НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»
Фізико-математичний факультет
(повна назва інституту/факультету)

Кафедра математичного аналізу
(повна назва кафедри)

«На правах рукопису»
УДК 519.21

«До захисту допущено»

Завідувач кафедри
__________ Клесов О.І.
(підпис) (ініціали, прізвище)

“15” червня 2016 р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

зі спеціальності 8.04020101 «Математика»
(код і назва)

на тему: Поведінка розв’язків стохастичних диференціальних рівнянь

Виконала: студентка 6 курсу, групи ОМ-41м
(шифр групи)

Мельникова Анна Леонідівна
(прізвище, ім’я, по батькові) (підпис)

Науковий керівник д. ф.-м.н., проф. Клесов О.І.
(посада, науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали) (підпис)

Консультант з охорони праці та безпеки в надзвичайних ситуаціях _________
(назва розділу) (підпис)

К.т.-н., доц. Мітюк Л.О.
(науковий ступінь, вчене звання, , прізвище, ініціали)

Рецензент д. ф.-м.н., проф. Козаченко Ю.В.
(посада, науковий ступінь, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали) (підпис)

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студент _____________
(підпис)

Київ – 2016 року

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

Інститут (факультет) Фізико-математичний факультет
(повна назва)

Кафедра математичного аналізу
(повна назва)

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Спеціальність 8.04020101 «Математика»
(код і назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри
__________ Клесов О.І.
(підпис) (ініціали, прізвище)

«02» лютого 2016р.

ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію студенту
Мельниковій Анні Леонідівні
(прізвище, ім’я, по батькові)

1. Тема дисертації: Поведінка розв’язків стохастичних диференціальних рівнянь,
науковий керівник дисертації: д. ф.-м.н., проф. Клесов О.І.,
(прізвище, ім’я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом по університету від «23» лютого 2016 р. №870с

2. Термін подання студентом дисертації: «13» червня 2016 р.

3. Об’єкт дослідження: розв’язки стохастичних диференціальних рівнянь

4. Предмет дослідження: асимптотична поведінка розв’язків стохастичних диференціальних рівнянь

5. Перелік завдань, які потрібно розробити:

А) Основна частина:

1. Ознайомитися з літературою, в якій досліджувалася асимптотична поведінка розв'язку стохастичних диференціальних рівнянь різних видів.

2. Отримати умови для необмеженості розв'язку лінійного неавтономного стохастичного диференціального рівняння.

3. Отримати умови, за яких розв'язок лінійного стохастичного диференціального рівняння асимптотично еквівалентний невипадковій функції

4. Розробити програмне забезпечення, що дозволяє проіллюструвати отримані результати

Б) Охорона праці:

1. Ознайомлення з літературою стосовно охорони праці.

2. Проаналізувати відповідність умов праці, в яких відбувалося написання магістерської дисертації, встановленим нормам

3. Дослідження умов, за яких інтелектуальна праця буде найбільш ефективною.

6. Орієнтовний перелік ілюстративного матеріалу: приклади роботи комп'ютерної програми, що моделює розв'язок стохастичного диференціального рівняння

7. Орієнтовний перелік публікацій: Мельникова А.Л., Тимошенко О.А. «Властивості розв'язків лінійних стохастичних диференціальних рівнянь» збірник матеріалів XVII Міжнародної наукової конференції ім. Академ. Михайла Кравчука (секція «Теорія ймовірності» та математична статистика), Київ 19-20 травня 2016 року, - с.108-109,

Мельникова А.Л., Тимошенко О.А., «Поведінка розв'язків лінійних стохастичних диференціальних рівнянь на нескінченності», збірник матеріалів V Всеукраїнської міжнародної конференції «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики і методика їх навчання»

8. Консультанти розділів дисертації*

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв
Охорона праці в галузі	к.т.-н., доц. Мітюк Л.О.	03.02.2016	10.06.2016

9. Дата видачі завдання 02.02.2016

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1.	Ознайомлення з літературою	02.02.2016 – 03.03.2016	
2.	Отримання умов для необмеженності розв’язку лінійного стохастичного диференціального рівняння	03.03.2016 – 04.04.2016	
3.	Отримання умов для визначення точного порядку росту лінійного стохастичного диференціального рівняння	04.04.2016 – 05.05.2016	
4.	Моделювання отриманих результатів	05.05.2016 – 20.05.2016	
5.	Оформлення роботи	20.05.2016 – 10.06.2016	

Студент ____________ А.Л. Мельникова
(підпис) (ініціали, прізвище)

Науковий керівник дисертації ____________ О.І. Клесов
(підпис) (ініціали, прізвище)

* Консультантом не може бути зазначено наукового керівника магістерської дисертації.

Реферат

Магістерська дисертація: 50 сторінок, 16 першоджерел, 20 слайдів для проектора.

Дана робота складається з вступу, трьох розділів – формулювання та доведення основних теоретичних результатів, економічної інтерпретації та комп'ютерного моделювання отриманих тверджень, охорони праці, а також висновків. В додатках міститься лістинг коду (всі розрахунки виконувалися на мові програмування Python 3.4).

Мета роботи полягає в дослідженні поведінки розв'язку лінійного неавтономного стохастичного диференціального рівняння виду

$$d\eta(t) = [\alpha(t) + \beta(t)\eta(t)]dt + \sigma(t)dW(t),$$

та отриманні умов, за яких поведінка розв'язку стохастичного диференціального рівняння буде визначатись поведінкою деякої невипадкової функції (точним порядком росту цього рівняння). У вступі коротко наведена інформація про вже наявні результати дослідженнь в даній галузі та сферу їх практичного застосування.

Отримані в роботі результати базуються на результатах досліджень з області теорії стохастичних диференціальних рівнянь, теорії ймовірності та звичайних диференціальних рівнянь.

Розділ "Моделювання результатів" присвячений побудові розв'язків стохастичного рівняння комп'ютерними методами (а саме – методом Ейлера-Маруями). В цьому розділі також наведено приклади процесів з реального світу, для дослідження яких може використовуватися модель, що розглядалася в даній роботі.

Розділ "Охорона праці та безпека в надзвичайних ситуаціях" присвячений безпечним умовам інтелектуальної праці.

Окремі отримані результати презентувалися на V Всеукраїнській науковій конференції "Актуальні проблеми сучасної математики і фізики і

методика їх навчання що проводилася 25-26 квітня 2016-го року у м. Києві. Також їх було включено до збірника матеріалів XVII Міжнародної наукової конференції ім. академ. Михайла Кравчука (секція "Теорія Ймовірності та математична статистика"), що проходила в Києві 19-20 травня 2016-го року. Вище згадані статті опубліковані у співавторстві з Тимошенко О.А., на результатах якої для стохастичних диференціальних рівнянь з відокремлюваними змінними базувалися відповідні результати для лінійних стохастичних диференціальних рівнянь.

Ключові слова: *асимптотична поведінка стохастичних диференціальних рівнянь, точний порядок росту, формула Іто, узагальнена модель Васічека, вінеровський процес, схема Ейлера-Маруями.*

Abstract

Master's Thesis contains: 50 pages, 20 slides, 16 primary sources.

This work consists of introduction and three sections – theoretical results (formulations and proofs), economical interpretation and computer modelling of the results obtained, labour defence and conclusions. Python code (version 3.4) that was used for modelling and some screenshots are attached in appendix.

The main goal of this work is to investigate the behaviour of solutions of linear non-autonomous stochastic differential equations that can be represented in the following form:

$$d\eta(t) = [\alpha(t) + \beta(t)\eta(t)]dt + \sigma(t)dW(t),$$

and also to get the conditions for this solutions to be unbounded. We are also interested in determining the exact order of growth for this solutions (namely, the deterministic function which is asymptotically equivalent to the solution of SDE).

This research is based on previous results from Stochastic Differential Equations theory, Stochastic Calculus and Ordinary Differential Equations theory.

In introduction we consider similar problems that were already solved by other mathematicians and also give a short overview where the results we have obtained could be applied.

Section "Modelling of the results" is devoted to computer modelling methods (in all computations we have used Euler-Maruyama method) as well as to some real-world examples, where the model we have considered could be used.

Section "Labour defence" contains some instructions regarding safeness of intellectual work in general and work on the Master Thesis in particular.

The main results of this work were presented at V International scientific conference "Problems of modern Mathematics and Physics and the methods

of its studying" which took place at 25-26th of April, 2016 in Kyiv, Ukraine. They were also publicated in the conference materials of the XVII International Scientific Mikhailo Kravchuk conference (section "Probability Theory and Mathematical Statistics") that was held in 19-20 May, 2016 in Kyiv, Ukraine. Above mentioned publications were issued in co-authorship with Tymoshenko O.A., whose results for Stochastic Differential Equations with separated variables were a framework for corresponding results for Linear Stochastic Differential Equations.

Keywords: *asymptotic behaviour of solutions of SDEs, exact order of growth, Ito formula, generalized Vasicek model, Wiener Process, Euler-Maruyama scheme*

Зміст

Вступ

Дослідження асимптотичної поведінки розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь посідають одне з чильних місць у сучасній теорії випадкових процесів, оскільки стохастичні диференціальні рівняння, як ефективна модель випадкового процесу, є основою для дослідження у багатьох розділах економіки, фізики, теорії управління, хімії, біології, теорії передачі інформації, тощо.

Й.І Гіхман та А.В. Скороход одні з перших почали вивчати задачу про асимптотичну поведінку розв'язку автономного диференціального рівняння, збуреного за допомогою вінерівського процесу, а саме

$$d\eta(t) = a(\eta(t))dt + \sigma(\eta(t))dW(t),\ \eta(0) \equiv c,\ c > 0 = const, \tag{0.1}$$

де $W(t)$ – стандартний вінерів процес; $\eta(t)$ – розв'язок рівняння (0.1), $a(x)$– неперервна функція, $\sigma(x)$ – неперервна додатна функція, визначені при $t \in [0; \infty)$ та $x \in (-\infty; \infty)$.

Так в своїй роботі [1] автори досліджували еквівалентність розв'язку автономного диференціального рівняння до розв'язку звичайного диференціального рівняння. Також для автономного рівняння були запропоновані умови на коефіцієнти, за яких розв'язок майже напевно прямує до нескінченності із збільшенням часу, а також точний порядок росту його розв'язку.

Можна згадати і багато інших цікавих робіт, що містять результати щодо асимтотичних властивостей розв'язків автономних стохастичних диференціальних рівнянь, в тому числі і для рівнянь з дискретним часом, серед яких, наприклад, роботи Г. Келлера, Г. Керстинга, У.Рослера [2], Штрауса и Йорке [8, 9] и Д'Анна, Майо и Муаро [10].

Аналогічні задачі, але для, так званого, стохастичного диференціального рівняння з відокремлювальними змінними

$$d\eta(t) = \varphi(t)a(\eta(t))dt + \theta(t)\sigma(\eta(t))dW(t),\ \eta(0) \equiv c,\ c > 0 = const, \tag{0.2}$$

де $W(t)$ – стандартний вінерів процес; $\eta(t)$ – розв'язок рівняння (0.2), $a(x)$, $\sigma(x)$ – неперервні додатні функції, $\varphi(t)$ і $\theta(t)$ – неперервні функції, визначені при $t \in [0; \infty)$ та $x \in (-\infty; \infty)$ досліджувались в роботах [4, 5]. Основним результатом цієї роботи були умови на рівняння, за яких можливо визначити його точний порядок росту.

В [11, 12] досліджувалось аналогічне стохастичне дифференціальне рівняння з фазовими незалежними збуреннями вигляду

$$d\eta(t) = a(\eta(t))dt + \theta(t)dW(t).$$

Було знайдено умови, за яких $\lim\limits_{t\to\infty} \eta(t) = \infty$ або $\lim\limits_{t\to\infty} \eta(t) = 0$.

Зауважимо, що в [11, 12] властивості стохастичного диференціального рівняння теж визначаються властивостями розв'язку детермінованої задачі.

Дана робота присвячена дослідженню властивостей розв'язків лінійного стохастичного диференціального рівняння такого виду:

$$d\eta(t) = [\alpha(t) + \beta(t)\eta(t)]dt + \sigma(t)dW(t).$$

Рівняння такого типу часто мають економічну інтерпретацію, що робить дослідження властивостей його розв'язків особливо цікавим для економістів. Найпростішим прикладом може бути **модель Васічека**, що описує еволюцію відсоткової ставки (Short Rate Interest Model).

$$dr(t) = \alpha(\beta - r(t))dt + \sigma dW(t),$$

де β – середній (довгостроковий) рівень відсоткової ставки, α – параметр, що характеризує швидкість повернення до середнього значення, а σ – параметр волатильності (α, β, σ – додатні сталі). Більш детально значення та методи обчислення цих параметрів за допомогою історичних данних розглянуті у розділі "Моделювання результатів".

Серед інших популярних моделей такого типу слід виділити **Модель**

Рендлеманна-Барттера (1980), що також відповідає узагальненому геометричному броунівському руху:

$$dr(t) = \theta(t)r(t)\,dt + \sigma(t)r(t)dW(t)\,,$$

а також **Модель Холла-Уайта (1990)**, що іноді називається узагальненою моделлю Васічека:

$$dr(t) = (\theta(t) - \alpha(t)r(t))\,dt + \sigma(t)\,dW(t).$$

Зауважимо, що в реальному житті моделі, в яких ці параметри є константами, майже не зустрічаються, оскільки з плином часу та із зміною умов на ринку змінюються і волатильність, і середній довгостроковий рівень ставки, і швидкість повернення до цього середнього значення. Але до цього часу питання про асимптотичну поведінку такої моделі за умов, коли коефіцієнти такого рівняння є детермінованими функціями, залежними від часу, не було належним чином розглянуто. Більш детально з різними моделями відсоткових ставок та їх властивостями можна ознайомитися в роботі Д. Бріго та Ф. Меркуріо [7].

Методи, що використовувалися для дослідження розв'язків, були частково запозичені з роботи Бернта Оксендаля [6]. Так, наприклад, у даній роботі запропоновані методи знаходження розв'язків деякого виду стохастичних диференціальних рівнянь у явному вигляді (в тому числі і для нелінійних випадків).

Також буде доречно згадати, що дослідження випадкових процесів тісно пов'язане з розвитком обчислювальної техніки, яке дало змогу робити досліджувані явища і більш наочними. Саме тому другий розділ моєї роботи присвячений розробці програмного забезпечення, що дозволяє перевірити отримані результати та змоделювати поведінку випадкового процесу при достатньо великій кількості кроків. Методи математичного моделювання, що використовувалися в даній роботі, грунтуються на підручнику Клодена і Платена [14].

1 Дослідження поведінки розв'язків стохастичного диференціального рівняння

Розглянемо рівняння наступного вигляду:

$$\begin{aligned} d\eta(t) = [\alpha(t) + \beta(t)\eta(t)]dt + [\gamma(t) + \delta(t)\eta(t)]dW(t), \\ \eta(0) \equiv c,\ c > 0 = const, \end{aligned} \tag{1.1}$$

де $\gamma(t), \delta(t),\ \alpha(t),\ \beta(t)$ – неперервні детерміновані функції визначені при $t \in [0; \infty)$; η – розв'язок рівняння (1.1), $W(t)$ – стандартний вінерів процес.

Нагадаємо, що **Вінеровським процесом** називається стохастичний процес з неперервним часом, що математично виражає випадкові блукання. Тобто, це процес з однаково розподіленими незалежними гаусівськими приростами, що майже напевно починається в нулі та в кожний момент часу має майже напевно неперервні траекторії.

Для даного типу рівняннь можливо знайти його точний розв'язок (зауважимо, що клас рівнянь, для яких така можливість є, досить вузький). Цей розв'язок є випадковим процесом, який записується у такому вигляді:

$$\eta(t) = \zeta^{-1}(t)\left[\eta(0) + \int_0^t \zeta(s)[\alpha(s) - \gamma(s)\delta(s)]ds + \int_0^t \zeta(s)\gamma(s)dW(s)\right]$$

де

$$\zeta(t) = exp\left\{\int_0^t [\beta(s) - \frac{1}{2}\delta^2(s)]ds + \int_0^t \delta(s)dW(s)\right\}$$

є розв'язком відповідного стохастичного диференціального рівняння з відокремленими змінними (у літературі процес, що є розв'язком такого рівняння, називається узагальненим Броунівським рухом):

$$d\eta(t) = \beta(t)\eta(t)dt + \delta(t)\eta(t)dW(t)$$

Таке представлення розв'язку лінійного стохастичного диференціального рівняння було отримане у роботі [1].

Відмітимо також ще одну важливу властивість розв'язку – а саме, що цей розв'язок є семімартингалом. Нагадаємо означення мартингала:

Означення 1. *Нехай* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *—- ймовірнісний простір і* $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *– задана на ньому фільтрація. Тоді послідовність випадкових величин* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *називається мартингалом, якщо виконуються умови:*

- *Процес* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *є узгодженим з фільтрацією* $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in N}$.

- $\mathsf{E}|X_n| < \infty, \quad n \in \mathbb{N}$*;*

- $\mathsf{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = X_n, \quad n \in \mathbb{N}$.

Більш довільно це означення може бути перефразоване наступним чином – мартингалом є такий випадковий процес, для якого математичне сподівання процесу у деякий конкретний момент часу дорівнює значенню цього процесу у попередній момент часу. Тобто, якщо в реальному світі ми спостерігаємо деякий випадковий процес, то навіть маючи інформацію про поведінку цього процесу у всі попередні моменти часу, ми не можемо передбачити його поведінку у майбутньому (точніш, наша оцінка буде спиратися лише на значення цього процесу в поточний момент часу).

Семімартингал, в свою чергу, визначається наступним чином:

Означення 2. *Послідовність випадкових величин* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *називається семімартингалом, якщо його можна представити у вигляді* $X_t = M_t + A_t$ *де* M *– локальний мартингал,* A *– адаптований процес обмеженої варіації з неперервними зліва траекторіями (тобто, має càdlàg-траекторії).*

1.1 Необмеженість розв'язку лінійного стохастичного диференціального рівняння

У цьому розділі ми будемо вивчати поведінку розв'язку стохастичного диференціального рівняння наступного вигляду:

$$d\eta(t) = [\alpha(t) + \beta(t)\eta(t)]dt + \sigma(t)dW(t), \tag{1.2}$$

де $W(t)$ – стандартний вінерів процес; $\eta(t)$ – розв'язок рівняння (1.2), $\alpha(t)$, $\beta(t)$– неперервна функція, $\sigma(x)$ – неперервна додатна функція, визначені при $t \in [0; \infty)$ та $x \in (-\infty; \infty)$.

Введемо допоміжну функцію

$$F(t, x) = \int_0^x \frac{dy}{\sigma(t)} = \frac{x}{\sigma(t)}.$$

Зауважимо, що

$$\lim_{x \to \infty} F(t, x) = \infty. \tag{1.3}$$

Якщо виконується (1.3), то функція F^{-1} обернена до функції F по змінній x при фіксованому t існує, є неперервно диференційованою і має наступний вигляд:

$$F^{-1}(t, x) = \sigma(t)x.$$

Розглянемо основні твердження цієї роботи відносно необмеженості розв'язку рівняння (1.2).

Має місце теорема.

Теорема 1. *Нехай α, β – неперервні функції, σ – неперервна додатна функція, такі, що стохастичне диференціальне рівняння (1.2) має неперервний м.н. розв'язок η. Функція σ є неперервно диференційовною*

Якщо $\beta = \frac{\sigma'_t}{\sigma}$ та

$$\lim_{T\to\infty}\inf\frac{\int_0^T\frac{\alpha(t)}{\sigma(t)}dt}{\sqrt{2T\ln\ln T}}>1, \tag{1.4}$$

то

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\eta(t)}{\sigma(t)}=\infty \qquad \text{м.н.}$$

Доведення. Покладемо

$$\gamma(t)=F(t,\eta(t))=\frac{\eta(t)}{\sigma(t)},\ t>0.$$

Застосуємо формулу Іто для рівняння (1.2):

$$d\gamma(t)=[F_t'(t,\ \eta(t))+F_x'(t,\ \eta(t))[\alpha(t)+\beta(t)\eta(t)]+\frac{1}{2}F_{xx}''(t,\eta(t))\sigma^2(t)]dt+$$

$$+F_x'(t,\eta(t))\sigma\,(t)\,dW_t$$

Зауважимо, що

$$F_t'(t,x)=-\int_0^x\frac{\sigma_t'(t)}{\sigma^2(t)}dy,$$

$$F_x'(t,x)=\frac{1}{\sigma(t)},$$

$$F_{xx}''(t,x)=0.$$

Таким чином, процес γ є розв'язком рівняння

$$d\gamma(t)=\tilde{a}(t,\gamma(t))dt+dW_t,\ t\geq 0,$$

де

$$\tilde{a}(t,x)=x\left(\beta(t)-\frac{\sigma_t'(t)}{\sigma(t)}\right)+\frac{\alpha(t)}{\sigma(t)}.$$

Оскільки $\beta=\frac{\sigma_t'}{\sigma}$, то $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^1}\tilde{a}(t,x)=\frac{\alpha(t)}{\sigma(t)}$. Тоді в силу (1.4) маємо

$$\lim_{T\to\infty}\inf\frac{\int_0^T\inf_{x\in\mathbb{R}^1}\tilde{a}(t,x)dt}{\sqrt{2T\ln\ln T}}=\lim_{T\to\infty}\inf\frac{\int_0^T\frac{\alpha(t)}{\sigma(t)}dt}{\sqrt{2T\ln\ln T}}>1.$$

За теоремою 1 з роботи [4] маємо

$$\lim_{t\to\infty} F(t,\eta(t)) = \infty, \qquad \text{м.н.}$$

а отже,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\eta(t)}{\sigma(t)} = \infty \qquad \text{м.н.}$$

□

Зауваження 1. *Легко бачити, що якщо* $\liminf_{t\to\infty} \sigma(t) > 0$, *то за виконання умов теореми 1 маємо, що* $\lim_{t\to\infty} \eta(t) = \infty$ *м.н.*

Зауваження 2. *Умова (1.4) буде виконуватись, якщо для достатньо великих* t *матиме місце нерівність*

$$\frac{\alpha(t)}{\sigma(t)} \le K \left(\frac{\ln\ln t}{2t}\right)^{\frac{1}{2}},$$

де $K > 1$.

Зауваження 3. *Варто відмітити, що* $\sqrt{2t\ln\ln t}$ *є функцією правильної зміни з індексом* $\rho = \frac{1}{2}$. *Тоді, якщо* $\frac{\alpha}{\sigma}$ *є функцією правильної зміни з індексом* $\rho > -\frac{1}{2}$, *тобто* $\frac{\alpha(t)}{\sigma(t)} \sim t^{\rho} l(t)$, *де* l *– функція повільної зміни, то умова (1.4) буде виконуватись, якщо*

$$\lim_{t\to\infty} \inf \frac{l(t)}{\sqrt{2\ln\ln t}} > 1.$$

Нагадаємо, що вимірна за Лебегом функція $f \in F_+$ називається функцією правильної зміни з індексом ρ, якщо

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{f(ct)}{f(t)} = \liminf_{t\to\infty} \frac{f(ct)}{f(t)} = c^{\alpha} \ \ \forall c > 0$$

Якщо $\alpha = 0$, то $f \in F_+$ називається функцією повільної зміни.

Тут F_+ – множина дійсних функцій, додатніх для достатньо великих аргументів.

Теорема 2. *Нехай α, β – неперервні функції, σ – неперервна додатна функція, такі, що стохастичне диференціальне рівняння (1.2) має неперервний м.н. розв'язок η. Функція σ є неперервно диференційовною та*

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-\int_0^x 2\inf_{t>0}\tilde{a}(t,z)dz}\,dx = +\infty, \tag{1.5}$$

$$\int_{0}^{\infty} e^{-\int_0^x 2\inf_{t>0}\tilde{a}(t,z)dz}\,dx < +\infty. \tag{1.6}$$

де

$$\tilde{a}(t,x) = x\left(\beta(t) - \frac{\sigma_t'(t)}{\sigma(t)}\right) + \frac{\alpha(t)}{\sigma(t)}.$$

Тоді

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\eta(t)}{\sigma(t)} = \infty \qquad \text{м.н.}$$

Доведення. Для доведення цієї теореми введемо ряд допоміжних позначень.

По-перше, введемо функцію:

$$B(t,x) = \int_0^x \frac{dy}{\sigma(t,y)}$$

і припустимо, що виконується умова

$$\lim_{x\to\infty} B(t,x) = \lim_{x\to\infty}\int_0^x \frac{dy}{\sigma(t,y)} = \infty \tag{1.7}$$

Нехай $B^{-1}(t,x)$ – функція, обернена до $B(t,x)$ за змінною x при фіксованому t.

Розглянемо функцію

$$\tilde{a}(t,x) = -\int_0^{B^{-1}(t,x)} \frac{\sigma_t'(t,y)}{\sigma^2(t,y)}dy + \frac{a(t,B^{-1}(t,x))}{\sigma(t,B^{-1}(t,x))} - \frac{1}{2}\sigma_x'(t,B^{-1}(t,x)),$$

а також

$$\alpha(t) = \inf_{x \in \mathbb{R}^1} \tilde{a}(t, x),$$

$$A(T) = \int_0^T \alpha(t) dt$$

Неважко бачити, що для рівняння функція $\tilde{a}(t,x)$ має вигляд

$$x\left(\beta(t) - \frac{\sigma_t'(t)}{\sigma(t)}\right) + \frac{\alpha(t)}{\sigma(t)}.$$

Для подальшого доведення ми будемо користуватися теоремою 1 з [4]. Оскільки $\alpha(t,x) = -\infty$, ми накладатимемо умови на $\inf\limits_{t>0} \tilde{a}(t,x)$. З теореми слідує, що за одночасного виконання умов (1.5) та (1.6) ми маємо:

$$\lim_{t \to \infty} F(t, \eta) = \lim_{t \to \infty} \frac{\eta(t)}{\sigma(t)} = \infty.$$

$\square$

Приклад 1. *Розв'язок стохастичного диференціального рівняння*

$$d\eta(t) = \varphi(t)\eta(t)dt + \sigma(t)dw(t)$$

ми називаємо узагальненим процесом Орнштейна-Уленбєка.

$$\tilde{a}(t,x) = -\frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)}x + \varphi(t)x = x\left(-\frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} + \varphi(t)\right).$$

Покладемо

$$f(t) = -\frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} + \varphi(t)$$

та припустимо, що $\inf\limits_{t>0} f(t) = \lambda > 0$, $\sup\limits_{t>0} f(t) = \gamma > 0$.

В такому разі маємо:

$$\inf_{t>0} \tilde{a}(t,x) = \begin{cases} \lambda x, & \text{якщо } x > 0 \\ \gamma x, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

Відповідно

$$v(x) = \int\limits_0^x \inf_{t>0} \tilde{a}(t,z)dz = \begin{cases} \frac{\lambda}{2}x^2, & \text{при } x > 0 \\ -\frac{\gamma}{2}x^2, & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Це означає, що

$$\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-2v(x)}dx = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{\gamma x^2}dx = +\infty$$

та

$$\int\limits_{0}^{\infty} e^{-2v(x)}dx = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\lambda x^2}dx < +\infty.$$

Отже,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\eta(t)}{\theta(t)} = \infty \text{ м.н.}$$

1.2 Асимптотична еквівалентність розв'язку лінійного стохастичного диференціального рівняння до розв'язку детермінованого рівняння

Означення 3. *Нехай* $\eta(t)$ *– розв'язок рівняння (1.2) та* $\lim\limits_{t\to\infty}\eta(t) = \infty$ м.н.. *Тоді деяка невипадкова функція* $\varphi(t)$ *така, що*

$$P\left(\lim_{t\to\infty}\frac{\eta(t)}{\varphi(t)} = 1\right) = 1$$

буде називатися точним порядком росту рівняння (1.2).

Розглянемо рівняння (1.2) та припустимо, що

$$\lim_{t\to\infty}\eta(t) = \infty \text{ м.н.}$$

Зауважимо, що у більшості випадків для перевірки виконання цієї умови досить перевірити виконання умов теореми 1 чи 2 з попереднього підрозділу. Проте умови, за яких розв'язок є необмеженим у загальному випадку, досі не досліджені.

Також розглянемо детерміноване диференціальне рівняння

$$d\mu(t) = \beta(t)\mu(t)dt, \tag{1.8}$$

де β – неперервна функція, μ – розв'язок рівняння (1.8) такий, що

$$\lim_{t\to\infty}\mu(t) = \infty.$$

Введемо позначення $\mathtt{B}(t) = \int_0^t \beta(s)ds$. Тоді $\ln\mu(t) = B(t)$. Зрозуміло, що

$$\lim_{t\to\infty}\mathtt{B}(t) = \infty$$

, коли $\mu(t) \to \infty$.

Сформулюємо основний результат цього розділу.

Теорема 3. *Нехай α, β – неперервні функції, σ – неперервна додатна функція, такі, що стохастичне диференціальне рівняння (1.2) має неперервний м.н. розв'язок η та рівняння (1.8) має непереpний розв'язок μ. Якщо*

1) $\lim\limits_{t\to\infty}\sup \frac{1}{\mathtt{B}(t)}\int_0^t |\alpha(s)|ds < \infty$;

2) $\int\limits_0^\infty \mathbb{E}\left|\frac{\sigma^2(s)}{\eta^2(s)}\right| ds < \infty$

то

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\ln\eta(t)}{\ln\mu(t)} = 1 \text{ м.н.} \tag{1.9}$$

Доведення. Розглянемо новий процес $\xi(t) = \ln\eta(t)$, та застосуємо формулу Іто.

$$d\xi(t) = \left[\frac{\alpha(t)}{\eta(t)} + \beta(t) + \frac{1}{2}\left(-\frac{\sigma^2(t)}{\eta^2(t)}\right)\right]dt + \frac{\sigma(t)}{\eta(t)}dW_t$$

$$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t \alpha(s)e^{-\xi(s)}ds + \mathtt{B}(t) - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s)e^{-2\xi(s)}ds + \int_0^t \sigma(s)e^{-\xi(s)}dW_s$$

Для доведення теореми необхідно показати, що

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\mathtt{B}(t)}\int_0^t \alpha(s)e^{-\xi(s)}ds = 0 \text{ м.н.}; \tag{1.10}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\mathtt{B}(t)}\int_0^t \sigma^2(s)e^{-2\xi(s)}ds = 0 \text{ м.н.}; \tag{1.11}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\mathtt{B}(t)}\int_0^t \sigma(s)e^{-\xi(s)}dW_s = 0 \text{ м.н.} \tag{1.12}$$

Доведемо співвідношення (1.10). Для того, щоб $\lim\limits_{t\to\infty} g(\eta(t))f(t) = 0$ достатньо, щоб $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ та $\lim\limits_{t\to\infty}\sup|f(t)| < \infty$. Зрозуміло, що для нашого випадку

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$$

та

$$\lim_{t\to\infty}\sup|f(t)| = \lim_{t\to\infty}\sup\frac{1}{\mathtt{B}(t)}\int_0^t |\alpha(s)|ds < \infty.$$

З аналогічних міркувань виконується співвідношення (1.11).

Доведемо співвідношення (1.12). Для доведення достатньо встановити, що

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{k\in\mathbb{Z}^+}\sup_{t\in[kT;(k+1)T]}\frac{1}{B(t)}\left|\int\limits_{kT}^{t}\sigma(s)e^{-\xi(s)}dW_s\right|>r\right\}\to 0,$$

при $r\to\infty$. Дійсно:

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{k\in\mathbb{Z}^+}\sup_{t\in[kT;(k+1)T]}\frac{1}{B(t)}\left|\int\limits_{kT}^{t}\sigma(s)e^{-\xi(s)}dW_s\right|>r\right\}\leq$$

$$\leq\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}\left\{\sup_{t\in[kT;(k+1)T]}\frac{1}{B(t)}\left|\int\limits_{kT}^{t}\sigma(s)e^{-\xi(s)}dW_s\right|>r\right\}\leq$$

$$\leq\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4}{B^2(kT)r^2}\int\limits_{kT}^{(k+1)T}\mathbb{E}\left|\sigma^2(s)e^{-2\xi(s)}\right|ds\to 0 \text{ при } r\to\infty.$$

Тоді

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\ln\eta(t)}{\mathsf{B}(t)}=1,$$

та

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\ln\eta(t)}{\ln\mu(t)}=1.$$

□

Зауваження 4. *Зауважимо, що у випадку, коли всі коефіцієнти рівняння є константами, то умови теореми справджуються при $\beta\neq 0$ та*

$$\int\limits_0^{\infty}\mathbb{E}\left|\frac{1}{\eta^2(s)}\right|ds<\infty$$

Попередню теорему хотілося б доповнити кількома зауваженнями. Дослідження асимптотики розв'язку рівняння дещо відрізняється від класичної схеми, що використовувалася у роботах Гіхмана та Скорохода [1], а також Керстинга та Рослера [2]. Справді, у цих роботах розв'язок рівняння (1.2) порівнювався з розв'язком такого рівняння:

$$d\xi(t) = [\alpha(t) + \beta(t)\xi(t)]dt,$$

і умови для асимптотичної еквівалентності шукалися саме для цього випадку. Отриманий результат дещо слабкіший за умову асимптотичної еквівалентності у вигляді

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\eta(t)}{\mu(t)} = 1 \text{ м.н.}, \tag{1.13}$$

оскільки з (1.13) випливає (1.9), але не навпаки.

Проте питання асимптотичної поведінки логарифму від розв'язку для автономного рівняння також вивчалося, в тому числі і в п'ятому розділі статті [2].

2 Моделювання результатів

Задача цього розділу полягає в побудові комп'ютерної моделі процесу, що описується таким рівнянням:

$$dr(t) = \alpha(t)(\beta(t) - r(t))dt + \sigma(t)dW(t), \tag{2.1}$$

де $W(t)$ —- Вінеровський процес, $\beta(t)$ —- невід'ємна функція, що описує середній (довгостроковий) рівень процентної ставки, $\alpha(t)$ —- невід'ємна функція-параметр, що характеризує швидкість повернення до середнього значення, а $\sigma(t)$ —- параметр волатильности.

Зауважимо, що основним недоліком цієї моделі вважають той факт, що вона не накладає обмежень на невід'ємність розв'язку випадкового процесу. А оскільки це рівняння описує еволюцію відсоткових ставок, то було б природньо припустити, що банк не буде встановлювати від'ємних ставок – тобто, доплачувати за позичені кошти. Проте за останні декілька років ми мали змогу переконатися, що така ситуація є досить вірогідною – центральні банки Швейцарії, Японії та ряду інших країн встановили від'ємні відсоткові ставки, щоб стимулювати розвиток бізнесу. Тобто, ми маємо право стверджувати, що можливість набуття від'ємних значень з ненульовою вірогідністю не робить модель Васічека нерепрезентативною.

Повернемося до теоретичної частини. Теорема 3 попереднього розділу пропонує умови, за яких розв'язок рівняння (2.1) асимптотично еквівалентний розв'язку рівняння

$$d\mu(t) = \beta(t)\mu(t)dt,$$

то задля наочності в процесі подальших обчислень ми будуватимемо на графіках обидва розв'язки одночасно.

Всі обчислення виконувалися на мові програмування Python 3.4 (лістинг коду див. у додатках). Створена програма не має графічної оболонки, коефіцієнти змінюються беспосередньо в коді.

2.1 Обгрунтування методології

За теоретичне підгрунті цього розділу взята книга Клодена і Платена, присвячена математичному моделюванню стохастичних процесів [14]. Слід відмітити, що на цю ж роботу робить посилання і Томас Мікош [13], який опублікував орієнтовану в першу чергу на спеціалістів з економіки книгу, що також присвячена проблемам моделювання стохастичних процесів.

Для симуляції ми будемо використовувати метод Эйлера-Маруями (*Euler-Maruyama Method*). Не дивлячись на ряд недоліків у порівнянні з багатокроковими методами (наприклад, Мілштейна), він все-таки зручний тим, що інтуітивно зрозуміло імплементується та потребує менше ресурсів для підрахунку. Коротко опишемо алгоритм (більш детально він викладений у роботі [14]).

Припустимо, що ми маємо рівняння такого виду:

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t,$$

з початковими умовами $X_{t_0} = x_0$

Тепер виберемо інтервал $[t_0, T]$, на якому будуватимемо розв'язок, і задамо деяке N – загальну кількість кроків. Звісно, чим більша кількість кроків перепадає на одиницю часу, тим вища точність підрахунків. Тобто, ми отримуємо наступне розбиття:

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T \text{ и } \delta t = T/N$$

Розв'язок на кроці X_{n+1} підраховується рекрсивно через значення відповідної функції на попередньому етапі ітерації. А саме:

$$X_{n+1} = X_n + a(t_n, X_n)\delta t + b(t_n, X_n)\Delta W_n,$$

де

$$\Delta W_n = W_{t_{n+1}} - W_{t_n}.$$

Зауважимо, що при $b(t, X_t) \equiv 0$ дана схема збігається зі стандартним методом Ейлера для звичайних диференціальних рівнянь. Оскільки тема цієї роботи звязана з визначенням умов, за яких поведінка розв'язку СДР визначається невипадковою функцією, під час підрахунків ми паралельно будуватимемо і графік розв'язку відповідного звичайного диференціального рівняння.

Ця схема інтуітивно зрозуміла, якщо згадати альтернативний запис СДР і визначення стохастичного інтегралу Іто:

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X_s)\, ds + \int_0^t b(s, X_s)\, dW_s.$$

, де $\int_0^t b(s, X_s)\, dW_s$ визначається як:

$$\int_0^t b(s, X_s)\, dW_s = \lim_{n\to\infty} \sum_{[t_{i-1}, t_i]\in\pi_n} b(t_{i-1}, X_{t_{i-1}})(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})$$

.

Тут $\{\pi_n\}$ – послідовність розбиттів відрізка $[0, t]$ (формула вище справедлива, коли максимальная величина розбиття прямує до нуля).

Відповідно, у розрахунках ми використовуємо наступне наближення:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} b(s, X_s)\, dW_s \approx b(t_n, X_n)\Delta W_n$$
$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} a(s, X_s)\, dW_s \approx a(t_n, X_n)\delta t$$

Одну з підзадач становить генерація Вінерівського процесу. Ми знаємо, що Вінеровський процесс – це випадковий процесс з незалежними приростами, кожен з яких має нормальний розподіл $N(0, 1)$, причому $W_0 = 0$. Ми не будемо зупинятися на задачі генерації випадкових чисел з нормальним розподілом більш детально, лише зауважимо, що у більшості мов программування вона вже розв'язана та імплементована. Що стосується приведеного в цій роботі коду –там, строго кажучи, змодельований не сам Вінерівський процесс, а лише змодельований вектор приростів, що необхідний для побудови розв'язку рівняння.

Окремо слід розглянути питання збіжності методу та обмежень на функції $a(t,x)$ і $b(t,x)$. Нагадаємо декілька означень:

Означення 4. *Чисельний метод сходиться* ***сильно*** *з порядком γ, якщо*

$$E\left(|X_t - X_t^{\delta t}|\right) \le K_T(\delta t)^{\gamma}$$

Тут константа K_T залежить від T, а також від розглядуваного рівняння.

Означення 5. ***Слабка збіжність*** *значить, що*

$$|E_g(X_t) - E_g(X_t^{\delta t})| \le K_T^g(\delta t)^{\gamma}$$

Тут g – це деякий довільний поліном, а константа K_T залежить від T, g, і від розглядуваного рівняння.

Якщо метод сходиться з порядком γ, то це значить, що при зменшенні δt в k раз, точність обчислення зростає у k^{γ} раз (але, звичайно, відповідно і збільшується час обчислення). Метод Эйлера-Маруями сходиться у слабкому сенсі з порядком 1 та у сильному з порядком 0.5.

Наступні умови є достатніми для збіжності методу у сильному та слабому сенсі. Ці твердження, правда, ми залишимо без доведення, оскільки їх можно знайти у літературі:

- Функції $a(t,x)$ та $b(t,x)$ є чотири рази диференційованими, причому перша похідна – обмежена.

- При невеликих приростах аргумента зміна значення функції є незначною.

2.2 Приклади реальних процесів та їх моделювання

При розгляді цього методу виникає логічне питання – як саме може бути змодельований деякий реальний процес, скажімо, зміна поточних відсоткових ставок у деякій конкретній країні? При відповіді на це питання будемо керуватися статтею "Stock Price Volatility: a primer" з сайту "Financial Chaos Theory" [15].

1) На першому етапі необхідно зібрати історичні дані про зміну відсоткової ставки. Зазвичай вони доступні на офіційних сайтах фінансових організацій, а в окремих випадках можна користуватися сервісами для фінансового аналізу від Yahoo або Google. А більшість програмного забезпечення (в першу чергу R та пакет pandas у Python), яким користуються статистики, навіть підтримує пряме завантаження історичних данних з відповідних серверів, без необхідності здійснювати пошук самостійно.

2) Потім необхідно обрати модель, що буде використовуватися для побудови (наприклад, модель Васічека, Кокса-Інгерсола-Роса та ін). Іноді доцільно будувати процеси одразу за кількома моделями, для того щоб порівняти їх ефективність.

3) Далі на основі наявних історичних даних необхідно визначити параметри моделі. У випадку, коли ми обрали модель з параметрами-константами, слід знайти середні значення за весь розглянутий історичний інтервал, а якщо ми працюємо з неавтономними моделями – то середні значення на кожному інтервалі слід наблизити деякою функцією і використовувати в обчисленнях її (простіше всього використовувати для наближення деякий поліном).

4) Маючи інформацію про розмір відсоткових ставок у кожний конкретний період часу S_i, знайти середнє значення не важко. Але питання можуть виникнути під час обчислення волатильності. Для того, щоб

знайти її конкретне значення, слід спочатку обрахувати *Logrelative Returns* за формулою:

$$u_i = \ln S_i - \ln S_{i-1} = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)$$

Волатильність – це, по суті, дисперсія величини u_i і вона може бути знайдена за наступною формулою:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(u_i - \hat{u})^2},$$

де

$$\hat{u} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} u_j$$

Застосувати такий метод обчислення можно, наприклад, для визначення волатильності відсоткової ставки Нацбанку України. Створивши таблицю значень поточних ставок за період з 2001 по 2016-й рік (тобто, за останні 15 років), ми можемо обрахувати волатильність. Ці підрахунки досить зручно робити в офісних пакетах типу Excel, до того ж отримані результати можна одразу ж зобразити у вигляді графіку. Відмітимо, що станом на квітень 2016-го волатильність дорівнює приблизно 0,057 (або 5,7%). Отримані значення ми будемо використовувати у подальших розрахунках за допомогою комп'ютера.

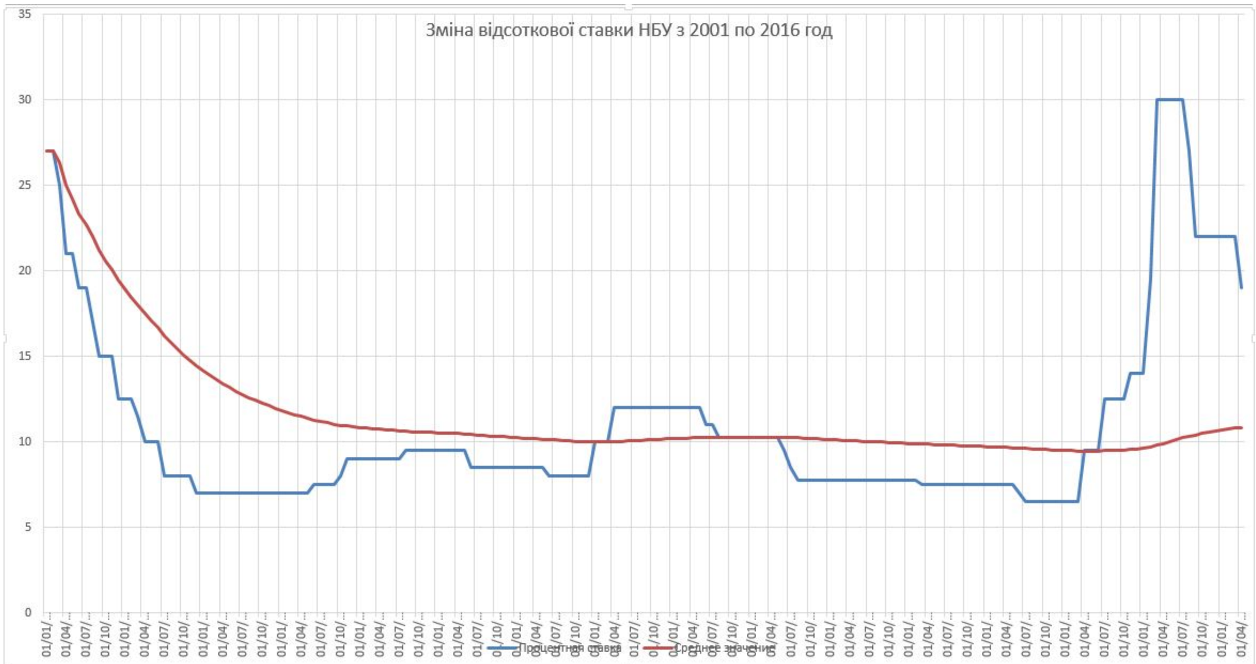

Рис. 1: Графік відсоткових ставок з 2001 по 2016 рік

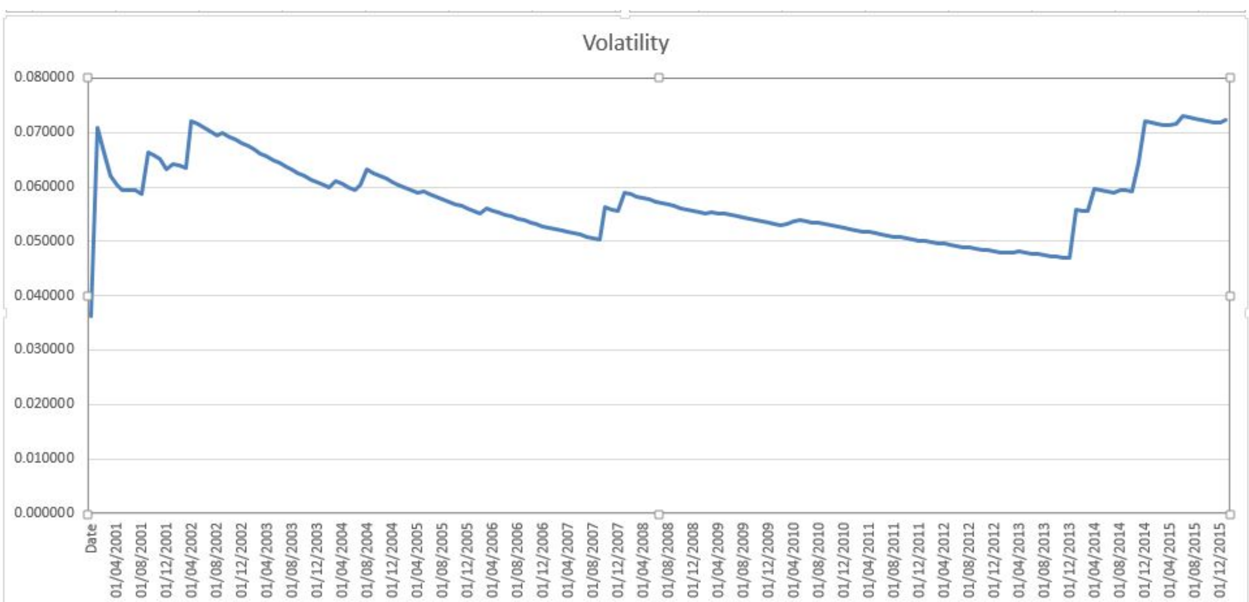

Рис. 2: Історична волатильність з 2001 по 2016 рік

Приклади роботи програми

Для наочності ми наведемо приклади для різних коефіцієнтів. У першому випадку ми будуємо модель з невеликим коефіцієнтом волатильності, тому розв'язок стохастичного рівняння має вигляд майже прямої лінії. При цьому ми бачимо, що розв'язки рівнянь $d\eta(t) = [\alpha(t) + \beta(t)\eta(t)] + \sigma(t)dt$ і $d\mu(t) = \beta(t)\mu(t)dt$ не еквівалентні.

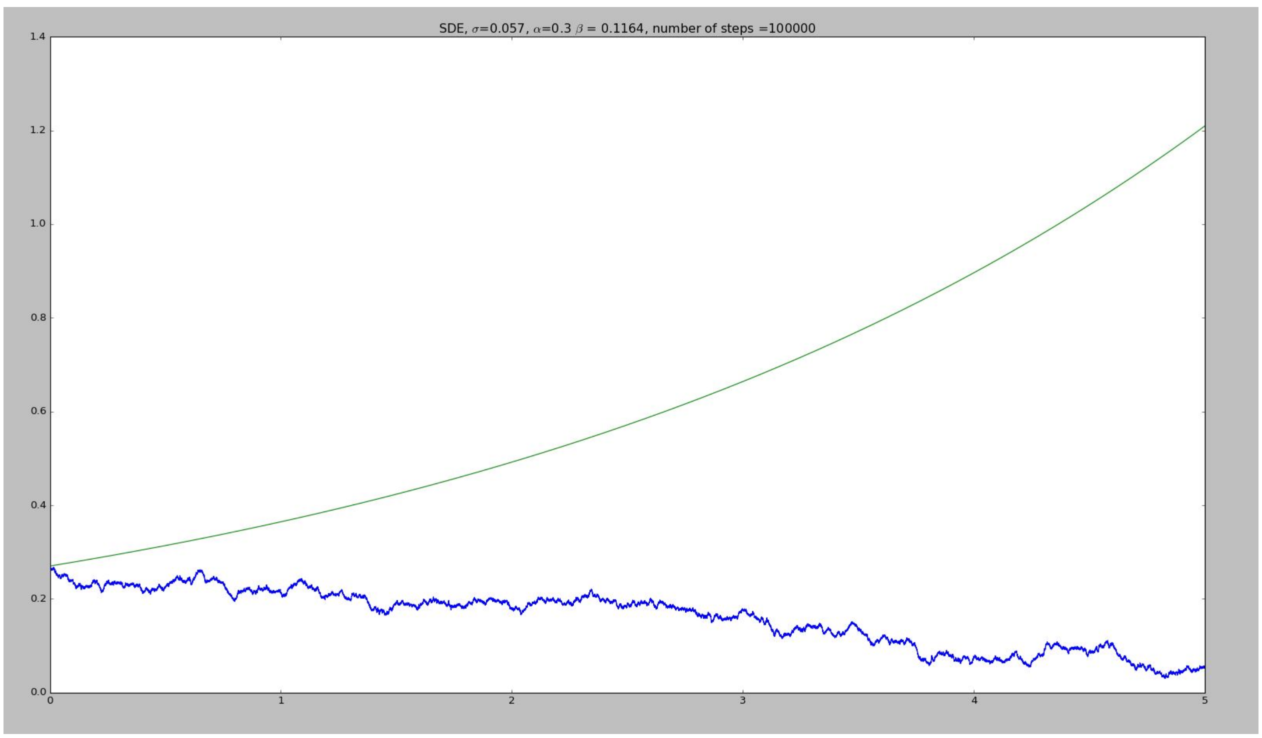

Рис. 3: Значення коефіцієнтів: $\sigma = 0.057$, $\alpha = 0.3$, $\beta = 0.1164$, $N = 100000$

Але якщо ми спробуємо побудувати графік з тими ж параметрами, але порівнювати розв'язок стохастичного рівняння з розв'язком $d\mu(t) = [\alpha(t) + \beta(t)\mu(t)]dt$, то інтуїтивно зрозуміло, що вони асимптотично еквівалентні. Тобто, для таких значень констант, точним порядком росту буде розв'язок звичайного диференціального рівняння з другого прикладу (достатні умови для цього були отримані Гіхманом та Скороходом).

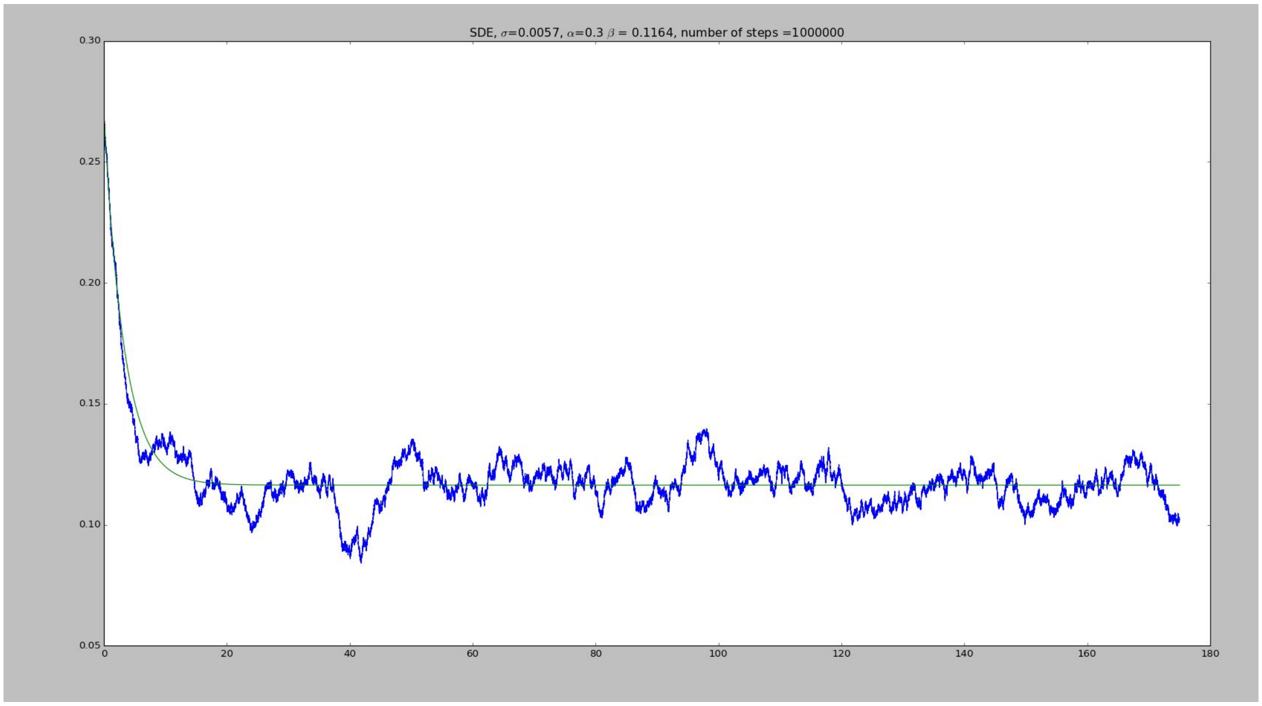

Рис. 4: Значення коефіцієнтів: $\sigma = 0.057$, $\alpha = 0.3$, $\beta = 0.1164$, $N = 1000000$

Якщо ми збільшимо волатильність у десять разів, побачимо, як змінюється поведінка відповідного графіку.

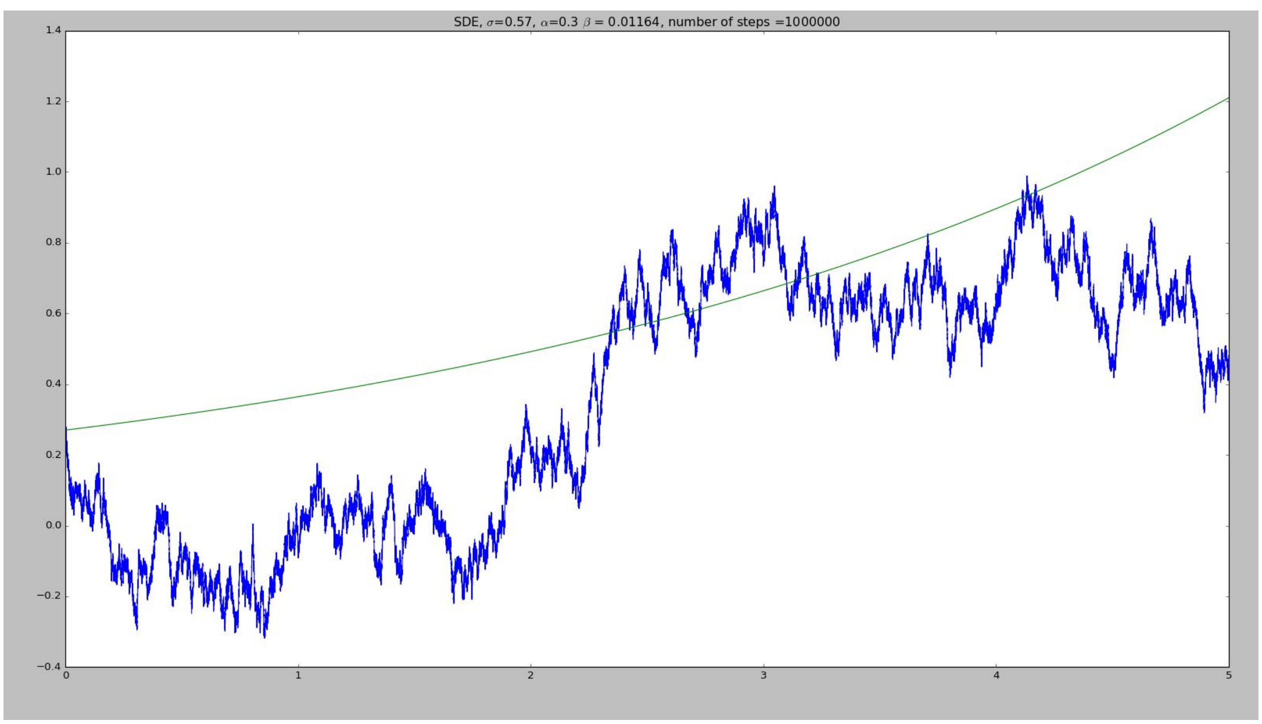

Рис. 5: Значення коефіцієнтів: $\sigma = 0.57$, $\alpha = 0.3$, $\beta = 0.01164$, $N = 1000000$

3 Охорона праці та безпека в надзвичайних ситуаціях

Написання дипломної роботи є фінальним і напруженим етапом в навчальному вихованні студента, тому в процесі для ефективної роботи важливо дотримуватися основних норм охорони праці, а саме контролювати режим праці і відпочинку, вміти оцінювати напруженість роботи, слідкувати за гігієною та організацією робочого місця, дотримуватися заходів безпеки при використанні технічних засобів.

Зазвичай при підготовці матеріалу для дипломної необхідно працювати з великою кількістю джерел інформації, це створює суттєве навантаження на нервову систему. В умовах значного обмеження у часі може виникнути бажання обробити "все і одразу", проте такий підхід на практиці не є ефективним, оскільки зменшує якість засвоєння інформації та значно підвищує ризики отримати перевтому.

Особливу увагу слід приділити організації робочого місця, необхідно подбати, щоб воно було зручним, чистим, добре освітленим, завчасно провітрюваним, без відволікаючих факторів.

Робота над дипломом також вимагає значної мобілізації ресурсів, як фізичних, так і психологічних, тому для уникнення перевантаження необхідно дотримуватися оптимального режиму праці та відпочинку.

Метою цього розділу є розгляд основних положень охорони праці та аналіз їх дотримання при виконанні дипломної роботи.

3.1 Оцінка напруженості праці

Для проведення атестації робочих місць та встановлення пріоритету в проведенні оздоровчих заходів використовується "Гігієнічна класифікація праці за показниками шкідливості та небезпечності факторів виробничого середовища, важкості та напруженості трудового процесу. Виходячи з принципів Гігієнічної класифікації, умови праці діляться на 4 класи – оптимальні, допустимі, шкідливі та небезпечні (екстремальні).

1 клас – ОПТИМАЛЬНІ умови праці – такі умови, при яких зберігається не лише здоров'я працюючих, а й створюються передумови для підтримання високого рівня працездатності. Оптимальні гігієнічні нормативи виробничих факторів встановлені для мікроклімату і факторів трудового процесу. Для інших факторів за оптимальні умовно приймаються такі умови праці, за яких несприятливі фактори виробничого середовища не перевищують рівнів, прийнятих за безпечні для населення.

2 клас – ДОПУСТИМІ умови праці – характеризуються такими рівнями факторів виробничого середовища і трудового процесу, які не перевищують встановлених нормативів, а можливі зміни функціонального стану організму відновлюються за час регламентованого відпочинку або до початку наступної зміни та не чинять несприятливого впливу на стан здоров'я працюючих та їх потомство в найближчому і віддаленому періодах.

3 клас – ШКІДЛИВІ умови праці – характеризуються такими рівнями шкідливих виробничих факторів, які перевищують нормативи і здатні чинити несприятливий вплив на організм працюючого та/або його потомство. Шкідливі умови праці за ступенем перевищення гігієнічних нормативів та настання можливих змін в організмі працюючих поділяються на 4 ступені:

1 ступінь (3.1) – умови праці характеризуються такими рівнями шкідливих факторів виробничого середовища та трудового процесу, які, як правило, викликають функціональні зміни, що виходять за межі фізіологічних коливань (останні відновлюються при триваліший, ніж початок наступної зміни, перерві контакту з шкідливими факторами) та збільшують ризик погіршення здоров'я;

2 ступінь (3.2) – умови праці характеризуються такими рівнями шкідливих факторів виробничого середовища і трудового процесу, які здатні викликати стійкі функціональні порушення, призводять у більшості випадків до зростання виробничо-обумовленої захворюваності, появи окремих ознак або легких форм професійної патології (як правило, без втрати професійної працездатності), що виникають після тривалої експозиції (10 років та

більше);

3 ступінь (3.3) – умови праці характеризуються такими рівнями шкідливих факторів виробничого середовища і трудового процесу, які призводять, окрім зростання виробничо-обумовленої захворюваності, до розвитку професійних захворювань, як правило, легкого та середнього ступенів важкості (з втратою професійної працездатності в період трудової діяльності);

4 ступінь (3.4) – умови праці характеризуються такими рівнями шкідливих факторів виробничого середовища і трудового процесу, які здатні призводити до значного зростання хронічної патології та рівнів захворюваності з тимчасовою втратою працездатності, а також до розвитку важких форм професійних захворювань (з втратою загальної працездатності);

4 клас НЕБЕЗПЕЧНІ (ЕКСТРЕМАЛЬНІ) умови праці – характеризуються такими рівнями шкідливих факторів виробничого середовища і трудового процесу, вплив яких протягом робочої зміни (або ж її частини) створює загрозу для життя, високий ризик виникнення важких форм гострих професійних уражень.

Оцінка напруженності праці здійнюється за такими показаниками:

1) інтелектуальні навантаження (необхідність прийняття рішень, рішення складних завдань за відомим алгоритмом, евристична, творча діяльність тощо):

    (a) сприйняття інформації та її оцінка (необхідність корекції дій або її відсутність тощо);

    (b) розподіл функцій за ступенем складності сприйняття (обробка, виконання завдання його перевірка тощо);

    (c) характер виконуваної роботи (за планом, графіком, в умовах дефіциту часу тощо)

2) сенсорні навантаження (тривалість, щільність, кількість об'єктів тощо);

3) емоційне навантаження (ступінь відповідальності за результат діяльності, значущість помилки тощо;

4) монотонність навантажень (кількість та тривалість операцій за одиницю часу, час активних дій та пасивних спостережень);

5) режим праці.

Виходячи з даних таблиці "Класи умов праці за показниками напруженості трудового процесу" [16], можна зробити такі оцінки:

1) рівень інтелектуального навантаження допустимий, іноді шкідливий (під кінець роботи);

2) найбільше сенсорне навантаження припадає на зоровий апарат;

3) емоційне навантаження зростає під кінець роботи, коли необхідно в умовах дефіциту часу завершувати роботу, проходити через різноманітні бюрократичні процедури та готуватися до захисту дипломної роботи;

4) монотонність роботи незначна;

5) режим праці не перевантажений в залежності від періоду та вдалого розподілу часу.

3.2 Аналіз психологічних аспектів умов праці

Підготовка дипломної роботи, особливо математичного характеру, потребує значної інтелектуальної діяльності. На відміну від фізичної, розумова праця супроводжується меншими витратами енергетичних запасів, але це не свідчить про її легкість. Основним працюючим органом під час такого виду праці виступає мозок. Під час розумової праці значно активізуються аналітичні та синтетичні функції центральної нервової системи, прийом і переробка інформації, виникають функціональні зв'язки, нові комплекси умовних рефлексів, зростає роль функцій уваги, пам'яті, навантаження на зоровий та слуховий аналізатори.

Для інтелектуальної праці характерні велика кількість стресів, мала рухливість, вимушена статична поза, що зумовлює застійні явища у м'язах ніг, органах черевної порожнини і малого тазу, погіршення постачання мозку киснем, зростання потреби в глюкозі. При важкій розумовій праці погіршується робота органів зору: стійкість ясного бачення, гострота зору, адаптаційна можливість ока. Такому виду праці властивий найбільший ступінь зосередження уваги - в середньому у 5-10 разів вище ніж при фізичній праці. Завершення робочого дня зовсім не перериває процесу розумової діяльності. Розвивається особливий стан організму - втома, що з часом може перетворитися на перевтому. Все це призводить до порушення нормального фізіологічного функціонування організму.

Враховуючи вище сказане, вкрай важливо під час роботи організовувати перерви, під час яких розминатися, рухатися, дихати свіжим повітрям, відволікатися від завдання, давати відпочити зоровому апарату. Також під час інтенсивної розумової роботи необхідно дотримуватися правильного режиму харчування, забезпечувати організм поживними речовинами, вітамінами та мінералами, покривати підвищену потребу мозку в глюкозі. Без сумніву, при такій роботі надважливими є здоровий сон і регулярні фізичні навантаження.

3.3 Нормування праці. Вибір оптимального режиму роботи і відпочинку

Серед факторів підвищення ефективності праці особливе місце належить раціональному режиму праці і відпочинку. Від його структури залежить динаміка втоми, відновлюваність функцій організму, працездатність і здоров'я, надійність і продуктивність праці. Під режимом праці і відпочинку розуміють загальну тривалість трудової діяльності протягом доби, тижня, місяця, року, частоту і тривалість періодів трудової активності і перерв у процесі цієї активності, співвідношення і чергування цих періодів. Режим праці включає характеристики самого трудового процесу — інтенсивність чи екстенсивність, а також допустиму тривалість дії шкідливих факторів.

Незалежно від виду праці функціональний стан працівника змінюється внаслідок втоми, що призводить до зниження рівня оперативних резервів. Оптимізація діяльності забезпечує реалізацію тих резервних можливостей, які до цього не входили в оперативні резерви. Таким чином, з фізіологічної точки зору режим праці і відпочинку являє собою процес управління функціональним станом працівника з метою оптимізації діяльності.

Режим праці і відпочинку протягом робочої зміни визначається такими факторами, як тривалість робочого дня, час початку і закінчення роботи, час надання і тривалість обідньої перерви, кількість і тривалість регламентованих перерв на відпочинок (макропауз), наявність мікропауз у трудовому процесі.

Тижневий режим праці і відпочинку характеризується встановленою кількістю робочих днів і годин, порядком чергування днів роботи і відпочинку, чергуванням роботи в різні зміни. Річний режим праці і відпочинку характеризується загальною кількістю днів і годин роботи, періодичністю і тривалістю основної і додаткових відпусток.

Режим праці і відпочинку залежить від характеру виробничого процесу, тобто може бути однозмінним або багатозмінним, стандартним або нестандартним. Однак у всіх випадках він повинен бути науково обгрунтованим, раціональним.

Раціональний, фізіологічно обґрунтований режим праці і відпочинку повинен відповідати таким вимогам:

- запобігати ранньому і надмірному розвиткові втоми працівників;
- сприяти збереженню високої працездатності і оптимального функціонального стану організму працівників протягом зміни;
- забезпечувати високу продуктивність праці;

- сприяти ефективному відновленню фізіологічних функцій під час відпочинку.

Ефективність режиму праці і відпочинку оцінюється критеріями працездатності і функціонального стану працівників, економічними, гігієнічними і соціальними критеріями.

Працездатність і функціональний стан працівника характеризуються системою фізіологічних і психологічних показників, а також тривалістю і співвідношенням періодів впрацювання, стійкої працездатності і втоми; стійкістю фізіологічних функцій протягом робочого дня; часом відновлення функціональних показників по закінченню роботи.

Економічні критерії представлені показниками погодинного виробітку, затратами часу на одиницю продукції, якістю продукції тощо.

Гігієнічні критерії виявляються в показниках захворюваності і виробничого травматизму працівників.

Соціальні критерії — в задоволенні (чи незадоволенні) працівників режимом праці і відпочинку; чисельності працівників, які скаржаться на швидкий розвиток втоми або перевтому.

Розробка режимів праці і відпочинку передбачає:

- детальне вивчення характеру роботи, ліквідацію організаційних неполадок, оптимізацію виробничого середовища;
- проведення хронометражних спостережень робочого дня для встановлення періодів роботи і відпочинку;
- вивчення особливостей динаміки працездатності та графічний її аналіз на основі фізіологічних, психологічних і виробничих показників;
- раціоналізацію трудових процесів і впровадження заходів по запобіганню перевтомі працівників.

При розробці режимів праці і відпочинку враховуються:

- закономірності динаміки працездатності;

- конкретні організаційно-технічні умови виробництва;
- особливості відновлення фізіологічних функцій організму.

Розробка і впровадження нового режиму праці і відпочинку завершується перевіркою його ефективності за вищенаведеними критеріями. Якщо такий режим відповідає необхідним вимогам, то він може бути рекомендований як типовий.

Типовим називається режим праці і відпочинку, встановлений для працівників з різними умовами праці, який забезпечує приблизно однакові зміни в їх працездатності.

Проектування раціональних режимів праці і відпочинку здійснюється за такими методичними принципами:

- раціональне чергування роботи з відпочинком для запобігання перевтомі, підвищення працездатності і продуктивності праці є обов'язковим для всіх видів праці;
- розробка режимів праці і відпочинку для працівників фізичної, розумової, нервово-напруженої праці базується на єдиній методологічній основі;
- обгрунтування кількості і тривалості перерв на відпочинок в умовах різної тривалості робочої зміни базується на однакових принципах і методології;
- перерви на відпочинок, крім обідньої, надаються за рахунок робочого часу;
- перерви на відпочинок повинні бути регламентованими.

Основні вимоги до проектування внутрішньозмінних режимів праці і відпочинку зводяться до забезпечення поступового входження людини в роботу, ритмічності і послідовності дій, чергування робіт; обгрунтування тривалості обідньої перерви, кількості, тривалості і часу надання регламентованих перерв на відпочинок, змісту відпочинку та використання функціональної музики.

Упорядкування режиму праці і відпочинку передбачає регулювання таких трьох його параметрів, як загальний робочий час, тривалість періодів роботи і тривалість періодів відпочинку. Оптимізація часу роботи є вихідною умовою для мінімізації часу відпочинку і максимізації тривалості робочого часу.

3.4 Санітарія та гігієна робочого місця

Санітарно-гігієнічні вимоги до робочих місць регулюються:

1. Законом України "Про охорону праці";

2. Правилами охорони праці під час експлуатації електронно-обчислювальних машин, затверджених наказом Державного комітету України з промислової безпеки, охорони праці та гірничого нагляду та іншими нормативно-правовими актами;

3. Гігієнічною класифікацією праці за показниками шкідливості та небезпечності факторів виробничого середовища, важкості та напруженості трудового процесу.

Відповідно до ч.1 ст.13 Закону України "Про охорону праці", роботодавець зобов'язаний створити на робочому місці в кожному структурному підрозділі умови праці відповідно до нормативно-правових актів.

Під час написання дипломної роботи я намагався слідувати вимогам та рекомендаціям нормативних актів щодо приміщення, організації робочого місця, освітлення, вентиляції, опалення, кондиціювання, мікроклімату, електробезпеки, рівнів шуму та вібрацій, рівня неіонізуючих електромагнітних випромінювань електростатичних полів.

3.5 Охорона праці при використанні технічних засобів

Під час підготовки тексту дипломної роботи, аналізу літератури, комунікації з науковим керівником виникає потреба у використанні різних технічних засобів, зазвичай це комп'ютер, проте іноді користуються планшетами, мобільним телефонами тощо. Основні шкідливі та небезпечні фактори, що можуть впливати на організм людини під час роботи з персональним комп'ютером (ПК), такі:

- підвищений рівень електромагнітних випромінювань;
- підвищений рівень іонізуючих випромінювань;
- підвищений рівень статичної електрики;
- підвищена напруженість електростатичного поля;
- підвищена чи понижена іонізація повітря;
- підвищена яскравість світла;
- пряма і відбита блискітливість;
- підвищене значення напруги в електромережі, замикання якої може статися крізь тіло людини;
- статичні перевантаження кістково-м'язового апарату та динамічні локальні перевантаження м'язів кистей рук;
- перенапруження зорового аналізатора;
- розумове перенапруження;
- емоційні перевантаження;
- монотонність праці.

Для мінімізації негативного вливу на здоров'я при роботі з ПК необхідно:

- регулярно проводити контроль обладнання;
- не використовувати несправне та надто застаріле обладнання;
- дотримуватися правил безпеки поводження з електромережами;
- підбирати індивідуально під себе ергономічні меблі;
- не перенапружувати зоровий апарат;
- контролювати яскравість та контрастність дисплею;
- не сидіти надто близько до екрану;
- регулярно проводити перерви.

Висновки

Дана робота присвячена вивченню властивостей розв'язків лінійного стохастичного диференціального рівняння наступного вигляду:

$$d\eta(t) = [\alpha(t) + \beta(t)\eta(t)]dt + \sigma(t)dW(t).$$

В процесі дослідження вдалося, по-перше, знайти достатні умови на необмеженість цього розв'язку та визначити необхідні умови, за яких логарифм розв'язку цього рівняння асимптотично еквівалентний до логарифму розв'язку деякого звичайного диференціального рівняння. Це дещо доповнює результати, отримані в роботах [1], [2] та [4], хоча властивості лінійних стохастичних диференціальних рівнянь до сьогоднішнього дня не вивчалися детально.

Протягом роботи над дипломним проектом було також проаналізовано джерела та визначено напрямки для можливого подальшого дослідження даної теми, що могло б стати потужним інструментом для розуміння природи економічних процесів.

У висновках хотілося б також зазначити проблеми, які досі вирішити не вдалося навіть для лінійних стохастичних диференціальних рівнянь, що розглядалися в даній роботі:

- Ми дослідили умови на необмеженість розв'язку, але більш сильного характеру – а саме, у наших результатах розв'язок рівняння зростає швидше за функцію, що визначає волатильність. У випадку, коли всі коефіцієнти рівняння є константами, цей результат еквівалентний результатам, отриманим Гіхманом і Скороходом. Проте у випадку, коли отримані нами умови не справджуються, це нічого нам не говорить про обмеженість або необмеженість розв'язку – тобто, ми не знаємо, чи можемо застосовувати теореми, отримані для рівнянь з необмеженими розв'язками.

- Незважаючи на те, що ми встановили, що за деяких обмежень на функції-коефіцієнти, поведінка розв'язку рівняння може визначатися детермінованою функцією, ми не отримали відповіді на запитання – чи можливо знайти умови, за яких розв'язок буде визначатися детермінованою функцією іншого типу (як у вищезгаданих роботах)?

- Чи можливо узагальнити отримані результати для випадку, коли рівняння має наступний вигляд:

$$d\eta(t) = [\alpha(t) + \beta(t)\eta(t)]dt + [\sigma(t) + \delta(t)\eta(t)]dW(t)?$$

Не дивлячись на вищеозначені питання, що залишаються відкритими, дана робота дещо розширює клас рівнянь, поведінку яких можна досліджувати, спираючись на поведінку невипадкових функцій.

Окремі отримані результати (а саме – умови на необмеженість розв'язку) були презентовані на V Всеукраїнській науковій конференції «Актуальні проблеми сучасної математики і фізики і методика їх навчання», що проводилася 25-26 квітня 2016-го року у м. Києві. Результати на необмеженість та на асимптотичну еквівалентність розв'язків було включено до збірника матеріалів XVII Міжнародної наукової конференції ім. академ. Михайла Кравчука (секція «Теорія імовірностей та математична статистика»), що проходила в Києві 19-20 травня 2016-го року.

Література

[1] Гихман И. И., Скороход А. В. *Стохастические дифференциальные уравнения.* К.: Наукова думка, 1968. 354 с..

[2] Keller G., Kersting G., Rösler U., *On the asymptotic behaviour of solutions of stochastic differential equations* (1984) Z. Wahrsch. verw. Geb., vol. 68, 163–184.

[3] Arnold, L. *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*, John Willey and Sons, London, 1974

[4] Klesov O.I., Tymoshenko O.A. *Unbounded solutions of stochastic differential equations with time-dependent coefficients* Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp. – 2013. – 41.– p. 25-35.

[5] Buldygin V.V., Tymoshenko O.A., *On the exact order of growth of solutions of stochastic differential equastions with time-dependent coefficients*, Theory of stochastic processes, - 2010. - 2.- p. 12-22.

[6] Oksendal B., *Stochastic differential equations*, 5d, Springer, 2000

[7] Damiano Brigo, Fabio Mercurio. *Interest Rate Models - Theory and Practice*, 2nd, Springer Finance, 2006.

[8] A. Strauss and J. A. Yorke. *Perturbation theorems for ordinary differential equations.* J. Differential Equ., 3, 15–30, 1967.

[9] A. Strauss and J. A. Yorke. *On asymptotically autonomous differential equations.* Math. Systems Theory, 1, 175–182, 1967.

[10] A. D'Anna, A. Maio and V. Moauro. *Global stability properties by means of limiting equations*, Nonlinear Anal. 4 (2), 407–410, 1980.

[11] *J. A. D. Appleby and J. Cheng, On the asymptotic stability of a class of perturbed ordinary differential equations with weak asymptotic mean reversi-*

on, E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ., Proc. 9th Coll., No. 1 (2011), pp. 1-36.

[12] J. A. D. Appleby, J. Cheng and A. Rodkina, *Characterisation of the asymptotic behaviour of scalar linear differential equations with respect to a fading stochastic perturbation, Discrete. Contin. Dynam. Syst.*, Suppl., 79–90, 2011.

[13] Thomas Mikosch. *Elementary Stochastic Calculus with Finance in View*, Advanced series on statistical science & applied probability, World Scientific Publ., 1998

[14] Peter E. Kloeden, Eckhard Platen. *Numerical solution of stochastic differential equations*, Springer Verlag, 1995

[15] Dr. A.A. Kotze - *"Stock Price Volatility: a primer"*, `http://quantonline.co.za/documents/Volatility.pdf`, - 2015, Financial Chaos Theory

[16] Мітюк Л.О., Арламов О.Ю. *Методичні вказівки до розробки розділу «Охорона праці та безпека в надзвичайних ситуаціях» в дипломних роботах спеціалістів та магістерських дисертаціях студентів гуманітарного напрямку підготовки за освітньо-кваліфікаційними рівнями «спеціаліст» та «магістр»* , Київ, 2014, 32с

Додатки

Лістинг коду

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.figure as pltfig

t0 = 0                              # begin of observation
T = 5                           # end of observation
xinit = 0.27                      # initial value of x
N = 100000                        # total points of interval
dt = (T-t0)/N
time = np.linspace(t0, T, N)          # t-interval
mu, sigma = 0, 1
vol = 0.057
alpha = 0.3                   #
beta = 0.1164

def a(x, t):
    # here you are welcome to define your own function depending on x and t
    return alpha*(beta-x)

def b(x, t):
    # here you are welcome to define your own function depending on x and t
    return vol

Y = np.zeros(N)
Y[0] = xinit
W = np.random.normal(mu, sigma, N)*np.sqrt(dt)

X = np.zeros(N)
X[0] = xinit
for i in range(1, N):
    X[i] = X[i-1]+alpha*X[i-1]*dt

for i in range(1, N):
    Y[i] = Y[i-1]+a(Y[i-1], i*dt)*dt+b(Y[i-1], i*dt)*W[i-1]

plt.figure(num=None, figsize=(100, 20))
plt.plot(time[0:N], Y[0:N])
plt.plot(time[0:N], X[0:N], color="green")
plt.title('SDE, $\sigma$='+str(vol)+', $\\alpha$='+str(alpha)+' $\\beta$ =
 '+str(beta)+', number of steps ='+str(N))

mse = ((X-Y)**2).mean(axis=None)
print(mse)

plt.show()
```