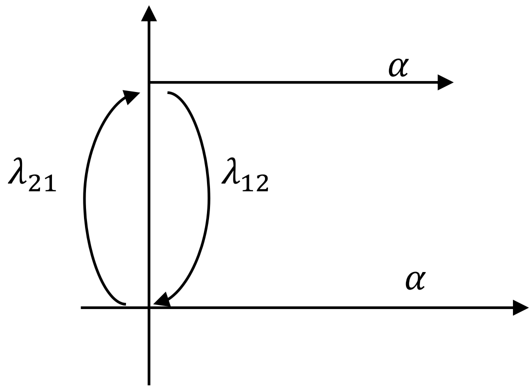
$$\begin{cases} 0{,}619\pi_1+0{,}238\pi_2+0{,}095\pi_3+0{,}048\pi_4=\pi_1; \\ 0{,}238\pi_1+0{,}476\pi_2+0{,}190\pi_3+0{,}095\pi_4=\pi_2; \\ 0{,}095\pi_1+0{,}190\pi_2+0{,}476\pi_3+0{,}238\pi_4=\pi_3; \\ 0{,}048\pi_1+0{,}095\pi_2+0{,}238\pi_3+0{,}619\pi_4=\pi_4. \end{cases}$$

Також візьмемо до уваги той факт, що $\sum_{i=1}^{4}\pi_i=1$.

Розв’язавши дану систему, отримаємо:

$$\begin{cases} \pi_1=0{,}25; \\ \pi_2=0{,}25; \\ \pi_3=0{,}25; \\ \pi_4=0{,}25. \end{cases}$$

4. В даному випадку для розмірності 2×2 матриці перехідних ймовірностей в загальному випадку виглядають наступним чином:



$$P = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\alpha + \lambda_{12}} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{\alpha + \lambda_{21}} \end{pmatrix},$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\lambda_{12}}{\alpha + \lambda_{12}} \\ \frac{\lambda_{21}}{\alpha + \lambda_{21}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо спочатку обернену матрицю $(E - R)^{-1}$.

$$(E - R) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\lambda_{12}}{\alpha + \lambda_{12}} \\ -\frac{\lambda_{21}}{\alpha + \lambda_{21}} & 1 \end{pmatrix},$$

$$|E - R| = 1 - \frac{\lambda_{12}}{\alpha + \lambda_{12}} \frac{\lambda_{21}}{\alpha + \lambda_{21}} = \frac{\alpha^2 + \alpha\lambda_{12} + \alpha\lambda_{21}}{(\alpha + \lambda_{12})(\alpha + \lambda_{21})},$$

$$(E - R)^{-1} = \frac{(\alpha + \lambda_{12})(\alpha + \lambda_{21})}{\alpha^2 + \alpha\lambda_{12} + \alpha\lambda_{21}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\lambda_{12}}{\alpha + \lambda_{12}} \\ \frac{\lambda_{21}}{\alpha + \lambda_{21}} & 1 \end{pmatrix}.$$

Тепер можемо знайти матрицю X:

$$X=\frac{(\alpha+\lambda_{12})(\alpha+\lambda_{21})}{\alpha^2+\alpha\lambda_{12}+\alpha\lambda_{21}}\begin{pmatrix}1 & \frac{\lambda_{12}}{\alpha+\lambda_{12}}\\ \frac{\lambda_{21}}{\alpha+\lambda_{21}} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\alpha}{\alpha+\lambda_{12}} & 0\\ 0 & \frac{\alpha}{\alpha+\lambda_{21}}\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{(\alpha+\lambda_{12})(\alpha+\lambda_{21})}{\alpha^2+\alpha\lambda_{12}+\alpha\lambda_{21}}\begin{pmatrix}\frac{\alpha}{\alpha+\lambda_{12}} & \frac{\alpha\lambda_{12}}{(\alpha+\lambda_{12})(\alpha+\lambda_{21})}\\ \frac{\alpha\lambda_{21}}{(\alpha+\lambda_{12})(\alpha+\lambda_{21})} & \frac{\alpha}{\alpha+\lambda_{21}}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{\alpha(\alpha+\lambda_{21})}{\alpha^2+\alpha\lambda_{12}+\alpha\lambda_{21}} & \frac{\alpha\lambda_{12}}{\alpha^2+\alpha\lambda_{12}+\alpha\lambda_{21}}\\ \frac{\alpha\lambda_{21}}{\alpha^2+\alpha\lambda_{12}+\alpha\lambda_{21}} & \frac{\alpha(\alpha+\lambda_{12})}{\alpha^2+\alpha\lambda_{12}+\alpha\lambda_{21}}\end{pmatrix}. \qquad (3.6)$$

Аналогічно вище викладеним міркуванням, розглянемо конкретний випадок, коли $\alpha=1, \quad \lambda_{12}=2, \quad \lambda_{21}=3.$

Зі значень інтенсивностей можна зробити висновок, що більшу долю часу частинка проведе в точці 2.

Підставимо значення ймовірностей в (3.6) і знайдемо матрицю X:

$$X=\begin{pmatrix}\frac{1(1+3)}{1^2+2+3} & \frac{2}{1^2+2+3}\\ \frac{3}{1^2+2+3} & \frac{1(1+2)}{1^2+2+3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{6} & \frac{2}{6}\\ \frac{3}{6} & \frac{3}{6}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Стаціонарний розподіл знайдемо з системи

$$(\pi_1,\pi_2)X=\binom{\pi_1}{\pi_2}:$$

$$(\pi_1,\pi_2)\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\binom{\pi_1}{\pi_2},$$

$$\begin{cases}\frac{2}{3}\pi_1+\frac{1}{2}\pi_2=\pi_1,\\ \frac{1}{3}\pi_1+\frac{1}{2}\pi_2=\pi_2,\end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}\pi_1 = \frac{1}{2}\pi_2, \\ \pi_1 + \pi_2 = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi_1 = \frac{3}{2}\pi_2, \\ \frac{5}{2}\pi_2 = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi_1 = \frac{3}{5}, \\ \pi_2 = \frac{2}{5}, \end{cases}$$

5. Наведемо приклад на метод послідовних наближень.

Розглянемо випадок розмірності 3х3 і нехай матриці перехідних ймовірностей виглядають наступним чином:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & 0 & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & 0 \end{pmatrix};$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & 0 \end{pmatrix};$$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix};$$

Причому, зауважимо, що для досягнення наступного рівня важливо, щоб інтенсивності переходу на наступний рівень були більшими, ніж інтенсивності залишитись на тому ж рівні, або повернутись на попередній. Дані міркування були досліджені та викладені в магістерській дисертації Надії Бабій.[8]

Як було показано раніше,

$$X_n = P + RX_{n-1} + Q(X_{n-1})^2.$$

Скористаємось методом послідовних наближень та знайдемо X_n вищих порядків.

Для цього в нагоді стане Microsoft Excel, який має функцію МУМНОЖ, що значно спрощує множення матриць. Також для цих цілей можна написати SQL-запит, або програму в Pascal, Deplhi чи іншій мові програмування.

Поруч із кожною матрицею, запишемо відповідну їй суму елементів в стовбці чи рядку, що стане доказом того, що при кожному кроці наближення, похибка результату буде зменшуватись.

Покладемо $X_0 = 0,$ тоді:

$$X_1 = P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & 0 & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & 0 \end{pmatrix}; \qquad 0{,}44$$

$$X_2 = P + RX_1 + Q(X_1)^2 = \begin{pmatrix} \frac{20}{243} & \frac{64}{243} & \frac{64}{243} \\ \frac{64}{243} & \frac{20}{243} & \frac{64}{243} \\ \frac{64}{243} & \frac{64}{243} & \frac{20}{243} \end{pmatrix} \qquad 0{,}61$$

$$X_5 = P + RX_4 + Q(X_4)^2 = \begin{pmatrix} \frac{44}{333} & \frac{199}{619} & \frac{199}{619} \\ \frac{199}{619} & \frac{44}{333} & \frac{199}{619} \\ \frac{199}{619} & \frac{64}{243} & \frac{199}{619} \end{pmatrix} \qquad 0{,}78$$

$$X_{10} = P + RX_9 + Q(X_9)^2 = \begin{pmatrix} \frac{93}{523} & \frac{359}{978} & \frac{359}{978} \\ \frac{359}{978} & \frac{93}{523} & \frac{359}{978} \\ \frac{359}{978} & \frac{64}{243} & \frac{359}{978} \end{pmatrix} \qquad 0{,}91$$

$$X_{15} = P + RX_{14} + Q(X_{14})^2 = \begin{pmatrix} \frac{60}{311} & \frac{326}{853} & \frac{326}{853} \\ \frac{326}{853} & \frac{60}{311} & \frac{326}{853} \\ \frac{326}{853} & \frac{326}{853} & \frac{60}{311} \end{pmatrix} \qquad 0{,}96$$

$$X_{20} = P + RX_{19} + Q(X_{19})^2 = \begin{pmatrix} \frac{156}{781} & \frac{198}{509} & \frac{198}{509} \\ \frac{198}{509} & \frac{156}{781} & \frac{198}{509} \\ \frac{198}{509} & \frac{198}{509} & \frac{156}{781} \end{pmatrix} \qquad 0{,}98$$

$$X_{25} = P + RX_{24} + Q(X_{24})^2 = \begin{pmatrix} \frac{115}{566} & \frac{166}{423} & \frac{166}{423} \\ \frac{166}{423} & \frac{115}{566} & \frac{166}{423} \\ \frac{166}{423} & \frac{166}{423} & \frac{115}{566} \end{pmatrix} \qquad 0{,}99$$

Виконуючи наступні ітерації в Excel помічаємо, що після 50-го наближення матриці однакові, тобто:

$$X_{50} = X_{51} = X_{52} = \cdots = \begin{pmatrix} \frac{39}{191} & \frac{24}{61} & \frac{24}{61} \\ \frac{24}{61} & \frac{39}{191} & \frac{24}{61} \\ \frac{24}{61} & \frac{24}{61} & \frac{39}{191} \end{pmatrix} \qquad 0{,}991$$

Також для перевірки отриманих значень було написано макрос в Microsoft Excel, що дає можливість отримати більш точні підрахунки.

На малюнку нижче наведений приклад для матриць розмірності 6x6 з результатами на 100 кроці ітерації.

Розмірність матриць	6
Крок=	100

Введення даних

Розрахунок

Матриця P

1/70	3/70	6/35	1/14	3/35	9/70
2/25	2/25	2/25	2/25	2/25	2/25
1/40	1/20	3/40	1/10	1/8	3/20
1/15	1/15	1/15	1/15	7/30	1/15
1/12	1/12	1/60	1/20	1/15	1/10
1/50	1/50	3/25	1/10	2/25	3/25

Матриця R

1/70	1/70	1/70	1/70	1/70	1/70
1/50	1/10	1/10	1/50	1/50	1/50
1/40	1/40	1/40	1/40	1/40	1/40
1/30	1/30	1/30	1/30	1/15	1/30
1/30	1/20	1/15	1/12	1/10	1/60
1/50	1/10	1/10	1/50	1/50	1/50

Матриця Q

1/35	6/35	3/35	3/70	2/35	1/70
1/25	1/25	1/25	1/25	1/25	1/25
3/40	3/40	1/40	1/20	1/20	1/20
1/30	1/30	1/30	1/30	1/30	1/30
1/30	1/20	1/60	1/20	1/20	1/20
4/25	1/50	1/50	1/50	1/50	1/50

Матриця X_n

0,064332601	0,100776	0,252831	0,149508	0,1961475	0,236405
0,13353803	0,142817	0,165963	0,165235	0,1963005	0,1961473
0,073659224	0,106512	0,154615	0,176449	0,2331148	0,2556501
0,112542662	0,119533	0,137829	0,135719	0,3312741	0,1631024
0,148417808	0,157981	0,111203	0,144131	0,2070676	0,2311987
0,075121303	0,084847	0,209069	0,188856	0,2010377	0,2410683

1
1
1
1
1
1

Розділ 4. Охорона праці та безпека в надзвичайних ситуаціях

4.1 Оцінка важкості та напруженості праці

Для об'єктивної оцінки умов праці на виробництві проводиться атестація робочих місць за умовами праці. ***Основна мета атестації*** полягає у врегулюванні відносин між роботодавцем і працівниками у галузі реалізації прав на належні й безпечні умови праці. Результати атестації використовуються для цілеспрямованої і планомірної роботи, спрямованої на покращення умов праці, зниження рівня травматизму і захворюваності, а також для надання пільг і компенсацій, передбачених чинним законодавством, таких як скорочена тривалість робочого часу, додаткова оплачувана відпустку, пільгова пенсія, оплата праці у підвищеному розмірі.

Для проведення атестації робочих місць та встановлення пріоритету в проведенні оздоровчих заходів використовується гігієнічна класифікація праці за показниками шкідливості та небезпечності факторів виробничого середовища, важкості та напруженості трудового процесу.

Виходячи з принципів гігієнічної класифікації, умови праці поділяються на 4 класи: оптимальні, допустимі, шкідливі та небезпечні (екстремальні).

1-й клас – ОПТИМАЛЬНІ умови праці – такі умови, при яких зберігається не лише здоров'я працюючих, а й створюються передумови для підтримання високого рівня працездатності. Оптимальні гігієнічні нормативи виробничих факторів встановлені для мікроклімату й факторів трудового процесу. Для інших факторів за оптимальні приймаються такі умови праці, за яких несприятливі фактори виробничого середовища не перевищують рівнів, прийнятих за безпечні для населення.

2-й клас – ДОПУСТИМІ умови праці – характеризуються такими рівнями факторів виробничого середовища і трудового процесу, які не перевищують встановлених нормативів. А можливі зміни функціонального стану організму відновлюються за час регламентованого відпочинку або до початку наступної зміни, та не завдають негативного впливу стану здоров'я працюючих та їх нащадкам у найближчому і віддаленому періодах майбутнього.

3-й клас – ШКІДЛИВІ умови праці – характеризуються такими рівнями шкідливих виробничих факторів, які перевищують нормативи і здатні завдавати несприятливого впливу організму працюючого та/або його нащадкам.

Шкідливі умови праці за ступенем перевищення гігієнічних нормативів та настання можливих змін в організмі працівників поділяються на 4 ступені:

1-й ступінь (3.1) – умови праці характеризуються такими рівнями шкідливих факторів виробничого середовища та трудового процесу, які, як правило, викликають функціональні зміни, що виходять за межі фізіологічних коливань (останні відновлюються при триваліший, ніж початок наступної зміни, перерві контакту з шкідливими факторами) та збільшують ризик погіршення здоров'я;

2-й ступінь (3.2) – умови праці характеризуються такими рівнями шкідливих факторів виробничого середовища і трудового процесу, які здатні викликати стійкі функціональні порушення, призводять у більшості випадків до зростання виробничо-обумовленої захворюваності, появи окремих ознак або легких форм професійної патології (як правило, без втрати професійної працездатності), що виникають після тривалої експозиції (10 років та більше);

3-й ступінь (3.3) – умови праці характеризуються такими рівнями шкідливих факторів виробничого середовища і трудового процесу, які призводять, окрім зростання виробничо-обумовленої захворюваності, до розвитку професійних захворювань, як правило, легкого та середнього ступенів важкості (з втратою професійної працездатності в період трудової діяльності);

4-й ступінь (3.4) – умови праці характеризуються такими рівнями шкідливих факторів виробничого середовища і трудового процесу, які здатні призводити до значного зростання хронічної патології та рівнів захворюваності з тимчасовою втратою працездатності, а також до розвитку важких форм професійних захворювань (з втратою загальної працездатності).

4-й клас – НЕБЕЗПЕЧНІ (ЕКСТРЕМАЛЬНІ) умови праці – характеризуються такими рівнями шкідливих факторів виробничого середовища і трудового процесу, вплив яких протягом робочої зміни (або ж її частини) створює загрозу для життя, високий ризик виникнення важких форм гострих професійних уражень [9,10,12].

Оцінка важкості трудового процесу здійснюється на підставі обліку фізичного динамічного навантаження, маси вантажу, що підіймається і переміщується, загального числа стереотипних робочих рухів, величини статичного навантаження, робочої пози, ступеню нахилу корпусу, переміщень в просторі.

Оцінка важкості праці здійснюється на підставі обліку всіх наведених показників. При цьому спочатку встановлюється клас кожного із вимірюваних показників, а кінцева оцінка важкості праці встановлюється за показником, який має найвищий ступінь важкості. При наявності двох і більше показників класу 3.1 і 3.2 умови праці за важкістю трудового процесу оцінюються на один ступінь вище (3.2 та 3.3 класи відповідно). За таким критерієм найвищий ступінь важкості – клас 3.3.

Оцінка напруженості трудового процесу здійснюється на підставі обліку факторів, що характеризують напруженість праці, а саме, інтелектуальні, сенсорні, емоційні навантаження, ступінь монотонності праці, режим роботи.

Оцінка напруженості праці здійснюється на підставі обліку всіх наявних значущих показників, які можуть перевищувати нормативні рівні. Спочатку встановлюється клас кожного з показників, що визначались. Кінцева оцінка напруженості праці встановлюється за показником, який має найвищий ступінь напруженості. У тих випадках, коли більше 6-ти показників мають оцінку 3.1 та

3.2, напруженість трудового процесу оцінюється на один ступінь вище, тобто класами 3.2 - 3.3.

Загальна оцінка умов праці за ступенем шкідливості та небезпечності *встановлюється:*

- за найбільш високим класом та ступенем шкідливості;
- у випадку поєднаної дії трьох та більше факторів, віднесених до класу 3.1, загальна оцінка умов праці відповідає класу 3.2;
- при поєднанні двох і більше факторів класів 3.2, 3.3, 3.4 умови праці оцінюються на один ступінь вище.[9,11].

4.2 Аналіз психологічних аспектів умов праці

На відміну від фізичної, розумова праця супроводжується меншими витратами енергетичних запасів, але це не свідчить про її легкість. Основним працюючим органом під час такого виду праці виступає мозок. При інтенсивній інтелектуальній діяльності потреба мозку в енергії підвищується і становить 15-20% від загального об'єму енергії, яка витрачається в організмі. При цьому вживання кисню 100 г кори головного мозку в 5 разів більше, ніж витрати скелетними м'язами тієї ж ваги при максимальному фізичному навантаженні. При читанні вголос витрати енергії підвищуються на 48%; при публічному виступі – на 94%; при роботі операторів обчислювальних машин – на 60-100%. Під час розумової праці значно активізуються аналітичні та синтетичні функції центральної нервової системи, прийом і переробка інформації, виникають функціональні зв'язки, нові комплекси умовних рефлексів, зростає роль функцій уваги, пам'яті, навантаження на зоровий та слуховий аналізатори.

Для розумової праці характерні: велика кількість стресів, мала рухливість, вимушена статична поза – все це зумовлює застійні явища у м'язах ніг, органах черевної порожнини і малого тазу, погіршення постачання мозку киснем, зростання потреби в глюкозі. При розумовій праці погіршується робота органів зору: стійкість ясного бачення, гострота зору, адаптаційна можливість ока.

Розумовій праці властивий найбільший ступінь зосередження уваги – в середньому у 5-10 разів вище, ніж при фізичній праці. Завершення робочого дня зовсім не перериває процесу розумової діяльності. Розвивається особливий стан організму – втома, що з часом може перетворитися на перевтому. Все це призводить до порушення нормального фізіологічного функціонування організму. При розумовій праці мають місце зсуви в вегетативних функціях людини: підвищення кров'яного тиску, зміни електрокардіограми, вентиляції легень і вживання кисню, підвищення температури тіла.

Після закінчення розумової праці втома залишається довше, ніж після фізичної праці, однак навіть у стані перевтоми працівники здатні довгий час виконувати свої обов'язки без особливого зниження рівня працездатності і продуктивності. Як правило, під час розумової праці важко вимкнути механізм переробки інформації навіть під час відпочинку; люди працюють не лише 8-12 годин на добу, а майже постійно з короткими переключеннями. Це і є підтвердженням так званої інформативної теорії, згідно якої, людина під час сну перероблює інформацію, отриману в період активної бадьорості.

Кожний вид праці характеризується певним рівнем загальної рухової активності працівника, вимагає вибіркової, специфічної психологічної активності, пов'язаної з пізнанням, сприйняттям, спілкуванням тощо.[11].

4.3 Нормування праці. Вибір оптимального режиму праці та відпочинку

Серед факторів підвищення ефективності праці особливе місце належить раціональному режиму праці і відпочинку. Від його структури залежить динаміка втоми, відновлюваність функцій організму, працездатність і здоров'я, надійність і продуктивність праці. Під режимом праці і відпочинку розуміють загальну тривалість трудової діяльності протягом доби, тижня, місяця, року, частоту і тривалість періодів трудової активності і перерв у процесі цієї активності, співвідношення і чергування цих періодів. Режим праці включає характеристики самого трудового процесу: інтенсивність чи екстенсивність, а також допустиму тривалість дії шкідливих факторів.

Незалежно від виду праці функціональний стан працівника змінюється внаслідок втоми, що призводить до зниження рівня оперативних резервів. Оптимізація діяльності забезпечує реалізацію тих резервних можливостей, які до цього не входили в оперативні резерви. Таким чином, з фізіологічної точки зору режим праці і відпочинку являє собою процес управління функціональним станом працівника з метою оптимізації діяльності.

Режим праці і відпочинку протягом робочої зміни визначається такими факторами, як тривалість робочого дня, час початку і закінчення роботи, час надання і тривалість обідньої перерви, кількість і тривалість регламентованих перерв на відпочинок (макропауз), наявність мікропауз у трудовому процесі.

Тижневий режим праці і відпочинку характеризується встановленою кількістю робочих днів і годин, порядком чергування днів роботи і відпочинку, чергуванням роботи в різні зміни. Річний режим праці і відпочинку характеризується загальною кількістю днів і годин роботи, періодичністю і тривалістю основної і додаткових відпусток.

Режим праці і відпочинку залежить від характеру виробничого процесу, тобто може бути однозмінним або багатозмінним, стандартним або нестандартним. Однак у всіх випадках він повинен бути науково обґрунтованим, раціональним.

Раціональний, фізіологічно обґрунтований режим праці і відпочинку повинен відповідати таким вимогам:

- запобігати ранньому і надмірному розвиткові втоми працівників;
- сприяти збереженню високої працездатності і оптимального функціонального стану організму працівників протягом зміни;
- забезпечувати високу продуктивність праці;
- сприяти ефективному відновленню фізіологічних функцій під час відпочинку.

Ефективність режиму праці і відпочинку оцінюється критеріями працездатності і функціонального стану працівників, економічними, гігієнічними та соціальними критеріями.

Працездатність і функціональний стан працівника характеризуються системою фізіологічних і психологічних показників, а також тривалістю і співвідношенням періодів впрацювання, стійкої працездатності і втоми; стійкістю фізіологічних функцій протягом робочого дня; часом відновлення функціональних показників по закінченню роботи.

Економічні критерії представлені показниками погодинного виробітку, затратами часу на одиницю продукції, її якістю тощо.

Гігієнічні критерії виявляються в показниках захворюваності і виробничого травматизму працівників.

Соціальні критерії — в задоволенні (чи незадоволенні) працівників режимом праці і відпочинку; чисельності працівників, які скаржаться на швидкий розвиток втоми або перевтому.[3,4].

4.4 Санітарія та гігієна робочого місця

Санітарно-гігієнічні вимоги *до робочих місць в офісах регулюються:*

• Законом України "Про охорону праці" (поточна редакція від 16.09.2008);

• Правилами охорони праці під час експлуатації електронно-обчислювальних машин, затверджених наказом Державного комітету України з промислової безпеки, охорони праці та гірничого нагляду від 26 березня 2010 року N 65 (далі – Правила) та іншими нормативно-правовими актами;

• Гігієнічною класифікацією праці за показниками шкідливості та небезпечності факторів виробничого середовища, важкості та напруженості трудового процесу N 4137-86, затвердженою МОЗ СРСР 12.08.86р та іншими нормативно-правовими актами.

Відповідно до ч. 1 ст. 13 Закону України «Про охорону праці», роботодавець зобов’язаний створити на робочому місці в кожному структурному підрозділі умови праці відповідно до нормативно-правових актів.[11]

4.5 Охорона праці при використанні технічних засобів

Основні шкідливі та небезпечні фактори, що можуть впливати на організм людини під час роботи з персональним комп’ютером (ПК), такі:

- підвищений рівень електромагнітних випромінювань;
- підвищений рівень іонізуючих випромінювань;
- підвищений рівень статичної електрики;
- підвищена напруженість електростатичного поля;
- підвищена чи понижена іонізація повітря;
- підвищена яскравість світла;

- підвищене значення напруги в електромережі, замикання якої може статися крізь тіло людини;
- статичні перевантаження кістково-м’язового апарату та динамічні локальні перевантаження м’язів кистей рук;
- перенапруження зорового аналізатора;
- розумове перенапруження;
- емоційні перевантаження;
- монотонність праці.

До шкідливих випромінювань комп’ютера належать низькочастотні електромагнітні поля та іонізуюче (рентгенівське) випромінювання моніторів на електронно-променевих трубках (ЕПТ).

Попри невисокий рівень електромагнітного випромінювання, навіть порівняно з побутовими приладами, та недостатню вивченість впливу цього поля на людський організм, численними дослідженнями доведено можливість порушення перебігу вагітності жінок, якщо вони працюють на комп'ютері. Крім того, встановлено, що тривале перебування дітей в середовищі впливу низькочастотних магнітних полів збільшує ймовірність появи в них пухлин мозку. У зв’язку з цим існують певні обмеження в розміщенні комп’ютерів у робочому приміщенні, а також у допуску персоналу до роботи на комп’ютері.

Аби запобігти несприятливим наслідкам для здоров’я, у приміщеннях, де застосовується комп’ютерна техніка, потрібно:

- провести інструментальний контроль – заміряти та оцінити виробничі фактори на робочих місцях і в приміщеннях (виконують спеціально акредитовані/атестовані лабораторії);

- нормалізувати стан фізичних факторів на підставі рекомендацій, розроблених за результатами інструментального контролю;
- оцінити ергономічні параметри робочих місць, зокрема спеціальних меблів для користувачів ЕОМ;
- розробити та включити до посадових інструкцій доповнення, що враховують специфіку праці з використанням ЕОМ.

Працівники, які працюють з ЕОМ і ПЕОМ, підлягають обов’язковим медичним оглядам:

- попереднім – коли влаштовуються на роботу;
- періодичним – протягом трудової діяльності.

У Порядку проведення медоглядів працівників певних категорій, затвердженому наказом Міністерства охорони здоров’я України від 21.05.2007 р. № 246, наведено перелік протипоказань, коли не дозволено працювати з ЕОМ. Тому лікар, який здійснює медогляд, у разі потреби зробить відповідний запис у картці пацієнта.

Проте слід указати, що медогляди повинні проходити користувачі ПЕОМ з ВДТ, тобто моніторів з електропроменевими трубками. Для TFT-, плазмових та інших моніторів Міністерство охорони здоров’я України на цей час таку вимогу не встановило.[13]

ВИСНОВКИ

В магістерській дисертації досліджувалось випадкове блукання ланцюга Маркова $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ у нескінченній смузі шириною m з перехідними ймовірностями, однорідними відносно зсувів вздовж горизонтальної осі, причому розглядався випадок, коли зсув можливий не більш ніж на одну позицію відносно осі абсцис.

Для простішого випадку, коли можливий тільки рух на крок вперед, було встановлено, що $X = P.$ Для випадку, коли можна не тільки піти вперед ,а й лишитись на тій же позиції (по горизонталі), рівняння мало вигляд:

$$X = P(E - R)^{-1}.$$

Також була встановлена лема, що обернена матриця $(E - R)^{-1}$ рівна $\sum_{n=0}^{\infty} R^n$.

Зазвичай для даних випадків не виникає питання знаходження розв'язку, складніша ситуація з більш загальним випадком, коли можливий і рух на попередню позицію. Тоді рівняння має наступний вигляд:

$$X = P + RX + QX^2$$

Існування та єдиність розв'язку для такого випадку було доведено за допомогою методу послідовних наближень та показано як знаходиться розв'язок у загальному випадку та для конкретних значень. Для перевірки знайденого рішення на релевантність в нагоді став Microsoft Excel, в якому з допомогою макросу було пораховано ітерації вищих порядків.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Бухбергер Б., Емельяненко Г. А.* Методы обращения трех-диагональных матриц, Журнал вычисл. матем. и матем. физ.,1973, том 13, номер 3, 546–554
2. *Гантмахер Ф.Р*. Теория матриц. Наука, 1967 – 576с.
3. *Гогіташвілі Г. Г., Карчевські Є.Т., Лапін В. М.* Управління охороною праці та ризиком за міжнародними стандартами: Навч. посіб. — К.: Знання, 2007. — 367 с.
4. *Желібо Є. П., Баранова Н. І., Коваленко В.В.* Охорона праці в органах державної податкової служби. Навч. посібник для ВНЗ. Ірпінь. — 2002.
5. *Кельберт М.Я., Сухов Ю.М.* Вероятность и статистика в примерах и задачах. Том2. Марковские цепи как отправная точка теории случайных процессов и их приложения. М.МЦНМО, 2009 – 588с.
6. *Кириченко В.В*. «О стохастических матрицах». Математика сьогодні
7. *Княжин С.Н., Фомичев В.М*. О примитивных наборах математического исчисления., 2012
8. *Магістерська дисертація Бабій Н.А.*, 2011
9. Основи охорони праці: Підручник / За ред. проф. В.В.Березуцького — Х.: Факт, 2005. — 480 с.
10. *Протоєрейський О. С, Запорожець О. І*. Охорона праці в галузі: Навч. посіб. — К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005. — 268 с.
11. *Русаловський А. В.* Правові та організаційні питання охорони праці: Навч. посіб. — 4-те вид., допов. і перероб. — К.: Університет «Україна», 2009. — 295 с.
12. *Ткачук К. Н., Халімовський М. О., Зацарний В. В.* та ін. Основи охорони праці: Підручник. — 2-ге вид., допов. і перероб. — К.: Основа, 2006. — 444 с.
13. *Третьяков О.В., Зацарний В.В., Безсонний В.Л.* Охорона праці: Навчальний посібник з тестовим комплексом на CD/ за ред. К.Н. Ткачука. — К.: Знання, 2010. — 167 с.

14. *Уилкинсон* Алгебраическая проблема собственных значений. Наука, 1970 – 565с.

15. *Феллер В*. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Том 1.М.: «Мир», - 498с.

16. *Ширяев А. Н.* Вероятность. МГУ, 1957 – 581с.