НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСИТУТ»
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ ТА ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

«На правах рукопису»
УДК 519.21

«До захисту допущено»
Завідувач кафедри
________ О. І. Клесов
(підпис) (ініціали, прізвище)
“____” ________________20__р.

Магістерська дисертація
на здобуття ступеня магістра

зі спеціальності 8.04020101, «Математика»
(код і назва спеціальності)
на тему «Великі відхилення оцінок параметрів регресії з неперервним часом»
Виконала: студентка VI курсу, групи ОМ-41м
(шифр групи)

Кароль Богдана Вікторівна ________
(прізвище, ім’я, по батькові) (підпис)

Науковий керівник д. ф.- м. н., проф. Іванов О. В. ________
(посада, науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали) (підпис)

Консультант з охорони праці та безпеки в надзвичайних ситуаціях
(назва розділу)
к. т. н., доц. Мітюк Л. О. ________
(посада, науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали) (підпис)

Рецензент Член.-кор. НАНУ, зав. відділом мат. методів дослідження операцій Інституту кібернетики ім. В. М. Глушкова НАНУ
д. ф.-м. н., проф. Кнопов П. С. ________
(посада, науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали) (підпис)

Засвідчую, що у цій дипломній роботі немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студент ________
(підпис)

Київ - 2016 року

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

Інститут (факультет) фізико-математичний
(повна назва)
Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей
(повна назва)
Рівень вищої освіти - другий (магістерський)
Спеціальність 8.04020101, «Математика»
(код і назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри
_________ О. І. Клесов
(підпис) (ініціали, прізвище)
“____” _____________20__р.

ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію студенту

Кароль Богдані Вікторівні

1) Тема дисертації «Великі відхилення оцінок параметрів регресії з неперервним часом»
науковий керівник дисертації Іванов Олександр Володимирович
д. ф.- м. н., проф.
(прізвище, ім'я по батькові, науковий ступінь, вчене звання)
затверджені наказом по університету від «23» лютого 2016р № 870с

2) Термін подання студентом дисертації «15» червня 2016р

3) Об'єкт дослідження: нелінійні моделі регресії з дискретним та неперервним часом

4) Предмет дослідження: експоненціальні оцінки ймовірностей великих відхилень нормованої оцінки найменших квадратів параметрів нелінійних моделей регресії

5) Перелік завдань, які потрібно розробити

   а) основна частина:

      1. Опрацювати статтю А. Сайдерса та К. Джапарідзе. Детально розібрати доведення загальної теореми про ймовірності великих відхилень нормованих М-оцінок.
      2. Застосувати цю теорему для отримання теорем про ймовірності великих відхилень нормованої оцінки найменших квадратів в моделі регресії з дискретним часом у випадках:
         - сумісно строго субгауссівських похибок спостережень;
         - стаціонарних сумісно строго субгауссівських помилок спостережень.
      3. Розглянути відповідну нелінійну модель регресії з неперервним часом і сформулювати та довести відповідні теореми у випадках:
         - гауссівського стаціонарного випадкового шуму;
         - сумісно строго субгауссівського випадкового шуму;
         - стаціонарного сумісно строго субгауссівського випадкового шуму.

   б) охорона праці:

      1. Оцінка важкості та напруженості праці.
      2. Аналіз психологічнх аспектів умов праці.
      3. Нормування праці і вибір оптимального режиму праці та відпочинку.
      4. Санітарія та гігієна робочого місця.
      5. Охорона праці при використанні технічних засобів.

6) Орієнтовний перелік публікацій:

   1. Кароль Б. В. Ймовірності великих відхилень оцінки параметра гауссівської регресії з неперервним часом: V-та всеукраїнська

наукова конференція молодих вчених з математики та фізики, 25-26 квітня 2016 р., Київ: Матеріали конф. С.1. Математичного аналізу, теорії ймовірностей, диференціальних рівнянь – К.: НПУ ім. М. П. Драгоманова 2016. – с. 10.

2. Кароль Б. В. Імовірності великих відхилень оцінки найменших квадратів в гауссівській регресії: XVII-та міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука, 19-20 травня 2016 р., Київ: Матеріали конф. С.3. Теорія ймовірностей та математична статистика – К.: НТУУ "КПІ" 2016., т. 3, с. 84.

7) Консультанти розділів дисертації

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв
Охорона праці та безпека в надзвичайних ситуаціях	доцент Мітюк Л. О.		

8) Дата видачі завдання 01.02.2016

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1	Отримання завдання на магістерську дисертацію. Узгодження попереднього змісту дипломної роботи. Робота з літературою.	8.02.2016	виконано

2	Детальний запис доведення загальної теореми Сайдерса-Джапарідзе про ймовірності великих відхилень статистичних оцінок.	29.02.2016	виконано
3	Імовірності великих відхилень оцінки найменших квадратів в моделях регресії з дискретним часом.	04.04.2016	виконано
4	Імовірності великих відхилень оцінки найменших квадратів в моделях регресії з неперервним часом.	23.05.2016	виконано
5	Оформлення роботи.	10.06.2016	виконано

Студент ____________ (підпис) Б. В. Кароль (ініціали, прізвище)

Науковий керівник дисертації ____________ (підпис) О. В. Іванов (ініціали, прізвище)

Реферат

Магістерська дисертація: 90 сторінок, ____ слайдів для проектора, 31 першоджерело.

Вивчаються ймовірності великих відхилень нормованої оцінки найменших квадратів параметрів нелінійних моделей регресії з дискретним та неперервним часом.

Мета роботи полягає в отриманні умов до функції регресії та випадкового шуму (помилок спостережень), за яких ймовірності великих відхилень оцінки найменших квадратів спадають із показниковою швидкістю.

Завданням роботи є отримання результатів про ймовірності великих відхилень оцінки найменших квадратів за різними припущеннями щодо елементів моделі регресії: функції регресії та випадкового шуму. Об'єктом дослідження є нелінійні моделі регресії з дискретним та неперервним часом. Предметом дослідження є експоненціальні оцінки ймовірностей великих відхилень нормованої оцінки найменших квадратів параметрів нелінійних моделей регресії.

Для отримання вказаних результатів використано складні поняття теорії ймовірностей, математичної статистики та теорії випадкових процесів.

Запропоновано сукупність умов на елементи регресійних моделей, за яких ймовірності великих відхилень норми нормованої деякою матрицею різниці оцінки найменших квадратів та невідомого значення параметра збігаються до нуля з експоненціальною швидкістю, що визначає актуальність, важливість та новизну отриманих результатів для статистики випадкових процесів.

Робота має теоретичний характер, проте наведені в ній приклади показують, що отримані результати можна застосувати у розв'язанні прикладних статистичних задач.

Природними напрямками продовження досліджень є поширення доведених теорем на інші класи сумісно строго субгауссівських випадкових процесів, побудова надійних областей для невідомих параметрів моделей регресії з дискретним та неперервним часом, вивчення швидкості збіжності моментів оцінки найменших квадратів до моментів її граничного нормального розподілу.

Ключові слова: Нелінійна модель регресії, дискретний час, неперервний час, оцінка найменших квадратів, імовірності великих відхилень, сумісно строго субгауссівські часові ряди та випадкові процеси.

Abstract

Master's degree thesis contains 90 pages, ____ slides for projector, 31 primary sources.

Probabilities of large deviations for normed least squares estimator of discrete and continuous time nonlinear regression model parameters are studied in the thesis.

The goal of this work lies in obtaining conditions on the regression function and random noise (observation errors) to ensure exponential decrease rate of probabilities of large deviations for the least squares estimator.

The task of this research is receiving results on probabilities of large deviations of the least squares estimator under different assumptions on elements of regression models: regression function and random noise. Nonlinear regression models with discrete and continuous time are the object of the studying. The exponential convergence rate of probabilities of large deviations of nonlinear regression model parameter least squares estimator is the research subject.

For obtaining the thesis results complicated concepts of probability theory, mathematical statistics and theory of random processes have been used.

The set of conditions on the elements of regression models is proposed under which probabilities of large deviations of the norm of the normed by some matrix the least squares estimator and true parameter value difference converges to zero with exponential rate. This fact determines urgency, importance and novelty of obtained results for statistics of random processes.

This work is of a theoretical nature, however the examples considered in its text show that the results obtained can be used in solution of applied statistical problems.

A natural direction for further study lies in extension of the proved theorems to other classes of jointly strictly subgaussian random processes, constructing the confidence intervals for unknown regression model parameters with discrete and continuous time, study the rate of convergence of the moments of least squares estimation to its limiting normal distribution.

Key words: nonlinear regression model, discrete time, continuous time, least squares estimator, probabilities of large deviations, jointly strictly subgaussian time series and random processes.

Зміст

Вступ

Теорія великих відхилень є важливою складовою частиною сучасної теорії ймовірностей, математичної статистики та теорії випадкових процесів, в якій вивчається швидкість збіжності на нескінченності до нуля хвостів ймовірнісних розподілів. Перші ідеї цієї теорії та її застосувань можна знайти ще в роботах П. С. Лапласа, а пізніше – у роботах С. Н. Бернштейна та Г. Крамера. Загальний математичний апарат теорії великих відхилень було запропоновано у 1966р. Р. С. Вараданом [1], який у 2007р. отримав Абелеву премію за цикл робіт в цій галузі.

Для сум незалежних випадкових величин (в. в.) і векторів величезний внесок у вивчення ймовірностей великих відхилень зробили Б. В. Гнеденко, А. М. Колмогоров [2], В. В. Петров [3, 4], Р. Н. Бхаттачарія, Р. Ранга Рао [5], В. В. Булдигін, Ю. В. Козаченко [6].

Результати про великі відхилення для функціоналів від різноманітних класів випадкових процесів містяться в монографіях Л. Сауліса, В. Статулявічуса [7], О. Д. Вентцеля [8], В. В. Булдигіна, Ю. В. Козаченка [6] та багатьох інших.

Теорія великих відхилень в математичній статистиці та статистиці випадкових процесів вивчає асимптотичну поведінку хвостів функцій розподілу параметричних та непараметричних статистичних оцінок. Сенс отримання результатів такого типу з точними або наближено точними константами в показнику експоненти, якщо збіжність до нуля експоненціальна, або перед степеневою функцією, якщо збіжність степенева, правих частин нерівностей полягає в отриманні можливості будувати надійні інтервали для невідомих функціональних характеристик випадкових процесів, таких як коваріаційна функція стаціонарного гауссівського процесу [6]. Крім цього, для асимптотично нормальних оцінок отримуємо інструмент дослідження асимптотичних властивостей моментів оцінки, що вивчається, наприклад, збіжність моментів оцінки до відповідних моментів граничного гауссівського розподілу.

Що стосується параметричних оцінок, то треба послатися на відому монографію І. А. Ібрагімова, Р. З. Хасмінського [9], в якій було отримано експоненціальну швидкість збіжності ймовірностей великих відхилень оцінок максимальної вірогідності. Цей результат привів до появи великої кількості робіт з тематики великих відхилень статистичних оцінок.

Далі ми будемо говорити виключно про оцінки найменших квадратів (ОНК) параметрів нелінійної регресії. Так, у роботі О. В. Іванова [10] було доведено теорему про ймовірності великих відхилень зі степеневою швидкістю спадання ОНК скалярного параметра нелінійної регресії. Аналогічний результат отримав Б. Л. С. Пракаса Рао [11] для гауссівської регресії та експоненціальної швидкості збіжності. Зішлемося також на роботу С. ван де Гір [12], присвячену тій же тематиці. У цитованих роботах розглядалися нелінійні моделі регресії з незалежними однаково розподіленими помилками спостережень.

У мононграфії О. В. Іванова, М. М. Леоненка [13] з використанням результатів [9] було отримано теорему про степеневу збіжність ймовірностей великих відхилень ОНК параметрів нелінійної регресії з однорідним гауссівським випадковим полем в якості шуму.

У роботі А. Сайдерса, К. Джапарідзе [14] було отримано теорему про ймовірності великих відхилень, що розширює результат [9], і застосовано до ОНК векторного параметра нелінійної функції регресії в моделях з незалежними та однаково розподіленими предгауссівськими та субгауссівськими [6] помилками спостережень.

Незалежно від цієї роботи, але пізніше, схожі результати було надруковано в монографії О. В. Іванова [15], де було отримано експоненціальну та степеневу швидкісь збіжності ймовірностей великих відхилень ОНК параметра нелінійної регресії з незалежними однаково розподіленими випадковими помилками спостережень. Деякі узагальнення результатів [14] на коррельовані спостереження містяться у роботі Ху Шухе [16].

Магістерська дисертація складається із трьох розділів.

У 1-му розділі даємо детальне доведення теореми Сайдерса-Джапарідзе

[14] (у нас — теорема 1.1), яка узагальнює згадану вище теорему Ібрагімова-Хасмінського [9]. Оригінальне доведення у роботі [14] містить купюри, які відновлено у 1-му розділі.

У 2-му розділі розглянуто нелінійні моделі регресії з дискретним часом та субгауссівськими помилками спостережень.

У підрозділі 2.1 наведено результати про великі відхилення ОНК у випадку незалежних однаково розподілених субгауссівських помилок спостережень. Теореми цього підрозділу сформульовано в [14] і доведено у дипломній роботі О. Д. Плаксіна [17]. Ми наводимо їх в нашій роботі для повноти викладення матеріалу та для зручності посилань у подальшому тексті.

У підрозділі 2.2 помилки спостережень утворюють лінійний часовий ряд, побудований за дискретним субгауссівським білим шумом. У підрозділі 2.3 у якості випадкових помилок розглянуто лінійний стаціонарний субгауссівський часовий ряд. В обох випадках отримано теореми про збіжність з експоненціальною швидкістю до нуля ймовірності великих відхилень ОНК параметра функції регресії з константами в показниках експонент, що залежать від числових характеристик випадкового шуму, функції регресії та розмірності невідомого параметра.

У 3-му розділі йдеться про ймовірності великих відхилень ОНК параметра нелінійної моделі регресії з неперервним часом.

У підрозділі 3.1 розглянуто гауссівський та гауссівський стаціонарний шуми як частинні, але важливі у застосуваннях, приклади сумісно строго субгауссівських випадкових процесів [6], для яких отримано теореми аналогічні теоремам про великі відхилення ОНК 2-го розділу.

У підрозділі 3.2 випадковий шум — це сумісно строго субгауссівський випадковий процес, який можна представити у вигляді стохастичного інтегралу, побудованого за ортогональною стохастичною мірою. У підрозділі 3.3 випадковий шум — теж стохастичний інтеграл, побудований за ортогональним сумісно строго субгауссівським білим шумом, і є фізично здійсненним лінійним фільтром. Для таких випадкових шумів отримано теореми про ймовірності великих відхилень ОНК параметра регресії, аналогічні теоремам 2-го розділу.

Отримані в роботі результати проілюстровано прикладами функцій регресії та випадкових шумів, для яких виконуються умови доведених теорем.

Результати про ймовірності великих відхилень оцінки найменших квадратів в моделі регресії з неперервним часом та гауссівським стаціонарним випадковим шумом доповідались на V-тій всеукраїнській науковій конференції молодих вчених з математики та фізики [18] та на XVII-тій міжнародній науковій конференції ім. акад. М. Кравчука [19].

1 Теорема Сайдерса-Джапарідзе про ймовірності великих відхилень М-оцінок

У цьому розділі роботи ми наведемо у зручній для наших подальших цілей формі теорему Сйдерса-Джапарідзе [14] про ймовірності велиих відхилень М—оцінок , яка є узагальненням класичної теореми Ібрагімова—Хасьмінського [9] про ймовірності великих відхилень оцінок максимальної вірогідності.

Розглянемо сім'ю статистичних експериментів $\mathscr{E}^{(T)}=\{\mathscr{X}^{(T)},\mathscr{U}^{(T)},\mathbb{P}_\theta^{(T)}$, $\theta \in \Theta^c\}$, де Θ^c —замикання відкритої множини $\Theta \in \mathbb{R}^q$. Розглянемо також M-оцінку, що максимізує за $\theta \in \Theta^c$ функціонал $C_T : \mathscr{X}^{(T)} \times \Theta \to [0; \infty)$, від спостережень $X^T \in \mathscr{X}^{(T)}$, де $C_T(X_T, \theta)$ для всіх $X_T \in \mathscr{X}^{(T)}$ є додатною неперервною функцією від X^T.

Далі ми припускаємо, що для всіх $\theta \in \Theta^c$ та $X^T \in \mathscr{X}^{(T)}$ супремум $\hat{\theta}_T$ у співвідношенні

$$C_T(X^T, \hat{\theta}_T) = \sup_{\theta \in \Theta^c} C_T(X^T, \theta) \tag{1.1}$$

досягається. Тоді на підставі теореми (3.10) на с.270 роботи І. Пфанцагля [20] існує хоча б один такий випадковий вектор.

Результати нашої роботи мають асимптотичну природу, тобто вони справедливі для достатньо великих T ($T > T_0 > 0$) та R ($R > R_0 > 0$), де "$T \to \infty$" описує наближення до граничного стану статистичного експерименту $\mathscr{E}^{\infty}$, а R описує величину відхилення $\hat{\theta}_T$ від істинного значення параметра θ.

Нехай для кожного $T > T_0$ і $\theta \in \Theta$ $\phi(T, \theta)$ - деяка невироджена нормуюча квадратна матриця порядку q. Визначимо нормоване M-відношення

$$Z_{T,\theta}(u) := Z_{T,\theta}(X^T, u) = \frac{C_T(X^T, \theta + \phi(T,\theta)u)}{C_T(X^T, \theta)}, \tag{1.2}$$

яке для фіксованих спостережень X^T є неперервною додатною скінченною функцією на множині $U_{T,\theta} := \phi(T, \theta)^{-1}(\Theta^c - \theta)$. Введемо сім'ю множин

$$\Gamma_{T,\theta,R} := U_{T,\theta} \cap \{u : R \le \|u\| \le R+1\}, \tag{1.3}$$

де $\|u\| = \left(\sum_{i=1}^{q} u_i^2\right)^{1/2}$ — евклідова норма вектора $u = (u_1, u_2, \ldots, u_q) \in \mathbb{R}^q$.

Позначимо $\mathbf{F}$ клас всіх функцій f_T, які мають наступні властивості:

1) для фіксованого T f_T є монотонно зростаючою до нескінченноті на $[0, \infty)$ функцією;

2) для будь-якого $N > 0$

$$\lim_{R\to\infty,\, T\to\infty} R^N \exp\{-f_T(R)\} = 0. \tag{1.4}$$

Нехай $\gamma(R)$ - поліном, не обов'язково один і той самий, коефіцієнти якого можуть залежати від m, α, q, але не від T, θ, R, u, v.

Позначимо також $\mathbf{H}$ клас всіх функцій $\eta_{T,\theta}$, які мають наступні властивості:

(1) для фіксованого T та $\theta \in \Theta$, $\eta_{T,\theta} : U_{T,\theta} \to (0, \infty)$;

(2) існує поліном $\gamma(R)$ такий, що для $T > T_0$ та $R > R_0$

$$\sup_{u \in \Gamma_{T,\theta,R}} \eta_{T,\theta}^{-1}(u) \le \gamma(R). \tag{1.5}$$

Нехай для кожного T і θ, $\tilde{\zeta} : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ — монотонно неспадна неперервна функція. Визначимо випадковий функціонал

$$\zeta_{T,\theta} := \tilde{\zeta}_{T,\theta}(Z_{T,\theta}(u)) \tag{1.6}$$

Теорема 1.1. *(a) Нехай функціонали $\zeta_{T,\theta}(u)$, $u \in U_{T,\theta}$, мають наступні властивості: існують дійсні числа m і α, $m \geq \alpha > q$, функції $f_T \in \mathbf{F}$ та $\eta_{T,\theta} \in \mathbf{H}$, дійсний поліном $\gamma(R)$ такі, що для $T > T_0$ та $R > R_0$ виконуються наступні умови:*

1.1 $$\mathbb{E}_\theta^T \left|\zeta_{T,\theta}(u) - \zeta_{T,\theta}(v)\right|^m \leq \|u - v\|^\alpha \gamma(R), \quad u, v \in \Gamma_{T,\theta,R}; \tag{1.7}$$

1.2 $$\mathbb{P}_\theta^T \left\{\zeta_{T,\theta}(u) - \zeta_{T,\theta}(0) \geq -\eta_{T,\theta}(u)\right\} \leq \exp\left\{-f_T(R)\right\}, \quad u \in \Gamma_{T,\theta,R}. \tag{1.8}$$

Тоді існують константи B_0, $b_0 > 0$ такі, що для $T > T_0$ і достатньо великих H ($H > H_0 > 0$)

$$\mathbb{P}_\theta^T \left\{\|\phi(T,\theta)^{-1}(\hat{\theta}_T - \theta)\| \geq H\right\} \leq B_0 \exp\left\{-b_0\, f_T(H)\right\}, \tag{1.9}$$

причому значення b_0 можна зробити як завгодно близьким знизу до $\dfrac{\alpha - q}{\alpha - q + mq}$, обравши B_0 достатньо великим.

*(b) Результат частини (a) буде виконуватись, якщо замінити **1.1** на*

1.1$\boldsymbol{\delta}$ *Умова **1.1** виконується для всіх $u, v \in \Gamma_{T,\theta,R}$ при $\|u - v\| \leq \delta$, де δ — фіксована додатна константа, за умови виконання одного із двох (слабших) припущень:*

1.1' *Θ є опуклою множиною;*

1.1" *$\mathbb{E}_\theta^T |\zeta_{T,\theta}(u)|^m \leq \gamma(R)$ для всіх $u \in \Gamma_{T,\theta,R}$.*

Сформулюємо дві леми, необхідні нам для доведення теореми 1.

Лема 1.1. *Нехай величини Z, $\hat{\theta}_T$ та ін. визначено так само, як і вище.*

Тоді

$$\mathbb{P}_\theta^T\left\{\|\phi(T,\theta)^{-1}(\hat\theta_T-\theta)\|\ge H\right\}\le \mathbb{P}_\theta^T\left\{\sup_{\|u\|\ge H,\,u\in U_{T,\theta}} Z_{T,\theta}(u)\ge 1\right\}. \quad (1.10)$$

Доведення. Позначимо $\hat u_T = \phi(T,\theta)^{-1}(\hat\theta_T-\theta)$. Тоді, враховуючи, що $Z_{T,\theta}(0)=1$, маємо за означенням оцінки $\hat\theta_T$

$$\mathbb{P}_\theta^T\left\{\|\hat u_T\|\ge H\right\} = \mathbb{P}_\theta^T\left\{\|\hat u_T\|\ge H,\, Z_{T,\theta}(\hat u_T)\ge Z_{T,\theta}(0)\right\}\le$$

$$\le \mathbb{P}_\theta^T\left\{\|\hat u_T\|\ge H,\, \sup_{\|u\|\ge H,\,u\in U_{T,\theta}} Z_{T,\theta}(\hat u_T)\ge Z_{T,\theta}(0)\right\}\le$$

$$\le \mathbb{P}_\theta^T\left\{\sup_{\|u\|\ge H,\,u\in U_{T,\theta}} Z_{T,\theta}(\hat u_T)\ge Z_{T,\theta}(0)\right\}.$$

■

Лема 1.2. *Нехай $\zeta(u)$ — вимірна та сепарабельна дійсна випадкова функція на замкненій підмножині $\Gamma\subset\mathbb{R}^q$. Нехай також існують числа $m\ge\alpha>q$ та обмежена на компактах функція $C:\mathbb{R}^q\to\mathbb{R}$ такі, що для всіх $u,v\in\Gamma$*

$$\mathbb{E}|\zeta(u)|^m\le C(u), \quad \text{(i)}$$

$$\mathbb{E}|\zeta(u)-\zeta(v)|^m\le C(u)\|u-v\|^\alpha. \quad \text{(ii)}$$

Тоді майже напевно реалізації $\zeta(u)$ є неперервними функціями на Γ. Більше того, покладемо

$$w(h,\zeta,L)=\sup|\zeta(u)-\zeta(v)|,$$

де $\sup$ береться по всіх $u,v\in\Gamma$ з $\|u-v\|\le h$, $\|u\|\le L$, $\|v\|\le L$. Тоді

$$\mathbb{E}\,w(h,\zeta,L)\le B\left(\sup_{\|u\|\le L} C(u)\right)^{1/m} L^{q/m}\,h^{(\alpha-q)/m},$$

де константа B залежить тільки від m, α, q.

Доведення. Це твердження доведено в [9], с.488, теорема 19, а описку у її формулюванні виправлено в [14]. ■

Доведення теореми 1.1. Доведемо спочатку частину (b). Покажемо, що з **1.1$\boldsymbol{\delta}$** та **1.1'** випливає **1.1**. З опуклості Θ випливає, що будь-які точки $u, v \in \Gamma_{T,\theta,R}$ можна з'єднати в $\Gamma_{T,\theta,R}$ лінійно-кусковим шляхом із відрізків довжиною не більше δ, де кількість відрізків не перевищує $c\delta^{-1}\|u-v\|$, а c — фіксована константа, яка не залежить від θ та R. Застосувавши нерівність Мінковського та використавши оцінку кількості відрізків, маємо

$$\left(\mathbb{E}_\theta^T \left|\zeta_{T,\theta}(u) - \zeta_{T,\theta}(v)\right|^m\right)^{1/m} \le c\delta^{-1}\|u-v\|\delta^{\alpha/m}\gamma(R)^{1/m},$$

що приводить до **1.1**, оскільки для $u, v \in \Gamma_{T,\theta,R}$

$$\|u-v\| \le \|u-v\|^{\alpha/m}\big(2(R+1)\big)^{1-\alpha/m},$$

де другий множник поглинається поліномом $\gamma(R)$.

Доведемо тепер, що з **1.1$\boldsymbol{\delta}$** та **1.1**" випливає **1.1'**. З **1.1**", знову використовуючи нерівність Мінковського, знаходимо, що ліва частина **1.1** обмежена $2^m\gamma(R)$, тобто при $\|u-v\| > \delta$ обмежена величиною $\|u-v\|^\alpha 2^m\delta^{-\alpha}\gamma(R)$

Покажемо, що для отримання основного результату (a) теореми достатньо довести, що знайдуться такі константи B, b, що

$$\mathbb{P}_\theta^T\left\{\sup_{\Gamma_{T,\theta,R}} \zeta_{T,\theta}(u) \ge \zeta_{T,\theta}(0)\right\} \le B\exp\left\{-b\, f_T(R)\right\}. \tag{1.11}$$

Дійсно, з означення ζ (1.6), монотонності f_T та $\tilde{\zeta}$ для будь-якого малого $\delta > 0$, з урахуванням (1.11), маємо

$$\mathbb{P}_\theta^T\left\{\sup_{\|u\|\ge R,\, u\in U_{T,\theta}} Z_{T,\theta}(u) \ge 1\right\} \le$$

$$\leq \sum_{r=0}^{\infty} \mathbb{P}_{\theta}^{T} \left\{ \sup_{\Gamma_{T,\theta,r+R}} Z_{T,\theta}(u) \geq 1 \right\} = \sum_{r=0}^{\infty} \mathbb{P}_{\theta}^{T} \left\{ \sup_{\Gamma_{T,\theta,r+R}} \zeta_{T,\theta}(u) \geq \zeta_{T,\theta}(0) \right\} \leq$$

$$\leq B \sum_{r=0}^{\infty} \exp\{-b f_T(r+R)\} =$$

$$= B \exp\{-b_0 f_T(R)\} \sum_{r=0}^{\infty} \exp\{-b\,\delta f_T(r+R)\}, \qquad (1.12)$$

де $b_0 = b(1-\delta)$. Доведемо, що ряд в правій частині (1.12) збігається. З (1.4) випливає, що для $N > 0$, $R > R_0(N)$, $T > T_0(N)$ виконується $R^N \exp\{-f_T(R)\} \leq 1$. Полкладемо $N = \dfrac{2}{b\,\delta}$, тоді $\exp\{-b\,\delta f_T(R)\} \leq (R^{-N})^{b\,\delta} = R^{-2}$. А це означає, що ряд з (1.12) можна оцінити рядом $\sum\limits_{r=0}^{\infty} (r+R)^{-2} < \infty$. Отримали співвідношення

$$\mathbb{P}_{\theta}^{T} \left\{ \sup_{\|u\| \geq R,\, u \in U_{T,\theta}} Z_{T,\theta}(u) \geq 1 \right\} \leq B_0 \exp\{-b_0 f_T(R)\}. \qquad (1.13)$$

Тепер використаємо лему 1.1. Покладемо $H = R$, тоді з (1.12) і (1.13) випливає результат теореми.

Отже, залишилось довести співвідношення (1.11). Розіб'ємо множину $\{u : R \leq \|u\| \leq R+1\}$ на N областей, кожна з яких має діаметр менший за h. Вищеописане розбиття можна зробити так, що кількість областей буде обмежена величиною

$$N \leq c(q)(R+1)^{q-1} h^{-q}, \qquad (1.14)$$

де $c(q)$ — константа, яка залежить тільки від q. Це розбиття породжує розбиття $\Gamma_{T,\theta,R}$ на не більше, ніж N множин. Позначимо

$$\Gamma_{T,\theta,R} = \Gamma_{T,\theta,R}^{(1)} \cup \Gamma_{T,\theta,R}^{(2)} \cup \ldots \cup \Gamma_{T,\theta,R}^{(N')}, \quad N' \leq N. \qquad (1.15)$$

Візьмемо з кожного $\Gamma^{(i)}_{T,\theta,R}$ точку u_i. Тоді

$$\mathbb{P}^T_\theta\left\{\sup_{\Gamma_{T,\theta,R}} \zeta_{T,\theta}(u) \geq \zeta_{T,\theta}(0)\right\} \leq \mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2, \tag{1.16}$$

де

$$\mathrm{P}_1 = \sum_{i=1}^{N'} \mathbb{P}^T_\theta\big\{\zeta_{T,\theta}(u_i) - \zeta_{T,\theta}(0) \geq -\eta_{T,\theta}(u_i)\big\}, \tag{1.17}$$

$$\mathrm{P}_2 = \mathbb{P}^T_\theta\left\{\sup_{\|u-v\|\leq h} |\zeta_{T,\theta}(u) - \zeta_{T,\theta}(v)| \geq \inf_{\Gamma_{T,\theta,R}} \eta_{T,\theta};\ u, v \in \Gamma_{T,\theta,R}\right\}. \tag{1.18}$$

Для отримання цієї оцінки запишемо

$$\mathbb{P}^T_\theta\left\{\sup_{\Gamma_{T,\theta,R}} \zeta_{T,\theta}(u) \geq \zeta_{T,\theta}(0)\right\} = \mathbb{P}^T_\theta\left\{\sup_{u \in \bigcup\limits_{i=1}^{N'} \Gamma^{(i)}_{T,\theta,R}} (\zeta_{T,\theta}(u) - \zeta_{T,\theta}(0)) \geq 0\right\} \leq$$

$$\leq \mathbb{P}^T_\theta\left\{\bigcup_{i=1}^{N'}\left\{\sup_{u\in\Gamma^{(i)}_{T,\theta,R}} (\zeta_{T,\theta}(u) - \zeta_{T,\theta}(0)) \geq 0\right\}\right\} =$$

$$= \mathbb{P}^T_\theta\left(\bigcup_{i=1}^{N'}\left\{\sup_{u\in\Gamma^{(i)}_{T,\theta,R}} (\zeta_{T,\theta}(u) - \zeta_{T,\theta}(u_i) + \zeta_{T,\theta}(u_i) - \zeta_{T,\theta}(0)) \geq \eta_{T,\theta}(u_i) - \eta_{T,\theta}(u_i)\right\}\right).$$

Зауважимо, що

$$\left\{\sup_{u\in\Gamma^{(i)}_{T,\theta,R}} (\zeta_{T,\theta}(u) - \zeta_{T,\theta}(u_i) + \zeta_{T,\theta}(u_i) - \zeta_{T,\theta}(0)) \geq \eta_{T,\theta}(u_i) - \eta_{T,\theta}(u_i)\right\} \subseteq$$

$$\subseteq \left\{\sup_{u\in\Gamma^{(i)}_{T,\theta,R}} (\zeta_{T,\theta}(u) - \zeta_{T,\theta}(u_i)) \geq \eta_{T,\theta}(u_i)\right\} \cup \left\{\zeta_{T,\theta}(u_i) - \zeta_{T,\theta}(0) \geq -\eta_{T,\theta}(u_i)\right\},$$

а також

$$\left\{ \sup_{u\in\Gamma^{(i)}_{T,\theta,R}} \left(\zeta_{T,\theta}(u)-\zeta_{T,\theta}(u_i)\right) \geq \eta_{T,\theta}(u_i) \right\} \subseteq$$

$$\subseteq \left\{ \sup_{\|u-v\|\leq h} |\zeta_{T,\theta}(u)-\zeta_{T,\theta}(v)| \geq \eta_{T,\theta}(u_i),\ u,v\in\Gamma_{T,\theta,R} \right\} \subseteq$$

$$\subseteq \left\{ \sup_{\|u-v\|\leq h} |\zeta_{T,\theta}(u)-\zeta_{T,\theta}(v)| \geq \inf_{\Gamma_{T,\theta,R}} \eta_{T,\theta},\ u,v\in\Gamma_{T,\theta,R} \right\}.$$

Отримали

$$\bigcup_{i=1}^{N'} \left\{ \sup_{u\in\Gamma^{(i)}_{T,\theta,R}} \left(\zeta_{T,\theta}(u)-\zeta_{T,\theta}(0)\right) \geq 0 \right\} \subseteq$$

$$\subseteq \bigcup_{i=1}^{N'} \left\{\zeta_{T,\theta}(u_i)-\zeta_{T,\theta}(0)) \geq -\eta_{T,\theta}(u_i)\right\} \cup$$

$$\cup \left\{ \sup_{\|u-v\|\leq h} |\zeta_{T,\theta}(u)-\zeta_{T,\theta}(v)| \geq \inf_{\Gamma_{T,\theta,R}} \eta_{T,\theta},\ u,v\in\Gamma_{T,\theta,R} \right\},$$

звідки і випливає оцінка (1.16).

З умов **1.2** та (1.14) отримуємо

$$P_1 \leq N' \exp\left\{-f_T(R)\right\} \leq c(q)(R+1)^{q-1}h^{-q}\exp\left\{-f_T(R)\right\}. \tag{1.19}$$

Оцінимо P_2. Нехай u_0 деяка точка з $\Gamma_{T,\theta,R}$. Розглянемо випадку функцію $\zeta_{T,\theta}(u)-\zeta_{T,\theta}(u_0)$ на замкненій множині $\Gamma_{T,\theta,R}$. Застосуємо лему 2.2. Покладемо

$$C(u)=\max\{1,\ \|u-u_0\|^{\alpha}\}\,\gamma(R). \tag{1.20}$$

Тоді $C(u)$ обмежена $\gamma(R)$ при $u,u_0\in\Gamma_{T,\theta,R}$. При такому виборі $C(u)$ умови (i) та (ii) леми 2.2 виконуються завдяки **1.1**. Тоді з нерівності Маркова, леми 2.2 та обмеженості $\eta_{T,\theta}^{-1}$ поліномом маємо

$$\mathrm{P}_2 \le \frac{\mathbb{E}_\theta^T \left\{ \sup\limits_{\|u-v\|\le h, \quad u,v\in\Gamma_{T,\theta,R}} |\zeta_{T,\theta}(u) - \zeta_{T,\theta}(v)| \right\}}{\inf\limits_{\Gamma_{T,\theta,R}} \eta_{T,\theta}} \le h^{\frac{\alpha-q}{m}} \gamma(R). \qquad (1.21)$$

Тоді враховуючи (1.16), (1.19), (1.21), маємо

$$\mathbb{P}_\theta^T \left\{ \sup_{\Gamma_{T,\theta,R}} \zeta_{T,\theta}(u) \ge \zeta_{T,\theta}(0) \right\} \le h^{-q} \gamma(R) \exp\{-f_T(R)\} + h^{\frac{\alpha-q}{m}} \gamma(R). \quad (1.22)$$

Тепер покладемо $h = \exp\{c\, f_T(R)\}$, де константу c потрібно обрати таким чином, щоб жоден доданок в правій частні (1.22) не домінував. Це призводить до

$$c = -\frac{m}{\alpha - q + mq}. \qquad (1.23)$$

Тоді результат теореми випливає з (1.22), (1.23) та властивості (1.4) функції $\exp\{f_T(R)\}$ подавляти будь-який поліном. ■

2 Імовірності великих відхилень оцінки найменших квадратів в моделі регресії з дискретним часом

2.1 Незалежні субгауссівські помилки спостережень

Припустимо, що спостереження X_t, $t = \overline{1,T}$, є випадковими величинами (в.в.) на $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$ з розподілами $\mathbb{P}_t$ ($\mathscr{B}$ – σ-алгебра борелевих підмножин дійсної вісі $\mathbb{R}$). Припустимо також, що невідомий розподіл $\mathbb{P}_t$ належить деякій параметричній множині $\{\mathbb{P}_{t\,\theta}, \theta \in \Theta\}$. Будемо називати трійку $\mathscr{E}_t = (\mathbb{R}, \mathscr{B}, \mathbb{P}_{t\,\theta}, \theta \in \Theta)$ статистичним експериментом, породженим спостереженням X_t.

Будемо казати, що статистичний експеримент $\mathscr{E}^T = (\mathbb{R}^T, \mathscr{B}^T, \mathbb{P}_\theta^T, \theta \in \Theta)$ є добутком статистичних експериментів $\mathscr{E}_t$, $t = \overline{1, T}$, якщо $\mathbb{P}_\theta^T = \mathbb{P}_{1\theta} \times \ldots \times \mathbb{P}_{T\theta}$ ($\mathbb{R}^T$ — T-вимірний евклідів простір, $\mathscr{B}^T$ – σ-алгебра його борелевих підмножин).

В цьому розділі ми розглядатимемо статистичні експерименти, породжені спостереженнями

$$X_t = g_t(\theta) + \varepsilon_t, \quad t = \overline{1, T}, \tag{2.1.1}$$

де $g_t(\theta), \quad \theta \in \Theta^c \subset \mathbb{R}^q, \quad t \geq 1,$ — послідовність неперервних функцій, причому в (2.1.1) істинне значення пераметра θ належить відкритій множині Θ, ε_t, $t \geq 1$, — послідовність незалежних в. в., $\mathbb{E}\varepsilon_t = 0$.

Означення 2.1.1. Оцінкою найменших квадратів (ОНК) невідомого параметра $\theta \in \Theta$ називається такий випадковий вектор $\hat{\theta}_T$, що

$$Q_T(X^T, \hat{\theta}_T) = \inf_{\theta \in \Theta^c} Q_T(X^T, \theta), \tag{2.1.2}$$

де $X^T = (X_1, \ldots, X_T)$, а $Q_T(X^T, \theta) = \sum\limits_{t=1}^{T} \big(X_t - g_t(\theta)\big)^2$.

Нехай

$$C_T(X^T, \theta) = \exp\left\{-\frac{1}{2} Q_T(X^T, \theta)\right\}, \tag{2.1.3}$$

і будемо вважати, що інфімум у (2.1.2) досягається для всіх $X^T \in \mathscr{X}^T = \mathbb{R}^T$. Тоді, як було зауважено відносно (1.1), існує хоча б один випадковий вектор $\hat{\theta}_T$ з означення 2.1.1.

Для можливості застосування теореми 1.1 для моделі спостережень (2.1.1) будемо використовувати ОНК $\hat{\theta}_T$, що задана співвідношенням (2.1.2) та функціоналом $C_T(X^T, \hat{\theta}_T)$, означеним рівністю (2.1.3).

В асимптотичній теорії нелінійної регресії (див., наприклад, [15]) в задачах нормальної апроксимації розподілу нормованої ОНК відхилення ОНК від істинного значення параметра $\hat{\theta}_T - \theta$ нормується діагональною матрицею

$$d_T(\theta) = \mathrm{diag}(d_{iT}(\theta), i = \overline{1, q}), \quad d_{iT}^2(\theta) = \sum_{t=1}^{T} \left(\frac{\partial}{\partial \theta_i} g_t(\theta) \right)^2. \tag{2.1.4}$$

Далі будемо писати $\sum\limits_{t=1}^{T} = \sum$.

Нехай в моделі спостережень (2.1.1) функції $g_t(\theta)$, $\theta \in \Theta$, $t \geq 1$, неперервно диференційовні на множині Θ. Таким чином, в задачі, яку ми розв'язуємо, можна покласти $\phi(T, \theta) = d_T^{-1}(\theta)$.

Введемо нормоване відношення

$$Z_{T,\theta}(u) = \frac{C_T(X^T, \theta + d_T^{-1}(\theta)u)}{C_T(X^T, \theta)} =$$

$$= \exp\left\{ \sum \Delta_t(u)\varepsilon_t - \frac{1}{2} \sum \Delta_t^2(u) \right\}, \tag{2.1.5}$$

де

$$\Delta_t(u) = g_t(\theta + d_T^{-1}(\theta)u) - g_t(\theta), \quad t = \overline{1, T}. \tag{2.1.6}$$

Спираючись на монографію [6], введемо деякі поняття необхідні для отримання результатів цього розділу.

Означення 2.1.2. В. в. називається *субгауссівською*, якщо знайдеться таке число $\varsigma \geq 0$, що для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$\mathbb{E} \exp\{\lambda \xi\} \leq \exp\left\{ \frac{1}{2} \varsigma^2 \lambda^2 \right\}. \tag{2.1.7}$$

Введемо числову характеристику

$$\tau = \tau(\xi) = \inf\left\{ \varsigma \geq 0 : \quad \mathbb{E} \exp\{\lambda \xi\} \leq \exp\left\{ \frac{1}{2} \varsigma^2 \lambda^2 \right\},\ \lambda \in \mathbb{R} \right\},$$

яку будемо називати *субгауссівським стандартом в. в.* ξ.

Позначимо $\mathrm{Sub}(\Omega)$ клас всіх субгауссівських в.в., заданий на загальному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Простір $\mathrm{Sub}(\Omega)$ є банаховим відносно норми $\tau(\cdot)$ [6].

Лема 2.1.1. *Нехай* $\xi \in \mathrm{Sub}(\Omega)$. *Тоді для будь-якого* $m > 0$

$$\mathbb{E}\,|\xi|^m < \infty.$$

Крім того, $\mathbb{E}\xi = 0$ *і виконуєтьcя*

$$\mathbb{E}\xi^2 \le \tau^2(\xi).$$

Далі в цьому розділі важливу роль грає наступне твердження про експоненціальну оцінку хвостів розподілів сум незалежних субгауссівських в. в. (див., наприклад, [6], с. 22).

Лема 2.1.2. *Нехай* ξ_t, $t = \overline{1, T}$, *— незалежні субгауссівські в. в. із субгауссівъкими стандартами* $\tau_t = \tau(\xi)$, $t = \overline{1, T}$. *Нехай також* $S_T = \sum \Delta_t \xi_t$, *де* Δ_t, $t = \overline{1, T}$, *— деякі числа. Тоді для всіх* $x > 0$ *справедливі нерівності*

$$\begin{gathered} \mathbb{P}\left\{S_T \ge x\right\} \le G_T(x), \quad \mathbb{P}\left\{S_T \le -x\right\} \le G_T(x), \\ \mathbb{P}\left\{|S_T| \ge x\right\} \le 2G_T(x), \end{gathered} \tag{2.1.8}$$

де

$$G_T(x) = \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sum \tau_t^2 \Delta_t^2}\right\}. \tag{2.1.9}$$

Введемо деякі умови відносно моделі спостережень (2.1.1).

Припустимо, що випадкові помилки спостережень ε_t, $t \ge 1$, задовольняють наступну умову.

2.1.1 ε_t, $t \ge 1$, — незалежні однаково розподілені субгауссівські випадкові величини із субгауссівським стандартом $\tau > 0$.

Припустимо також, що існують функція $f_T(R) \in \mathbf{F}$, константи $\delta \in \left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$, $\kappa > 0$, $\rho \in (0,\ 1]$, поліном $\gamma(R)$ такі, що для $T > T_0$ і $R > R_0$ виконано наступні умови:

2.1.2 1) Для будь-яких $u, v \in \Gamma_{T,\theta,R}$ таких, що $\|u-v\| \le \kappa$,

$$\sum \bigl(\Delta_t(u) - \Delta_t(v)\bigr)^2 \le \|u-v\|^{2\rho}\gamma(R); \tag{2.1.10}$$

2) Для будь-якого $u \in \Gamma_{T,\theta,R}$

$$\sum \Delta_t^2(u) \le \gamma(R). \tag{2.1.11}$$

2.1.3 Для будь-якого $u \in \Gamma_{T,\theta,R}$

$$\sum \Delta_t^2(u) \ge 2\tau^2\delta^{-2} f_T(R). \tag{2.1.12}$$

Теорема 2.1.1. *Нехай виконано умови* **2.1.1**–**2.1.3**. *Тоді для* $T > T_0, H > H_0$ *існують такі константи* $B_0, b_0 > 0$, *що*

$$\mathbb{P}_\theta^T \left\{ \|d_T(\theta)(\hat{\theta}_T - \theta)\| \ge H \right\} \le B_0 \exp\left\{-b_0 f_T(H)\right\}, \tag{2.1.13}$$

причому для будь-якого $\beta > 0$ *можна обрати* B_0 *так, що*

$$b_0 \ge \frac{\rho}{\rho+q} - \beta. \tag{2.1.14}$$

Доведення. Доведення теореми буде базуватись на перевірці умов **1.1** та **1.2** теореми 1.1 з $\tilde{\zeta}(Z) = \log(Z)$.

Будемо вважати, що T та R взяті достатньо великими. Нехай $u, v \in \Gamma_{T,\theta,R}$, $\|u-v\| \le \kappa$. Спочатку перевіримо виконання умови **1.1**. Зауважимо, що з (2.1.11) випливає, що (2.1.10) справджується і при $\|u-v\| > \kappa$. Дійсно

$$\sum |\Delta_t(u) - \Delta_t(v)|^2 \le \sum \Delta_t^2(u) + \sum \Delta_t^2(v) \le 2\gamma(R) \le \|u-v\|^{2\rho}\kappa^{-2\rho}\gamma(R),$$

де множник $\kappa^{-2\rho}$ поглинається поліномом $\gamma(R)$.

Нехай в. в. ε_t, $t \ge 1$ задовольняють умові **2.1.1**, а в лемі 2.1.2 $\xi_t = \varepsilon_t$, числа $\Delta_t = A_t = \Delta_t(u) - \Delta_t(v)$, де величини $\Delta_t(u)$ задано формулою (2.1.6). Тоді за формулою для моментів невід'ємної в. в. (див., наприклад, [21], с.

190) та (2.1.8), (2.1.9)

$$\mathbb{E}\left|\sum A_t\varepsilon_t\right|^m = m\int\limits_0^\infty x^{m-1}\mathbb{P}\left(\left|\sum A_t\varepsilon_t\right| \geq x\right)dx \leq$$

$$\leq 2m\int\limits_0^\infty x^{m-1}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\tau^2\sum A_t^2}\right\}dx =$$

$$= \sqrt{2\pi}m\tau^m\left(\sum A_t^2\right)^{\frac{m}{2}}\mathbb{E}\left|z\right|^{m-1}, \quad m > 0, \tag{2.1.15}$$

де z — стандартна гауссівська випадкова величина. За відомою формулою

$$\mathbb{E}\left|z\right|^{m-1} = \frac{2^{\frac{m-1}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}, \quad m > 0. \tag{2.1.16}$$

Разом (2.1.15) та (2.1.16) дають оцінку

$$\mathbb{E}\left|\sum A_t\varepsilon_t\right|^m \leq 2^{\frac{m}{2}}m\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\tau^m\left(\sum A_t^2\right)^{\frac{m}{2}}, \tag{2.1.17}$$

яка надає можливість отримати нерівність

$$\mathbb{E}|\zeta_{T,\theta}(u) - \zeta_{T,\theta}(v)|^m \leq \|u-v\|^{\rho m}\gamma(R), \tag{2.1.18}$$

яка при $m > \dfrac{q}{\rho}$ призводить до виконання умови **1.1** теореми 1.1.

Перевіримо виконання умови **1.2** теореми 1.1 Застосуємо першу з нерівностей (2.1.8) для випадкових величин $\xi_t = \varepsilon_t$, чисел $\Delta_t = \Delta_t(u)$ та $x = \delta\sum\Delta_t^2(u)$. Тоді

$$\mathbb{P}_\theta^T\left\{\sum\Delta_t(u)\varepsilon_t \geq \delta\sum\Delta_t^2(u)\right\} \leq \exp\left\{-\frac{1}{2}\delta^2\tau^{-2}\sum\Delta_t^2(u)\right\} \leq$$

$$\leq \exp\left\{-f_T(R)\right\}, \tag{2.1.19}$$

тобто умову **1.2** теореми 1.1 виконано і, таким чином, доведено теорему

2.1.1. ∎

Введемо умову

2.1.4 Існують додатні числа $c_0(\theta)$ і $c_1(\theta)$ такі, що для будь-яких $u, v \in U_{T,\theta} = d_T(\theta)(\Theta^c - \theta)$, $T > T_0$

$$c_0(\theta)\|u - v\|^2 \leq \sum \bigl(\Delta_t(u) - \Delta_t(v)\bigr)^2 \leq c_1(\theta)\|u - v\|^2. \qquad (2.1.20)$$

Наступна теорема, яку сформульовано в роботі [14] дещо в іншому вигляді, узагальнює результати робіт [10, 11].

Теорема 2.1.2. *Нехай виконано умови **2.1.1** та **2.1.4**. Тоді існують такі константи B_0 та b, що для $T > T_0$, $H > H_0$*

$$\mathbb{P}_\theta^T \left\{ \|d_T(\theta)(\hat{\theta}_T - \theta)\| \geq H \right\} \leq B_0 \exp\left\{-bH^2\right\}, \qquad (2.1.21)$$

причому для будь-якого $\beta > 0$ можна обрати B_0 таким чином, щоб виконувалась нерівність

$$b \geq \frac{c_0(\theta)}{8\tau^2(1+q)} - \beta. \qquad (2.1.22)$$

Доведення. Перевіримо виконання умов **2.1.2** та **2.1.3**. Тоді твердження даної теореми буде випливати з теореми 2.1.1. Нерівність (2.1.10) умови **2.1.2** випливає з правої частини нерівності (2.1.20), якщо ми візьмемо в (2.1.10) $\rho = 1$, $\gamma(R) = c_1(\theta)$. Нерівність (2.1.11) умови **2.1.2** випливає також із правої частини нерівності (2.1.20), якщо в ній взяти $v = 0$, $\gamma(R) = c_1(\theta)(R+1)^2$.

Для перевірки виконання умови **2.1.3** перепишемо ліву частину нерівності (2.1.20) при $v = 0$ наступним чином:

$$\sum \Delta_t^2(u) \geq c_0(\theta)\|u\|^2 \geq 2\tau^2\delta^{-2}\left(\frac{1}{2}\delta^2\tau^{-2}c_0(\theta)R^2\right), \qquad (2.1.23)$$

тобто в нерівності (2.1.12) умови **2.1.3** можна взяти

$$f_T(R) = \frac{1}{2}\delta^2\tau^{-2}c_0(\theta)R^2. \qquad (2.1.24)$$

Тепер запишемо показник експоненти в правій частині нерівності (2.1.13) у вигляді

$$-b_0 f_T(H) = -b_0 \cdot \frac{1}{2}\delta^2\tau^{-2}c_0(\theta)H^2.$$

Оскільки зараз у правій частині (2.1.14) $\rho = 1$, то для будь-якого $\beta > 0$ в (2.1.21) можна взяти

$$b = b_0 \cdot \frac{1}{2}\delta^2\tau^{-2}c_0(\theta) \geq \frac{\delta^2 c_0(\theta)}{2\tau^2(1+q)} - \beta. \tag{2.1.25}$$

Нерівність (2.1.22) отримаємо при $\delta \to \frac{1}{2}$. ■

Приклад 2.1.1. Припустимо, що $g_t(\nu) = g(y(t), \nu)$, де $y(t)$, $t \geq 1$, — послідовність, що набуває значеня у компактній області планування регресійного експерименту $Y \subset \mathbb{R}^q$, $\nu \in \Theta^c$, $\Theta \subset \mathbb{R}^q$ — відкрита обмежена опукла множина. Нехай $g(y,\nu) = \exp\{\langle y, \nu\rangle\}$, $\langle y, \nu\rangle = \sum\limits_{i=1}^{q} y_i\nu_i$. Тоді $g(y,\nu)$ неперервно диференційовна за $\nu \in \Theta^c$ при кожному $y \in Y$, причому її частинні похідні за $(\nu_1, \ldots, \nu_k)$ обмежені за сукупністю змінних $(y,\nu) \in Y \times \Theta^c$. Тоді, оскільки

$$\underline{d}_i T \leq d_{iT}^2(\theta) \leq \overline{d}_i T, \quad i = \overline{1,q},\ \theta \in \Theta, \tag{2.1.26}$$

$\underline{d}_i$, $\overline{d}_i$ — деякі додатні константи, що не залежать від θ, то можна взяти замість $d_T(\theta)$ нормуючу матрицю $T^{1/2}\mathbb{I}_q$, де $\mathbb{I}_q$ — одинична матриця q-го порядку. Тоді за введеними вище умовами

$$\sum \big(\Delta_t(u) - \Delta_t(v)\big)^2 =$$

$$= \sum \left(\exp\left\{\langle y(t), \theta + T^{-1/2}u\rangle\right\} - \exp\left\{\langle y(t), \theta + T^{-1/2}v\rangle\right\}\right)^2 \leq$$

$$\leq M^2 \sum \left(\exp\left\{\langle y(t), T^{-1/2}u\rangle\right\} - \exp\left\{\langle y(t), T^{-1/2}v\rangle\right\}\right)^2, \tag{2.1.27}$$

де $M = \max\limits_{(y,\nu)\in Y\times\Theta^c} \exp\{\langle y, \nu\rangle\}$. За теоремою Лагража для деякого $\eta \in$

$(0,1)$

$$\left|\exp\left\{\langle y(t), T^{-1/2}u\rangle\right\} - \exp\left\{\langle y(t), T^{-1/2}v\rangle\right\}\right| =$$

$$= T^{-1/2}\left|\sum_{i=1}^{q} y_i(t)\exp\left\{\langle y(t), T^{-1/2}\big(u+\eta(v-u)\big)\rangle\right\}\cdot(u_i-v_i)\right| \le$$

$$\le T^{-1/2}M\|y(t)\|\cdot\|u-v\|, \quad \|y(t)\| = \left(\sum_{i=1}^{q} y_i^2(t)\right)^{1/2}. \tag{2.1.28}$$

З (2.1.27) та (2.1.28) отримуємо

$$\sum\big(\Delta_t(u)-\Delta_t(v)\big)^2 \le M^4T^{-1}\sum\|y(t)\|^2\|u-v\|^2 \le$$

$$\le M^4\max_{y\in Y}\|y\|^2\|u-v\|^2, \tag{2.1.29}$$

тобто в правій частині нерівності (2.1.20) можна взяти

$$c_1(\theta) = M^4\max_{y\in Y}\|y\|^2. \tag{2.1.30}$$

Перевіримо виконання лівої частини нерівності (2.1.20) при $v=0$. Для цього запишемо

$$\Delta_t^2(u) = \left(\exp\left\{\langle y(t), \theta+T^{-1/2}u\rangle\right\} - \exp\left\{\langle y(t),\theta\rangle\right\}\right)^2 =$$

$$= \exp\big\{2\langle y(t),\theta\rangle\big\}\left(\exp\left\{\langle y(t), T^{-1/2}u\rangle\right\}-1\right)^2.$$

Оскільки $\big(\exp\{x\}-1\big)^2 \ge x^2$, $x \ge 0$, та $\big(\exp\{x\}-1\big)^2 \ge \exp\{2x\}x^2$, $x<0$,

$$\left(\exp\left\{\langle y(t), T^{-1/2}u\rangle\right\}-1\right)^2 \ge S^2\langle y(t),u\rangle^2T^{-1},$$

$$S = \min\left(1, \min_{(y,\nu)\in Y\times\Theta^c}\exp\big\{\langle y,\nu\rangle\big\}\right) > 0. \tag{2.1.31}$$

Таким чином,

$$\sum \Delta_t^2(u) \geq S^2 T^{-1} \sum \exp\big\{2\langle y(t), \theta\rangle\big\} \langle y(t), u\rangle^2 \geq$$

$$\geq S^4 \sum_{i,j=1}^{q} \left(T^{-1} \sum y_i(t) y_j(t)\right) u_i u_j. \tag{2.1.32}$$

Розглянемо невід'ємно визначену матрицю

$$J_T = \left(T^{-1} \sum y_i(t) y_j(t)\right)_{i,j=1}^{q} \tag{2.1.33}$$

та припустимо, що план регресійного експерименту $\{y_t,\, t = \overline{1,T}\}$ влаштовано таким чином, що для $T > T_0$ найменше власне число матриці J_T задовольняє умову

$$\lambda_{min}(J_T) \geq \lambda_0 > 0. \tag{2.1.34}$$

Тоді для $T > T_0$

$$\sum \Delta_t^2(u) \geq S^4 \lambda_0 \|u\|^2 \tag{2.1.35}$$

в лівій частині нерівності (2.1.20), яка використовується в доведенні теореми 2.1.2 тільки при $v = 0$, можна покласти

$$c_0(\theta) = S^4 \lambda_0. \tag{2.1.36}$$

Зауважимо, що припущення (2.1.34) відносно матриці регресійного експерименту (2.1.33) виглядає природнішим, якщо розглядати модель регресії (2.1.1) у схемі серій. Це не змінює позитивних результатів попередніх теорем, якщо їх умови переписати відповідним чином.

2.2 Коррельовані субгауссівські помилки спострежень

В цьому розділі ми продовжимо розглядати модель регресії вигляду (2.1.1), але із залежними помилками спостережень, і тому будемо вважати, що вони розглядаються на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, і не будемо далі додавати до позначення ймовірності $\mathbb{P}$ індекси T та θ.

Наступні два означення сформульовано за [6].

Означення 2.2.1. Випадковий вектор $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_T) \in \mathbb{R}^T$ називається строго субгауссівським, якщо для будь-якого $u = u_1, \ldots, u_T \in \mathbb{R}^T$

$$\mathbb{E}\exp\{\langle \varepsilon, u\rangle\} \leq \exp\left\{\frac{1}{2}\langle Bu, u\rangle\right\}, \tag{2.2.1}$$

де $\langle \varepsilon, u\rangle = \sum \varepsilon_T u_T$, $B = (B(t,s))_{t,s=1}^T$ — коваріаційна матриця вектора ε, тобто $B(t,s) = \mathbb{E}\varepsilon_t\varepsilon_s$, $t, s = \overline{1, T}$,

$$\langle Bu, u\rangle = \sum_{t,s=1}^{T} B(t,s) u_t u_s.$$

Означення 2.2.2. Сім'я випадкових величин $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ називається сумісно строго субгауссівською, якщо для будь-якого $T \geq 1$ і будь-яких $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_T$ із цієї сім'ї випадковий вектор $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_T)$ є строго субгауссівським. Відповідно, часовий ряд $\{\varepsilon_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$, назвемо сумісно строго субгауссівським, якщо для будь-якого $n \geq 1$ та будь-яких $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{Z}$ випадковий вектор $(\varepsilon_{t_1}, \ldots, \varepsilon_{t_n})$ є строго субгауссівьким.

Нехай $\{\xi_j, j \in \mathbb{Z}\}$ — послідовність незалежних однаково розподілених строго субгауссівських в. в., яку природно називати дискретним білим субгауссівським шумом. Введемо умову

2.2.1 Помилки спостережень моделі регресії (2.1.1) мають вигляд

$$\varepsilon_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_{tj}\xi_j,\ t \in \mathbb{Z}, \tag{2.2.2}$$

де $\{\xi_j, j \in \mathbb{Z}\}$ — дискретний білий субгауссівський шум ($\mathbb{E}\xi_j = 0,\ \mathbb{E}\xi_j^2 = \sigma_\xi^2$),

$$\|\psi\|_2^2 = \sum_{t=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_{tj}^2 < \infty. \tag{2.2.3}$$

З умови **2.2.1** випливає, що ряди (2.2.2) збігаються майже напевно (див., наприклад, [22]), і часовий ряд $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ визначено майже напевно. Зауважимо також, що коваріаційна функція цього ряду має вигляд

$$B(t,s) = \mathbb{E}\varepsilon_t\varepsilon_s = \mathbb{E}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\psi_{tj}\xi_j\sum_{k=-\infty}^{\infty}\psi_{sk}\xi_k =$$

$$= \sigma_\xi^2\sum_{j=-\infty}^{\infty}\psi_{tj}\psi_{sj}, \quad t,s \in \mathbb{Z}. \tag{2.2.4}$$

Лема 2.2.1. *Якщо виконано умову* **2.2.1**, *то* $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ *є сумісно строго субгауссівським часовим рядом.*

Доведення. Для вектора $\varepsilon = (\varepsilon_{t_1}, \ldots, \varepsilon_{t_n})$ запишемо

$$\langle u, \varepsilon\rangle = \sum_{k=1}^{n} u_k\varepsilon_{t_k} = \sum_{k=1}^{n} u_k\sum_{j=-\infty}^{\infty}\psi_{t_k,j}\xi_j = \sum_{j=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\psi_{t_k,j}\right)\xi_j.$$

Використовуючи незалежність випадкових величин ξ_j, маємо далі

$$\mathbb{E}\exp\{\langle u,\varepsilon\rangle\} = \mathbb{E}\exp\left\{\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\psi_{t_k,j}\right)\xi_j\right\} =$$

$$= \prod_{j=-\infty}^{\infty}\mathbb{E}\exp\left\{\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\psi_{t_k,j}\right)\xi_j\right\} \le \prod_{j=-\infty}^{\infty}\exp\left\{\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\psi_{t_k,j}\right)^2\sigma_\xi^2\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{1}{2}\sigma_\xi^2\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\psi_{t_k,j}\right)^2\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{n}\left(\sigma_\xi^2\sum_{j=-\infty}^{\infty}\psi_{t_k,j}\psi_{t_l,j}\right)u_k u_l\right\} = \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{n} B(t_k,t_l)u_k, u_l\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{1}{2}\langle Bu, u\rangle\right\}.$$

■

Лема 2.2.2. *Якщо виконано умову* **2.2.1** *і* $B = \big(B(t_k, t_l)\big)_{k,l=1}^2$, $u = (u_1, \dots u_n)$, *то*

$$\langle Bu, u\rangle \le \sigma_\xi^2\, \|\psi\|_2^2\, \|u\|^2. \tag{2.2.5}$$

Доведення. Дійсно, із доведення попередньої леми маємо

$$\langle Bu, u\rangle = \sigma_\xi^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \psi_{t_k,j}\, u_k\right)^2 \le \sigma_\xi^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \psi_{t_k,j}^2 \sum_{k=1}^{n} u^2\right) =$$

$$= \sigma_\xi^2 \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_{t_k,j}^2\, \|u\|^2 \le \sigma_\xi^2\, \|\psi\|_2^2\, \|u\|^2.$$

■

Зауважимо, що коли $B = \big(B(t, s)\big)_{t,s=1}^T$, $u = (u_1, \dots, u_T)$, то оцінка леми 2.2.2 набуває вигляду

$$\langle Bu, u\rangle \le \sigma_\xi^2\, \|\tilde{\psi}\|_2^2\, \|u\|^2, \tag{2.2.6}$$

де

$$\|\tilde{\psi}\|_2^2 = \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_{tj}^2, \quad \|u\|^2 = \sum_{t=1}^{T} u_t^2. \tag{2.2.7}$$

Лема 2.2.3. *Нехай виконується умова* **2.1.1** *і*

$$S_T = \sum \Delta_t\, \varepsilon_t,$$

де Δ_t, $t \in \overline{1, T}$, *— деякі числа. Тоді для всіх* $x > 0$ *справедливі нерівності*

$$\mathbb{P}\left\{S_T \ge x\right\} \le G_T(x), \qquad \mathbb{P}\left\{S_T \le -x\right\} \le G_T(x), \tag{2.2.8}$$

$$\mathbb{P}\left\{|S_T| \ge x\right\} \le 2\, G_T(x), \tag{2.2.9}$$

де $G_T(x) = \exp\left\{-\dfrac{x^2}{2<B\Delta,\Delta>}\right\}$, $\Delta = (\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_T)$, *а* B *вказано в означенні 2.2.1.*

Доведення. Для будь-яких $x > 0, \lambda > 0$ за нерівністю Чебишова - Маркова та (2.2.1), враховуючи результат леми 2.2.1, отримуємо

$$\mathbb{P}(S_T \geq x) \leq \mathbb{P}\Big(\exp\{\lambda S_T\} \geq \exp\{\lambda x\}\Big) \leq$$

$$\leq \frac{\mathbb{E}\exp\{\lambda S_T\}}{\exp\{\lambda x\}} = \exp\{-\lambda x\}\,\mathbb{E}\exp\{\lambda S_T\} =$$

$$= \exp\{-\lambda x\}\exp\left\{\frac{\lambda^2}{2}\langle B\Delta, \Delta\rangle\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{\lambda^2}{2}\langle B\Delta, \Delta\rangle - \lambda x\right\}. \tag{2.2.10}$$

Мінімізуючи за $\lambda > 0$ показник експоненти в правій частині (2.2.10), отримаємо першу з нерівностей (2.2.8). Друга нерівність отримується аналогічно, а нерівність (2.2.9) є очевидним наслідком із нерівностей (2.2.8). ■

Введемо умову

2.2.2 Для будь-яких $\Gamma_{T,\,\theta,\,R}$ та $\delta \in \left(0;\ \dfrac{1}{2}\right)$ для $T > T_0$ та $R > R_0$

$$\sum \Delta_t^2(u) \geq 2\ \sigma_\xi^2\ \|\tilde{\psi}\|_2^2\ \delta^{-2} f_T(R), \tag{2.2.11}$$

де $f_T \in \mathbf{F}$, а величина $\|\tilde{\psi}\|_2^2$ означена в (2.2.7).

Теорема 2.2.1. *Нехай виконано умови* **2.1.2**, **2.2.1** *та* **2.2.2**. *Тоді для* $T > T_0$ *та* $R > R_0$ *існують такі константи* B_0, $b_0 > 0$ *такі, що є вірними нерівності* (2.1.13), (2.1.14).

Доведення. Як і у доведенні теореми 2.1.1, для отримання моментної умови (2.1.18) Скористаємось лемою 2.2.2, поклавши $\Delta_t = A_t = \Delta_t(u) - \Delta_t(v)$, де величини $\Delta_t(\cdot)$ задано в (2.1.6). Тоді аналогічно (2.1.15), для будь-якого

$m > 0$

$$\mathbb{E}\left|\sum A_t\varepsilon_t\right|^m = m\int\limits_0^\infty x^{m-1}\mathbb{P}\left(\left|\sum A_t\varepsilon_t\right| \geq x\right)dx \leq$$

$$\leq 2m\int\limits_0^\infty x^{m-1}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\langle B\Delta,\Delta\rangle}\right\}dx =$$

$$= \sqrt{2\pi}m\langle B\Delta,\Delta\rangle^{m/2}\mathbb{E}|z|^{m-1}, \quad m > 0, \tag{2.2.12}$$

де z — стандартна гауссівська випадкова величина.

За лемою 2.2.2 та (2.2.6)

$$\langle B\Delta,\Delta\rangle = \sum_{t,\,s=1}^{T} B(t,s)A_tA_s \;\leq\; \sigma_\xi^2\,\|\tilde{\psi}\|_2^2\,\sum A_t^2, \tag{2.2.13}$$

де величина $\|\tilde{\psi}\|_2^2$ означена в (2.2.7).

Враховуючи формулу (2.1.16) із (2.2.12) та (2.2.13) отримаємо аналогічно (2.1.17)

$$\mathbb{E}\left|\sum A_t\varepsilon_t\right|^m \leq 2^{\frac{m}{2}}m\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\sigma_\xi^m\,\|\tilde{\psi}\|_2^2\left(\sum A_t^2\right)^{\frac{m}{2}}, \tag{2.2.14}$$

що призводить при $m > \dfrac{q}{\rho}$ до виконання умови **1.1** теореми 1.

Перевіримо виконання умови **1.2** теореми 1. Застосуємо першу з нерівностей (2.2.8) для $\Delta_t = \Delta_t(u)$ та $x = \delta\sum\Delta_t^2(u)$. Тоді

$$\mathbb{P}\left\{\sum\Delta_t(u)\varepsilon_t \geq \delta\sum\Delta_t^2(u)\right\} \leq \exp\left\{-\frac{\delta^2}{2}\frac{\left(\sum\Delta_t^2(u)\right)^2}{\langle B\Delta,\Delta\rangle}\right\} \leq$$

$$\leq \exp\left\{-\frac{\delta^2}{2}\frac{2\,\sigma_\xi^2\,\|\tilde{\psi}\|_2^2\,\delta^{-2}f_T(R)\sum\Delta_t^2(u)}{\sigma_\xi^2\,\|\tilde{\psi}\|_2^2\,\sum\Delta_t^2(u)}\right\} \leq$$

$$\leq \exp\left\{-f_T(R)\right\},$$

тобто умову **1.2** теореми 1.1 виконано і, таким чином, доведено теорему 2.2.1. ∎

Якщо функція регресії $g_t(\theta)$ задовольняє умову **2.1.4**, а помилки спостережень мають вигляд (2.2.2), то є вірним факт, аналогічний теоремі 2.1.2, який можна сформулювати наступним чином.

Теорема 2.2.2. *Нехай виконано умови* **2.2.1** *та* **2.1.4**. *Тоді існують такі константи B_0 та b, що для $T > T_0$, $H > H_0$*

$$\mathbb{P}\left\{\|d_T(\theta)(\hat{\theta}_T - \theta)\| \geq H\right\} \leq B_0 \exp\left\{-bH^2\right\}, \tag{2.2.15}$$

причому для будь-якого $\beta > 0$ можна обрати B_0 таким чином, щоб виконувалась нерівність

$$b \geq \frac{c_0(\theta)}{8(1+q)\sigma_\xi^2\|\tilde{\psi}\|_2^2} - \beta. \tag{2.2.16}$$

Доведення. Перевіримо виконання умов **2.1.2** та **2.2.2**. Тоді твердження теореми буде випливати з попередньої теореми 2.2.1. Нерівність (2.1.10) умови **2.1.2** випливає, як було вказано в доведенні теореми 2.1.2, з правої частини нерівностей (2.1.20), якщо взяти в (2.1.10) $\rho = 1$, $\gamma(R) = c_1(\theta)$. Нерівність (2.1.11) умови **2.1.2** випливає також із правої частини нерівностей (2.1.20), якщо взяти $v = 0$, $\gamma(R) = c_1(\theta)(R+1)^2$.

Для перевірки виконання умови **2.2.2** перепишемо ліву частину нерівності (2.1.20) при $v = 0$ у вигляді

$$\sum \Delta_t^2(u) \geq c_0(\theta)\|u\|^2 \geq 2\sigma_\xi^2\,\|\tilde{\psi}\|_2^2\,\delta^{-2}\left(\frac{1}{2}\delta^2\|\tilde{\psi}\|_2^{-2}\sigma_\xi^{-2}c_0(\theta)R^2\right). \tag{2.2.17}$$

Тоді в нерівності (2.1.11) умови **2.1.2** можна взяти

$$f_T(R) = \frac{1}{2}\delta^2\|\tilde{\psi}\|_2^{-2}\sigma_\xi^{-2}c_0(\theta)R^2. \tag{2.2.18}$$

Тепер запишемо показник експоненти в правій частині нерівності (2.1.13) у вигляді

$$-b_0 f_T(H) = -b_0 \frac{1}{2}\delta^2 \|\tilde{\psi}\|_2^{-2} \sigma_\xi^{-2} c_0(\theta) H^2. \tag{2.2.19}$$

Оскільки в нерівності (2.1.14) $\rho = 1$, то для будь-якого $\beta > 0$ в (2.2.15) можна взяти

$$b \geq \frac{\delta^2}{2} \frac{c_0(\theta)}{(1+q)\sigma_\xi^2 \|\tilde{\psi}\|_2^2} - \beta. \tag{2.2.20}$$

Нерівність (2.2.16) отримаємо при $\delta \to \frac{1}{2}$. ■

2.3 Стаціонарні субгауссівські помилки спостережень

В цьому підрозділі, як і в попередніх, ми розглядаємо ОНК параметра θ в моделі спостережень (2.1.1), але на відміну від підрозділу 2.2, припускаємо, що в представленні помилок спостережень (2.2.2) величини ψ_{tj} залежать від різниці аргументів, тобто $\psi_{tj} = \psi_{t-j}$, причому $\psi_{t-j} = 0$ при $j > t$.

Таким чином, замість умови **2.2.1** в цьому підрозділі ми вводимо умову

2.3.1 Помилки спостережень моделі регресії (2.1.1) мають вигляд

$$\varepsilon_t = \sum_{j=-\infty}^{t} \psi_{t-j}\xi_j = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \xi_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{2.3.1}$$

де $\{\xi_j,\ j \in \mathbb{Z}\}$ — білий субгауссівський шум $\left(\mathbb{E}\xi_j = 0, \quad \mathbb{E}\xi_j^2 = \sigma_\xi^2\right)$, причому

$$\|\psi\|_{l_2}^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty. \tag{2.3.2}$$

Умова **2.3.1** означає, що ε_t є функцією лінійної однорідної та фізично здійсненної системи в момент часу t на послідовність імпульсів $\xi_j,\ j \in \mathbb{Z}$, [22].

Оскільки послідовність ε_t умови **2.3.1** є частинним випадком послідовності ε_t з умови **2.2.1**, то послідовність (2.3.1) є сумісно строго субгауссівським часовим рядом за лемою 2.2.1.

Знайдемо коваріаційну функцію послідовності. Маємо за формулою (2.2.4)

$$B(t,s) = \mathbb{E}\varepsilon_t\varepsilon_s = \sigma_\xi^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_{t-j}\psi_{s-j} = \sigma_\xi^2 \sum_{j=-\infty}^{\min(t,s)} \psi_{t-j}\psi_{s-j}.$$

Нехай $t > s$. Тоді, зробивши заміну змінної $s - j = j'$, отримуємо

$$B(t,s) = \sum_{j=-\infty}^{s} \psi_{t-j}\psi_{s-j} = \sum_{j'=0}^{\infty} \psi_{t-(s-j')}\psi_{j'} =$$

$$= \sum_{j'=0}^{\infty} \psi_{j'}\psi_{j'+t-s} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j\psi_{j+t-s}.$$

Якщо $s > t$, то

$$B(t,s) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j\psi_{j+s-t}.$$

Таким чином, ε_t — стаціонарний часовий ряд з коваріаційною функцією

$$B(t) = \sigma_\xi^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j\psi_{j+|t|}, \quad t \in \mathbb{Z}. \tag{2.3.3}$$

Нехай послідовність ε_t задовольняє умові **2.3.1**. Покладемо

$$h(e^{i\lambda}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j e^{ij\lambda}. \tag{2.3.4}$$

Тоді за формулою Парсеваля (див., наприклад, [22], с. 283)

$$B(t) = \sigma_\xi^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j\psi_{j+t} = \sigma_\xi^2 \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\lambda} \left|h(e^{i\lambda})\right| d\lambda. \tag{2.3.5}$$

Це означає, що стаціонарна послдовність ε_t має абсолютно неперервний спектр зі щільністю

$$f(\lambda)=\sigma_\xi^2\left|h(e^{i\lambda})\right|^2=\frac{\sigma_\xi^2}{2\pi}\left|\sum_{j=0}^{\infty}\psi_j e^{ij\lambda}\right|^2,\quad \lambda\in[-\pi,\pi]. \tag{2.3.6}$$

Тепер нам потрібна загальна умова.

2.3.2. Послідовність $\{\varepsilon_t, t\in\mathbb{Z}\}$ є стаціонарною у широкому сенсі сумісно строго субгауссівською випадковою послідовністю із обмеженою спектральною щільністю $f(\lambda),\ \lambda\in[-\pi,\pi]:$

$$f_1=\sup_{\lambda\in[-\pi,\pi]}f(\lambda)<\infty. \tag{2.3.7}$$

Наступна умова є модифікацією умови **2.2.2**.

2.3.3. Для будь-яких $u\in\Gamma_{T,\theta,R}$ та $\delta\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ для $T>T_0,\ R>R_0$

$$\sum\Delta_t^2(u)\geq 4\pi f_1\delta^{-2}f_T(R), \tag{2.3.8}$$

де $f_T\in\mathbf{F}$, величина $\Delta_t(u)$ означена в (2.1.6).

Теорема 2.3.1. *Якщо виконано умови* **2.1.2**, **2.3.2** *та* **2.3.3**, *то для* $T>T_0,\ R>R_0$ *існують такі константи* $B_0,\ b_0>0$, *що виконуються нерівності* (2.1.13), (2.1.14).

Доведення. Доведення цієї теореми відбувається за планом доведення теореми 2.2.1, але замість леми 2.2.2 та співвідношення (2.1.6) використаємо інші міркування. Нехай $\Delta_t=A_t=\Delta_t(u)-\Delta_t(v),\quad t=\overline{1,T},\ \Delta=(\Delta_1,\ldots,\Delta_T)',\ B=(B(t-s))_{t,s=1}^T$. Тоді за теоремою Герглотца ([22], с. 55) та умовою **2.3.2**.

$$\langle B\Delta,\Delta\rangle=\sum_{t,s=1}^{T}B(t-s)\Delta_t\Delta_s=\int_{-\pi}^{\pi}f(\lambda)\left|\sum e^{i\lambda t}\Delta_t\right|^2d\lambda\leq$$

$$\leq f_1 \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum e^{i\lambda t} \Delta_t \right|^2 d\lambda = 2\pi f_1 \sum \Delta_t^2 = 2\pi f_1 \|\Delta\|^2. \qquad (2.3.9)$$

Враховуючи формулу (2.1.16), із (2.2.12) та (2.3.9) отримуємо

$$\mathbb{E} \left| \sum A_t \varepsilon_t \right|^m \leq 2^m \pi^{m/2} f_1^{m/2} m \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \left(\sum A_t^2\right)^{m/2}. \qquad (2.3.10)$$

Якщо $m > \dfrac{q}{\rho}$, то виконується умова **1.1** теореми 1.1. Завершення доведення теореми 2.3.1 таке ж, як і в теоремі 2.1.1. ■

Теорема 2.3.2. *Нехай виконано умови* **2.1.4** *та* **2.3.2**. *Тоді існують такі константи* B_0 *та* b, *що для* $T > T_0$, $H > H_0$

$$\mathbb{P}\left\{ \|d_T(\theta)(\hat{\theta}_T - \theta)\| \geq H \right\} \leq B_0 \exp\left\{-bH^2\right\}, \qquad (2.3.11)$$

причому для будь-якого $\beta > 0$ *можна обрати* B_0 *таким, щоб виконувалась нерівність*

$$b \geq \frac{c_0(\theta)}{16\pi f_1(1+q)} - \beta. \qquad (2.3.12)$$

Доведення цієї теореми цілком аналогічне доведенню теореми 2.2.2 і не потребує додаткових міркувань.

Повертаючись до помилок спостережень вигляду (2.3.1), переформулюємо результати попередніх двох теорем у вигляді наступних тверджень.

Теорема 2.3.3. *Нехай виконано умови* **2.1.2**, **2.3.1**, *а також*

1)

$$f_{max} = \sup_{\lambda \in [-\pi,\pi]} \left| \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j e^{ij\lambda} \right|^2 < \infty; \qquad (2.3.13)$$

2) *для будь-яких* $u \in \Gamma_{T,\theta,R}$, $\delta \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$, *для* $T > T_0$, $R > R_0$ *та деякої функції* $f_T \in \mathbf{F}$

$$\sum \Delta_t^2(u) \geq 2\sigma_\xi^2 f_{max} f_T(R). \qquad (2.3.14)$$

Тоді для $T > T_0$, $R > R_0$ *існують такі константи* B_0, $b_0 > 0$, *що є вірними нерівності* (2.1.13), (2.1.14).

Доведення цієї теореми співпадає з доведенням теореми 2.3.1.

Теорема 2.3.4. *Нехай виконано умову* **2.1.4**, **2.3.1** *та є вірною нерівність* (2.3.13)*. Тоді існують такі константи* B_0 *та* b*, що для* $T > T_0$*,* $H > H_0$

$$\mathbb{P}\left\{\|d_T(\theta)(\hat{\theta}_T - \theta)\| \geq H\right\} \leq B_0 \exp\left\{-bH^2\right\}, \tag{2.3.15}$$

причому для будь-якого $\beta > 0$ *можна обрати* B_0 *таким, щоб виконувалась нерівність*

$$b \geq \frac{c_0(\theta)}{8\sigma_\xi^2 f_{max}(1+q)} - \beta. \tag{2.3.16}$$

Доведення теореми 2.3.4 очевидне. Нерівність (2.3.16) є модифікацією нерівності (2.3.12).

Важливим прикладом стаціонарних послідовностей вигляду (2.3.1) є авторегресійні процеси ковзного середнього, або $ARMA(p,q)$-процеси, що задані системою рекурентних співвідношень (див., наприклад, [23])

$$\varepsilon_t - a_1\varepsilon_{t-1} - \cdots - a_p\varepsilon_{t-p} = \xi_t + b_1\xi_{t-1} + \cdots + b_q\xi_{t-q}, \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{2.3.17}$$

де $\{\xi_t,\, t \in \mathbb{Z}\}$ утворює дискретний субгауссівський білий шум. Якщо S - оператор зворотнього зсуву на один крок, то співвідношення (2.3.17) можна переписати у символічному вигляді

$$a(S)\varepsilon_t = b(S)\xi_t, \tag{2.3.18}$$

де

$$\begin{aligned} a(z) &= 1 - a_1 z - \cdots - a_p z^p, \\ b(z) &= 1 + b_1 z + \cdots + b_q z^q. \end{aligned} \tag{2.3.19}$$

Якщо поліноми $a(z)$ і $b(z)$ не мають спільних коренів та $a(z) \neq 0$, $b(z) \neq 0$ для комплексних z таких, що $|z| \leq 1$, то $\{\varepsilon_t,\, t \in \mathbb{Z}\}$ — стаціонарний $ARMA(p,q)$-процес.

Інколи буває зручно записати $ARMA(p,q)$-процес як чистий процес ковзного середнього $MA(\infty)$ у вигляді

$$\varepsilon_t = \psi(S)\xi_t, \quad \psi(z) = \frac{b(z)}{a(z)} = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j z^j. \tag{2.3.20}$$

Якщо $ARMA(p,q)$-процес записано у вигляді (2.3.1), причому виконано (2.3.2),то коваріаційна функція процесу ε_t задано рівністю (2.3.3), а спектральна щільність має вигляд [23]

$$f(\lambda) = \frac{\sigma_\xi^2}{2\pi} \left| \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j e^{ij\lambda} \right|^2 = \frac{\sigma_\xi^2}{2\pi} \frac{|b(i\lambda)|^2}{|a(i\lambda)|^2}, \quad \lambda \in [-\pi, \pi]. \tag{2.3.21}$$

Запис $ARMA(p,q)$-процесу в формі (2.3.1) називається представленням через ψ-ваги. Оскільки в записі (2.3.21) поліном $a(z)$ не має коренів розташованих на одиничному колі, то $f(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$, є неперервною обмеженою функцією, і

$$f_{max} = \max_{-\pi \le \lambda \le \pi} \frac{|b(i\lambda)|^2}{|a(i\lambda)|^2}. \tag{2.3.22}$$

Розглянемо декілька простих прикладів спектральної щільності (2.3.21) і відповідні їм величини типу (2.3.22).

Приклад 2.3.1. Розглянемо $MA(1)$-процес вигляду

$$\varepsilon_t = \xi_t + b\,\xi_{t-1}, \tag{2.3.23}$$

де ε_t - помилки моделі (2.1.1), ξ_t - субгауссівський білий шум. Тоді

$$a(z) = 1, \quad b(z) = 1 + b\,z.$$

Зауважимо, що для стаціонарності $MA(q)$-процесу, не потрібно накладати жодних умов на коефіцієнти b_i. Проте, $MA(q)$-процес буде оборотним, якщо всі корені (взагалі кажучи комплексні) рівняння $b(z) = 0$ лежатимуть зовні одиничного круга. У випадку $MA(1)$-процесу ця умова еквівалентна умові $|b_1| < 1$.

Розглянемо функію щільності процесу (2.3.23)

$$f(\lambda) = \frac{\sigma_\xi^2}{2\pi} \left|1 + b\, e^{-i\lambda}\right|^2 = \frac{\sigma_\xi^2}{2\pi}(1 + 2b\cos\lambda + b^2), \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi.$$

Позначимо $s(\lambda) = (1 + 2b\cos\lambda + b^2)$, $-\pi \leq \lambda < \pi$, і знайдемо $\max\limits_{-\pi\leq\lambda\leq\pi} s(\lambda)$. При $b > 0$

$$\max_{-\pi\leq\lambda\leq\pi} s(\lambda) = s(0) = 1 + 2b + b^2 = (1 + b)^2,$$

а при $b < 0$

$$\max_{-\pi\leq\lambda\leq\pi} s(\lambda) = s(-\pi) = 1 - 2b + b^2 = (1 - b)^2.$$

Отже, для будь-якого $b \in (-1, 1)$

$$\max_{-\pi\leq\lambda\leq\pi} s(\lambda) = (1 + |b|)^2.$$

В (2.3.23) покладемо $b = 0.2$, тоді

$$s(\lambda) = (1 + 0.4\cos\lambda + 0.04), \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi,$$

$$\max_{-\pi\leq\lambda\leq\pi} s(\lambda) = s(0) = 1.44.$$

$$f_{max} = \max_{-\pi\leq\lambda\leq\pi} s(\lambda) = 1.44.$$

Підставляючи значення f_{max} в формули (2.3.14) і (2.3.16), ми отримуємо відповідні константи в теоремах 2.3.3 і 2.3.4.

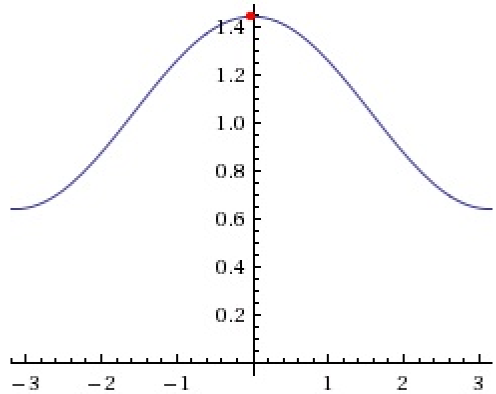

Рис. 2.3.1: Графік функції $s(\lambda)$,

Приклад 2.3.2. Розглянемо AR(1) процес вигляду

$$\varepsilon_t - a\,\varepsilon_{t-1} = \xi_t, \tag{2.3.24}$$

де ε_t - помилки моделі (2.1.1), ξ_t - субгауссівський білий шум. Тоді

$$a(z) = 1 - a\,z, \quad b(z) = 1.$$

Розглянемо функцію щільності процесу (2.3.24)

$$f(\lambda) = \frac{\sigma_\xi^2}{2\pi}\,\frac{1}{|1 - a\,e^{-i\lambda}|^2} = \frac{\sigma_\xi^2}{2\pi}\,\frac{1}{1 - 2a\,\cos\lambda + a^2}.$$

В (2.3.24) покладемо $a = 0.75$, тоді

$$\varepsilon_t - 0.75\,\varepsilon_{t-1} = \xi_t, \tag{2.3.25}$$

$$f(\lambda) = \frac{\sigma_\xi^2}{2\pi}\,\frac{1}{1 - 1.5\,\cos\lambda + 0.5625}.$$

Зауважимо, що процес (2.3.25) є стаціонарним, оскільки $0.75 < 1$.

Позначимо $s(\lambda) = \dfrac{1}{1 - 1.5\,\cos\lambda + 0.5625}, \quad -\pi \le \lambda \le \pi$, і знайдемо

$\max\limits_{-\pi\leq\lambda\leq\pi} s(\lambda)$. Оскільки $\min\limits_{-\pi\leq\lambda\leq\pi}(1-1.5\ \cos\lambda+0.5625)=\dfrac{1}{16}$, то

$$\max_{-\pi\leq\lambda\leq\pi} s(\lambda)=s(0)=16.$$

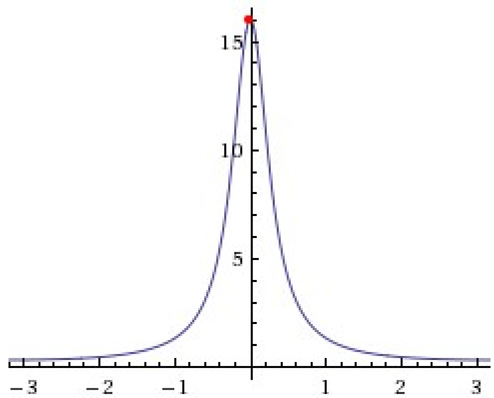

Рис. 2.3.2: Графік функції $s(\lambda)$,

$$f_{max}=\max_{-\pi\leq\lambda\leq\pi} s(\lambda)=16.$$

Приклад 2.3.3. Розглянемо тепер $AR(2)$ процес вигляду

$$\varepsilon_t-1.2\ \varepsilon_{t-1}+0.85\ \varepsilon_{t-2}=\xi_t, \tag{2.3.26}$$

де ε_t - помилки моделі (2.1.1), ξ_t - субгауссівський білий шум. Тоді

$$a(z)=1-1.2\ z+0.85\ z^2,\quad b(z)=1.$$

Перевіримо умови стаціонарності ($a_1+a_2<1,\ a_1-a_2>-1,\ a_2>-1$) для процесу (2.3.26), при $a_1=1.2,\ a_2=-0.85$:

$$1.2-0.85=0.35<1;$$

$$1.2+0.85=2.05>1;$$

$$-0.85 > -1.$$

Умови виконуються, отже, процес (2.3.26) є стаціонарним.

Запишемо функцію щільності даного процесу

$$f(\lambda) = \frac{\sigma_\xi^2}{2\pi} \frac{1}{|1 - 1.2e^{-i\lambda} + 0.85e^{-i2\lambda}|^2}, \quad \lambda \in [-\pi, \pi].$$

Позначимо $s(\lambda) = \dfrac{1}{|1 - 1.2e^{-i\lambda} + 0.85e^{-i2\lambda}|^2}$.

$$\left|1 - 1.2e^{-i\lambda} + 0.85e^{-i2\lambda}\right|^2 =$$

$$= |1 - 1.2(\cos\lambda + i\sin\lambda) + 0.85(\cos 2\lambda + i\sin 2\lambda)|^2 =$$

$$= |1 - 1.2\cos\lambda + 0.85\cos 2\lambda - i\ 1.2\sin\lambda + i\ 0.85\sin 2\lambda|^2 =$$

$$= (1 - 1.2\cos\lambda + 0.85\cos 2\lambda)^2 + (-1.2\sin\lambda + 0.85\sin 2\lambda)^2 =$$

$$= 1.44\cos^2\lambda + 0.7225\cos^2 2\lambda - 2.04\cos 2\lambda\cos\lambda - 2.4\cos\lambda + 1.7\cos 2\lambda + 1+$$

$$+1.44\sin^2\lambda - 2.04\sin\lambda\sin 2\lambda + 0.7225\sin^2 2\lambda =$$

$$= -4.44\cos\lambda + 1.7\cos 2\lambda + 3.1625.$$

Отже, $s(\lambda) = \dfrac{1}{3.1625 - 4.44\cos\lambda + 1.7\cos 2\lambda}$.

Програмно було знайдено

$$\max_{-\pi\le\lambda\le\pi} s(\lambda) = \frac{34000}{441} \approx 77.1, \quad \text{при } \lambda = \pm 2\arctan\left(\sqrt{\frac{59}{281}}\right).$$

$$f_{max} = \max_{-\pi\le\lambda\le\pi} s(\lambda) = \frac{34000}{441}.$$

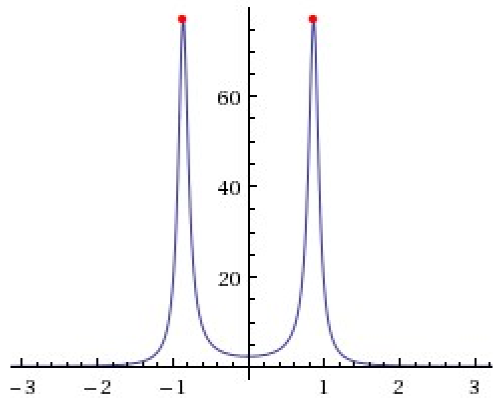

Рис. 2.3.3: Графік функції $s(\lambda)$,

Приклад 2.3.4. Розглянемо процес $ARMA(1,1)$ вигляду

$$\varepsilon_t - 0.5\,\varepsilon_{t-1} = \xi_t - 0.3\,\xi_{t-1}, \tag{2.3.27}$$

де, як і в попередніх прикладах, ε_t - помилки моделі (2.1.1), ξ_t - субгауссівський білий шум. Тоді

$$a(z) = 1 - 0.5\,z, \quad b(z) = 1 - 0.3\,z.$$

Покажемо, що процес (2.3.27) — стаціонарний. Для цього знайдемо корені рівнянь $a(z) = 0$ та $b(z) = 0$.

$$a(z) = 0 \;\Leftrightarrow\; 1 - 0.5\,z = 0 \;\Rightarrow z = 2;$$

$$b(z) = 0 \;\Leftrightarrow\; 1 - 0.3\,z = 0 \;\Rightarrow z = \frac{10}{3}.$$

Корені поліномів $a(z)$ та $b(z)$ не співпадають та лежать поза колом одиничного радіусу. Отже, $ARMA(1,1)$ процес вигляду (2.3.27) є стаціонарним процесом.

Знайдемо максимум функції щільності цього процесу.

$$f(\lambda)=\frac{\sigma_\xi^2}{2\pi}\ \left|\frac{1-0.3\ e^{-i\lambda}}{1-0.5\ e^{-i\lambda}}\right|^2=\frac{\sigma_\xi^2}{2\pi}\ \left|\frac{1-0.3\ (\cos\lambda+i\sin\lambda)}{1-0.5(\cos\lambda+i\sin\lambda)}\right|^2=$$

$$=\frac{\sigma_\xi^2}{2\pi}\ \frac{(1-0.3\cos\lambda)^2+(0.3\sin\lambda)^2}{(1-0.5\cos\lambda)^2+(0.5\sin\lambda)^2}=\frac{\sigma_\xi^2}{2\pi}\ \frac{1.09-0.6\cos\lambda}{1.25-\cos\lambda}.$$

Позначимо $s(\lambda)=\dfrac{1.09-0.6\cos\lambda}{1.25-\cos\lambda}$, $-\pi\le\lambda\le\pi$, і знайдемо $\max\limits_{-\pi\le\lambda\le\pi} s(\lambda)$. Знайдемо похідну функції $s(\lambda)$

$$s'(\lambda)=\left(\frac{1.09-0.6\cos\lambda}{1.25-\cos\lambda}\right)'=\frac{0.6\sin\lambda(1.25-\cos\lambda)-\sin\lambda(1.09-0.6\cos\lambda)}{(1.25-\cos\lambda)^2}=$$

$$=\frac{-0.34\sin\lambda}{(1.25-\cos\lambda)^2}=0.$$

Отже, $\lambda=\pi k,\ k\in\{-1,0,1\}$ — критичні точки. Таким чином, $s'(\lambda)$ міняє знак з «+» на «-» в точці $\lambda=0$, тому

$$\max_{-\pi\le\lambda\le\pi} s(\lambda)=s(0)=1.96.$$

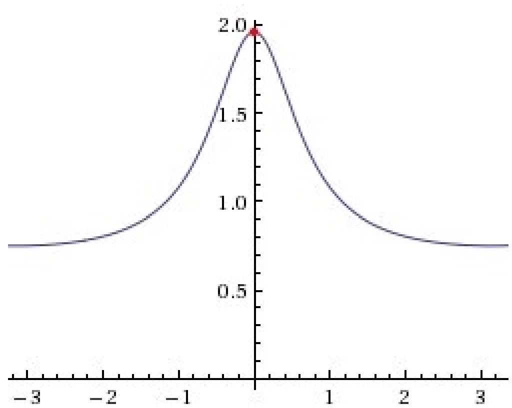

Рис. 2.3.4: Графік функції $s(\lambda)$,

$$f_{max} = \max_{-\pi \le \lambda \le \pi} s(\lambda) = 1.96.$$

Як було зазначено в прикладі 2.3.1, підставивши значення f_{max} в формули (2.3.14) і (2.3.16), ми отримаємо відповідні константи в теоремах 2.3.3 і 2.3.4 також і для кожного із прикладів 2.3.2 - 2.3.4.

3 Імовірності великих відхилень оцінки найменших квадратів в моделі регресії з неперервним часом

3.1 Гауссівський стаціонарний випадковий шум

Розглянемо випадковий процес

$$X(t) = g(t, \theta) + \varepsilon(t), \quad t > 0, \tag{3.1.1}$$

де $g(\cdot\,,\cdot) : [0, \infty) \times \Theta^c \to \mathbb{R}$ — неперервна функція, що залежить від невідомого параметра $\theta \in \Theta$, Θ^c – замикання відкритої множини Θ, $\{\varepsilon(t), t \in \mathbb{R}\}$ – неперервний в середньому квадратичному та майже напевно гауссівський стаціонарний випадковий процес з нульовим середнім.

Покладемо

$$L_T(\eta) = \int_0^T \big(X(t) - g(t, \eta)\big)^2 dt$$

і дамо означення аналогічне означенню 2.1.1 для дискретного випадку.

Означення 3.1.1. Оцінкою найменших квадратів параметра $\theta \in \Theta$ називається випадковий вектор $\hat{\theta}_T = (\hat{\theta}_{1T}, \hat{\theta}_{2T}, \ldots, \hat{\theta}_{qT})$, для якого

$$L_T(\hat{\theta}_T) = \min_{\tau \in \Theta^c} L_T(\tau). \tag{3.1.2}$$

Вважатимемо, що похідні $g_i(t, \theta) = \dfrac{\partial}{\partial \theta_i} g(t, \theta), i = \overline{1, q}$, локально інтегровні з квадратом за t при кожному фіксованому $\theta \in \Theta$ та розглядатимемо нормуючу матрицю

$$d_T(\theta) = diag(d_{iT}(\theta),\, i = \overline{1,q}), \quad d_{iT}^2(\theta) = \int_0^T g_i^2(t,\theta)dt, \quad \theta \in \Theta. \qquad (3.1.3)$$

Для $T > T_0$ розглядатимемо нормоване відношення

$$Z_{T,\theta}(u) = \frac{C_T(\theta + d_T^{-1}(\theta)u)}{C_T(\theta)}, \qquad (3.1.4)$$

де $C_T(\cdot) = \exp\left\{-\frac{1}{2}L_T(\cdot)\right\}, \quad u \in U_{t,\theta} := d_T(\theta)(\Theta^c - \theta)$. Токож користуватимемось позначенням множини $\Gamma_{T,\theta,R}$ із розділу 1.

Аналогічно до (2.1.6) розділу 2.1 визначимо функцію Δ у випадку неперервного часу

$$\Delta(t,u) = g(t,\, \theta + d_T^{-1}(\theta)u) - g(t,\theta), \quad t \in [0,T], \qquad (3.1.5)$$

і перепишемо нормоване відношення (3.1.4) у термінах Δ:

$$Z_{T,\,\theta}(u) = \frac{C_T(\theta + d_T^{-1}(\theta)u)}{C_T(\theta)} =$$

$$= \frac{exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^T \left(X(t) - g(t,\, \theta + d_T^{-1}(\theta)u)\ \right)^2 dt\right\}}{\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^T \left(X(t) - g(t,\, \theta)\ \right)^2 dt\right\}} =$$

$$= exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^T \left(g(t,\theta) + \varepsilon(t) - g(t,\, \theta + d_T^{-1}(\theta)u)\ \right)^2 dt\right\} + \frac{1}{2}\int_0^T \varepsilon^2(t)dt =$$

$$= \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^T \Bigg(\left(g(t,\theta) - g(t,\, \theta + d_T^{-1}(\theta)u)\ \right)^2 + \varepsilon^2(t) - \varepsilon^2(t) + \right.$$

$$\left. +2\varepsilon(t)\big(g(t,\theta) - g(t,\, \theta + d_T^{-1}(\theta)u)\big)\Bigg)dt\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^T \left(g(t,\, \theta + d_T^{-1}(\theta)u) - g(t,\theta) + \varepsilon(t)\right)^2 dt + \right.$$

$$+\int_0^T \big(g(t,\ \theta+d_T^{-1}(\theta)u)-g(t,\theta)\big)\varepsilon(t)dt\Big\} =$$

$$=\exp\left\{\int_0^T \Delta(t,u)\varepsilon(t)dt-\frac{1}{2}\int_0^T \Delta^2(t,u)dt\right\}.$$

Отже,

$$Z_{T,\,\theta}(u)=\exp\left\{\int_0^T \Delta(t,u)\varepsilon(t)dt-\frac{1}{2}\int_0^T \Delta^2(t,u)dt\right\},$$

де $\Delta(t,u)$ визначено в (3.1.5).

Введемо основну умову цього підрозділу стосовно помилок спостережень $\varepsilon(t)$ в моделі (3.1.1).

3.1.1 $\{\varepsilon(t), t\in\mathbb{R}\}$ - стаціонарний гауссівський процес зі спектральною щільністю $f(\lambda),\ \lambda\in\mathbb{R}$, такою, що

$$f_1=\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} f(\lambda)<\infty. \tag{3.1.6}$$

Позначимо

$$\langle B\Delta,\Delta\rangle=\int_0^T\int_0^T B(t-s)\Delta(t)\Delta(s)dtds, \tag{3.1.7}$$

де $B(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}f(\lambda)d\lambda$ — коваріаційна функція процесу ε. Тоді, враховуючи означення 2.2.1 та умову **3.1.1**, маємо

$$\mathbb{E}\exp\big\{\langle\varepsilon,\ \Delta\rangle\big\}=\mathbb{E}\exp\left\{\int_0^T\varepsilon(t)\Delta(t)dt\right\}= \tag{3.1.8}$$

$$=\exp\left\{\frac{1}{2}\langle B\Delta,\Delta\rangle\right\}=\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^T B(t-s)\Delta(t)\Delta(s)dtds\right\}.$$

Лема 3.1.1. *Нехай виконується умова* **3.1.1**. *Покладемо*

$$S_T=\int_0^T\Delta(t)\varepsilon(t)dt,$$

де $\Delta \in L_2([0,T])$ — *деяка функція. Тоді для всіх* $x > 0$ *справедливі нерівності*

$$\mathbb{P}\{S_T \geq x\} \leq D_T(x), \qquad \mathbb{P}\{S_T \leq -x\} \leq D_T(x), \tag{3.1.9}$$

$$\mathbb{P}\{|S_T| \geq x\} \leq 2D_T(x), \tag{3.1.10}$$

де $D_T(x) = \exp\left\{-\dfrac{x^2}{2<B\Delta,\Delta>}\right\}$.

Доведення цієї леми аналогічне доведенню леми 2.2.2.

Нехай функція f_T, константи ρ, κ, δ і поліноми $\gamma(R)$ визначені як у розділі 2.1. Введемо умови відносно моделі спостережень (3.1.1), аналогічні відповідним умовам розділу 2.1, сформульованим для моделі (2.1.1).

3.1.2 Для будь-яких $u, v \in \Gamma_{T,\theta,R}$, $\|u-v\| \leq \kappa$, $T > T_0$, $R > R_0$

$$\int_0^T (\Delta(t,u) - \Delta(t,v))^2 dt \leq \|u-v\|^{2\rho}\gamma(R), \tag{3.1.11}$$

$$\int_0^T \Delta^2(t,u)dt \leq \gamma(R). \tag{3.1.12}$$

3.1.3 Для будь-якого $u \in \Gamma_{T,\theta,R}$

$$\int_0^T \Delta^2(t,u)dt \geq 4\pi f_1 \delta^{-2} f_T(R). \tag{3.1.13}$$

Теорема 3.1.1. *Нехай виконано умови **3.1.1**, **3.1.2** та **3.1.3**. Тоді для* $T > T_0$, $H > H_0$ *існують такі константи* B_0, $b_0 > 0$, *що справедливі нерівності* (2.1.13), (2.1.14).

Доведення. Для доведення цієї теореми перевіримо виконання умов **1.1** та **1.2** теореми 1.1.

Нехай випадкowвий процес $\varepsilon(t)$ задовольняє умові **3.1.1**, а в лемі 3.1.1 $\Delta(t) = \Delta(t,u) - \Delta(t,v) = A(t)$, де величини $\Delta(t,\cdot)$ визначено в (3.1.5). Тоді за формулою для моментів невід'ємної в. в., для будь-якого $m > 0$

$$\mathbb{E}\left|\int_0^T A(t)\varepsilon(t)dt\right|^m = m\int_0^\infty x^{m-1}\mathbb{P}\left(\left|\int_0^T A(t)\varepsilon(t)dt\right| \geq x\right)dx \leq$$

$$\leq 2m\int_0^\infty x^{m-1}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\langle B\Delta,\ \Delta\rangle}\right\}dx.$$

Зробимо заміну змінних

$$\frac{x}{\sqrt{\langle B\Delta,\ \Delta\rangle}} = z,$$

тоді

$$2m\int_0^\infty x^{m-1}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\langle B\Delta,\ \Delta\rangle}\right\}dx =$$

$$= m\int_{-\infty}^\infty z^{m-1}\langle B\Delta,\ \Delta\rangle^{\frac{m-1}{2}}\exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}\sqrt{\langle B\Delta,\ \Delta\rangle}dz =$$

$$= \sqrt{2\pi}\ m\ \langle B\Delta,\ \Delta\rangle^{m/2}\mathbb{E}|z|^{m-1}, \tag{3.1.14}$$

де z — стандартна гауссівська в. в.

За теоремою Біркгофа-Хінчина (див., наприклад, [22]), умовою **3.1.1** та тотожністю Паншереля

$$\langle B\Delta,\ \Delta\rangle = \int_0^T\int_0^T B(t-s)A(t)A(s)dtds =$$

$$= \int_0^T\int_0^T\int_{-\infty}^\infty e^{i\lambda(t-s)}f(\lambda)d\lambda\ A(t)A(s)dtds =$$

$$= \int_{-\infty}^\infty f(\lambda)\left(\int_0^T\int_0^T e^{i\lambda(t-s)}\ A(t)A(s)dtds\right)d\lambda =$$

$$= \int_{-\infty}^\infty f(\lambda)\left(\int_0^T e^{i\lambda t}\ A(t)dt\int_0^T e^{-i\lambda s)}\ A(s)ds\right)d\lambda =$$

$$= \int_{-\infty}^\infty f(\lambda)\left|\int_0^T e^{i\lambda t}\ A(t)dt\right|^2 d\lambda \leq$$

$$\leq f_1 \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^T e^{i\lambda t} A(t) dt \right|^2 d\lambda = 2\pi f_1 \int_0^T A^2(t) dt. \tag{3.1.15}$$

З формул (3.1.14), (3.1.15) та (2.1.16) маємо

$$\mathbb{E} \left| \int_0^T A(t)\varepsilon(t) dt \right|^m \leq 2^m \pi^{m/2} f_1^{m/2} m \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \left(\int_0^T A^2(t) dt \right)^{m/2},$$

що призводить до виконання при $m > \dfrac{q}{\rho}$ умови **1.1**.

Для перевірки виконання умови **1.2** застосуємо першу з нерівностей (3.1.9) при $\Delta = \Delta(t,u)$ та

$$x = \delta \int_0^T \Delta^2(t,u) dt.$$

Тоді з умови **3.1.3**

$$\mathbb{P}\left\{ \Delta(t,u)\varepsilon(t) \geq \delta \int_0^T \Delta^2(t,u) dt \right\} \leq \exp\left\{ -\frac{\delta^2}{2} \frac{\left(\int_0^T \Delta^2(t,u) dt \right)^2}{\langle B\Delta, \Delta \rangle} \right\} \leq$$

$$\leq \exp\left\{ -\frac{\delta^2}{4\pi f_1} \int_0^T \Delta^2(t,u) dt \right\} \leq \exp\{-f_T(R)\}.$$

■

Введемо умову, яка аналогічна умові 2.1.4

3.1.4 Існують додатні числа $c_0(\theta)$ і $c_1(\theta)$ такі, що для будь-яких $u, v \in U_{T,\theta} = d_T(\theta)(\Theta^c - \theta)$, $T > T_0$

$$c_0(\theta)\|u - v\|^2 \leq \int_0^T \big(\Delta(t,u) - \Delta(t,v)\big)^2 dt \leq c_1(\theta)\|u - v\|^2. \tag{3.1.16}$$

Наслідок 3.1.1. *Нехай виконуються умови* **3.1.1** *та* **3.1.4**. *Тоді існують такі константи* B_0, b, *що для* $T > T_0$, $H > H_0$

$$\mathbb{P}\left\{\|d_T(\theta)(\hat{\theta}_T-\theta)\|\geq H\right\}\leq B_0\exp\{-bH^2\},\tag{3.1.17}$$

причому для будь-якого $\beta>0$ можна обрати B_0 таким чином, щоб мала місце нерівність

$$b\geq\frac{c_0(\theta)}{16\pi f_1(1+q)}-\beta.\tag{3.1.18}$$

Доведення. Доведення цього твердження аналогічне доведенню теореми 2.1.2. Перевіримо виконання умов **3.1.2** та **3.1.3**. Нерівність (3.1.11) умови **3.1.2** випливає із правої частини нерівності (3.1.16), якщо ми в (3.1.16) візьмемо $\rho=1$, $\gamma(R)=c_1(\theta)$. Нерівність (3.1.12) умови **3.1.2** випливає також із правої частини нерівності (3.1.16), якщо в ній взяти $v=0$, $\gamma(R)=c_1(\theta)(R+1)^2$, тому що

$$\int_0^T\Delta^2(t,u)dt\leq c_1(\theta)\|u\|^2\leq c_1(\theta)(R+1)^2=\gamma(R).\tag{3.1.19}$$

Для перевірки виконання умови **3.1.3** перепишемо ліву частину нерівності (3.1.16) при $v=0$ наступним чином:

$$\int_0^T\Delta^2(t,u)dt\geq c_0(\theta)\|u\|^2\geq 4\pi f_1\delta^{-2}\left(\frac{1}{4\pi f_1}\delta^2c_0(\theta)R^2\right),\tag{3.1.20}$$

тобто в нерівності **2.1.3** можна взяти

$$f_T(R)=\frac{1}{4\pi f_1}\delta^2c_0(\theta)R^2.\tag{3.1.21}$$

Тепер запишемо показник експоненти в правій частині нерівності (2.1.21) у вигляді

$$-b_0f_T(H)=-\left(b_0\frac{1}{4\pi f_1}\delta^2c_0(\theta)H^2\right).$$

Оскільки зараз у правій частині (3.1.18) $\rho=1$, то для будь-якого $\beta>0$ в

(2.1.21) можна взяти

$$b = b_0 \frac{1}{4\pi f_1} \delta^2 c_0(\theta) \geq \frac{1}{4\pi f_1} \delta^2 c_0(\theta) \frac{1}{1+q} - \beta. \tag{3.1.22}$$

Спрямувавши $\delta \to \frac{1}{2}$, отримаємо нерівність (2.1.22). ■

Наступний приклад є розширенням прикладу **2.1.1** на неперервний час.

Приклад 3.1.1. Припустимо, що $g(t, \nu) = g(y(t), \nu)$, де $y(\cdot) : \mathbb{R}_+ \to Y$ — борелеве відображення, що набуває значення у компактній області планування регресійного експерименту $Y \subset \mathbb{R}^m, \nu \in \Theta^c, \Theta \subset \mathbb{R}^q$ — відкрита обмежена опукла множина, $g(\cdot, \cdot) \in C(Y \times \Theta^c)$.

Нехай $\mathcal{B}_Y$ — σ-алгебра борелевих підмножин Y. Розглянемо сім'ю мір

$$\mu_T(A) = T^{-1} \lambda\{t \in [0, T] : y(t) \in A\},\ A \in \mathcal{B}_Y, \tag{3.1.23}$$

λ — міра Лебега на $\mathbb{R}_+$. Припустимо, що міри μ_T слабко збігаються до деякої міри $\mu : \mu_T \Rightarrow \mu,\ T \to \infty$.

Наведемо приклад виконання цієї умови при $m = 1$. Нехай $\{y_i,\ i \geq 1\} \subset Y$ — деяка послідовність та $y(t) = y_i,\ t \in [i-1, i),\ i \geq 1$. Введемо міру

$$\mu_T = T^{-1} \sum_{i=1}^{[T]} \delta_{y_i} + T^{-1}\{T\} \delta_{y_{[T]+1}}, \tag{3.1.24}$$

де $[T]$ та $\{T\}$ — ціла та дробова частини числа T. Тоді, якщо $n^{-1} \sum\limits_{i=1}^{n} \delta_{y_i} \Rightarrow \mu,\ n \to \infty$, то і $\mu_T \Rightarrow \mu,\ T \to \infty$.

Далі, розглядаючи функцію g таку, як у прикладі **2.1.1**, ми проводимо аналогічні міркування від формули (2.1.26) до формули (2.1.32), замінюючи суми інтегралами. Тоді маємо наступний аналог нерівностей (2.1.32):

$$\int_0^T \Delta^2(t, u)\, dt \geq S^2 T^{-1} \int_0^T \exp\{2\langle y(t), \theta \rangle\} \langle y(t), u \rangle^2 dt \geq$$

$$\geq S^4 \sum_{k,j=1}^{q} \left(T^{-1} \int_0^T y_k(t) y_j(t) \, dt \right) u_k u_j. \tag{3.1.25}$$

За наших припущень матриця

$$J_T = \left(T^{-1} \int_0^T y_k(t) y_j(t) \, dt \right)_{k,j=1}^{q} = \left(\int_Y y_k y_j \mu_T(dy) \right)_{k,j=1}^{q}, \tag{3.1.26}$$

і, завдяки компактності Y,

$$\lim_{T \to \infty} J_T = J = \left(\int_Y u_k y_j \mu(d\lambda) \right)_{k,j=1}^{q}. \tag{3.1.27}$$

Якщо матриця J додатно визначена, то для $T > T_0$ можна, наприклад, взяти в умові **2.1.3** при $v = 0$

$$c_0(\theta) = \frac{1}{2} \lambda_{min}(J) S^4. \tag{3.1.28}$$

Наступне зауваження про слабку консистентність ОНК $\hat{\theta}_T$ стосується всіх підрозділів розділів 2 і 3 роботи та теорем, що використовують умови **2.1.4** та **3.1.4**. Наведемо це зауваження, якще один наслідок із теореми 3.1.1.

Наслідок 3.1.2. *Нехай виконано умови* **3.1.1** *та* **3.1.4**, *причому в* **3.1.4** *у якості матриці, що нормує ОНК, можна взяти $T^{1/2}\mathbb{I}_q$. Тоді для будь-якого $\rho > 0$, констант із наслідку 3.1.1 та $T > T_0$*

$$\mathbb{P} \left\{ \|\hat{\theta}_T - \theta\| \geq \rho \right\} \leq B \exp\left\{ -b\rho^2 T \right\}. \tag{3.1.29}$$

Доведення. В умовах наслідку нерівність (2.1.22) перетворюється на нерівність

$$\mathbb{P} \left\{ \|T^{1/2} \left(\hat{\theta}_T - \theta \right) \| \geq H \right\} \leq B_0 \exp\left\{ -bH^2 \right\}. \tag{3.1.30}$$

Поклавши в (3.1.30) $H = \rho T^{1/2}$, отримуємо (3.1.29). ■

3.2 Сумісно строго субгауссівський випадковий шум

Введемо основну умову цього розділу відносно помилок спостережень $\varepsilon(t)$ в моделі (3.1.1).

3.2.1 $\varepsilon = \{\varepsilon(t),\ t \in \mathbb{R}_+\}$ — дійсний неперервний в середньому квадратичному та м. н., сумісно строго субгауссівський процес з коваріаційною функцією $\mathbb{E}\varepsilon(t)\varepsilon(s) = B(t,s),\ t,s \in \mathbb{R}_+$.
Означення сумісно строго субгауссівського процесу дано в розділі 2.2 (див. означення 2.2.2).

Нехай $\Delta(t),\ t \in [0,T]$, — неперервна функція, тоді за умови **3.2.1** існує інтеграл

$$\mathcal{I}(T) = \int_0^T \Delta(t)\varepsilon(t)dt, \tag{3.2.1}$$

визначений для майже всіх вибіркових функцій процесу $\varepsilon(t),\ t \in [0,T]$, як інтеграл Рімана. Розглянемо розбиття $r(n)$

$$0 = t_1 < t_2 < \cdots < t_{n+1} = T \tag{3.2.2}$$

інтервалу $[0,T]$ і відповідну інтегральну суму

$$\mathcal{I}_n(T) = \sum_{k=T}^{n} u_k\varepsilon(t_k), \quad u_k = \Delta(t_k)(t_{k+1} - t_k), \quad k = \overline{1,n}. \tag{3.2.3}$$

Розглянемо таку послідовність розбиттів $r(n)$ інтервалу $[0,T]$, що

$$n \to \infty, \quad \max(t_{k+1} - t_k) \to 0 \tag{3.2.4}$$

та будемо записувати (3.2.4) як $|r(n)| \to 0$. Тоді за зроблених припущень

$$\mathcal{I}_n(T) \to \mathcal{I}(T), \text{ м. н.}, \qquad |r(n)| \to 0. \tag{3.2.5}$$

Очевидно,

$$\mathbb{E}\,\mathcal{I}^2(T) = \int_0^T \int_0^T B(t,s)\Delta(t)\Delta(s)\, dtds. \tag{3.2.6}$$

Лема 3.2.1. *За умови* **3.2.1** *в. в.* $\mathcal{I}(T)$ *є строго субгауссівською для будь-якого* $T > 0$.

Доведення. Означення 2.2.2 означає, що процес $\varepsilon(t)$, $t \in [0, T]$, є сумісно строго субгауссівським тоді і тільки тоді, коли для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ та будь-яких $t_1, t_2, \ldots, t_n \in [0, T]$, $\quad u_1, u_2, \ldots, u_n \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E} \exp\left\{\lambda \sum_{k=1}^{n} u_k \varepsilon(t_k)\right\} \leq \exp\left\{\frac{1}{2}\lambda^2 \sum_{j\ k=1}^{n} B(t_j, t_k) u_j u_k\right\}. \tag{3.2.7}$$

Якщо ми візьмемо в (3.2.7) $u_k = \Delta(t_k)(t_{k+1} - t_k)$, $\quad k = \overline{1, n}$, то отримаємо нерівність

$$\mathbb{E} \exp\left\{\mathcal{I}_n(T)\right\} \leq \exp\left\{\frac{1}{2}\,\mathbb{E}\,\mathcal{I}_n^2(T)\right\},$$

і за лемою Фату (див., наприклад, [22])

$$\mathbb{E} \exp\left\{\mathcal{I}(T)\right\} = \mathbb{E} \lim_{|r(n)| \to 0} \exp\left\{\mathcal{I}_n(T)\right\} = \mathbb{E} \varliminf_{|r(n)| \to 0} \exp\left\{\mathcal{I}_n(T)\right\} \leq$$

$$\leq \varliminf_{|r(n)| \to 0} \mathbb{E} \exp\left\{\mathcal{I}_n(T)\right\} \leq \lim_{|r(n)| \to 0} \exp\left\{\frac{1}{2}\mathbb{E}\,\mathcal{I}_n^2(T)\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{1}{2}\mathbb{E}\,\mathcal{I}^2(T)\right\},$$

що доводить дану лему. ■

Прикладом сумісно строго субгауссівського процесу ε з умови **3.2.1**, очевидно, є гауссівський процес ε. Для гауссівського шуму ε нерівність

$$\mathbb{E} \exp\left\{\lambda \mathcal{I}(T)\right\} \leq \exp\left\{\frac{1}{2}\lambda^2 E\,\mathcal{I}^2(T)\right\}, \tag{3.2.8}$$

яка є вірною для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ та сумісно строго субгауссівського процесу ε з умови **3.2.1**, перетворюється на рівність, і нема потреби доводити лему 2.3.1.

3.2.2 Коваріаційна функція $B(t, s)$ з умови 3.2.1 має властивості

$$\|B\|_2^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty B^2(t,s)dtds < \infty \tag{3.2.9}$$

або

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} \int_0^\infty |B(t,s)|ds = \overline{B} < \infty. \tag{3.2.10}$$

Лема 3.2.2. *За умов* (3.1.1) *та* (3.2.2)*, для* $T > 0$

$$\langle B\Delta, \Delta\rangle = \int_0^T \int_0^T B(t,s)\Delta(t)\Delta(s)\, dt\, ds \le c \int_0^T \Delta^2(t)dt, \tag{3.2.11}$$

де $c = \|B\|_2$ *за умови* (3.2.9)*, і* $c = \overline{B}$ *за умови* (3.2.10)*.*

Доведення. Очевидно, за теоремою Фубіні та (3.2.9)

$$\langle B\Delta, \Delta\rangle = \int_0^T \left(\int_0^T B(t,s)\Delta(s)\, ds\right) \Delta(t)\, dt \le$$

$$\le \left(\int_0^T \left(\int_0^T B(t,s)\Delta(s)\, ds\right)^2 dt\right)^{1/2} \left(\int_0^T \Delta^2(t)\, dt\right)^{1/2} \le$$

$$\le \left(\int_0^T \left(\int_0^T B^2(t,s)\, ds\right)\left(\int_0^T \Delta^2(s)\, ds\right) dt\right)^{1/2} \left(\int_0^T \Delta^2(t)\, dt\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\int_0^T \int_0^T B^2(t,s)\, dt\, ds\right)^{1/2} \int_0^T \Delta^2(t)\, dt \le \|B\|_2 \int_0^T \Delta^2(t)\, dt. \tag{3.2.12}$$

З іншого боку, з теореми Фубіні та (3.2.10)

$$\langle B\Delta, \Delta\rangle = \int_0^T \int_0^T |B(t,s)|\, |\Delta(t)\Delta(s)|\, dt\, ds \le$$

$$\le \int_0^T \int_0^T |B(t,s)|\, \frac{\Delta^2(t) + \Delta^2(s)}{2}\, ds\, dt = \int_0^T \int_0^T |B(t,s)|\, \Delta^2(t)\, dt\, ds =$$

$$= \int_0^T \Delta^2(t) \left(\int_0^T |B(t,s)|\, ds\right) dt \le \overline{B} \int_0^T \Delta^2(t)\, dt. \tag{3.2.13}$$

■

Результати лем 3.2.1 та 3.2.2 дають можливість сформулювати твердження, аналогічні до теореми 3.1.1 та наслідку 3.1.1.

Теорема 3.2.1. *Припустимо, що виконано умови* **3.1.2**, **3.2.1**, **3.2.2** *та* **3.2.3** *Для будь-якого* $u \in \Gamma_{T,\theta,R}$

$$\int_0^T \Delta^2(t,u)\,dt \geq 2c\delta^{-2} f_T(R), \tag{3.2.14}$$

де

$$c = \begin{cases} \|B\|_2, & \text{за умови } (3.2.9), \\ \overline{B}, & \text{за умови } (3.2.10). \end{cases} \tag{3.2.15}$$

Тоді для $T > T_0$, $H > H_0$ *існують такі константи* B_0, $b_0 > 0$, *що справджуються нерівності* (2.1.13), (2.1.14).

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню теореми 3.1.1, і тому ми його не наводимо.

Наслідок 3.2.1. *Нехай виконуються умови* **3.1.1**, **3.2.1** *та* **3.2.2**. *Тоді існують такі константи* B_0, b, *що для* $T > T_0$, $H > H_0$ *є вірною нерівність* (2.1.21), *причому для будь-якого* $\beta > 0$ *можна обрати* B_0 *таким чином, щоб мала місце нерівність*

$$b \geq \frac{c_0(\theta)}{8c(1+q)} - \beta, \tag{3.2.16}$$

де константу c означимо рівностями (3.2.15).

Цікаво порівняти останній результат із наслідком 3.1.1, отриманим для стаціонарного гауссівського процесу ε. Якщо ε — гауссівський стаціонарний процес, то $B(t,s) = B(t-s)$, і умова (3.2.9) не виконується. З іншого боку,

$$\int_0^\infty |B(t,s)|\,ds = \int_{-t}^\infty |B(s)|\,ds \leq \int_{-\infty}^\infty |B(s)|\,ds = \overline{B} \leq \infty, \tag{3.2.17}$$

якщо $B \in L_1(\mathbb{B})$. В цьому випадку ε має неперервну та обмежену спектральну щільність $f(\lambda)$. Припустимо, що $B(s) \geq 0$, $s \in \mathbb{R}$. Тоді, оскільки

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} B(t) dt, \tag{3.2.18}$$

то $\overline{B} = 2\pi f(0)$, і в (3.2.16) $8c = 16\pi f(0)$. У нерівності (2.1.22) відповідна константа дорівнює $16\pi f_1$, де $f_1 = \max\limits_{\lambda \in \mathbb{R}} f(\lambda)$. Оскільки, $f(0) \leq f_1$, то (3.2.16) дає кращу експоненціальну оцінку, ніж (2.1.22), якщо $f(0) < f_1$, але за умови додатньої корреляції випадкового процесу ε.

Поняття, якими ми користуємось нижче, викладено, наприклад, в класичній монографії [22].

Нехай μ — елементарна ортогональна стохастична міра означена на півкільці інтервалів

$$\mathscr{P}_1 = \{[a, b) : -\infty < a < b < \infty\} \cup \{\varnothing\},$$

що має обмежену структурну функцію (міру) F. Припустимо, що міру F на $\mathscr{P}_1$ можна продовжити ([22], Теорема 2, §7, гл. 2) до повної міри l_F на вимірному просторі $(\mathbb{R}, \mathscr{L}_F)$, де $\mathscr{L}_F$ — σ-алгебра всіх вимірних за Каратеодорі підмножин $\mathbb{R}$. За нашим припущенням l_F є скінченною мірою. Тоді елементарну ортогональну стохастичну міру μ можна продовжити до стохастичної міри $\tilde{\mu}$ на $(\mathbb{R}, \mathscr{L}_F)$. Надалі будемо ототожнювати міри μ і $\tilde{\mu}$ та писати $\mu = \tilde{\mu}$.

Нехай $\mathscr{L}$ — σ-алгебра вимірних за Лебегом підмножин $\mathbb{R}$, l — міра Лебега на $\mathbb{R}$. Припустимо, що функція $a(t, \lambda)$, $(t, \lambda) \in \mathbb{R}^2$, є $l \times l_F$ -вимірною та належить $L_2(\mathbb{R}^2, l \times l_F)$. Крім того, $a(t, \cdot) \in L_2(\mathbb{R}^2, l_F)$ для довільного $t \in \mathbb{R}$. Розглянемо стохастичний інтеграл

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t, \lambda) \mu(d\lambda), \tag{3.2.19}$$

який можна визначити як функцію від t таким чином, щоб процес $\varepsilon(t)$, $t \in$

$\mathbb{R}$, був вимірним ([22], с. 256). Якщо ми замість $\mathbb{R}$ візьмемо будь-який скінченний або нескінченний відрізок вісі $\mathbb{R}$, зокрема $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, то означення (3.2.19) залишається таким же, якщо позначити $\mathscr{L}$ — σ-алгебру підмножин цього відрізку, вимірних за Лебегом.

Стохастична міра μ та функція a набувають, взагалі кажучи, комплексних значень. Якщо ми хочемо обрати у якості випадкового шуму моделі регресії (3.1.1) випадковий процес, заданий стохастичним інтегралом (3.2.19), то треба, щоб μ була центрованою стохастичною мірою. Тоді за введених вище умов для коваріаційної функції дійсного процесу $\{\varepsilon(t),\, t \in \mathbb{R}_+\}$ маємо формулу

$$B(t,s) = \mathbb{E}\varepsilon(t)\varepsilon(s) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t,\lambda)\overline{a(s,\lambda)} l_F(d\lambda), \quad t, s \in \mathbb{R}_+, \tag{3.2.20}$$

яка призводить до додаткової умови щодо функції $a(t,\lambda)$, яка забезпечує дійсність значень коваріацій $B(t,s)$.

Нехай $a(t,s) = a_1(t,\lambda) + i a_2(t,\lambda)$, де $a_1 = \Re a,\ a_2 = \Im a$. Тоді

$$B(t,s) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(a_1(t,\lambda)a_1(s,\lambda) + a_2(t,\lambda)a_2(s,\lambda)\right) l_F(d\lambda) +$$

$$+ i \int_{-\infty}^{\infty} \left(a_2(t,\lambda)a_1(s,\lambda) - a_1(t,\lambda)a_2(s,\lambda)\right) l_F(d\lambda), \tag{3.2.21}$$

тобто повинна виконуватись умова

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(a_2(t,\lambda)a_1(s,\lambda) - a_1(t,\lambda)a_2(s,\lambda)\right) l_F(d\lambda) = 0. \tag{3.2.22}$$

Припустимо, що існує похідна Радона-Нікодима $f(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, міри $l_F(d\lambda)$, яка є парною функціюєю. Тоді для вірності рівності (3.2.22), наприклад, достатньо, щоб функція a_1 була парною за λ, функція a_2 була непарною для кожного значення першого аргумента, або навпаки.

Лема 3.2.3. *Нехай дійсний центрований випадковий процес* $\{\varepsilon(t), t \in \mathbb{R}_+\}$, *задано стохастичним інтегралом* (3.2.19), *в якому функція* $a(\cdot,\cdot) \in$

$L_2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, l \times l_F)$ і задовольняє умову (3.2.22), а функція $\Delta(t)$, $t \in \mathbb{R}$,— локально інтегровна з квадратом. Тоді

$$\langle B\Delta, \Delta\rangle = \int_0^T \int_0^T B(t,s)\Delta(t)\Delta(s)dtds \leq \|a\|_2^2 \int_0^T \Delta^2(t)dt, \qquad (3.2.23)$$

де

$$\|a\|_2 = \left(\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty |a(t,\lambda)|^2 \, dt \, l_F(d\lambda)\right)^{1/2}. \qquad (3.2.24)$$

Доведення. Завдяки інтегровності з квадратом функції a та скінченності міри l_F, за теоремою Фубіні-Тонеллі (див., наприклад, [22]) отримуємо з використанням нерівності Коші-Буняковського

$$\langle B\Delta, \Delta\rangle = \int_0^T \int_0^T \left(\int_{-\infty}^\infty a(t,\lambda)\overline{a(s,\lambda)} l_F(d\lambda)\right) \Delta(t)\Delta(s)\, dtds =$$

$$= \int_{-\infty}^\infty \left(\int_0^T a(t,\lambda)\Delta(t)dt \int_0^T \overline{a(s,\lambda)}\Delta(s)ds\right) l_F(d\lambda) =$$

$$= \int_{-\infty}^\infty \left|\int_0^T a(t,\lambda)\Delta(t)dt\right|^2 l_F(d\lambda) \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^\infty \int_0^T |a(t,\lambda)|^2 \, dt \int_0^T \Delta^2(t)dt \, l_F(d\lambda) \leq$$

$$\leq \|a\|_2^2 \int_0^T \Delta^2(t)dt.$$

■

Якщо процес $\{\varepsilon(t),\ t \in \mathbb{R}\}$ задано у вигляді стохастичного інтеграла (3.2.19) і для нього виконано припущення **3.2.1**, то використовуючи лему 3.2.3, ми можемо отримати твердження аналогічні теоремі 3.2.1 та наслідку 3.2.1. Доведення цих тверджень не містить нових елементів, і ми їх не наводимо.

Відповідь на важливе питання, що треба вимагати, щоб стохастичний інтеграл (3.2.19) був сумісно строго субгауссівським випадковим процесом, ми дамо в наступному підрозділі для стохастичних інтегралів, породжених стохастичними мірами, побудованими за процесами з ортогональними прирістами.

3.3 Стаціонарний сумісно строго субгауссівський випадковий шум

У даному підрозділі, як і в підрозділах 3.1, 3.2, ми розглядаємо модель регресії (3.1.1) з неперервним часом і вивчаємо ймовірності велких відхилень ОНК параметра θ функції регресії $g(t,\theta)$. На відміну від підрозділу 3.2, замість моделі випадкового шуму (3.2.19), вважаємо, що випадковий шум $\varepsilon = \{\varepsilon(t), t \in \mathbb{R}\}$ припускає представлення

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} a(t-s)\, d\zeta(s) = \int_{0}^{\infty} a(s)\, d\zeta(t-s), \tag{3.3.1}$$

де $a(t) = 0$ при $t < 0$, $\zeta = \{\zeta(t), t \in \mathbb{R}\}$ — дійсний процес з ортогональними приростами, тобто $\zeta(-\infty) = 0$,

$$\mathbb{E}\big(\zeta(t_2) - \zeta(t_1)\big)\big(\zeta(t_4) - \zeta(t_3)\big) = 0, \tag{3.3.2}$$

якщо $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$, неперервний зліва у середньому квадратичному:

$$\mathbb{E}\left|\zeta(t) - \zeta(\tau)\right|^2 \to 0, \text{ при } \tau \uparrow t.$$

Припустимо також, що ζ є таким, що

$$\mathbb{E}\zeta(t) = 0, \quad \mathbb{E}\left|\zeta(t+h) - \zeta(t)\right|^2 = h, \quad t \in \mathbb{R},\ h > 0. \tag{3.3.3}$$

Процесу ζ відповідає стохастична ортогональна міра μ [22, 24] така, що $\mu\big([a,b)\big) = \zeta(b) - \zeta(a)$, задана на σ-алгебрі $\mathscr{L}$ вимірних за Лебегом підмножин $\mathbb{R}$. Стохастичний інтеграл (3.3.1) можна, таким чином, розглядати як середнє квадратичний інтеграл Стілтьєса [22, 24].

$$\zeta(t) = \int_{-\infty}^{t} a(t-s)\, d\zeta(s) = \int_{-\infty}^{t} a(t-s)\, \mu(ds), \tag{3.3.4}$$

причому інтеграл (3.3.1) існує тоді і тільки тоді, коли [22, 24]

$$\int_0^\infty |a(t)|^2\, dt < \infty. \tag{3.3.5}$$

Процес ζ називається проінтегрованим білим шумом, а ε можна розглядати як процес на виході фізично здійсненного фільтра, на вхід якого подається білий шум [22, 24]. Модель випадкового шуму (3.3.1) є перенесенням на непервний час дискретної моделі шуму (2.3.1). Коваріаційна функція процесу ε дорівнює

$$B(t) = \int_0^\infty a(t+u)a(u)\, du, \tag{3.3.6}$$

тобто процес ε є стаціонарним в широкому розумінні. Більше того, спектральна щільність припукає представлення [22, 24]

$$f(\lambda) = (2\pi)^{-1}|h(i\lambda)|^2,\ \ h(i\lambda) = \int_0^\infty a(t)e^{-i\lambda t}\, dt. \tag{3.3.7}$$

Відповідно,

$$a(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(i\lambda)e^{i\lambda t}\, d\lambda,$$

де невласний інтеграл розуміється в наступному сенсі:

$$\int_{-\infty}^{\infty} = \underset{A,\, B\to+\infty}{l.i.m.} \int_{-B}^{A},$$

де “l.i.m.” позначає збіжність в середньому квадратичному в $L_2(\mathbb{R})$.

Нам потрібна умова

3.3.1 Процес ζ є сумісно строго субгауссівським випадковим процесом.

Якщо ζ — процес з незалежними приростами, то він гауссівський ([6], с. 14). Тому для нас важливо, щоб ζ мав ортогональні, але залежні прирости. Наведемо приклад такого процесу на скінченному інтервалі. Нехай $w(t)$, $t \in$

$[0,1]$, — вінерів процес, тобто процес з незалежними приростами такий, що

$$\mathbb{E}w(t) = 0,\ \mathbb{E}w^2(t) = t,\ B(t,s) = \mathbb{E}w(t)w(s) = \min(t,s).$$

Тоді за теоремою Карунена-Лоева (див., наприклад, [22], с. 246-248)

$$w(t) = \sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty} \xi_n \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi t}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}, \quad t \in [0,1], \tag{3.3.8}$$

де $\xi_n,\ n \geq 0,$ — послідовність незалежних гауссівських $N(0,1)$ в.в. Ряд (3.3.8) збігається майже напевно при фіксованому t.

Підставимо тепер в розклад (3.3.8) послідовність незалежних однаково розподілених субгауссівських, але не гауссівських в.в. $\zeta_n,\ n \geq 0$, таку, що $\mathbb{E}\zeta_n = 0,\ \mathbb{E}\zeta_n^2 = 1$. Тоді ми отримаємо збіжний майже напевно ряд

$$\zeta(t) = \sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty} \zeta_n \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi t}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi},$$

який в інтервалі $[0,1]$ зберігає всі властивості вінерового процесу, крім незалежності приростів: вони ортогональні, але залежні.

Прикладів виконання умови **3.3.1** на всій вісі не для гауссівського процесу ми не знаємо, але сподіваємось, що такі процеси існують.

Лема 3.3.1. *За умови* **3.3.1** *випадковий процес* (3.3.1) *є сумісно строго субгауссівським.*

Доведення. Нехай $n \geq 1$ — фіксоване число та $t_1, \ldots, t_n,\ u_1, \ldots, u_n$ — довільні дійсні числа. Треба довести, що

$$\mathbb{E}\exp\left\{\sum_{k=1}^{n} u_k\, \varepsilon(t_k)\right\} \leq \exp\left\{\frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\, \varepsilon(t_k)\right)^2\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} b_{jk}\, u_j\, u_k\right\}, \tag{3.3.9}$$

де $b_{jk} = B(t_j - t_k),\ j,k = \overline{1,n}$, а $B(t)$ задано в (3.3.6).

Формулу (3.3.1) можна переписати наступним чином

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t-s)\, d\zeta(s),\ a(t) = 0 \text{ при } t < 0. \tag{3.3.10}$$

Позначимо $a_k(s) = a(t_k - s),\ k = \overline{1,n}$. Тоді

$$\varepsilon(t_k) = \int_{-\infty}^{\infty} a_k(s)\, d\zeta(s),\ k = \overline{1,n}. \tag{3.3.11}$$

Нехай послідовність простих функцій

$$a_k^{(m)}(s) = \sum_{l=1}^{r(m)} c_{kl}^{(m)} \chi_{\Delta_{kl}^{(m)}}(s),\ m \geq 1, \tag{3.3.12}$$

де

$$\Delta_{kl}^{(m)} = [\alpha_{kl}^{(m)}, \beta_{kl}^{(m)}),\ k = \overline{1,n},\ l = \overline{1, r(m)},$$

$\chi_A(s)$ — індикатор множии A, апроксимує в просторі $L_2(\mathbb{R})$ функцію $a(s)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| a(s) - a_k^{(m)}(s) \right|^2 ds \to 0,\ \text{при } m \to \infty. \tag{3.3.13}$$

Тоді послідовності в.в.

$$\xi_n^{(m)} = \sum_{l=1}^{r(m)} c_{kl}^{(m)} \left(\zeta\left(\beta_{kl}^{(m)}\right) - \zeta\left(\alpha_{kl}^{(m)}\right) \right) = \int_{-\infty}^{\infty} a_k^{(m)}(s)\, d\zeta(s) \tag{3.3.14}$$

збігаються у середньому квадратичному до $\varepsilon(t_k)$:

$$\mathbb{E} \left| \varepsilon(t_k) - \xi_k^{(m)} \right|^2 \to 0,\ m \to \infty,\ k = \overline{1,n}. \tag{3.3.15}$$

Покажемо, що при кожному фіксованому m сукупність в.в. $\xi_k^{(m)},\ k =$

$\overline{1,n}$, є сумісно строго субгауссівською. Дійсно

$$\sum_{k=1}^{n} u_k\, \xi_k^{(m)} = \sum_{k=1}^{n} u_k \sum_{l=1}^{r(m)} c_{kl}^{(m)} \left(\zeta\left(\beta_{kl}^{(m)}\right) - \zeta\left(\alpha_{kl}^{(m)}\right)\right) =$$

$$= \sum_{k'=1}^{n'(m)} v_{k'}^{(m)} \zeta\left(\gamma_{k'}^{(m)}\right), \tag{3.3.16}$$

де $v_{k'}^{(m)}$ — дійсні числа, $\gamma_{k'}^{(m)}$ — різні числа.

За умовою **3.3.1** в.в. $\zeta\left(\alpha_{kl}^{(m)}\right)$, $k' = \overline{1, n'(m)}$, є сумісно строго субгауссівськими, і тому

$$\mathbb{E}\exp\left\{\sum_{k=1}^{n} u_k\, \xi_k^{(m)}\right\} = \mathbb{E}\exp\left\{\sum_{k'=1}^{n'(m)} v_{k'}\, \zeta\left(\gamma_{k'}^{(m)}\right)\right\} \le$$

$$\le \exp\left\{\frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\sum_{k'=1}^{n'(m)} v_{k'}\, \zeta\left(\gamma_{k'}^{(m)}\right)\right)^2\right\} = \exp\left\{\frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\, \xi_k^{(m)}\right)^2\right\} \tag{3.3.17}$$

Із (3.3.15) випливає, що $\xi_k^{(m)} \xrightarrow{P} \varepsilon(t_k), m \to \infty$, де "$\xrightarrow{P}$" позначає збіжність за ймовірністю. Тому для деякої послідовності індексів $m' \to \infty$, яка не залежить від k, $\xi_k^{(m')} \to \varepsilon(t_k)$ м. н.

За лемою Фату та (3.3.17)

$$\mathbb{E}\exp\left\{\sum_{k=1}^{n} u_k\, \varepsilon(t_k)\right\} = \mathbb{E}\lim_{m'\to\infty} \exp\left\{\sum_{k=1}^{n} u_k\, \xi_k^{(m')}\right\} =$$

$$= \mathbb{E}\,\underline{\lim}_{m'\to\infty} \exp\left\{\sum_{k=1}^{n} u_k\, \xi_k^{(m')}\right\} \le \underline{\lim}_{m'\to\infty} \mathbb{E}\exp\left\{\sum_{k=1}^{n} u_k\, \xi_k^{(m')}\right\} \le$$

$$\le \underline{\lim}_{m'\to\infty} \exp\left\{\frac{1}{2}\,\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\, \xi_k^{(m')}\right)^2\right\} =$$

$$= \lim_{m' \to \infty} \exp\left\{ \frac{1}{2} \, \mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^{n} u_k \, \xi_k^{(m')} \right)^2 \right\} =$$

$$= \exp\left\{ \frac{1}{2} \, \mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^{n} u_k \, \varepsilon(t_k) \right)^2 \right\}, \tag{3.3.18}$$

тобто отримано (3.3.9). ■

Як і в підрозділі 3.1 (див. наслідок 3.1.1) можна довести наступне твердження.

Теорема 3.3.1. *Нехай виконано умови* **3.3.1** *та* **3.1.4**. *Тоді існують такі константи B_0, b, що для $T > T_0$, $H > H_0$*

$$\mathbb{P}\left\{ \|d_T(\theta)(\hat{\theta}_T - \theta)\| \geq H \right\} \leq B_0 \exp\{-bH^2\}, \tag{3.3.19}$$

причому для будь-якого $\beta > 0$ можна обрати B_0 таким чином, щоб мала місце нерівність

$$b \geq \frac{c_0(\theta)}{16\pi f_1(1+q)} - \beta. \tag{3.3.20}$$

Розглянемо важливий у застосуваннях випадок дробово-раціональної спектральної функції h (див. (3.3.7)), тобто $h(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, де P та Q поліноми степенів m та n відповідно, причому $m < n$, P та Q не мають спільних коренів. Припустимо, що спектральна щільність $f(\lambda) = \dfrac{1}{2\pi} \dfrac{|P(i\lambda)|^2}{|Q(i\lambda)|^2}$ сумісно строго субгауссівського процесу є обмеженою і додатною. Тоді за лемою 10.2 стор. 63 книги [25] поліноми

$$P(z) = \sum_{k=0}^{m} p_k z^k, \qquad Q(z) = \sum_{k=0}^{m} q_k z^k$$

можна обрати таким чином, що вони матимуть дійсні коефіцієнти (це наслідок парності спектральної щільності f) і не матимуть коренів в нижній півплощині.

В наступній таблиці ми наводимо приклади дробово-раціональних спектральних щільностей, які виникають в статистичній теорії зв'язку [26]-[28].

Таблиця 3.3.1.

Лінійна система	Коваріаційні функції $B(t)$	Спектральні щільності $f(\lambda)$
1) Низькочастотний RC-фільтр	$e^{-\alpha\|t\|}$	$\frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{\lambda^2+\alpha^2}$
2) Два низькочастотних RC-фільтра	$(1+\alpha\|t\|)e^{-\alpha\|t\|}$	$\frac{1}{\pi}\frac{2\alpha^3}{(\lambda^2+\alpha^2)^2}$
3) Три низькочастотних RC-фільтра	$\left(1+\alpha\|t\|+\frac{(\alpha t)^2}{3}\right)e^{-\alpha\|t\|}$	$\frac{1}{3\pi}\frac{8\alpha^5}{(\lambda^2+\alpha^2)^3}$
4) Коливальний контур I	$e^{-\alpha\|t\|}\cos\lambda_0 t$	$\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\alpha}{(\lambda-\lambda_0)^2+\alpha^2}+\frac{\alpha}{(\lambda+\lambda_0)^2+\alpha^2}\right)$
5) Коливальний контур II	$e^{-\alpha\|t\|}\left(\cos\lambda_0 t+\frac{\alpha}{\lambda_0}\sin\lambda_0\|t\|\right)$	$\frac{2\alpha\lambda_0^2}{\pi\left[(\lambda-\lambda_0)^2+\alpha^2\right]\left[(\lambda+\lambda_0)^2+\alpha^2\right]}$
6) Напруга на конденсаторі RLC-ланцюга	$\frac{kTRe^{-\mu\|t\|}}{2\mu}\cos\left(\sqrt{\lambda_0^2-\mu^2}\ t\right)+$ $+\frac{kTRe^{-\mu\|t\|}}{2\sqrt{\lambda_0^2-\mu^2}}\sin\mu\|t\|$	$\frac{k\ T\ R\ \lambda_0^2}{\pi\left[(\lambda^2-\lambda_0^2)^2+4\mu^2\lambda^2\right]}$

Зробимо деякі пояснення щодо таблиці 3.3.1. R — опір резистора, Ом; C — ємність конденсатора, Ф (фаради), L — індуктивність контура, Гн (Генрі) $\alpha = \frac{1}{RC}$, $U_{\text{вх}}$ — вхідна напруга, $U_{\text{вих}}$ — вихідна напруга, λ_0 — частота власних коливань коливального контуру в припущеннях 4 і 5.

Низькочастотний фільтр має схему

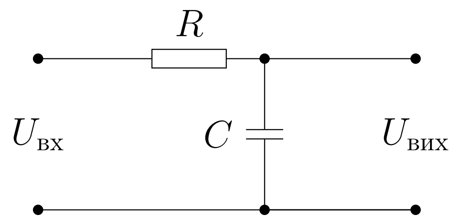

Рис. 3.3.1: Фільтр низьких частот

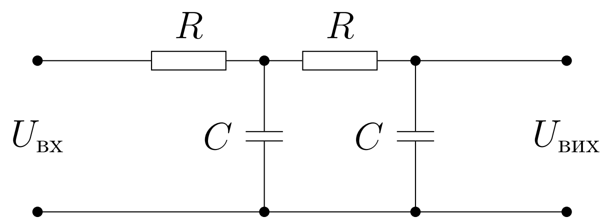

Рис. 3.3.2: Два низькочастотних фільтра

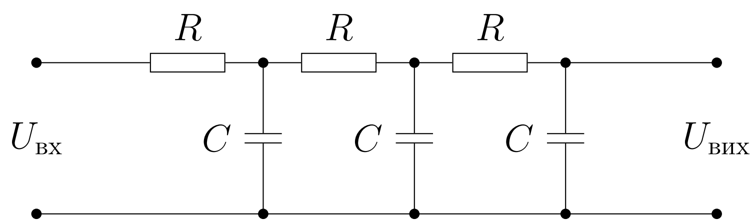

Рис. 3.3.3: Три низькочастотних фільтра

На рисунках 3.3.2 і 3.3.3 зображені схеми приладів 2 і 3.

На рисунках 3.3.4 і 3.3.5 зображені схеми послідовного та паралельного коливальних контурів.

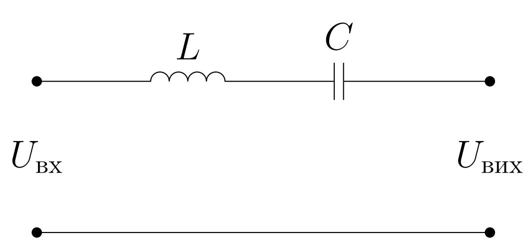

Рис. 3.3.4: Послідовний коливальний контур

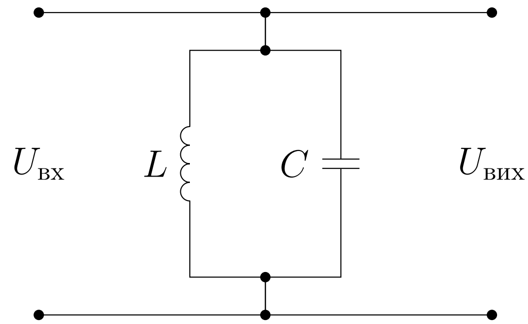

Рис. 3.3.5: Паралельний коливальний контур

У 6-му прикладі використано такі нові позначення: k — константа Больцмана, T — абсолютна рівноважна температура, $\lambda_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, $\mu = \dfrac{R}{2L}$. Цьому прикладу відповідає наступна схема:

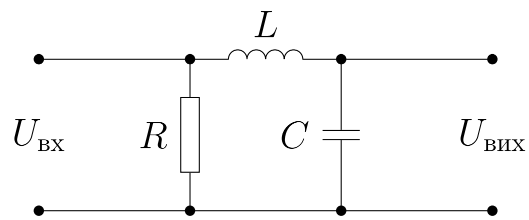

Рис. 3.3.6: Напруга на конденсаторі RLC-ланцюга

У прикладах 1-3 коваріаційна функція додатна і максимум спектральної щільності досягається в нулі. В наших позначеннях це означає, що $f_1 = f(0)$, тобто у 1-му прикладі $f_1 = \dfrac{1}{\pi\alpha}$, у 2-му — $f_1 = \dfrac{2}{\pi\alpha}$, у 3-му прикладі $f_1 = \dfrac{8}{3\pi\alpha}$. Неважко зрозуміти, що у 4-му прикладі $f_1 = f(\pm\lambda_0) = \dfrac{1}{2\pi}\left(\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{\alpha}{4\lambda_0^2+\alpha^2}\right)$, а у 5-му — $f_1 = f(\pm\lambda_0) = \dfrac{2\lambda_0^2}{\pi\alpha\,(4\lambda_0^2+\alpha^2)}$.

Коваріаційну функцію в 6-му прикладі ми знайшли за спектральною щільністю того ж самого прикладу з використанням формули (3.731) [29], с. 424. При обчисленні цієї коваріаційної функції було зроблено припущення, що

$$\frac{\lambda_0^2}{2} < \mu^2 < \lambda_0^2. \tag{3.3.21}$$

Знайдемо максимум спектральної щільності для 6-го прикладу. Розглянемо

$$f(\lambda) = \frac{k\ T\ R\ \lambda_0^2}{\pi\left[\left(\lambda^2 - \lambda_0^2\right)^2 + 4\mu^2\lambda^2\right]}.$$

Позначимо $\varphi(\lambda) = \left(\lambda^2 - \lambda_0^2\right)^2 + 4\mu^2\lambda^2$ і знайдемо $\min\varphi(\lambda)$.

$$\varphi'(\lambda) = 2(\lambda^2 - \lambda_0^2)\cdot 2\lambda + 8\mu^2\lambda = 0.$$

$\lambda = 0$ — критична точка. Розглянемо

$$\lambda^2 - \lambda_0^2 + 2\mu^2 = 0. \tag{3.3.22}$$

З (3.3.21) випливає, що $\lambda_0^2 - 2\mu^2 < 0$, отже рівняння (3.3.22) не має дійсних коренів. Це означає, що $\lambda = 0$ — єдина критична точка, і вона є точкою мінімуму функції $\varphi(\lambda)$. Тоді

$$f_1 = f(0) = \frac{kTR}{\lambda_0^2\pi}.$$

Підставивши значення f_1 в формулу (3.3.20), ми отримаємо відповідні константи в теоремі 3.3.1. для кожного із прикладів 1-6.

4 Охорона праці та безпека в надзвичайних ситуаціях

Магістерська дисертація є результатом значного розумового, фізичного та морального навантаження. Розумова праця потребує значної мобілізації уваги, процесів мислення та різноманітних психічних функцій, які зазвичай супроводжуються нервово-психічним та емоціональним напруженням. Слід зазначити, що теоретичні дослідження, а, особливо, у сфері математики, супроводжуються потужною розумовою діяльністю, яка зазвичай відбувається вумовах замкнених приміщень на кшталт аудиторій в навчальних закладах, залів бібліотек, кімнат в жилих приміщеннях, тощо. Задля покращення умов для якісної розумової діяльності, слід звернути особливу увагу на правильну організацію робочого місця і дотримання усіх правил безпеки.

4.1 Оцінка важкості та напруженості праці

Важкість праці — це ступінь залучення до роботи м'язів та фізіологічні витрати внаслідок фізичних навантажень.

Напруженість праці — це реакція центральної нервової системи на інтелектуальні, сенсорні, емоційні, монотонні чи динамічні режими праці.

Важкість та напруженість праці — це ступінь сукупної дії санітарно-гігієнічних, фізіологічних, естетичних, соціально-психологічних елементів, що формують умови праці та поточні або віддалені в часі зміни функціонального стану організму.

Поняття "важкість" або "тяжкість" праці може однаково застосовуватися як до фізичної так і розумової праці і до тих видів діяльності, що виконуються в шкідливих або небезпечних виробничих умовах.

Оцінка умов праці базується на аналізі чинників виробничого середовища, в якому відбувається трудовий процес. Оцінка важкості трудового процесу здійснюється на підставі обліку фізичного динамічного навантаження, маси вантажу, що піднімається і переміщується, загального числа стереотипних робочих рухів, величини статичного навантаження, робочої пози, ступеню нахилу корпусу, переміщень в просторі. [31]

Виходячи з принципів Гігієнічної класифікації, умови праці діляться на 4 класи — оптимальні, допустимі, шкідливі та небезпечні (екстремальні).

1 клас — **оптимальні** умови праці — такі умови, при яких зберігається не лише здоров'я працюючих, а й створюються передумови для підтримання високого рівня працездатності. Оптимальні гігієнічні нормативи виробничих факторів встановлені для мікроклімату і факторів трудового процесу. Для інших факторів за оптимальні умовно приймаються такі умови праці, за яких несприятливі фактори виробничого середовища не перевищують рівнів, прийнятих за безпечні для населення.

2 клас — **допустимі** умови праці — характеризуються такими рівнями факторів виробничого середовища і трудового процесу, які не перевищують встановлених нормативів, а можливі зміни функціонального стану організму відновлюються за час регламентованого відпочинку або до початку наступної зміни та не чинять несприятливого впливу на стан здоров'я працюючих та їх потомство в найближчому і віддаленому періодах.

3 клас — **шкідливі** умови праці — характеризуються такими рівнями шкідливих виробничих факторів, які перевищують нормативи і здатні чинити несприятливий вплив на організм працюючого та/або його потомство. Шкідливі умови праці за ступенем перевищення гігієнічних нормативів та настання можливих змін в організмі працюючих поділяються на 4 ступені:

1 ступінь (3.1) — умови праці характеризуються такими рівнями шкідливих факторів виробничого середовища та трудового процесу, які, як правило, викликають функціональні зміни, що виходять за межі фізіологічних коливань (останні відновлюються при тривалішій, ніж початок наступної зміни, перерві контакту зі шкідливими факторами) та збільшують ризик погіршення здоров'я;

2 ступінь (3.2) — умови праці характеризуються такими рівнями шкідливих факторів виробничого середовища і трудового процесу, які здатні ви-

кликати стійкі функціональні порушення, призводять у більшості випадків до зростання виробничо-обумовленої захворюваності, появи окремих ознак або легких форм професійної патології (як правило, без втрати професійної працездатності), що виникають після тривалої експозиції (10 років та більше);

3 ступінь (3.3) — умови праці характеризуються такими рівнями шкідливих факторів виробничого середовища і трудового процесу, які призводять, окрім зростання виробничо-обумовленої захворюваності, до розвитку професійних захворювань, як правило, легкого та середнього ступенів важкості (з втратою професійної працездатності в період трудової діяльності);

4 ступінь (3.4) — умови праці характеризуються такими рівнями шкідливих факторів виробничого середовища і трудового процесу, які здатні призводити до значного зростання хронічної патології та рівнів захворюваності з тимчасовою втратою працездатності, а також до розвитку важких форм професійних захворювань (з втратою загальної працездатності);

4 клас — **небезпечні (екстримальні)** умови праці — характеризуються такими рівнями шкідливих факторів виробничого середовища і трудового процесу, вплив яких протягом робочої зміни (або ж її частини) створює загрозу для життя, високий ризик виникнення важких форм гострих професійних уражень. [30]

Оцінка напруженості трудового процесу здійснюється на підставі обліку факторів, що характеризують напруженість праці, а саме, інтелектуальні, сенсорні, емоційні навантаження, ступінь монотонності праці, режим роботи.

1) Інтелектуальне навантаження полягає у необхідності прийняття рішень:

- вирішувались складні завдання з вибором за відомими алгоритмами;
- проведення роботи за встановленим графіком з можливим його коректуванням у ході діяльності;
- щільність сигналів та повідомлень в середньому за годину становила

до 75 одиниць;

- кількість об'єктів одночасного спостереження до 5 одиниць.

2) Сенсорні навантаження були наступні:

- навантаження на зоровий аналізатор: більше чотирьох годин на день роботи з комп'ютером;

- навантаження на голосовий апарат: до 16 годин на тиждень — спілкування с науковим керівником, підготовка до виступу на конференції.

3) Емоційне навантаження полягає у ступені відповідальності за результат діяльності та значущість помилки:

- несу відповідальність за функціональну якість основної роботи., науковий керівник вимагає виправлень за рахунок зусиль магістранта.

4) Монотонність навантажень полягає у кількості та тривалості операцій за одиницю часу:

- час активних дій складав більш ніж 20% від загального витраченого часу;

- монотонність виробничої обстановки складала менше 75% від загальної кількості витраченого часу.

5) Режим праці:

- фактична тривалість робочого дня складала 6 годин.

На підставі обліку всіх наявних значущих показників, згідно з таблицею «Класи умов праці за показниками напруженості трудового процесу» [30] отримаємо кінцеву оцінку напруженості праці під час написання магістерської дисертації — шкідливий клас умов І ступеню.

4.2 Аналіз психологічних аспектів умов праці

Психологічний аспект праці пов'язаний з тим, що предметні дії працівника визначаються й регулюються внутрішньою (психічною) діяльністю — пізнавальною, мотиваційною, емоційною. Так, під час праці ми активізуємо такі пізнавальні процеси: відчуття, сприймання, мислення, пам'ять, уяву. У процесі праці нам необхідно бути уважними, виявляти вольові якості.

Для розумової праці характерні: велика кількість стресів, мала рухливість, вимушена статична поза — все це зумовлює застійні явища у м'язах ніг, органах черевної порожнини і малого тазу, погіршення постачання мозку киснем, зростання потреби в глюкозі. При розумовій праці погіршується робота органів зору: стійкість ясного бачення, гострота зору, адаптаційна можливість ока. Розумовій праці властивий найбільший ступінь зосередження уваги — в середньому у 5-10 разів вище ніж при фізичній праці. Завершення робочого дня зовсім не перериває процесу розумової діяльності. Розвивається особливий стан організму — втома, що з часом може перетворитися на перевтому.

Все це призводить до порушення нормального фізіологічного функціонування організму. Незважаючи на те, що розумова робота не пов'язана з великими енергетичними витратами, вона ставить до організму не менше вимог, веде до стомлення і перевтоми не менше, ніж інтенсивне фізичне навантаження.

4.3 Нормування праці. Вибір оптимального режиму праці та відпочинку

Серед факторів підвищення ефективності праці особливе місце належить раціональному режиму праці і відпочинку. Від його структури залежить динаміка втоми, відновлюваність функцій організму, працездатність і здоров'я, надійність і продуктивність праці.

Під режимом праці і відпочинку розуміють загальну тривалість трудової діяльності протягом доби, тижня, місяця, року, частоту і тривалість періодів трудової активності і перерв у процесі цієї активності, співвідношення і чергування цих періодів. Режим праці включає характеристики самого трудового процесу — інтенсивність чи екстенсивність, а також допустиму тривалість дії шкідливих факторів. Незалежно від виду праці функціональний стан працівника змінюється внаслідок втоми, що призводить до зниження рівня оперативних резервів. Оптимізація діяльності забезпечує реалізацію тих резервних можливостей, які до цього не входили в оперативні резерви. Таким чином, з фізіологічної точки зору режим праці і відпочинку являє собою процес управління функціональним станом працівника з метою оптимізації діяльності.

Раціональний, фізіологічно обґрунтований режим праці і відпочинку повинен відповідати таким вимогам:

- запобігати ранньому і надмірному розвиткові втоми працівників;
- сприяти збереженню високої працездатності і оптимального функціонального стану організму працівників протягом зміни;
- забезпечувати високу продуктивність праці;
- сприяти ефективному відновленню фізіологічних функцій під час відпочинку.

Ефективність режиму праці і відпочинку оцінюється критеріями працездатності і функціонального стану працівників, економічними, гігієнічними і соціальними критеріями.

Працездатність і функціональний стан працівника характеризуються системою фізіологічних і психологічних показників, а також тривалістю і співвідношенням періодів впрацювання, стійкої працездатності і втоми; стійкістю фізіологічних функцій протягом робочого дня; часом відновлення функціональних показників по закінченню роботи.

Вирішальне значення для раціоналізації функціонального навантаження має встановлення абсолютних допустимих величин періодів роботи і відпочинку. Для нервово-напружених робіт тривалість неперервної роботи не повинна перевищувати 15 хв, а тривалість відпочинку 2...5 хв.

Тривалість відпочинку повинна задовольняти двом вимогам:

- бути достатньою для відновлення працездатності і можливості повторної роботи;
- зберігати робочу установку.

Оптимальні режими праці забезпечуються шляхом оптимізації навантажень, які мають тренувальний ефект. Енергетичним фізіологічним оптимумом вважається фізична робота з потужністю, яка дорівнює половині або четвертій частині максимальної потужності. Оптимальний темп рухів при тривалій роботі і оптимальному зусиллі становить третину від максимального темпу. У виробничих умовах оптимальний темп робочих рухів не перевищує 20% максимально доступного темпу, а в деяких умовах — 10% максимальної величини.

Разом з тим, несприятливі умови праці створюють додаткове функціональне навантаження на організм працівника, що зумовлює необхідність скорочення періодів роботи і збільшення часу відпочинку, а також скорочення робочого часу. У цьому випадку розробляються так звані компенсаторні режими праці і відпочинку.

4.4 Санітарія та гігієна робочого місця

Санітарно-гігієнічні вимоги до робочих місць в офісах регулюються:

1) Законом України "Про охорону праці"(поточна редакціявід 16.09.2008);

2) Правилами охорони праці під час експлуатації електронно - обчислювальних машинзатверджених наказом Державного комітету України з промислової безпеки, охорони праці та гірничого нагляду від 26 березня 2010 року N 65 та іншими нормативно-правовими актами;

3) Гігієнічною класифікація праці за показниками шкідливості та небезпечності факторів виробничого середовища, важкості та напруженості трудового процесу N 4137-86, затвердженою МОЗ СРСР 12.08.86р. та іншими нормативно-правовими актами.[30]

Під час роботи над магістерською дисертацією постійно намагалася дотримуватися правил санітарії та гігієни робочого місця згідно з Законом України «Про охорону праці» від 14.10.1992 року.

Вимоги щодо приміщення були забезпечені максимально у міру можливостей магістранта, зокрема

- Площа кімнати — 12,0 кв.м.
- Обсяг — 30,0 куб.м.
- Робоче місце достатньо ізольоване від сонячних променів.

Вимоги щодо організації робочого місці було забезпечено у міру можливостей.

- Ноутбук розміщено на основному робочому столі, без додаткової комплектації.
- Розміри столу відповідають рекомендованим.
- Робоче сидіння — стілець, має такі основні елементи: сидіння, спинку.
- Монітор та клавіатура розташовані на оптимальній відстані від очей — 600 мм .

Відносно вікон робоче місце повинно бути розміщено так, щоб природне світло було збоку, краще з лівого, та забезпечувався коефіцієнт природної освітленості не нижче 1,5%. Робоче місце, обладнане ПК повинно бути розташоване так, щоб уникнути потрапляння прямого світла в очі. Джерела штучного світла рекомендується розташувати з обох сторін від екрану паралельно напрямку зору. Щоб уникнути відблисків від екрану, клавіатури, освітлювальних пристроїв, сонця в напрямку очей необхідно застосовувати антиблискові сітки, спеціальні фільтри для екрану, захисні козирки, жалюзі на вікнах.

Згідно ДСанПіН 3.3.6.042-99 «Санітарні норми мікроклімату виробничих приміщень» [30], під мікрокліматом приміщень розуміють клімат їхнього внутрішнього середовища, який визначається факторами, що діють на організм людини.

Робоче місце знаходиться в сухому, вентильованому приміщенні. Температура повітря у приміщенні підтримується в межах від +18 до +28°C при вологості 40-60%. Персональний комп'ютер, мережеві пристрої підключені до електромережі з допомогою справних штепсельних з'єднань і електричних роз'ємів заводського виготовлення. Забезпечені всі умови використання електронних приладів згідно ПУЕ 6, що був чинним на етапі введення будинку у експлуатацію.

Для підключення переносної електроапаратури застосовувались гнучкі проводи в надійній ізоляції. Тимчасова електропроводка від переносних приладів до джерел живлення виконувалась найкоротшим шляхом без заплутування проводів у конструкціях машин, приладів та меблях.

4.5 Охорона праці при використанні технічних засобів

Основні шкідливі та небезпечні фактори, що можуть впливати на організм людини під час роботи з персональним комп'ютером (ПК), такі:

- підвищений рівень електромагнітних випромінювань;
- підвищений рівень іонізуючих випромінювань;
- підвищений рівень статичної електрики;
- підвищена напруженість електростатичного поля;
- підвищена чи понижена іонізація повітря;
- підвищена яскравість світла;
- пряма і відбита блискітливість;

- підвищене значення напруги в електромережі, замикання якої може статися крізь тіло людини;
- статичні перевантаження кістково-м'язового апарату та динамічні локальні перевантаження м'язів кистей рук;
- перенапруження зорового аналізатора;
- розумове перенапруження;
- емоційні перевантаження;
- монотонність праці.

Слід зауважити ткож, що принтер є складним електроприладом, тому, працюючи з ним, належить виконувати стандартні вимоги пожежо– та електробезпеки. Також існує загроза термоопіків, оскільки під час роботи окремі елементи можуть нагріватися до високої температури. Використовуваний в лазерних принтерах тонер може подразнювати слизові оболонки й шкіру, містити канцерогенні речовини. При вдиханні цей порошок може призвести до нещасних випадків або спричинити захворювання. Тому слід обережно поводитися з відпрацьованими картриджами, не розбирати їх самостійно. Застосовуваний у лазерних принтерах лазерний промінь, невидимий людиною, попадаючи на сітківку ока, може завдати непоправної шкоди зору.

Працюючі лазерні принтери дуже впливають на якість повітря в приміщенні — підвищується вміст озону, оксидів азоту і вуглецю. Також можливе виділення таких шкідливих речовин, як трихлоретан, ізооктан, толуол, бензол, ксилол, газоподібні з'єднання кадмію та селену. Отже, слід подбати про вентиляцію чи регулярно провітрювати та робити вологе прибирання приміщення.

При користуванні мобільними телефонами варто взяти до уваги такі рекомендації:

- тривалість розмови не має перевищувати 3 хв.;

- перерва між розмовами — не менше 15 хв.;
- в умовах нестійкого прийому, коли потужність випромінювання мобільного телефону автоматично зростає, слід утриматися від тривалих переговорів або знайти місце зі стійким прийомом;
- використання гарнітури «вільні руки», спілкування за допомогою SMS багаторазово знижують вплив випромінювання від мобільного телефону.

4.6 Висновки

Враховуючи викладені вище нормативи та рекомендації, вказівки щодо нормування праці, санітарії та гігієни робочого місця та охорони праці, можна зробити висновок, що умови праці були максимально задовільними у рамках доступних об'єктивних можливостей, та достатніми для успішного та продуктивного виконання поставлених завдань у рамках підготовки та виконання магістерської дисертації.

Висновки

У магістерській дисертації отримано сукупність умов на нелінійну функцію регресії та коррельовані випадкові помилки спостережень, за наявності яких ймовірності великих відхилень норми нормованої різниці невідомого векторного параметра регресії та його оцінки найменших квадратів збігаються до нуля з експоненціальною швидкістю. Вивчено моделі регресії, як з дискретним, так і з неперервним часом.

Зокрема, у якості випадкового шуму розглянуто сумісно строго субгауссівські часові ряди, отримані за дискретним субгауссівським білим шумом, до яких входять $ARMA$-процеси.

Аналогічно в моделях з неперервним часом розглянуто математичну модель сумісно строго субгауссівського випадкового шуму, який можна представити у вигляді стохастичного інтегралу за стохастичною ортогональною мірою. Особливу увагу приділено сумісно строго субгауссівському стаціонарному шуму, який є результатом проходження сумісно строго субгауссівського білого шуму через фізично здійсненний фільтр.

Наведено приклади, що ілюструють отримані результати.

Природним напрямком продовження досліджень є поширення доведених теорем на інші класи сумісно строго субгауссівських випадкових процесів, побудова надійних областей для невідомих параметрів моделей регресії з дискретним та неперервним часом, вивчення швидкості збіжності моментів оцінки найменших квадратів до моментів її граничного нормального розподілу.

Література

[1] Varadhan S. R. S. *Asymptotic probability and differential equations*, Comm. Pure Appl. Math., 19(3), 1966, pp. 261–286.

[2] Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров *Предельные распределения для сумм независимых случайных величин*, М., "ГИТТЛ", 1949, 264 с.

[3] Петров В. В. *Суммы независимых случайных величин*, М., "Наука", 1972, 416 с.

[4] Петров В. В. *Предельные теоремыдля сумм независимых случайных величин*, М., "Наука", 1987, 320 с.

[5] Бхаттачария Р. Н., Ранга Рао Р. *Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения*, М., "Наука", 1982, 288 с.

[6] Булдыгин В. В., Козаченко Ю. В. *Метрические характеристики случайных величин и процессов*, Киев, ТВиМС, 1998, 289 с.

[7] Л. Саулис, В Статулявичус *Предельные теоремы о больших уклонениях*, Вильнос., "Мокслас", 1989, 208 с.

[8] А. Д. Вентцель *Предельные теоремы о больших уклонениях для марковских случайных процессов*, М., "Наука", 1986, 176 с.

[9] Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З. *Ассимптотическая теоррия оценивания*, М., "Наука", 1979, 528 с.

[10] Иванов А. В. *Асимптотическое разложение распределения оценки найменьших квадратов параметра неленейной регрессии*, ТВП, 21, 1976, с. 571–583.

[11] Prakasa Rao B. L. S. *On the exponential rate of convergence of the least squares estimator in the nonlinear regression model with Gaussian errors*, Stat. Probab. Lett., 2, 1984, pp. 139–142.

[12] van de Geer S. *On rates of convergence in least squares estimation (report)*, Centre for Mathematics and Computer Science, Amsterdam, 1986.

[13] Иванов А. В., Леоненко Н. Н. *Статистический нализ случайных полей*, Киев, "Вища школа", 1986, 216 с.

[14] Sieders A., Dzhaparidze K. *A large deviation result for parameter estimators and its application to nonlinear regression analysis*, Ann. Stat., 15(3), 1987, pp. 1031–1049.

[15] Ivanov A. V. *Asymptotic theory of nonlinear regression*, Kluwer AP, Dordrecht, 1997, 330 p.

[16] Hu Shuhe. *A large deviation result for the least squares estimators in nonlinear regression*, Stochastic Processes and their Applications, 47, 1993, pp. 345–352.

[17] Плаксін О. Д. *Імовірності великих відхилень для оцінки найменших квадратів*, Дипломна робота, Київ, НТУУ"КПІ", 2016, 51 с.

[18] Кароль Б. В. *Ймовірності великих відхилень оцінки параметра гауссівської регресії з неперервним часом*, П'ята всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики, 25-26 квітня 2016 р., Матеріали конф. С.3. Теорія ймовірностей та математична статистика, Київ, НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2016., 10с.

[19] Кароль Б. В. *Імовірності великих відхилень оцінки найменших квадратів в гауссівській регресії*, Сімнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука, 19-20 травня 2016 р., Матеріали конф. С.3. Теорія ймовірностей та математична статистика, Т. 3, Київ, НТУУ "КПІ", 2016, 84-86 с.

[20] Pfanzagl J. *On the measurability and consistency of minimum contrast estimates*, Metrika, 14, 1969, pp. 249–272.

[21] Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, Т. 2, М., “Мир”, 1967, 752 с.

[22] Гихман И. И., Скороход А. В. *Введение в теорию случайных процессов*, М., “Наука”, 1965, 656 с.

[23] Brockwell P.J., Davis R.A. *Introduction to Time Series and Forecasting*, 2-nd Edition, Springer, New York - Berlin - Heidelberg, 2002, 434 p.

[24] Гихман И. И., Скороход А. В. *Теория случайных процессов*, Т. 1, М., “Наука”, 1971, 664 с.

[25] Розанов, Ю. А. *Стационарные случайные процессы*, М., “ГИФМЛ”, 1963, 284 с.

[26] Горяинов В. Т., Журавлев А. Г., Тихонов В. И. *Примеры и задачи по статистической радиотехнике*, М., “Сов. радио”, 1970, 597 с.

[27] Балакришнан А. В. *Теория связи*, М., “Связь”, 1972, 392 с.

[28] Тихонов В. И. *Статистическая радиотехника*, М., “Радио и связь”, 1982, 624 с.

[29] Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов,сумм, рядов и произведений*, 4-ое изд., М., “Физматгиз”, 1963, 1100 с.

[30] Митюк Л. О., Арламов О. Ю. *Методичні вказівки до розробки розділу "Охорона праці та безпека в надзвичайних ситуаціях"в дипломних роботах спеціалістів та магістерських дисертаціях студентів гуманітарного напрямку підготовки за освітньо-кваліфікаційними рівнями "спеціаліст"та "магістр"*, Київ, 2014, 32 с.

[31] Москальова В. М., Батлук В. А., Кусковець С. Л., Филипчук В. Л. *Охорона праці (питання та відповіді): Довідник.* Львів, “Магнолія 2006”, 2011, 438 с.