НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»
Фізико-математичний факультет
(повна назва інституту/факультету)

Кафедра математичного аналізу
(повна назва кафедри)

«На правах рукопису»
УДК 519.21

«До захисту допущено»

Завідувач кафедри
__________ Клесов О.І.
(підпис) (ініціали, прізвище)

“15” червня 2016 р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

зі спеціальності 8.04020101 «Математика»
(код і назва)

на тему: Дослідження асимптотичної поведінки кількості повторних рекордних значень для послідовностей випадкових величин

Виконав: студент 6 курсу, групи ОМ-41м
(шифр групи)

Феденко Денис Олегович _ _________
(прізвище, ім’я, по батькові) (підпис)

Науковий керівник д. ф.-м.н., проф. Клесов О.І. _________
(посада, науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали) (підпис)

Консультант з охорони праці та безпеки в надзвичайних ситуаціях _________
(назва розділу) (підпис)

К.т.-н., доц. Мітюк Л.О.
(науковий ступінь, вчене звання, , прізвище, ініціали)

Рецензент д. ф.-м.н., проф. Козаченко Ю.В. _ _________
(посада, науковий ступінь, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали) (підпис)

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студент _____________
(підпис)

Київ – 2016 року

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

Інститут (факультет) Фізико-математичний факультет
(повна назва)

Кафедра математичного аналізу
(повна назва)

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Спеціальність 8.04020101 «Математика»
(код і назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри
__________ Клесов О.І.
(підпис) (ініціали, прізвище)

«04» лютого 2016р.

ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію студенту

Феденку Денису Олеговичу
(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема дисертації: Дослідження асимптотичної поведінки кількості повторних рекордних значень для послідовностей випадкових величин,

науковий керівник дисертації: д. ф.-м.н., проф. Клесов О.І.,
(прізвище, ім'я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом по університету від «23» лютого 2016 р. №870с

2. Термін подання студентом дисертації: «13» червня 2016 р.

3. Об'єкт дослідження: рекордні значення для послідовності випадкових величин

4. Предмет дослідження: асимптотична поведінка кратних рекордних значень у випадку F^{α} − схеми.

5. Перелік завдань, які потрібно розробити:

А) Основна частина:

1. Ознайомитися з літературою, в якій досліджувалися рекордні значення у послідовності випадкових величин.

2. Відшукати $F^{\alpha} -$ схеми з нескінченною кількістю 2-кратних рекордних значень.

3. Знайти достатні умови для нескінченної кількості l-кратних рекордних значень у випадку $F^{\alpha} -$ схеми.

4. Дослідити асимптотичну поведінку величини кількості рекордних значень та величини рекордних моментів у деяких $F^{\alpha} -$ схемах.

Б) Охорона праці:

1. Ознайомлення з літературою стосовно охорони праці.

2. Проаналізувати відповідність умов праці, в яких відбувалося написання магістерської дисертації, встановленим нормам

3. Дослідження умов, за яких інтелектуальна праця буде найбільш ефективною.

6. Орієнтовний перелік ілюстративного матеріалу: не передбачено

7. Орієнтовний перелік публікацій:

Феденко Д.О. «Граничні теореми для послідовності кратних рекордів у $\mathrm{F}^{\alpha} -$ схемі» : п'ята всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики, 25-26 квітня 2016 р., Київ: Матеріали конф. С.1. Математичного аналізу, теорії ймовірностей, диференціальних рівнянь – К.: НПУ ім. М. П. Драгоманова 2016. – с. 27.

8. Консультанти розділів дисертації*

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв
Охорона праці в галузі	к.т.-н., доц. Мітюк Л.О.		

9. Дата видачі завдання 04.02.2016

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1.	Ознайомлення з літературою	04.02.2016 – 29.02.2016	
2.	Пошук $F^{\alpha}-$схем з нескінченною кількістю 2-кратних рекордних значень	01.03.2016 – 15.03.2016	
3.	Пошук достатніх умов для нескінченної кількості l-кратних рекордних значень у випадку $F^{\alpha}-$схеми.	15.03.2016 – 19.04.2016	
4.	Дослідження асимптотичної поведінки величини кількості рекордних значень та величини рекордних моментів у деяких $F^{\alpha}-$схемах.	20.04.2016 – 25.05.2016	
5.	Оформлення роботи	26.05.2016 – 10.06.2016	

Студент ____________ Д.О. Феденко
(підпис) (ініціали, прізвище)

Науковий керівник дисертації ____________ О.І. Клесов
(підпис) (ініціали, прізвище)

* Консультантом не може бути зазначено наукового керівника магістерської дисертації.

Реферат

Магістерська дисертація: 52 сторінки, 30 слайдів для проектора, 18 першоджерел.

Досліджується гранична поведінка кратних рекордних значень у деяких $F^{\propto} -$ схемах

Мета роботи полягає в знаходженні умов для існування нескінченної кількості кратних рекордних значень та отримання законів великих чисел для кількості кратних рекордних значень та величини рекордних моментів.

Завданням роботи є знаходження $F^{\propto} -$ схем для яких існує нескінченна кількість кратних рекордних значень. Об'єктом дослідження є рекордні значення для послідовності випадкових величин. Предметом дослідження є асимптотична поведінка кратних рекордних значень у випадку $F^{\propto} -$ схеми.

Вперше пропонується знаходження $F^{\propto} -$ схем в яких існує нескінченна кількість кратних рекордних значень та запропоновані нові методи для знаходження їх асимптотичної поведінки.

Результати дослідження опубліковані у збірнику тез на V-й Міжуніверситетський науковій конференції з математики та фізики для студентів та молодих вчених (25-26 квітня 2016 р., м. Київ).

Ключові слова: $F^{\propto} -$ схема*, рекорди, рекордний момент, кратні рекордні значення.*

Реферат

Магистерская диссертация: 52 страницы, 30 слайдов для проектора, 18 первоисточников.

Исследуется предельное поведение кратных рекордных значений в некоторых $F^{\propto} -$ схемах

Цель работы состоит в нахождении условий для существования бесконечного количества кратных рекордных значений и получения законов больших чисел для количества кратных рекордов и величины рекордных моментов.

Заданием работы является нахождение $F^{\propto} -$ схем для которых существует бесконечное количество кратных рекордных значений. Объектом исследования является рекордные значения для последовательности случайных величин. Предметом исследования является асимптотическое поведение кратных рекордных значений в случае $F^{\propto} -$ схемы.

Впервые предлагается поиск $F^{\propto} -$ схем в которых существует бесконечное число кратных рекордных значений и предложены новые методы для нахождения их асимптотического поведения.

Результаты исследования опубликованы в сборнике тезисов на V-й Межуниверситетской научной конференции по математике и физике для студентов и молодых ученых (25-26 апреля 2016 г., г. Київ).

Ключевые слова: $F^{\propto} -$ схема, *рекорды, рекордный момент, кратные рекордные значения.*

Summary

Master's degree thesis contains: 52 pages, 30 slides for projector, 18 primary sources.

Investigated the limit behavior of multiple record values in some
$F^{\propto} - \text{schemes}$

The goal of the work is to find conditions for the existence of an infinite number of multiple record values and getting laws of large numbers for the number of multiple records and value of record moments.

The task of the work is to find $F^{\propto} - \text{schemes}$ for which there is an infinite number of multiple record values. The object of this research is record values for a sequence of random variables. The subject of research is the asymptotic behavior of multiple record values in the case of $F^{\propto} - \text{scheme}$.

For the first time invited to search $F^{\propto} - \text{schemes}$ in which there are an infinite number of multiple record values and new methods for finding their asymptotic behavior.

The results of research are present at the V-th Inter-Univesity Scientific Conference in Mathematics and Physics for Students and Young Scientists (April 25-26, 2016, the Kyiv).

Keywords*: $F^{\propto} - scheme$, records, record time, record multiple values.*

Зміст

Вступ

Мабуть кожний хоча б раз у житті чув фразу "було встановлено рекорд". Дійсно, рекорди привертають до себе велику увагу. Наприклад, рекорди на Олімпійських іграх, у спорті і рекордні температури у певному регіоні викликають великий інтерес. Також слід зауважити, що книга рекордів Гінеса є другою за популярністю у світі і поступається першим місцем лише Біблії. Саме через все це дана тема привернула увагу математиків та надихнула на створення математичної теорії рекордів. Вперше вона була продемонстрована у роботі [7], яка була видана у 1952 році. Згодом після роботи Чендлера з'явилося кілька публікацій, які були присвячені статистичним процедурам на основі рекордів. До кінця 70-х років минулого століття класична теорія рекордів для випадку нормального розподілу була майже завершена.

Згідно з [14] кількість публікацій на тему рекордів зростає в геометричній прогресії, подвоюється кожні 10 років. Дані дослідження стимулюються красою математичної теорії рекордів і багатьма додатками, наприклад, чисельними даними у спорті, гідрології, метеорології і т. д. мотивуючи математиків на побудову моделей з наявними записами спостережень і спробами передбачити майбутні значення рекорду, а також моменту, коли він відбудеться. З математичної точки зору, основна увага в теорії рекордів була приділено питанням їх розподілів або границь їх розподілів.

Важливими характеристиками математичних рекордів є послідовність *рекордних моментів* та послідовність *кількості рекордів,*які позначаються $\{L(n)\}$ та $\{N(n)\}$ відповідно.

Граничні властивості послідовності $\{L(n)\}$ вивчались багатьма авторами, починаючи з робіт [7], [15], а властивості послідовності $N(n)$ у [15], [8], [9], [11], [12], [13]. Наприклад, наступні співвідношення називаються *підсиленими законами великих чисел*:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln L(n)}{n} = 1 \qquad \text{майже напевно},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N(n)}{\ln n} = 1 \qquad \text{майже напевно},$$

Для послідовностей $\{L(n)\}$ та $\{N(n)\}$ доведено також *закони повторного логарифму* та *центральні граничні теореми.*

Одним з важливих узагальнень класичної постановки є F^α*-схема.*Вперше випадок F^α-схеми був розглянутий у [16]. Ця схема мала відображати динаміку олімпійських рекордів в умовах геометричного росту популяції спортсменів від одних Олімпійських ігор до інших.

Найбільш загальні результати стосовно асимптотичної поведінки величини $N(n)$ в F^α-схемі отримано в роботах [8], [9], [4], [17].

Також важливим є поняття *кратних рекордів.* Властивості послідовності $\{N(n)\}$ для випадку кратних рекордів вивчались в [11]– [13].

Організація роботи

У розділі 1 даної роботи наведені та доведені теореми та факти для класичної постановки теорії рекордів.

У розділі 2 наведено результати стосовно F^α-схеми.

У розділі 3 знайдено умови, при яких при фксованому $l \geq 2$ у послідовності $\{X_n\}$ існує нескінченна кількість l-кратних рекордів.

У розділі 4 при фіксованому $l \geq 2$ знайдено асимптотичні поведінки кількості l-кратних рекордів.

1 Класичні рекорди

Нехай $\{X_n, n \geq 1\}$ невід'ємні незалежні однаково розподілені випадкові величини (н.о.р.в.в.) з функцією розподілу F. Кажемо, що r є *рекордним моментом* , якщо

$$X_r > \max\{X_1, \dots, X_{r-1}\}, \quad r > 1.$$

Вважаємо, що $r = 1$ є першим рекордним моментом. Позначимо послідовність рекордних моментів через $\{L(n), n \geq 1\}$. Таким чином, виконуються наступні співвідношення:

$$L(0) = 0, L(1) = 1, L(n+1) = \min\{j > L(n) : X_j > X_{L(n)}\}, \; n = 1, 2, \dots . \tag{1}$$

Позначимо через $N(n)$ кількість рекордів, які відбулися до моменту n. Зазначимо, що

$$N(n) = \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n, \tag{2}$$

де η_i — це індикатори рекордів в момент i:

$$\eta_1 = 1, \eta_k = \mathbb{I}_{X_k > \max\{X_1, X_2, \dots, X_{k-1}\}}, k = 2, 3, \dots . \tag{3}$$

Теорема 1 (А. Реньи [15])**.** *Індикатори рекордів $\{\eta_k\}$ є незалежними випадковими величинами Бернуллі з ймовірністю успіху*

$$P(\eta_k = 1) = \frac{1}{k}. \tag{4}$$

При чому для $n = 1, 2, \dots$ індикатори рекордів $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ і випадкова величина $M_n = max\{X_1, \dots, X_n\}$ є також незалежними.

Доведення. Візьмемо випадок $n \geq 2$. За симетрією очевидно, що:

$$P(\eta_n = 1) = P(X_n = M_n) = P(X_k = M_n), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

За неперервністю функції розподілу величин X_k маємо, що

$$P(X_i = X_j) = 0$$

для будь-яких $i \neq j$. Тоді

$$1 = P(M_n = X_1) + \cdots + P(M_n = X_n) = nP(M_n = X_n)$$

і

$$P(\eta_n = 1) = P(X_n = M_n) = \frac{1}{n}.$$

Індикатори $\eta_2, \eta_3, \ldots$ приймають лиша два значення. Тоді, для доведення леми достатньо показати, що для будь-якого $x, r = 2, 3, \ldots, s = 1, \ldots, r$, і

$$1 \leq \alpha(1) < \alpha(2) < \cdots < \alpha(s) \leq r$$

виконується наступне співвідношення:

$$P(\eta_{\alpha(1)} = 1, \ldots, \eta_{\alpha(2)} = 1, M_r < x) = \tag{5}$$

$$= P(\eta_{\alpha(1)} = 1) \ldots P(\eta_{\alpha(2)} = 1) P(M_r < x)$$

Розглянемо випадки, коли $s = 1$ та $s = 2$. Беручи до уваги (4) ми отримаємо:

$$P(\eta_{\alpha(1)} = 1, M_r < x) =$$

$$\begin{aligned}
&= P(max\{X_1, \ldots, X_{\alpha(1)-1}\} < X_{\alpha(1)} < x, max\{X_{\alpha(1)+1}, \ldots, X_r\} < x) = \\
&= (F(x))^{r-\alpha(1)} \int_{-\infty}^{x} (F(u))^{\alpha(1)-1} \, dF(u) = \frac{F^r(x)}{\alpha(1)} = \\
&= P(\eta_{\alpha(1)} = 1) P(M_r < x).
\end{aligned}$$

У іншому випадку

$$P(\eta_{\alpha(1)} = 1, \eta_{\alpha(2)} = 1, M_r < x) =$$

$$= P(\ max \ \ \{X_1, \ldots, X_{\alpha(1)-1}\} < X_{\alpha(1)} < x,$$
$$max \ \ \{X_{\alpha(1)}, \ldots, X_{\alpha(2)-1}\} < X_{\alpha(2)} max\{X_{\alpha(2)+1}, \ldots, X_r\} < x) =$$

$$\begin{aligned} &= (F(x))^{r-\alpha(2)} \int_{-\infty}^{x} \int_{u}^{x} (F(u))^{\alpha(1)-1} (F(v))^{\alpha(2)-\alpha(1)-1} dF(v) dF(u) = \\ &= \frac{F^r(x)}{\alpha(1)\alpha(2)} = P(\eta_{\alpha(1)} = 1) P(\eta_{\alpha(2)} = 1) P(M_r < x). \end{aligned}$$

Аналогічно можна довести для $\forall s$. □

В цій роботі досліджуються так звані *кратні рекорди.*

Означення. Припустимо, що для деяких $k \geq 1$ та $l \geq 1$

$$X_i \text{ є черговим рекордом для кожного } i = k, k+1, \ldots, k+l-1.$$

В цьому випадку ми кажемо про l-кратний рекорд в момент k або просто про l-кратний рекорд.

Зрозуміло, що 1-кратний рекорд є звичайним рекордом.

Лема 1. *Нехай* $\{X_i\}$ *незалежні однаково розподілені випадкові величини. Тоді в послідовності* $\{X_i\}$

1) з ймовірністю 1 існує нескінченна кількість рекордів;

2) з ймовірністю 0 існує нескінченна кількість 2-кратних рекордів.

Зрозуміло, що з леми 1 випливає, що для будь-якого $l > 1$ з ймовірністю одиниця у послідовності $\{X_i\}$ існує лише скінченна кількість l-кратних рекордів.

Доведення. Оскільки

$$\sum_{k=1}^{n} P(\eta_k = 1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty,$$

то за лемою Бореля-Кантеллі (лема 3 у розділі Додатки) з ймовірністю одиниця існує нескінченна кількість рекордів у послідовності $\{X_n, n \geq 1\}$.

З іншого боку, за теоремою Ренььі (теорема 1)

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(\eta_k = 1, \eta_{k+1} = 1) = \sum_{k=1}^{\infty} P(\eta_k = 1) \cdot P(\eta_{k+1} = 1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k+1} < \infty.$$

За лемою Бореля–Кантеллі (лема 3 у розділі Додатки) це означає, що з ймовірністю одиниця існує лише скінченна кількість 2-кратних рекордів. □

Основним об'єктом досліджень у теорії рекордів [1], [2], [3], [14] є дві послідовності $\{L(n)\}$ (див. (1)) та $\{N(n)\}$ (див. (2)). Для послідовностей $\{L(n)\}$ та $\{N(n)\}$ справедливі наступні *підсилені закони великих чисел.*

Теорема 2 (А. Ренеі [15])**.** *Нехай $\{X_i\}$ незалежні однаково розподілені випадкові величини. Тоді*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln L(n)}{n} = 1 \qquad \text{майже напевно,} \tag{6}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N(n)}{\ln n} = 1 \qquad \text{майже напевно.} \tag{7}$$

2 Відомості про F^α-схему

Теорема Рені (теорема 1) не виконується у випадку загальної послідовності випадкових величин $\{X_n\}$, навіть якщо вони є незалежними. Тим не менше, існує важливий випадок, який називається F^α-схемою, у якому теорема 1 є вірною.

Означення. Нехай $\{X_n, n \geq 1\}$ — невід'ємні незалежні випадкові величини з функціями розподілу $\{F_n, n \geq 1\}$. Кажемо, що ця послідовність є F^α*-схемою,* якщо

$$F_k(x) = (F(x))^{\alpha_k}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

де F — деяка неперервна функція розподілу, а $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ — додатні константи.

Зауваження. Якщо $\alpha_k = 1$, $k \geq 1$, то така F^α-схема відповідає класичній послідовності незалежних однаково розподілених випадкових величин.

Не втрачаючи загальності, в подальшому вважатимемо, що $\alpha_1 = 1$. Рекордні моменти, кількість рекордів та індикатори рекордів для F^α-схеми вводяться аналогічно випадку класичних рекордів, тобто формулами (1) та (2).

Позначимо $A_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$.

Теорема 3 (Боровков, Пфайфер [6]). *Нехай $\{X_n, n \geq 1\}$ — невід'ємні незалежні випадкові величини, які утворюють F^α-схему. Тоді індикатори рекордів $\{\eta_k\}$ є незалежними випадковими величинами Бернуллі з ймовірністю успіху:*

$$P(\eta_k = 1) = \frac{\alpha_k}{A_k}. \tag{8}$$

Доведення. Функція розподілу максимумім $M_{n-1} = max\{X_1, X_2, \dots, X_{n-1}\}$ G_{n-1} має вигляд:

$$G_{n-1} = F_1 F_2 \dots Fn - 1 = F^{A_{n-1}}.$$

Тоді отримаємо:

$$\begin{aligned}P(\eta_n = 1) &= P(X_n > max\{X_1, X_2, \dots, X_{n-1}\}) = \int_{-\infty}^{\infty} G_{n-1}(x) dF_n(x) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F^{A_{n-1}} dF_n^{\alpha_n}(x) = \int_0^1 x^{A_{n-1}} d(x^{\alpha_n}) = \frac{\alpha_n}{\alpha_n + A_{n-1}} = \frac{\alpha_n}{A_n}\end{aligned}$$

Щоб довести незалежність індикаторів достатньо показати, що для будь якої перестановки $1 \leq k(1) < k(2) < \dots < k(r)$ ми маємо

$$P(\eta_{k(1)} = 1, \eta_{k(2)} = 1, \dots, \eta_{k(r)} = 1) = \prod_{m=1}^{r} P(\eta_{k(m)} = 1) = \prod_{m=1}^{r} \frac{\alpha_{k(m)}}{A_{k(m)}} \quad (9)$$

Можемо припустити, не порушуючи загальності, що

$$F(x) = x, \quad F_n(x) = x^{\alpha_n}, \quad 0 < x < 1.$$

Тоді

$$P(\eta_{k(1)} = 1, \eta_{k(2)}, \dots, \eta_{k(r)} = 1) =$$

$$\begin{aligned}&= P(X_{k(1)} > M(k(1) - 1), X_{k(2)} > M(k(2) - 1), \dots, X_{k(r)} > M(k(r) - 1)) = \\ &= \int_0^1 u_1^{A_{k(1)-1}} d\left(u_1^{\alpha_{k(1)}}\right) \int_{u_1}^1 u_2^{A_{k(2)-1} - A_{k(1)}} d\left(u_2^{\alpha_{k(2)}}\right) \dots \int_{u_{r-1}}^1 u_r^{A_{k(r)-1} - A_{k(r-1)}} d\left(u_r^{\alpha_{k(r)}}\right)\end{aligned}$$

Інтегруючи даний вираз отримаємо, що виконується рівність (9). □

Зауваження. Нехай $l \geq 1$. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(\eta_k = 1, \eta_{k+1} = 1, \dots, \eta_{k+l-1} = 1) = \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{l-1} \frac{\alpha_{k+i}}{A_{k+i}}$$

збігається не завжди. За лемою Бореля–Кантеллі це означає, що у F^{α}-схемі майже напевно може бути нескінченна кількість 2-, 3- і взагалі l-кратних рекордів, $l > 3$, на відміну від класичної теорії рекордів.

3 Умови нескінченності та скінченності кратних рекордів

3.1 Нескінченна кількість кратних рекордів

Введемо позначення:

$$\eta_i^{(l)} = \eta_i \eta_{i+1} \dots \eta_{l+i-1}, \quad i \in \mathbb{N},$$

де

$$\eta_1 = 1, \qquad \eta_k = \mathbb{I}_{X_k > \max\{X_1, X_2, \dots, X_{k-1}\}}, \quad k = 2, 3, \dots . \tag{10}$$

Тобто $\eta_i^{(l)}$ — це індикатор l-кратного рекорду на i-му кроці.

Нехай $N(n,l)$ — це кількість l-кратних рекордів, що відбулися до моменту n, у відповідній F^α-схемі. Зауважимо, що

$$N(n,l) = \sum_{k=1}^{n-l+1} \eta_k^{(l)}.$$

Також позначимо через $L(n,l)$ момент n-го l-кратного рекорду.

Теорема 4. *Нехай випадкові величини $\{X_n\}$ утворюють F^α-схему. Нехай $l \geq 1$. Тоді умова*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{l-1} \frac{\alpha_{n+i}}{A_{n+i}} = \infty \tag{11}$$

є еквівалентною до існування майже напевно нескінченної кількості l-кратних рекордів.

Доведення. Дійсно ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{l-1} \frac{\alpha_{n+i}}{A_{n+i}} = \sum_{k=1}^{\infty} P(\eta_k = 1, \eta_{k+1} = 1, \dots, \eta_{k+l-1} = 1)$$

тому при розбіжності ряду (11) отримаємо за лемою Бореля-Кантеллі майже напевно нескінченну кількість подій $\{\eta_k = 1, \eta_{k+1} = 1, \dots, \eta_{k+l-1} = 1\}$,

$k \geq 1$, що рівносильні тому, що відбувається нескінченна кількість l-кратних рекордів майже напевно. $\square$

Зауважимо, що твердження про нескінченну кількість l-кратних рекордів можна еквівалентним чином записати так

$$N(n,l) \to \infty, \qquad n \to \infty.$$

Достатні умови

Наведемо кілька простіших умов для існування нескінченої кількості l-кратних рекордів.

Лема 2. *Якщо*

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{i=0}^{l-1} \frac{\alpha_{n+i}}{A_{n+i}} \neq 0, \tag{12}$$

то $N(n,l) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ майже напевно.

Доведення. Якщо виконується умова (12), то очевидно, що n-ий член ряду (11) не прямує до нуля. Звідси слідує, що сам ряд (11) розбігається. Тоді за лемою Бореля-Кантеллі маємо, що $N(n,l) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$. $\square$

Наступний результат містить умови для (12), які можна перевіряти досить ефективно.

Теорема 5. *Нехай $\alpha_n = g(n)$ для деякої функції $g(x)$. Припустимо, що*

$$g(x) > 0, \qquad \forall x \in \mathbb{N}; \tag{13}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n-1)}{g(n)} = c, \;\; 0 < c < 1. \tag{14}$$

Тоді майже напевно

$$N(n,l) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty, \quad \forall l \in \mathbb{N}.$$

Доведення. Оскільки $\alpha_n = g(n)$, то

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = \sum_{k=1}^{n} g(n).$$

Доведемо, що умова (12) виконується у випадку такої послідовності $\{\alpha_n\}$. Зрозуміло, що

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{i=0}^{l-1}\frac{\alpha_{n+i}}{A_{n+i}}=\prod_{i=0}^{l-1}\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_{n+i}}{A_{n+i}}.$$

Знайдемо границю $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\alpha_{n+i}}{A_{n+i}}$ для кожного $0\le i\le l-1$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_{n+i}}{A_{n+i}}=\lim_{n\to\infty}\frac{g(n+i)}{\sum\limits_{k=1}^{n+i}g(k)}.$$

З умови (14) випливає, що $A_{n+i}\to\infty$, $n\to\infty$, та $A_{n+i+1}>A_{n+i}$. Тепер з теореми Штольца (теорема 12 у розділі Додатки) отримуємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{g(n+i)}{\sum\limits_{k=1}^{n+i}g(k)}=\lim_{n\to\infty}\frac{g(n+i)-g(n+i-1)}{g(n+i)}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{g(n+i-1)}{g(n+i)}\right)$$
$$=1-c>0.$$

Тому

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{i=0}^{l-1}\frac{\alpha_{n+i}}{A_{n+i}}=\prod_{i=0}^{l-1}\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_{n+i}}{A_{n+i}}=\prod_{i=0}^{l-1}(1-c)=(1-c)^l>0.$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{i=0}^{l-1}\frac{\alpha_{n+i}}{A_{n+i}}\neq 0$, то за лемою 2 маємо, що майже напевно

$$N(n,l)\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty,\quad \forall l\in\mathbb{N}.$$

□

Зауваження 1. Найпростішим випадком послідовності $\{\alpha_n\}$, для якої виконуються умови теореми 5, є геометрична прогресія, а саме $\alpha_n=q^{n-1}$, $q>1$. Дійсно, перевіримо умови теореми 5:

умова (13): $q^x>1,\forall x\in\mathbb{N}$;

умова (14): $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{q^{n-1}}{q^n}=\frac{1}{q}<1$, так як $q>1$.

Таким чином, умови (13) і (14) виконуються й тому у випадку $\alpha_n = q^n$, $q > 1$, майже напевно

$$N(n, l) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty, \quad \forall l \in \mathbb{N}.$$

У наступному результаті вказано конкретні випадки, для яких виконуються умови для існування нескінченої кількості кратних рекордів.

Теорема 6. *Нехай $\alpha_n = \frac{q^{n-1}}{R(n)}$, $q > 1$, де функція R є такою, що*

$$R(x) > 0, \ \ \forall x > 0; \tag{15}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R(n)}{R(n-1)} = b, \qquad b < q. \tag{16}$$

Тоді майже напевно

$$N(n, l) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty, \quad \forall l \in \mathbb{N}.$$

Доведення. В цьому випадку $g(n) = \frac{q^{n-1}}{R(n)}$. Перевіримо умови теореми 5:
умова (13): $R(x) > 0 \Rightarrow \frac{q^{x-1}}{R(x)} = g(x) > 0$;
умова (14): $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{g(n-1)}{g(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{q^{n-2}}{R(n-1)}}{\frac{q^{n-1}}{R(n)}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{R(n)}{R(n-1)} \cdot \frac{1}{q} = \frac{b}{q} < 1$.
Отже, виконуються теореми 5, а це значить, що майже напевно

$$N(n, l) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty, \quad \forall l \in \mathbb{N}.$$

□

Наслідок 1. *Нехай $\alpha_n = q^n R(n)$, де $q > 1$, а R — правильно змінна функція. Тоді майже напевно*

$$N(n, l) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty, \quad \forall l \in \mathbb{N}.$$

Стосовно означення та властивості правильно змінних функцій див. [5] або [18].

Зауваження. Нижче наведено найпростіші приклади функцій $R(x)$, для яких виконуються умови теореми 6:

1) Степенева функція $x^m, m \in \mathbb{R}$;

2) Логарифмічна функція: $\log_a x, a > 0$;

3) Показникова функція: $a^x, 0 < a < q$;

4) Деякі обернені тригонометричні функції, а саме: $\operatorname{arctg} x, \operatorname{arcctg} x$;

5) Лінійна комбінація даних вище функцій.

3.2 Скінченна кількість кратних рекордів

У теоремах 5 та 6 були розглянуті умови, при яких майже напевно

$$N(n, l) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty, \quad \forall l \in \mathbb{N}.$$

Покажемо тепер, що існують випадки, коли

$$\exists l \in \mathbb{N} : N(n, l) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty, \text{ але } \sup_{n\geq 1} N(n, l+1) < \infty.$$

Приклад 1. Нехай

$$\frac{\alpha_n}{A_n} = \frac{1}{\sqrt{n}}. \tag{17}$$

Тоді

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{A_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty.$$

Тому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{A_n} \cdot \frac{\alpha_{n+1}}{A_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \infty;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{A_n} \cdot \frac{\alpha_{n+1}}{A_{n+1}} \cdot \frac{\alpha_{n+2}}{A_{n+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+2}} < \infty.$$

Таким чином, для послідовності $\{\alpha_n\}$, яка рекурентно визначається умовою

(17), маємо майже напевно:

$$N(n,1) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty, \qquad N(n,2) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty, \qquad \sup_{n\geq 1} N(n,3) < \infty.$$

Знайдемо аналітичний вираз для членів послідовності $\{\alpha_n\}$, які визначаються рекурентною формулою (17). Оберемо $\alpha_1 = 1$. З рівності (17) випливає

$$\alpha_n = \frac{A_{n-1}}{\sqrt{n}-1};$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = 1+\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}+1}{2}\left(1+\frac{1}{1}\right);$$

$$A_2 = 1 + (1+\sqrt{2}) = 2+\sqrt{2} = 2\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right);$$

$$\alpha_3 = \frac{2\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{3}-1} = (\sqrt{3}+1)\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2}\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right);$$

$$\begin{aligned} A_3 &= 2\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + (\sqrt{3}+1)\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\sqrt{3}+3) = \\ &= 3\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right); \end{aligned}$$

Продовжуючи цю процедуру далі можна отримати, що:

$$\alpha_n = \frac{\sqrt{n}+1}{2}\prod_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\right), \quad n\in\mathbb{N};$$

$$A_n = \frac{n}{2}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\right), \quad n\in\mathbb{N};$$

Зауважимо, що:

$$\alpha_n = \frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n-1}+1}\left(1+\frac{\sqrt{n-1}}{n-1}\right)\alpha_{n-1},$$

Використовуючи останню рівність отримуємо, що $\alpha_n > \alpha_{n-1}$.

Ідею прикладу 1 можна застосувати для загального випадку.

Приклад 2 (Узагальнення прикладу 1)**.** Нехай $r \geq 2$ — фіксоване натуральне число. Розглянемо послідовність $\{\alpha_n, n \in \mathbb{N}\}$ таку, що:

$$\frac{\alpha_n}{A_n} = \frac{1}{\sqrt[r]{n}}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{18}$$

Тоді

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{A_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[r]{n}} = \infty.$$

Таким чином

$$\sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=0}^{m} \frac{\alpha_{n+k}}{A_{n+k}} = \infty, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots, (r-1),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \prod_{k=0}^{r} \frac{\alpha_{n+k}}{A_{n+k}} < \infty.$$

Тобто якщо послдовність $\{\alpha_n\}$ задовольняє умову (18), то будемо мати, що

$$N(n, m+1) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots, (r-1),$$

$$\sup_{n \geq 1} N(n, r+1) < \infty.$$

Використовуючи такі ж міркування, як у прикладі 1, можна отримати, що:

$$\alpha_n = \frac{P_{r-1}(\sqrt[r]{n})}{r} \prod_{k=1}^{n-1} P_{r-1}\left(\frac{1}{\sqrt[r]{k}}\right), \qquad n > 1;$$

$$A_n = \frac{n}{r} \prod_{k=1}^{r} P_{r-1}\left(\frac{1}{\sqrt[r]{k}}\right), \qquad n > 1,$$

де

$$P_r(z) = 1 + z + \cdots + z^r.$$

Аналогічно, зауважимо, що $\alpha_n > \alpha_{n-1}$.

4 Гранична поведінка послідовностей $N(n,l)$ та $L(n,l)$

В цьому розділі ми встановимо поведінку майже напевно випадкових величин $L(n,l)$ та $N(n,l)$. Перший результат стосується звичайних рекордів в F^α-схеми, у якій α_n утворюють геометричну прогресію.

Теорема 7. *Нехай $\alpha_n = q^{n-1}$, $q > 1$. Тоді*

$$\frac{N(n,1)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - \frac{1}{q} \quad \text{м.н.}, \tag{19}$$

$$\frac{L(n,1)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1-\frac{1}{q}} \quad \text{м.н.} \tag{20}$$

Доведення. Оскільки $l = 1$, то $\eta_k^{(1)} = \eta_k$ (див. (10)) і

$$E[\eta_k^{(1)}] = P(\eta_k = 1) = \frac{q^{k-1}}{\sum\limits_{i=0}^{k-1} q^i} = 1 - \frac{q^{k-1}-1}{q^k-1};$$

$$E[N(n,1)] = E[S_n^{(1)}] = E\left[\sum_{k=1}^{n} \eta_k^{(1)}\right] = \sum_{k=1}^{n} E[\eta_k^{(1)}] = \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{q^{k-1}-1}{q^k-1}\right).$$

Оскільки $\eta_n^{(1)}$ є випадковою величиною Бернуллі, то $var[\eta_n^{(1)}] < 1$. Звідси випливає

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{var[\eta_n^{(1)}]}{n^2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Таким чином, умови теореми Колмогорова (теорема 13 у розділі Додатки) про підсилений закон великих чисел для незалежних випадкових величин виконуються.

Для знаходження $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{E[S_n^{(1)}]}{a_n}$ скористаємось лемою 4:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E[S_n^{(1)}]}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{q^{k-1}-1}{q^k-1}\right)}{n} = 1 - \frac{1}{q}.$$

Використовуючи наслідок 3 (розділ Додатки), отримуємо

$$\frac{N(n,1)}{n} = \frac{S_n^{(l)}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - \frac{1}{q} \ \text{ м.н.}$$

Тобто співвідношення (19) виконано.

Оскільки $N(L(n,1),1) = n$, застосуємо (19) з $L(n,1)$ замість n:

$$\frac{N(L(n,1),1)}{L(n,1)} = \frac{n}{L(n,1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - \frac{1}{q} \ \text{ м.н.},$$

Таким чином, співвідношення (20) виконано. □

Теорема 8. *Нехай* $\alpha_n = q^{n-1}$, $q > 1$. *Тоді*

$$\frac{N(n,2)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \left(1 - \frac{1}{q}\right)^2 \ \textit{ м.н.}, \tag{21}$$

$$\frac{L(n,2)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{q}\right)^2} \ \textit{ м.н.} \tag{22}$$

Доведення. Оскільки $l = 2$, то $\eta_k^{(2)} = \eta_k\eta_{k+1}$ (див. (10)) і

$$\begin{aligned} E[\eta_k^{(2)}] &= P(\eta_k\eta_{k+1} = 1) = P(\eta_k = 1)P(\eta_{k+1} = 1) = \\ &= \left(1 - \frac{q^{k-1}-1}{q^k - 1}\right)\left(1 - \frac{q^k - 1}{q^{k+1}-1}\right). \end{aligned}$$

Покладемо $a_n = n$. Нехай $n = 2l$ і розглянемо наступний вираз:

$$\begin{aligned} \frac{S_n}{a_n} &= \frac{\eta_1\eta_2 + \eta_2\eta_3 + \cdots + \eta_{n-1}\eta_n}{n} = \\ &= \frac{\eta_1\eta_2 + \eta_3\eta_4 + \cdots + \eta_{n-1}\eta_n}{n} + \frac{\eta_2\eta_3 + \eta_4\eta_5 + \cdots + \eta_{n-2}\eta_{n-1}}{n}. \end{aligned}$$

Позначимо

$$Y_{l,1}^{(2)} = \eta_1\eta_2 + \eta_3\eta_4 + \cdots + \eta_{n-1}\eta_n = \sum_{k=0}^{n/2-1} \eta_{2k+1}^{(2)} = \sum_{k=0}^{l-1} \eta_{2k+1}^{(2)},$$

$$Y_{l,2}^{(2)} = \eta_2\eta_3 + \eta_4\eta_5 + \cdots + \eta_{n-2}\eta_{n-1} = \sum_{k=0}^{n/2-2} \eta_{2k+2}^{(2)} = \sum_{k=0}^{l-2} \eta_{2k+2}^{(2)}.$$

Тоді матимемо

$$\frac{S_n}{a_n} = \frac{Y_{l,1}^{(2)}}{2l} + \frac{Y_{l,2}^{(2)}}{2l}.$$

Зазначимо, що $\{\eta_{2k+1}^{(2)}, k \geq 1\}$ є послідовністю незалежних випадкових величин, причому $var[\eta_{2k+1}^{(r)}] < 1$, оскільки $\eta_{2k+1}^{(2)}$ є випадковою величиною Бернуллі. Звідси слідує, що

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{var[\eta_{2k+1}^{(2)}]}{(2k+1)^2} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} < \infty.$$

З теореми Колмогорова (теорема 13 в розділі Додатки) отримуємо підсилений закон великих чисел для $Y_{l,1}^{(2)}$. Аналогічно отримуємо підсилений закон великих чисел для $Y_{l,2}^{(2)}$.

Тепер знайдемо границі $\lim\limits_{l\to\infty} \frac{E[Y_{l,1}^{(2)}]}{2l}$ і $\lim\limits_{l\to\infty} \frac{E[Y_{l,2}^{(2)}]}{2l}$:

$$\begin{aligned}\lim_{l\to\infty} \frac{E[Y_l^{(2)}]}{2l} &= \lim_{l\to\infty} \frac{E\left[\sum\limits_{k=0}^{l-1} \eta_{2k+1}^{(2)}\right]}{2l} = \lim_{l\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{l-1} \left(1 - \frac{q^{2k}-1}{q^{2k+1}-1}\right)\left(1 - \frac{q^{2k+1}-1}{q^{2k+2}-1}\right)}{2l} = \\ &= \frac{\left(1 - \frac{1}{q}\right)^2}{2}\end{aligned}$$

на підставі леми Коші (лема 4 в розділі Додатки).

Аналогічно $\lim\limits_{l\to\infty} \frac{E[Y_{l,2}^{(2)}]}{2l} = \frac{\left(1-\frac{1}{q}\right)^2}{2}$. Тому

$$\frac{Y_{l,1}^{(2)}}{2l} \xrightarrow[l\to\infty]{} \frac{\left(1 - \frac{1}{q}\right)^2}{2} \quad \text{м.н.}$$

$$\frac{Y_{l,2}^{(2)}}{2l} \xrightarrow[l\to\infty]{} \frac{\left(1 - \frac{1}{q}\right)^2}{2} \quad \text{м.н.}$$

Звідси отримуємо

$$\frac{S_n}{n} = \frac{S_{2l}}{2l} = \frac{Y_{l,1}^{(2)}}{2l} + \frac{Y_{l,2}^{(2)}}{2l} \xrightarrow[l\to\infty]{} \frac{\left(1-\frac{1}{q}\right)^2}{2} + \frac{\left(1-\frac{1}{q}\right)^2}{2} = \left(1-\frac{1}{q}\right)^2 \text{ м.н.}$$

Аналогічний результат можна довести для випадку $n = 2l - 1$. Таким чином,

$$\frac{N(n,2)}{n} \sim \frac{N(n,2)}{n-1} = \frac{S_{n-1}}{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \left(1-\frac{1}{q}\right)^2 \text{ м.н..}$$

Оскільки $N(L(n),1) = n$, застосуємо (21) з $L(n,2)$ замість n:

$$\frac{N(L(n,2),2)}{L(n,2)} = \frac{n}{L(n,2)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \left(1-\frac{1}{q}\right)^2 \text{ м.н.,}$$

Таким чином, співвідношення (22) виконано, що і закінчує доведення теореми. $\square$

Зауваження. Методами, аналогічними до теорем 7 та 8, можна довести, що при $\alpha_n = q^{n-1}$, $q > 1$ й довільного $l \geq 1$

$$\frac{N(n,l)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \left(1-\frac{1}{q}\right)^l \text{ м.н.,}$$

$$\frac{L(n,l)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{q}\right)^l} \text{ м.н.}$$

Теорема 9. *Нехай $\alpha_n = g(n)$, де $g(n)$ задовольняє умови теореми 9.Тоді*

$$\frac{N(n,1)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - c \text{ м.н.} \tag{23}$$

$$\frac{L(n,1)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1-c} \text{ м.н.} \tag{24}$$

Доведення. Оскільки $l = 1$, то $\eta_k^{(1)} = \eta_k$ і

$$E[\eta_k^{(1)}] = P(\eta_k = 1) = \frac{g(k)}{\sum_{i=1}^{k} g(i)}$$

$$E[N(n,1)] = E[S_n^{(1)}] = E\left[\sum_{k=1}^{n} \eta_k^{(1)}\right] = \sum_{k=1}^{n} E[\eta_k^{(1)}] = \sum_{k=1}^{n} \frac{g(k)}{\sum_{i=1}^{k} g(i)}$$

Оскільки $\eta_n^{(1)}$ є випадковою величиною Бернуллі, то $var[\eta_n^{(1)}] < 1$. А звідси слідує, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{var[\eta_n^{(1)}]}{n^2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

Отже, виконуються умови теореми Колмогорова (теорема 13 у розділі Додатки) про підсилений закон великих чисел для незалежних випадкових величин при $a_n = n$. Знайдемо $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{E[S_n^{(1)}]}{a_n}$, скориставшись лемою 4 та тим, що $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{g(k)}{\sum_{i=1}^{k} g(i)} = 1 - c$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E[S_n^{(1)}]}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{g(k)}{\sum_{i=1}^{k} g(i)}}{n} = (1-c)$$

Тоді використовуючи наслідок 3, маємо:

$$\frac{N(n,1)}{n} = \frac{S_n^{(1)}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - c \ \text{ м.н.}$$

Оскільки $N(L(n,1),1) = n$, застосуємо (23) з $L(n,1)$ замість n:

$$\frac{N(L(n,1),1)}{L(n,1)} = \frac{n}{L(n,1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - c \ \text{ м.н.,}$$

Таким чином співвідношення (24) виконано, що і закінчує доведння теореми. $\square$

Зауваження. Методами, аналогічними до теореми 8 та 9, можна довести, що при $\alpha_n = g(n)$

$$\frac{N(n,l)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} (1-c)^l \ \text{ м.н.,}$$

$$\frac{L(n,l)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{(1-c)^l} \ \text{ м.н.,}$$

де $g(n)$ — функція, що задовольняє умови теореми 1.

Теорема 10. *Розглянемо послідовність α_n з прикладу 1, тобто*

$$\alpha_n = \frac{\sqrt{n}+1}{2}\prod_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

причому $\frac{\alpha_n}{A_n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Тоді:

$$\frac{N(n,1)}{n^{1/2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2 \quad \text{м.н.} \tag{25}$$

$$\frac{L^{1/2}(n,1)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} \quad \text{м.н.} \tag{26}$$

$$\frac{N(n,2)}{\ln n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad \text{м.н.} \tag{27}$$

$$\frac{\ln L(n,2)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad \text{м.н.} \tag{28}$$

Доведення. а) $l = 1$. Оскільки $l = 1$, то $\eta_k^{(1)} = \eta_k$ і

$$N(n,1) = \sum_{k=1}^{n}\eta_k^{(1)}, \quad E[\eta_k^{(1)}] = P(\eta_k = 1) = \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Зауважимо, що

$$var[\eta_k^{(1)}] = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{k} = \frac{\sqrt{k}-1}{k}$$

$$E[N(n,1)] = E[S_n^{(1)}] = E[\sum_{k=1}^{n}\eta_k^{(1)}] = \sum_{k=1}^{n}E[\eta_k^{(1)}] = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$$

Перевіримо умови теореми Колмогорова, де візьмемо $a_n = \sqrt{n}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{var[\eta_n^{(1)}]}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}-1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty$$

Отже, умови теореми Колмогорова (теорема 13 у розділі Додатки) про підсилений закон великих чисел для незалежних випадкових величин виконуються. Знайдемо $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{E[S_n^{(1)}]}{a_n}$, скориставшись наслідком 2:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E[S_n^{(1)}]}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^{-1/2}}{n^{-1/2+1}} = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} = 2$$

Тоді, використовуючи наслідок 3, маємо:

$$\frac{N(n,1)}{\sqrt{n}} = \frac{S_n^{(1)}}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2 \quad \text{м.н.}$$

Тобто

$$\frac{N(n,1)}{n^{1/2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2 \quad \text{м.н.}$$

Оскільки $N(L(n,1),1) = n$, застосуємо (25) з $L(n,1)$ замість n:

$$\frac{N(L(n,1),1)}{L^{1/2}(n,1)} = \frac{n}{L^{1/2}(n,1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2 \quad \text{м.н.},$$

Таким чином співвідношення (26) виконано, що і закінчує доведння пункту а).

б) $N(n,2) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \eta_k^{(2)}$, $\eta_k^{(2)} = \eta_k\eta_{k+1}$, $E[\eta_k^{(2)}] = P(\eta_k\eta_{k+1} = 1) = \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$ Зауважимо, що

$$var[\eta_k^{(2}] = \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} - \frac{1}{k(k+1)} = \frac{\sqrt{k(k+1)} - 1}{k(k+1)}$$

Візьмемо в якості послідовності $a_n = \ln n$. Покажемо, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{var[\eta_n^{(2)}]}{\ln^2 n}$ збігається.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{var[\eta_n^{(r)}]}{\ln^2 n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}\ln^2 n} - \frac{1}{n(n+1)\ln^2 n} \right)$$

Оскільки $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)\ln^2 n} < \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}\ln^2 n}$, то для збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{var[\eta_n^{(r)}]}{\ln^2 n}$ досить довести збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}\ln^2 n}$. Порівняємо даний ряд із збіжним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$. Легко бачити, що

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}\ln^2 n}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}<\infty$$

Тобто ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}\ln^2 n}$ збігається, а отже ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{var[\eta_n^{(r)}]}{\ln^2 n}$ збігається. Нехай $n=2l$ і розглянемо наступний вираз:

$$\begin{aligned}\frac{S_n}{a_n} &= \frac{\eta_1\eta_2+\eta_2\eta_3+\cdots+\eta_{n-1}\eta_n}{\ln n}=\\ &= \frac{\eta_1\eta_2+\eta_3\eta_4+\cdots+\eta_{n-1}\eta_n}{\ln n}+\frac{\eta_2\eta_3+\eta_4\eta_5+\cdots+\eta_{n-2}\eta_{n-1}}{\ln n}\end{aligned}$$

Позначимо

$$Y_{l,1}^{(2)}=\eta_1\eta_2+\eta_3\eta_4+\cdots+\eta_{n-1}\eta_n=\sum_{k=0}^{n/2-1}\eta_{2k+1}^{(2)}=\sum_{k=0}^{l-1}\eta_{2k+1}^{(2)}$$

$$Y_{l,2}^{(2)}=\eta_2\eta_3+\eta_4\eta_5+\cdots+\eta_{n-2}\eta_{n-1}=\sum_{k=0}^{n/2-2}\eta_{2k+2}^{(2)}=\sum_{k=0}^{l-2}\eta_{2k+2}^{(2)}$$

Тоді матимемо

$$\frac{S_n}{a_n}=\frac{Y_{l,1}^{(2)}}{\ln 2l}+\frac{Y_{l,2}^{(2)}}{\ln 2l}$$

Зазначимо, що $\{\eta_{2k+1}^{(2)}, k\geq 1\}$ є послідовністю незалежних випадкових величин і

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{var[\eta_{2k+1}^{(2)}]}{\ln^2 2k}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{var[\eta_n^{(2)}]}{\ln^2 n}<\infty,$$

тобто для неї буде виконуватись умови теореми Колмогорова Аналогічно і з послідовністю $\{\eta_{2k+2}^{(2)}, k\geq 1\}$. Тоді знайдемо $\lim\limits_{l\to\infty}\frac{E[Y_{l,1}^{(2)}]}{\ln 2l}$ і $\lim\limits_{l\to\infty}\frac{E[Y_{l,2}^{(2)}]}{\ln 2l}$, скориставшись твердженням 1 розділу Додатки та теоремою Штольца (теорема 12 розділу Додатки):

$$
\begin{aligned}
\lim_{l\to\infty}\frac{E[Y_{l,1}^{(2)}]}{\ln 2l} &= \lim_{l\to\infty}\frac{E\left[\sum\limits_{k=0}^{l-1}\eta_{2k+1}^{(2)}\right]}{\ln 2l} = \lim_{l\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{l-1}\frac{1}{\sqrt{(2k+1)(2k+2)}}}{\ln 2l} = \\
&= \lim_{l\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{l-1}\frac{1}{\sqrt{(2k+1)(2k+2)}}}{\sum\limits_{k=1}^{l}\frac{1}{2k}}\frac{\sum\limits_{k=1}^{l}\frac{1}{2k}}{\ln 2l} = \\
&= \lim_{l\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{l-1}\frac{1}{\sqrt{4k^2+6k+2}}}{\sum\limits_{k=1}^{l}\frac{1}{2k}}\lim_{l\to\infty}\frac{\frac{1}{2}(\ln l+\gamma+\varepsilon_l)}{\ln 2l} = \\
&= \lim_{l\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{4l^2+6l+2}}}{\frac{1}{2l}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\lim_{l\to\infty}\frac{2l}{\sqrt{4l^2+6l+2}} = \\
&= \frac{1}{2}\lim_{l\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{6}{4l}+\frac{2}{4l^2}}} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Аналогічно $\lim\limits_{l\to\infty}\frac{E[Y_{l,2}^{(2)}]}{\ln 2l} = \frac{1}{2}$. Тоді

$$
\frac{Y_{l,1}^{(2)}}{\ln 2l}\xrightarrow[l\to\infty]{}\frac{1}{2} \quad \text{м.н.}
$$

$$
\frac{Y_{l,2}^{(2)}}{\ln 2l}\xrightarrow[l\to\infty]{}\frac{1}{2} \quad \text{м.н.}
$$

Тоді

$$
\frac{S_n}{\ln n} = \frac{S_{2l}}{\ln 2l} = \frac{Y_{l,1}^{(2)}}{\ln 2l} + \frac{Y_{l,2}^{(2)}}{\ln 2l}\xrightarrow[l\to\infty]{}\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1 \ \text{ м.н.}
$$

Аналогічно можна довести у випадку, коли $n = 2l-1$. Тоді отримуємо, що

$$
\frac{N(n,2)}{\ln n}\sim\frac{N(n,2)}{\ln(n-1)} = \frac{S_{n-1}}{\ln(n-1)}\xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \ \text{ м.н.}
$$

$$\frac{N(n,2)}{\ln n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \text{ м.н.}$$

Оскільки $N(L(n,2),2) = n$, застосуємо (27) з $L(n,2)$ замість n:

$$\frac{N(L(n,2),2)}{\ln L(n,2)} = \frac{n}{\ln L(n,2)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \text{ м.н.}$$

Таким чином співвідношення (28) виконано, що і закінчує доведння теореми.

□

Теорема 11. *Розглянемо послідовність α_n з прикладу 2, тобто:*

$$\alpha_n = \frac{P_{r-1}(\sqrt[r]{n})}{r} \prod_{k=1}^{n-1} P_{r-1}\left(\frac{1}{\sqrt[r]{k}}\right), \qquad n > 1$$

де

$$P_r(z) = 1 + z + \cdots + z^r,$$

причому $\frac{\alpha_n}{A_n} = \frac{1}{\sqrt[r]{n}}, r > 1$. Тоді:

$$\frac{N(n,m)}{n^{1-m/r}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{r}{r-m} \text{ м.н.}, \quad m = 1,2,\ldots,r-1; \tag{29}$$

$$\frac{L^{1-m/r}(n,m)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{r-m}{r} \text{ м.н.}, \quad m = 1,2,\ldots,r-1; \tag{30}$$

$$\frac{N(n,r)}{\ln n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \text{ м.н.}; \tag{31}$$

$$\frac{\ln L(n,r)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \text{ м.н.} \tag{32}$$

Доведення. а) $l = 1,2,3,\ldots r-1$. Розглянемо випадок $l = 2$, для $2 < l \leq r-1$ та $l = 1$ доводиться аналогічно. Оскільки $l = 2$, то $\eta_k^{(2)} = \eta_k\eta_{k+1}$ і

$$N(n,2) = \sum_{k=1}^{n-1} \eta_k^{(2)}, \quad E[\eta_k^{(2)}] = P(\eta_k\eta_{k+1} = 1) = \frac{1}{\sqrt[r]{k(k+1)}}.$$

Зауважимо, що

$$var[\eta_k^{(2}] = \frac{1}{\sqrt[r]{k(k+1)}} - \frac{1}{\sqrt[r]{(k(k+1))^2}} = \frac{(k(k+1))^{1/r} - 1}{(k(k+1))^{2/r}}$$

Візьмемо в якості послідовності $a_n = n^{1-2/r}$. Покажемо, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{var[\eta_n^{(2)}]}{n^{2(1-2/r)}}$ збігається.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{var[\eta_n^{(2)}]}{n^{2(1-2/r)}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-1/r}(n+1)^{1/r}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^{2/r}}$$

Оскільки $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^{2/r}} < \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-1/r}(n+1)^{1/r}}$, то для збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{var[\eta_n^{(r)}]}{n^{2(1-2/r)}}$ досить довести збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-1/r}(n+1)^{1/r}}$. Порівняємо даний ряд із збіжним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Легко бачити, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-1/r}(n+1)^{1/r}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

Тобто ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2-1/r}(n+1)^{1/r}}$ збігається, а отже ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{var[\eta_n^{(r)}]}{n^{2(1-2/r)}}$ збігається.

Нехай $n = 2l$ і розглянемо наступний вираз:

$$\begin{aligned} \frac{S_n}{a_n} &= \frac{\eta_1\eta_2 + \eta_2\eta_3 + \cdots + \eta_{n-1}\eta_n}{n^{1-2/r}} = \\ &= \frac{\eta_1\eta_2 + \eta_3\eta_4 + \cdots + \eta_{n-1}\eta_n}{n^{1-2/r}} + \frac{\eta_2\eta_3 + \eta_4\eta_5 + \cdots + \eta_{n-2}\eta_{n-1}}{n^{1-2/r}} \end{aligned}$$

Позначимо

$$Y_{l,1}^{(2)} = \eta_1\eta_2 + \eta_3\eta_4 + \cdots + \eta_{n-1}\eta_n = \sum_{k=0}^{n/2-1} \eta_{2k+1}^{(2)} = \sum_{k=0}^{l-1} \eta_{2k+1}^{(2)}$$

$$Y_{l,2}^{(2)} = \eta_2\eta_3 + \eta_4\eta_5 + \cdots + \eta_{n-2}\eta_{n-1} = \sum_{k=0}^{n/2-2} \eta_{2k+2}^{(2)} = \sum_{k=0}^{l-2} \eta_{2k+2}^{(2)}$$

Тоді матимемо
$$\frac{S_n}{a_n} = \frac{Y_{l,1}^{(2)}}{(2l)^{1-2/r}} + \frac{Y_{l,2}^{(2)}}{(2l)^{1-2/r}}$$

Зазначимо, що $\{\eta_{2k+1}^{(2)}, k \geq 0\}$ є послідовністю незалежних випадкових величин і
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{var[\eta_{2k+1}^{(2)}]}{(2k+1)^{2(1-2/r)}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{var[\eta_n^{(2)}]}{n^{2(1-2/r)}} < \infty$$

тобто для неї буде виконуватись умови теореми Колмогорова (теорема 13 у розділі Додатки) про підсилений закон великих чисел. Аналогічно для послідовності $\{\eta_{2k+2}^{(2)}, k \geq 0\}$. Тоді знайдемо $\lim\limits_{l\to\infty} \frac{E[Y_{l,1}^{(2)}]}{(2l)^{1-2/r}}$ і $\lim\limits_{l\to\infty} \frac{E[Y_{l,2}^{(2)}]}{(2l)^{1-2/r}}$, скориставшись теоремою Штольца (теорема 12 розділу Додатки):

$$\begin{aligned}
\lim_{l\to\infty} \frac{E[Y_{l,1}^{(2)}]}{(2l)^{1-2/r}} &= \lim_{l\to\infty} \frac{E\left[\sum\limits_{k=0}^{l-1} \eta_{2k+1}^{(2)}\right]}{(2l)^{1-2/r}} = \lim_{l\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{l-1} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)^{1/r}}}{(2l)^{1-2/r}} = \\
&= \lim_{l\to\infty} \frac{\frac{1}{((2l+1)(2l+2))^{1/r}}}{(2l)^{1-2/r} - (2(l-1))^{1-2/r}} = \\
&= \lim_{l\to\infty} \frac{1}{2l\left(\frac{(2l+1)(2l+2)}{4l^2}\right)^{1/r} - (2l-2)\left(\frac{(2l+1)(2l+2}{(2l-2)^2}\right)^{1/r}} = \\
&= \lim_{l\to\infty} \frac{1}{2l\left(\frac{4l^2+6l+2}{4l^2}\right)^{1/r} - (2l-2)\left(\frac{4l^2+6l+2}{4l^2-8l+4}\right)^{1/r}} = \\
&= \lim_{l\to\infty} \frac{1}{2l\left(1+\frac{3}{2l}+\frac{1}{2l^2}\right)^{1/r} - (2l-2)\left(1+\frac{14l-2}{4l^2-8l+4}\right)^{1/r}} = \\
&= \lim_{l\to\infty} \frac{1}{2l\left(1+\frac{3}{2lr}+o(l)\right) - (2l-2)\left(1+\frac{14l-2}{r(4l^2-8l+4)}+o(l)\right)} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{l\to\infty} \frac{1}{2l+\frac{3}{r}-2l+2-\frac{28l^2-24l-4}{r(4l^2-8+4)}} = \\
&= \lim_{l\to\infty} \frac{1}{2l+\frac{3}{r}-2l+2-\frac{7}{r}} = \frac{1}{2\left(1-\frac{2}{r}\right)} = \frac{r}{2(r-2)}
\end{aligned}$$

Аналогічно $\lim\limits_{l\to\infty}\frac{E[Y_{l-1}^{(2)}]}{(2l)^{1-2/r}} = \frac{r}{2(r-2)}$. Тоді

$$\frac{Y_{l,1}^{(2)}}{(2l)^{1-2/r}} \xrightarrow[l\to\infty]{} \frac{r}{2(r-2)} \quad \text{м.н.}$$

$$\frac{Y_{l,2}^{(2)}}{(2l)^{1-2/r}} \xrightarrow[l\to\infty]{} \frac{r}{2(r-2)} \quad \text{м.н.}$$

Тоді

$$\frac{S_n}{n^{1-2/r}} = \frac{S_{2l}}{(2l)^{1-2/r}} = \frac{Y_l^{(2)}}{(2l)^{1-2/r}} + \frac{Y_{l-1}^{(2)}}{(2l)^{1-2/r}} \xrightarrow[l\to\infty]{} \frac{r}{2(r-2)} + \frac{r}{2(r-2)} = \frac{r}{r-2} \quad \text{м.н.}$$

Аналогічно можна довести у випадку, коли $n = 2l-1$. Тоді отримуємо, що

$$\frac{N(n,2)}{n^{1-2/r}} \sim \frac{N(n,2)}{(n-1)^{1-2/r}} = \frac{S_{n-1}}{(n-1)^{1-2/r}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{r}{r-2} \quad \text{м.н.}$$

$$\frac{N(n,2)}{n^{1-2/r}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{r}{r-2} \quad \text{м.н.}$$

Оскільки $N(L(n,2),2) = n$, застосуємо (29) з $L(n,2)$ замість n:

$$\frac{N(L(n,2),2)}{L^{1-2/r}(n,2)} = \frac{n}{L^{1-2/r}(n,2)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{r}{r-2} \quad \text{м.н.}$$

Таким чином співвідношення (30) виконано. Аналогічними діями можна отримати, що:

$$\frac{N(n,m)}{n^{1-m/r}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{r}{r-m} \quad \text{м.н.}, \qquad m = 2,3,\ldots,r-1$$

$$\frac{L^{1-m/r}(n,m)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{r-m}{r} \quad \text{м.н.}, \qquad m = 2,3,\ldots,r-1$$

б) $l = r$. Оскільки $l = r$, то $\eta_k^{(r)} = \prod\limits_{j=0}^{r-1} \eta_{k+j}$ і

$$N(n,r) = \sum_{k=1}^{n-r+1} \eta_k^{(r)}, \quad E[\eta_k^{(r)}] = P\left(\prod_{j=0}^{r-1} \eta_{k+j} = 1\right) = \prod_{j=0}^{r-1} \frac{1}{(k+j)^{1/r}}$$

Зауважимо, що

$$var[\eta_k^{(r)}] = \prod_{j=0}^{r-1} \frac{1}{(k+j)^{1/r}} - \prod_{j=0}^{r-1} \frac{1}{(k+j)^{2/r}} = \frac{\prod\limits_{j=0}^{r-1}(k+j)^{1/r} - 1}{\prod\limits_{j=0}^{r-1}(k+j)^{2/r}}$$

Візьмемо в якості послідовності $a_n = \ln n$. Покажемо, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{var[\eta_k^{(r)}]}{\ln^2 n}$ збігається.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{var[\eta_n^{(r)}]}{\ln^2 n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{j=0}^{r-1} \frac{1}{(n+j)^{1/r} \ln^2 n} - \prod_{j=0}^{r-1} \frac{1}{(n+j)^{2/r} \ln^2 n}\right)$$

Оскільки $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \prod\limits_{j=0}^{r-1} \frac{1}{(n+j)^{2/r} \ln^2 n} < \sum\limits_{n=1}^{\infty} \prod\limits_{j=0}^{r-1} \frac{1}{(n+j)^{1/r} \ln^2 n}$, то для збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{var[\eta_n^{(r)}]}{\ln^2 n}$ досить довести збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \prod\limits_{j=0}^{r-1} \frac{1}{(n+j)^{1/r} \ln^2 n}$. Порівняємо даний ряд із збіжним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$. Легко бачити, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} \prod_{j=0}^{r-1} \frac{1}{(n+j)^{1/r} \ln^2 n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n} < \infty$$

Отже, маємо, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{var[\eta_n^{(r)}]}{\ln^2 n}$ збігається.

Нехай $n = rl$ і розглянемо наступний вираз:

$$
\begin{aligned}
\frac{S_n}{a_n} &= \frac{\eta_1\eta_2\ldots\eta_r + \eta_2\eta_3\ldots\eta_{r+1} + \cdots + \eta_{n-r+1}\eta_{n-r+2}\ldots\eta_n}{\ln n} = \\
&= \frac{\eta_1\eta_2\ldots\eta_r + \eta_{r+1}\eta_{r+2}\ldots\eta_{2r} + \cdots + \eta_{n-r+1}\eta_{n-r+2}\ldots\eta_n}{\ln n} + \\
&+ \frac{\eta_2\eta_3\ldots\eta_{r+1} + \eta_{r+2}\eta_{r+3}\ldots\eta_{2r+1} + \cdots + \eta_{n-2r+2}\eta_{n-2r+3}\ldots\eta_{n-r+1}}{\ln n} + \\
&+ \cdots + \\
&+ \frac{\eta_r\eta_{r+1}\ldots\eta_{2r-1} + \eta_{2r}\eta_{2r+1}\ldots\eta_{3r-1} + \cdots + \eta_{n-r}\eta_{n-r+1}\ldots\eta_{n-1}}{\ln n}
\end{aligned}
$$

Позначимо

$$
\begin{aligned}
Y_{l,1}^{(r)} &= \eta_1\eta_2\ldots\eta_r + \eta_{r+1}\eta_{r+2}\ldots\eta_{2r} + \cdots + \eta_{n-r+1}\eta_{n-r+2}\eta_n = \\
&= \sum_{k=0}^{n/r-1}\eta_{rk+1}^{(r)} = \sum_{k=0}^{l-1}\eta_{rk+1}^{(r)} \\
Y_{l,2}^{(r)} &= \eta_2\eta_3\ldots\eta_{r+1} + \eta_{r+2}\eta_{r+3}\ldots\eta_{2r+1} + \cdots + \eta_{n-2r+2}\eta_{n-2r+3}\ldots\eta_{n-r+1} = \\
&= \sum_{k=0}^{n/r-2}\eta_{rk+2}^{(r)} = \sum_{k=0}^{l-2}\eta_{rk+2}^{(r)} \\
\ldots & \ldots \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
Y_{l,r}^{(r)} &= \eta_r\eta_{r+1}\ldots\eta_{2r-1} + \eta_{2r}\eta_{2r+1}\ldots\eta_{3r-1} + \cdots + \eta_{n-r}\eta_{n-r+1}\ldots\eta_{n-1} = \\
&= \sum_{k=0}^{n/r-2}\eta_{rk+r}^{(r)} = \sum_{k=0}^{l-2}\eta_{rk+r}^{(r)}
\end{aligned}
$$

Тоді матимемо

$$\frac{S_n}{a_n} = \frac{Y_{l,1}^{(r)}}{\ln rl} + \frac{Y_{l,2}^{(r)}}{\ln rl} + \cdots + \frac{Y_{l,r}^{(r)}}{\ln rl}$$

Зазначимо, що $\{\eta_{rk+i}^{(r)}, k \geq 1\}$, $i = 1, 2, \ldots, r$ є послідовністю незалежних випадкових величин і

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{var[\eta_{rl+i}^{(r)}]}{\ln^2(rl+i)} < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{var[\eta_n^{(r)}]}{\ln^2 n} < \infty, \quad i = 1, 2, \ldots, r$$

Тобто для них буде виконуватись умови теореми Колмогорова (теорема 13 у розділі Додатки) про підсилений закон чисел для незалежних випадкових величин. Тоді знайдемо $\lim\limits_{l\to\infty}\frac{E[Y_{l,i}^{(r)}]}{\ln rl}, i = 1, 2, \ldots, r$.. Зробимо це для $i = 1$,скориставшись твердженням 1 та теоремою Штольца (теорема 12 розділу Додатки):

$$\lim_{l\to\infty}\frac{E[Y_{l,1}^{(r)}]}{\ln rl} = \lim_{l\to\infty}\frac{E\left[\sum\limits_{k=0}^{l-1}\eta_{rk+1}^{(r)}\right]}{\ln rl} = \lim_{l\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{l-1}\prod\limits_{j=0}^{r-1}\frac{1}{(rk+1+j)^{1/r}}}{\ln rl} =$$

$$= \lim_{l\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{l-1}\prod\limits_{j=0}^{r-1}\frac{1}{(rk+1+j)^{1/r}}}{\sum\limits_{k=1}^{l}\frac{1}{rk}}\frac{\sum\limits_{k=1}^{l}\frac{1}{rk}}{\ln rl} =$$

$$= \lim_{l\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{l-1}\prod\limits_{j=0}^{r-1}\frac{1}{(rk+1+j)^{1/r}}}{\sum\limits_{k=1}^{l}\frac{1}{rk}}\frac{\frac{1}{r}(\ln l+\gamma+\varepsilon_l)}{\ln rl} =$$

$$= \lim_{l\to\infty}\frac{\prod\limits_{j=0}^{r-1}\frac{1}{(rl+j)^{1/r}}}{\frac{1}{rl}}\cdot\frac{1}{r} = \frac{1}{r}\lim_{l\to\infty}\frac{rl}{\prod\limits_{j=0}^{r-1}(rl+j)^{1/r}} = \frac{1}{r}$$

Аналогічно $\lim\limits_{l\to\infty}\frac{E[Y_{l,i}^{(r)}]}{\ln rl} = \frac{1}{r}, i = 2, 3, \ldots, r$. Тоді

$$\frac{Y_{l,i}^{(r)}}{\ln rl}\xrightarrow[l\to\infty]{}\frac{1}{r}\quad \text{м.н.},\quad i = 1, 2, \ldots, r$$

Отже,

$$\frac{S_n}{a_n} = \sum_{k=1}^{r}\frac{Y_{l,k}^{(r)}}{\ln rl}\xrightarrow[l\to\infty]{}\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{r} = 1\quad \text{м.н.}$$

Аналогічно доводиться для випадків $n \neq rl$. Тоді маємо, що:

$$\frac{N(n,r)}{\ln n}\sim\frac{N(n,r)}{\ln(n-r)}\xrightarrow[n\to\infty]{} 1\ \text{ м.н.}$$

$$\frac{N(n,r)}{\ln n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad \text{м.н.}$$

Оскільки $N(L(n,r),r) = n$, застосуємо (31) з $L(n,r)$ замість n:

$$\frac{N(L(n,r),r)}{\ln L(n,r)} = \frac{n}{\ln L(n,r)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad \text{м.н.}$$

Таким чином співвідношення (30) виконано, що і закінчує доведення теореми. □

5 Охорона праці та безпеки в надзвичайних сутуаціях

Тема магістерської дисертації асоціюється з науковими дослідженнями теоретичного характеру в галузі математики. Такі дослідження зазвичай супроводжуються потужною розумовою працею, яка найчастіше відбувається в університетських приміщеннях, у залах бібліотек, вдома у працівників. Для того, щоб результати розумової праці були якомога кращі, необхідно організувати оптимальні умови праці на робочому місці та звернути увагу на складність і специфіку розумової праці.

5.1 Оцінка напруженості праці

Використовуючи «Гігієнічну класифікацію праці за показниками шкідливості та небезпечності факторів виробничого середовища, важкості та напруженості трудового процесу», ми встановили, що умови праці, в яких здійснювалася робота над дисертацією, можна віднести до допустимих. Під допустимими умовами праці розуміють такі, що характеризуються рівнями факторів виробничого середовища та трудового процесу, які не перевищують встановлених нормативів, а можливі зміни функціонального стану організму відновлюються за час регламентованого відпочинку чи до початку наступної зміни та не чинять несприятливого впливу на стан здоров'я працюючих і їх потомство в найближчому та віддаленому періодах. За цією ж кваліфікацією ми оцінили важкість трудового процесу. Оскільки робота не передбачає фізичних навантажень, ми пропускаємо всі пункти, які визначають обсяг саме фізичної роботи. Доцільним видається лише оцінка за пунктом «Стереотипні робочі рухи». За цим пунктом клас праці можна оцінювати як «Оптимальний» (легке фізичне навантаження), тобто кількість рухів за зміну є меншою, ніж 20000. Статичні навантаження також не передбачені при виконанні магістерської дисертації. За пунктом «Робоча поза» умови праці можна також віднести до оптимального класу, що передбачає вільну, зручну позу, можливість зміни пози (сидячи-стоячи) за бажанням працівника та знаходження в позі «стоячи» до 40% часу зміни. Пункт «Нахили корпуса» – менше 50, тобто за цим пунктом умови праці також можна віднести до оптимальних. Те ж саме стосується й пункту «Переміщення у просторі», які складають у даних умовах праці менше 4 кілометрів по горизонталі. Оцінка напруженості трудового процесу здійснюється на підставі обліку факторів, що характеризують напруженість праці, а саме: інтелектуальні, сенсорні, емоційні навантаження, ступінь монотонності праці, режим роботи. Інтелектуальне навантаження при виконанні магістерської дисертації можна оцінити як навантаження важкого ступеня (3,2) – евристична (творча) діяльність, що вимагає вирішення складних завдань за відсутністю алгоритму. Особисте керівництво в складних ситуаціях. Сприймання сигналів (інформації) та їх оцінка – важкий рівень навантажень (3,1), який передбачає сприймання сигналів з подальшим порівнянням фактичних значень параметрів із їх номінальним значенням. Заключна оцінка фактичних значень параметрів. Розподіл функцій за ступенем складності завдання оцінюється як середнє навантаження – обробка, виконання завдання та його перевірка. Характер виконуваної роботи можна оцінити за другим рівнем складності (допустимий) – робота за встановленим графіком із можливим його коректуванням у ході діяльності. Щільність сигналів та повідомлень в середньому за 1 годину складає менше 75, тому за цим критерієм робота оцінюється як легка. Кількість об'єктів одночасного спостереження в середньому становить до 5, тобто за цим фактором робота теж оцінюється як легка. Оцінка напруженості роботи за пунктом «Навантаження на зоровий аналізатор» здійснюється за таким критерієм – «Розмір об'єкту розрізнення при тривалості спостереження (% від часу зміни)», роботу можна класифікувати як легку або допустиму, оскільки об'єкти розрізнення становлять менше, ніж 5 мм, проте значно більше ніж 0,3 мм. Роботи з оптичними приладами та екранами візуального дисплейного терміналу не передбачено. За критерієм «Навантаження на слуховий аналізатор» робота оцінюється як легка, тобто під час виконання роботи розбірливість слів і сигналів становить 90 – 100%, перешкоди відсутні. Навантаження на голосовий апарат (сумарна кількість годин, які наговорюється протягом тижня) – легкого рівня, до 16 годин на тиждень. Емоційне навантаження. Ступінь відповідальності за результат своєї діяльності. Значущість помилки – допустимий, другий рівень важкості, працівник несе відповідальність за функціональну якість допоміжних робіт. Робота вимагає додаткових зусиль з боку керівництва. Ступінь ризику для власного життя та ступінь відповідальності за безпеку інших осіб – виключені. Монотонність навантажень оцінюється за такими критеріями: кількість елементів, необхідних для реалізації простого завдання, становить більше 10; тривалість виконання простих виробничих завдань (операцій), які повторюються – більше 100 секунд; час активних дій становить більше 20 відсотків від тривалості робочого часу; монотонність виробничої обстановки (пасивне спостереження в % від тривалості зміни) становить менше 75%. Отже, за монотонністю навантажень праця класифікується як праця найлегшого рівня. За параметром «Режим праці» роботу можна також віднести до легкої, ураховуючи оцінку всіх критеріїв: фактична тривалість робочого дня становить 6 – 7 годин та менше; робота передбачає одну зміну, без праці у нічний час; перерви регламентовані та становлять більше 7% від часу зміни. Отже, всі критерії, за винятком тих, які складають оцінку напруженості праці, характеризуються найлегшим, першим рівнем складності. Лише два, які стосуються інтелектуального навантаження та сприймання інформації і її оцінки, а зокрема змісту, оцінені нами найвищим балом складності.

5.2 Аналіз психологічних аспектів праці

Цей пункт є особливо важливим під час оцінки умов праці, оскільки наш вид роботи передбачає переважно розумове навантаження. Широко поширене помилкове уявлення про розумову працю як працю легку. Таке уявлення основане на тому, що при розумовій праці енергетичні витрати значно нижчі, ніж при фізичній. Але слід відзначити, що при інтенсивній інтелектуальній діяльності потреба мозку в енергії підвищується та становить 15 – 20% від загального об’єму енергії, яка витрачається в організмі. При цьому вживання кисню 100 г кори головного мозку в 5 разів більше, ніж скелетними м’язами тієї ж ваги при максимальному фізичному навантаженні. Розумова праця має ряд особливостей. Найчастіше вони пов’язані з тривалою роботою в закритому приміщенні та сидячим способом життя.

Посилена робота мозку вимагає великого припливу крові до нього, що, в свою чергу, пов'язано з підвищенням тонусу судин мозку. Це фізіологічне підвищення тонусу судин при неправильній організації праці може перейти в патологічне, що може призвести до стійкого підвищення артеріального тиску. Робота сидячи, найчастіше в напівзігнутому положенні приводить до тривалого здавлення грудної клітини, що погіршує вентиляційну здатність легень та веде до розвитку хронічної кисневої недостатності. При тривалій роботі сидячи створюються також умови для застою крові в органах черевної порожнини та тазу, знижується моторна діяльність кишечника, що може призвести до порушення їх функцій. При невмінні правильно організувати розумову працю настає стан хронічної втоми, який може закінчитися виснаженням нервової системи чи розвитком судинного захворювання. Першими ознаками хронічної втоми є зниження уваги, ослаблення пам'яті, погіршення апетиту, дратівливість або апатія, періодичні головні болі, розлади сну, які в одних випадках виявляються сонливістю, в інших – безсонням. Для того, щоб попередити захворювання, пов'язані з хронічною втомою, перш за все необхідно врегулювати сон. Для цього рекомендується лягати спати завжди в один і той самий час. За 1 годину до настання сну слід припинити напружену роботу та присвятити цей час відпочинку. Також при напруженій розумовій праці рекомендується здійснювати кожного дня прогулянки на свіжому повітрі.

5.3 Нормування праці, вибір оптимального режиму праці та відпочинку

Оскільки робота над дисертацією була плановою, проте не передбачала строгої звітності, режим праці залежав лише від працівника. Оптимальним у цьому випадку є такий режим, за якого робота розподіляється на приблизно однакову кількість годин щодня, з обов'язковими перервами кожну годину на 10 хвилин для того, щоб дати відпочинок зору та зробити невелику розминку, і тим самим не допускати стану втоми та сприяти збереженню високої працездатності та оптимального функціонального стану організму протягом роботи. Також потрібно уникати роботи в нічний час, коли мозку необхідний відпочинок і всі процеси в організмі уповільнюються. Стосовно початку роботи та її закінчення, періодичності та тривалості перерв, то в цьому випадку працівник може сам встановлювати свій оптимальний режим, спостерігаючи, в які години робота є найбільш продуктивною, а коли відпочинок приносить найбільше користі, скільки часу потрібно індивідуально працівнику на відновлення сил і скільки часу він може працювати до появи відчуття втоми. Потрібно також враховувати, що несприятливі умови праці створюють додаткове функціональне навантаження на організм працівника, що зумовлює необхідність скорочення періодів роботи та збільшення часу відпочинку, а також скорочення робочого часу. У цьому випадку розробляються так звані компенсаторні режими праці та відпочинку.

5.4 Санітарія та гігієна робочого місця

Вимоги до приміщення Приміщення, в якому проводилася робота над дисертацією, відповідає нормам. Оскільки у приміщенні лише один комп'ютер, усі норми стосовно розташування кількох комп'ютерів та робочих місць ми опускаємо. Площа кімнати становить більше ніж 6 кв. м. Вимоги до організації робочого місця Оскільки використання комп'ютера є періодичним і не є основним видом праці, то він розміщується на приставному столі, з лівого боку від основного робочого столу. Основне робоче місце являє собою стіл, розміри якого задовольняють норми (висота – 725 мм, ширина – 1000 мм, глибина – 800 мм). Робоче сидіння має всі необхідні основні елементи: сидіння, спинку, стаціонарні підлокітники. Приставний стіл, на якому розташований комп'ютер, також задовольняє норми та забезпечує підтримання оптимальної робочої пози. Вимоги до освітлення Відносно вікон робоче місце розташоване з лівого боку, тому природне світло задовольняє норми. Штучне освітлення приміщення не відповідає нормам, оскільки не має системи загального рівномірного освітлення. На робочому місці встановлені світильники місцевого освітлення, які значно покращують роботу з книгами. Немає можливості використовувати систему вимикачів, що дозволяє регулювати інтенсивність штучного освітлення залежно від інтенсивності природного, а також дозволяє освітлювати тільки потрібні для роботи зони приміщення. Вимоги до вентиляції, опалення, кондиціювання, мікроклімату У приміщенні в холодний та теплий періоди року підтримується температура 22 – 23°C, що є оптимальною. Вологість повітря також перебуває у межах норми. Вимоги електробезпеки Усі провідники відповідають номінальним параметрам мережі та навантаження, умовам навколишнього середовища, умовам розподілу провідників, температурному режиму. Персональний комп'ютер і периферійні пристрої підключаються до електромережі тільки за допомогою справних штепсельних з'єднань та електророзеток заводського виготовлення. Дотримуються також усі правила експлуатації кабелів і розеток, пошкоджені пристрої не використовуються. Усі деталі та пристрої, які нагріваються під час експлуатації, ізольовані від контактів із горючими речовинами та водою. Вимоги до рівнів шуму та вібрацій Під час роботи не використовувалися жодні шумопоглинаючі пристрої, оскільки рівень шуму в приміщенні був зведений до мінімуму, так само як і сторонні звуки; поруч не працювала ніяка техніка, яка могла б чинити шум та вібрації. Тому будемо вважати, що рівень шуму та вібрацій на робочому місці був мінімальним.

5.5 Охорона праці під час роботи з комп'ютером

Під час роботи з комп'ютером були дотримані всі правила безпечного користування комп'ютером. Окрім дотримання правил гігієни, про які вже було сказано вище, було дотримано порядок дій на початку та при завершенні роботи; відсутність будь-яких втручань у роботу деталей комп'ютера під час його роботи; відсутність поблизу предметів, які можуть завадити нормальній роботі комп'ютера або пошкодити його, а також пожежонебезпечних речовин і предметів. Не використовувалося обладнання, яке перевищило термін експлуатації, відремонтоване в домашніх умовах, ненадійне чи поламане. Потрібно зазначити також, що під час роботи було використано плоский монітор останніх модифікацій, який є найменш шкідливим для зору.

Висновки

В роботі вивчаються властивості рекордів та рекордних моментів, які відповідають послідовностям випадкових величин. Наведено нове поняття кратних рекордів; доведено, що в класичній постановці майже напевно існує лише скінченна кількість кратних рекордів.

Розглянуто так звану F^α-схему, для якої майже напевно можуть існувати нескінченно багато кратних рекордів. Наведено умови на послідовність $\{\alpha_n\}$, при яких майже напевно існує нескінченна кількість кратних рекордів. Для будь-якого натурального r побудовано приклади F^α-схем, для яких майже напевно існує нескінченно багато r-кратних рекордів, але тільки скінченна кількість $(r+1)$-кратних рекордів.

Вивчено асимптотичну поведінку кратних рекордів та рекордних моментів, побудованих з F^α-схем. Виявилось, що ця поведінка відрізняється від класичної і визначається відповідною послідовністю $\{\alpha_n\}$. Доведено підсилені закони великих чисел для l-кратних рекордів $N(n,l)$ та рекордних моментів $L(n,l)$. На відміну від класичного випадку індикатори кратних рекордів не є незалежними випадковими величинами, тому у доведенні граничних результатів використовується техніка для m-залежних випадкових величин.

Побудовано ряд прикладів, які показують різні нормування у підсилених законах великих чисел для кратних рекордів та рекордних моментів. Основну увагу приділено моделі Янга (F^α-схема, у якій $\{\alpha_n\}$ є геометричною послідовністю), яка використовується для прогнозування олімпійських рекордів з різних видів спорту.

Отримані результати дають змогу більш широко використовувати F^α-схему на практиці для прогнозування 2-, 3- та l-кратних рекордів у спорті, метереології, гідрології і т. д.

Список використаної літератури

1. *Ahsanullah M. (2004).* Record Values Theory and Applications. University Press of America.
2. *Ahsanullah M. , Nevzorov V. B. (2015).* Records via Probability. Atlantis Press, Amsterdam–Paris–Beijing.
3. *Arnold B. C. , Balakrishnan N., Nagaraja H. N. (1998).* Records. John Wiley & Sons Inc., New York.
4. *Ballerini R., Resnick S.I. (1987).* Embedding sequence of successive maxi-ma on extremal processes with applications. J. Appl. Probab. 24, 827-837.
5. *Bingham N. H., Goldie C. M. , Teugels J. L. (1987).* Regular Variation. Cambridge University Press, Cambridge.
6. *Borovkov K., Pfeifer D. (1995).* On record indices and record times. J. Statist. Plann.Inference 45, 65-79
7. *Chandler, K.N. (1952).* The distribution and frequency of record. J Roy. Statist. Soc., Ser B 14, 220-228.
8. *Doukhan, P., Klesov, O. I., Pakes, A., Steinebach, J. G. (2013).* Limit theorems for record counts and times in the F -scheme. Extremes, 16(2), 147–171.
9. Paul Doukhan, Oleg I. Klesov, Josef G. Steinebach. Strong Laws of Large Numbers in an F -Scheme. in “Mathematical Statistics and Li-mit Theorems. (2015). Festschrift in Honour of Paul Deheuvels”, Springer International Publishing, Switzerland.
10. *Gut A.(2013).* Probability: A Graduate Course (Springer Texts in Statistics) 2nd ed. 2013 Edition.
11. *Holst L. (2008).* The number of two cosecutive successes in a Hoppe–Polya urn. J. Apll. Prob. 45, 901-906.
12. *Holst L. (2009).* On consecutive records in certain Bernoulli sequences. J. Appl. Prob. 46, 1201-1208.
13. *Holst L. (2011).* A note on recors in a random sequence. Ark. Mat. 49, 351-356.

14. *Nevzorov V. B. (2001).* Records: Mathematical Theory. American Mathematical Society, Providence, RI.
15. *Renyi A.(1962).* Theorie des elements saillants d’une suite d’observati-ons. Colloquim on Combinenatorial Methods in Probability Theory (Math. Inst., Aarhus Univ., Aarhus, Dtnmark August 1-10, 1962), 104-117.
16. *Yang M.C.K (1975).* On the distribution of the inter-record times in an increasing population. - J. Appl. Probab. 12, 148-154.
17. *Weissman I. (1995).* Records from a power model of independent observati-ons. J. Appl. Probab. 32, 982-990.
18. *Сенета Е. (1985).* Правильно меняющиеся функции, “Наука”, Москва/ переклад з англ. оригіналу Regularly Varying Functions, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1976.

Додатки

В цьому розділі зібрано відомі результати та означення, які використовуються в основному тексті роботи.

Лема Бореля–Кантеллі

Лема 3. *Нехай* $C_n, n \geq 1$ *– деяка послідовність випадкових подій, тобто* $C_n \in \mathbb{F}, n \geq 1$*. Тоді:*
а) Якщо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(C_n) < \infty$*, то* $P(C_n$ *нескінченне число разів*$) = 0$;
б) Якщо $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(C_n) = \infty$*, і події* $\{C_n\}$ *незалежні в сукупності, то* $P(C_n$ *нескінченне число разів*$) = 1$.

Теорема Штольца

Теорема 12 (Теорема Штольца)**.** *Нехай* $\{x_n\}$ *і* $\{y_n\}$ *— дві послідовності дійсних чисел, причому послідовність* $\{y_n\}$ *строго зростає (починаючи з деякого номера) і є необмеженою. Тоді*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}.$$

Наслідок 2. *Позначимо* $x_n = 1 + 2^\beta + \cdots + n^\beta$*. Якщо* $\beta > -1$*, то*

$$x_n \sim \frac{n^{\beta+1}}{\beta+1} \quad \textit{або} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\beta+1}}{x_n} = \beta + 1 \quad \textit{або} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n^{\beta+1}} = \frac{1}{\beta+1}.$$

Теорема Колмогорова

Теорема 13 (Теорема Колмогорова)**.** *Нехай* $\{X_n\}$ *- послідовність незалежних випадкових величин,* $a_n \uparrow \infty$*. Якщо* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{var[X_n]}{a_n^2} < \infty$*, тоді*

$$\frac{S_n - E[S_n]}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \ \text{ м.н.},$$

де $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$*.*

Наслідок 3. *Якщо виконуються умови теореми 13 і*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E[S_n]}{a_n} = c < \infty,$$

то

$$\frac{S_n}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} c \ \text{ м.н.}$$

Лема Коші

Лема 4 (лема Коші)**.** *Нехай* $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$*. Тоді*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} c_k = c$$

Константа Ойлера–Маклорена

Твердження 1. *Нехай* $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n}$*. Тоді*

$$H_n = \ln n + \gamma + \varepsilon_n,$$

де $\gamma = 0,5772\ldots$ *— стала Ойлера-Маскероні, а* $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$*.*

m-залежні випадкові величини

Означення. Послідовність випадкових величин $\{Y_i, i = 1, 2\ldots\}$ називається **m-залежною,** *якщо величини* $(Y_1, \ldots, Y_r)$ *і* $(Y_s, Y_{s+1}, \ldots)$ *незалежні* *тоді, коли* $s - r > m$.

Правильно змінні функції

Означення. Функція R називається правильно змінною, якщо вона визначена та додатна при $x \geq x_0 > 0$, а границя

$$\lim_{x\to\infty} \frac{R(\lambda x)}{R(x)}$$

існує і є скінченою для всіх $\lambda > 0$.