Міністерство освіти і науки України

Національний технічний університет України

Комплексний аналіз

Методичні вказівки

до виконання типової розрахункової роботи

з комплексного аналізу

для студентів другого курсу

фізико-математичного факультету

Рекомендовано Методичною радою фізико-математичного факультету НТУУ «КПІ»

Київ

НТУУ «КПІ»

2016

Комплексний аналіз: Метод. вказівки до викон. типової розрахунк. роботи з компл. аналізу для студ. 2 курсу фіз..-мат. ф-ту/ Уклад.: В.В.Дрозд. – К.: НТУУ «КПІ», 2016

Гриф надано Методичною радою фізико-математичного факультету НТУУ «КПІ» (Протокол № від 2016 р.)

Навчальне видання

Комплексний аналіз

Методичні вказівки

до виконання типової розрахункової роботи

з комплексного аналізу

для студентів другого курсу

фізико-математичного факультету

Укладачі: Дрозд Вячеслав Володимирович

Віповідальний редактор: Буценко Юрій Павлович

Рецензент: Авраменко Людмила Григорівна

ПЕРЕДМОВА

Методичні вказівки до типової розрахункової роботи “Комплексний аналіз ” призначені для самостійної роботи студентів спеціальності математика фізико-математичного факультету НТУУ «КПІ». Їх зміст охоплює всі основні питання навчальної програми за названою темою.

Виконуючи роботу, треба спочатку вивчити теоретичний матеріал. Робота виконується в окремому зошиті з оформленою за встановленим зразком титульною сторінкою.

Розділ І. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

Комплексним числом z називається упорядкована пара дійсних чисел (x;y), для яких має місце дві аксіоми

1. $(x;y)+(a;b)=(x+a;y+b)$,
2. $(x;y)\cdot(a;b)=(xa-yb;xb+ya)$.

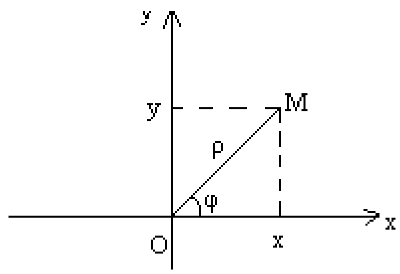
Оскільки числа (a;0) ведуть себе як дійсні числа, будемо писати (a;0)=a. Оскільки (0;1)(0;1)=-1, позначимо (0:1)=i. Тоді (x;y)=(x;0)+(0;y)=x+iy. Цей вираз називають алгебраїчною формою комплексного числа, де x та y – довільні дійсні числа, а i називається уявною одиницею, що задовольняє умову $i^2=-1$. Числа x та y називаються відповідно дійсною та уявною частинами комплексного числа z і позначаються x=Rez, y=Imz.

Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі виконуються за формулами:

1. $(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$
2. $(x_1+iy_1)-(x_2+iy_2)=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)$
3. $(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$

4. $(x_1+iy_1):(x_2+iy_2)=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$, $(x_2^2+y_2^2\neq 0)$

Комплексне число z=x+iy зображується в площині XOY точкою M(x,y) або вектором, початок якого є точка O(0,0), а кінець – точка M (мал.1).



(мал.1)

Довжина ρ вектора називається **модулем** комплексного числа і позначається через |z|, таким чином $\rho=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.

Кут φ, утворений вектором з віссю OX називається **аргументом** комплексного числа z і позначається $\varphi = ArgZ$, де $ArgZ = argZ + 2k\pi$,(k= $0, \pm 1, \ldots$). $argZ$ є головне значення $ArgZ$, причому $-\pi < argZ \leq \pi, \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$.

Довільне комплексне число z=x+iy($z\neq 0$) можна записати в **тригонометричній** формі:

$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, де ρ=|z|, $\varphi = argZ$.

Правила дій з комплексними числами у цій формі:

1. $\rho_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)\cdot\rho_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2) = \rho_1\rho_2\,[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1+\varphi_2)]$
2. $\rho_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1):\rho_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2) = \rho_{1/}\rho_2\,[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1-\varphi_2)]$
3. $[\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), n \in Z, \geq 2$
4. $\sqrt[n]{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), (n\in Z, \geq 2), k = 0,1,2,\ldots,n-1.$

<u>Приклад I.1.</u> Знайти всі значення $\sqrt[4]{\sqrt{3}-i}$ та побудувати їх.

Розв'язуваня: Число $\sqrt{3}$-i перетворимо на тригонометричну форму. Знаходимо

$\rho = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}$=2, arg($\sqrt{3} - i$)=$-\frac{\pi}{6}$.

Отже, $\sqrt{3} - i = 2(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right))$.

Знаходимо корені четвертого степеня з даного числа:

$\sqrt[4]{2(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)} = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{-\frac{\pi}{6}+2\pi k}{4} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{6}+2\pi k}{4})$, k=0,1,2,3.

Одержуємо чотири різних значення кореня:

При k=0: $z_1 = \sqrt[4]{2}(\cos(-\frac{\pi}{24}) + i\sin(-\frac{\pi}{24}))$;

При k=1: $z_2 = \sqrt[4]{2}(\cos(-\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{2}))$;

При k=2: $z_3 = \sqrt[4]{2}(\cos(-\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{2} * 2) + i\sin(-\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{2} * 2))$;

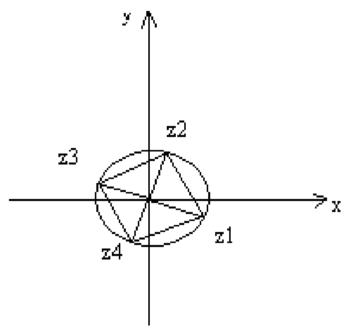
При k=3: $z_4 = \sqrt[4]{2}(\cos(-\frac{\pi}{24} + \frac{3\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{24} + \frac{3\pi}{2}))$.

Побудуємо їх.

Всі корені мають однаковий модуль $|z_k|=\sqrt[4]{2}$ (k=1,2,3,4). Звідси випливає, що всі вони лежать на колі з центром у початку координат радіуса $\sqrt[4]{2}$, а аргументи чисел z_2, z_3, z_4 відрізняються від аргумента z_1, відповідно на $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$. Таким чином, точки z_1, z_2, z_3, z_4 будуть лежати у вершинах квадрата, вписаного в коло радіуса $\sqrt[4]{2}$(мал.2).

Довільне комплексне число z$\neq$ 0 можна записати в показниковій формі, використовуючи формулу Ейлера $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$.

Z=$\rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, де ρ=|z|, $\varphi = arg z$.



Мал.2

Дії над комплексними числами, заданими в показниковій формі, виконуються за формулами:

1.$\rho_1\, e^{i\varphi_1} \cdot \rho_2\, e^{i\varphi_2} = \rho_1\rho_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$

2. $\rho_1\, e^{i\varphi_1} : \rho_2\, e^{i\varphi_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\, e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$

3.$(\rho e^{i\varphi})^n = \rho^n e^{in\varphi}$

4.$\sqrt[n]{\rho e^{i\varphi}} = \sqrt[n]{\rho}\; e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$;(k=0,1,2,…,n-1)

Завдання 1.

Звести до тригонометричної форми комплексне число:

1.) $\left(1+cos\frac{\Pi}{8}+isin\frac{\Pi}{8}\right)^{20}$
2. $\left(cos\frac{\Pi}{12}-isin\frac{\Pi}{12}\right)^{62}$
3. $\left(sin\frac{\Pi}{14}+icos\frac{\Pi}{14}\right)^{49}$
4. $\left(-cos\frac{\Pi}{7}+isin\frac{\Pi}{7}\right)^{21}$
5. $\left(sin\frac{\Pi}{11}-i-icos\frac{\Pi}{11}\right)^{55}$
6. $\left(1-sin\frac{\Pi}{18}-icos\frac{\Pi}{18}\right)^{81}$
7. $\left(1-cos\frac{\Pi}{5}+isin\frac{\Pi}{5}\right)^{35}$
8. $\left(-sin\frac{\Pi}{17}+icos\frac{\Pi}{17}\right)^{85}$
9. $\left(-cos\frac{\Pi}{13}-isin\frac{\Pi}{13}\right)^{13}$
10. $\left(-cos\frac{\Pi}{9}+isin\frac{\Pi}{9}\right)^{30}$
11. $\left(sin\frac{\Pi}{5}-i+icos\frac{\Pi}{5}\right)^{65}$
12. $\left(cos\frac{\Pi}{12}+i+isin\frac{\Pi}{12}\right)^{48}$
13. $\left(1+cos\frac{\Pi}{10}-isin\frac{\Pi}{10}\right)^{55}$
14. $\left(sin\frac{\Pi}{7}+icos\frac{\Pi}{7}\right)^{56}$
15. $\left(-cos\frac{\Pi}{7}+isin\frac{\Pi}{7}\right)^{42}$
16. $\left(sin\frac{\Pi}{18}+icos\frac{\Pi}{18}\right)^{33}$
17. $\left(1+sin\frac{\Pi}{8}+icos\frac{\Pi}{8}\right)^{52}$
18. $\left(cos\frac{\Pi}{8}+i-isin\frac{\Pi}{8}\right)^{92}$

19. $\left(1 - cos\frac{\Pi}{13} - isin\frac{\Pi}{13}\right)^{65}$
20. $\left(-sin\frac{\Pi}{10} + icos\frac{\Pi}{10}\right)^{65}$
21. $\left(sin\frac{\Pi}{13} - icos\frac{\Pi}{13}\right)^{39}$
22. $\left(sin\frac{\Pi}{5} - icos\frac{\Pi}{5}\right)^{55}$
23. $\left(1 - sin\frac{\Pi}{11} + icos\frac{\Pi}{11}\right)^{77}$
24. $\left(cos\frac{\Pi}{5} - i - isin\frac{\Pi}{5}\right)^{225}$
25. $\left(sin\frac{\Pi}{12} + i + icos\frac{\Pi}{12}\right)^{52}$
26. $\left(sin\frac{\Pi}{8} - icos\frac{\Pi}{8}\right)^{32}$
27. $\left(-sin\frac{\Pi}{12} + icos\frac{\Pi}{12}\right)^{74}$
28. $\left(sin\frac{\Pi}{8} + i - icos\frac{\Pi}{8}\right)^{48}$
29. $\left(1 + sin\frac{\Pi}{9} - icos\frac{\Pi}{9}\right)^{30}$
30. $\left(cos\frac{\Pi}{8} - i + isin\frac{\Pi}{8}\right)^{84}$

Завдання 2.

Представити в алгебраїчній формі:

1.

$$\left(\frac{i\sqrt{3}-1}{i-\sqrt{3}}\right)^{8}$$

2.

$$\left(\frac{2+2i}{i-\sqrt{3}}\right)^{14}$$

3.

$$\left(\frac{2+2\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{16}$$

4.

$$\left(\frac{4+4i}{1-i\sqrt{3}}\right)^{6}$$

5.

$$\left(\frac{-\sqrt{3}-i}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}\right)^{15}$$

6.

$$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}\right)^{5}$$

7.

$$\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{i-1}\right)^{5}$$

8.

$$\left(\frac{i\sqrt{2}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+i}\right)^{6}$$

9.

$$\left(\frac{i-1}{i+\sqrt{3}}\right)^{12}$$

10.

$$\left(\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{1+i}\right)^{12}$$

11.

$$\left(\frac{i-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}\right)^{10}$$

12.

$$\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^{6}$$

13.

$$\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{1-i}\right)^{10}$$

14.

$$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i\sqrt{3}}\right)^{10}$$

15.

$$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}\right)^{10}$$

16.

$$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{i+1}\right)^{16}$$

17.

$$\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{15}$$

18.

$$\left(1+\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{8}$$

19.

$$\left(1-\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{40}$$

20.

$$\left[\sin\frac{\pi}{4}+i\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)\right]^{40}$$

21.

$$\left(1+\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{8}$$

22.

$$\left(\frac{2+2\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{12}$$

23.

$$\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{8}$$

24.

$$\left(\frac{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{1+i}\right)^{10}$$

25.

$$\left(\frac{-2-2i}{i+\sqrt{3}}\right)^{8}$$

26.

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{i-1}\right)^{8}$$

27.

$$\left(\cos\frac{\pi}{7}-i\sin\frac{\pi}{7}\right)^{49}$$

28.

$$\left(-\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}\right)^{18}$$

29.

$$\left(\sin\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)^{44}$$

30.

$$\left(\cos\frac{\pi}{5}-i\sin\frac{\pi}{5}\right)^{55}$$

31.

$$\left(-\sin\frac{\pi}{8} - i\cos\frac{\pi}{8}\right)^{48}$$

Завдання 3.

Знайти всі значення коренів та побудувати їх:

1.$\sqrt[4]{16i}$

2.$\sqrt{1+i\sqrt{3}}$

3. $\sqrt[4]{1+i}$

4. $\sqrt[4]{-i}$

5. $\sqrt[3]{-i}$

6. $\sqrt[4]{2}$

7. $\sqrt[5]{4}$

8. $\sqrt[3]{-1+i}$

9. $\sqrt[4]{-16i}$

10. $\sqrt[4]{-2+i}$

11. $\sqrt[3]{i-1}$

12. $\sqrt[7]{3+2i}$

13. $\sqrt{2-2\sqrt{3}i}$

14. $\sqrt[5]{2i}$

15. $\sqrt[5]{4-4\sqrt{3}i}$

16. $\sqrt[3]{5}$

17. $\sqrt[3]{-9}$

18. $\sqrt{-1+i\sqrt{3}}$

19. $\sqrt[4]{2\sqrt{3}+2i}$

20. $\sqrt[5]{-1-i}$

21. $\sqrt[6]{1+i\sqrt{3}}$.

22. $\sqrt[3]{8}$

23. $\sqrt[3]{i}$

24. $\sqrt[3]{1-i}$

25. $\sqrt[3]{-2+2i}$

26. $\sqrt[4]{-81}$

27. $\sqrt[4]{-4}$

28. $\sqrt[5]{5}$

29. $\sqrt[6]{-1}$

30. $\sqrt[5]{1-i}$

Завдання 4.

Викреслити область, задану нерівностями .

1. $|z-1|\le 1,\ \ |z+1|>2.$

2. . $|z+i|\ge 1,\ \ |z|<2.$

3. $|z-i|\le 2,\ \ \operatorname{Re} z>1.$

4. $|z+1|\ge 1,\ \ |z+i|<1.$

5. $|z+1|<1,\ |z-i|\le 1.$

6. $|z+i|\le 2,\ |z-i|>2.$

7. $|z-1-i|\le 1,\ \operatorname{Im} z>1,\ \operatorname{Re} z\ge 1.$

8. $|z-1+i|\ge 1,\ \operatorname{Re} z<1,\ \operatorname{Im} z\le -1.$

9. $|z-2-i|\le 2,\ \operatorname{Re} z\ge 3,\ \operatorname{Im} z<1.$

10. $|z-1-i|\ge 1,\ 0\le \operatorname{Re} z<2,\ 0<\operatorname{Im} z\le 2.$

11. $|z+i|<2,\ 0<\operatorname{Re} z\le 1.$

12. $|z-i|\le 1,\ 0<\arg z<\pi/4.$

13. $|z-i|\le 2,\ 0<\operatorname{Im} z<2.$

14. $|z+i|>1,\ -\pi/4\le \arg z<0.$

15. $|z-1-i|<1,\ |\arg z|\le \pi/4.$

16. $|z|<2,\ -\pi/4\le \arg(z-1)\le \pi/4.$

17. $|z| \le 1,\ \arg(z+i) > \pi/4.$

18. $1 < |z-1| \le 2,\ \operatorname{Im} z \ge 0,\ \operatorname{Re} z < 1.$

19. $1 \le |z-i| < 2,\ \operatorname{Re} z \le 0,\ \operatorname{Im} z > 1.$

20. $|z| < 2,\ \operatorname{Re} z \ge 1,\ \arg z < \pi/4.$

21. $|z| > 1,\ -1 < \operatorname{Im} z \le 1,\ 0 < \operatorname{Re} z \le 2.$

22. $|z-1| > 1,\ -1 \le \operatorname{Im} z < 0,\ 0 \le \operatorname{Re} z < 3.$

23. $|z+i| < 1,\ -3\pi/4 \le \arg z \le -\pi/4.$

24. $|z-i| \le 1,\ -\pi/2 < \arg(z-i) < \pi/4.$

25. $z\overline{z} < 2,\ \operatorname{Re} z \le 1,\ \operatorname{Im} z > -1.$

26. $z\overline{z} \le 2,\ \operatorname{Re} z < 1,\ \operatorname{Im} z > -1.$

27. $1 < z\overline{z} < 2,\ \operatorname{Re} z > 0,\ 0 \le \operatorname{Im} z \le 1.$

28. $|z-1|<1,\ \arg z\le\pi/4,\ \arg(z-1)>\pi/4.$

29. $|z-i|<1,\ \arg z\ge\pi/4,\ \arg(z+1-i)\le\pi/4.$

30. $|z-2-i|\ge1,\ 1\le\operatorname{Re}z<3,\ 0<\operatorname{Im}z\le3.$

31. $|\operatorname{Re}z|\le1,\ |\operatorname{Im}z|<2.$

Завдання 5.

Визначити вид кривої.

1. $z=3\sec t+i2\operatorname{tg}t.$

2. $z=4\operatorname{cosec}t-i2\operatorname{ctg}t.$

3. $z=\operatorname{ctg}t-i2\operatorname{cosec}t.$

4. $z=-\operatorname{ctg}t+i3\operatorname{cosec}t.$

5. $z=3\operatorname{ch}2t+i2\operatorname{sh}2t.$

6. $z=2\operatorname{ch}3t-i3\operatorname{sh}3t.$

7. $z=5\operatorname{sh}4t+i4\operatorname{ch}4t.$

8. $z=-4\operatorname{sh}5t-i5\operatorname{ch}5t.$

9.

$$z=\frac{2}{\operatorname{ch}2t}+i4\operatorname{th}2t.$$

10.

$$z=\frac{4}{\operatorname{ch}4t}+i2\operatorname{th}4t.$$

11.

$$z=\operatorname{th}5t+\frac{5i}{\operatorname{ch}5t}.$$

12.

$$z=\frac{1}{\operatorname{sh}t}-i\operatorname{cth}t.$$

13.

$$z=2e^{it}+\frac{1}{2e^{it}}.$$

14.

$$z=3e^{it}-\frac{1}{2e^{it}}.$$

15.

$$z=-2e^{it}+\frac{1}{e^{it}}.$$

16.

$$z=2e^{2it}-\frac{1}{2e^{it}}.$$

17.

$$z=\frac{1+t}{1-t}+i\frac{2+t}{2-t}.$$

18.

$$z=\frac{t-1+it}{t\left(t-1\right)}.$$

19.

$$z=\frac{1+t}{1-t}+\frac{t}{1-t}\left(2-4i\right).$$

20.

$$z=\frac{2+t}{2-t}+i\frac{1+t}{1-t}.$$

21. $z=t^2+4t+20-i\left(t^2+4t+4\right).$

22. $z=2\sec t-i3\,\mathrm{tg}\,t.$

23. $z=-\sec t+i3\,\mathrm{tg}\,t.$

24. $z=4\,\mathrm{tg}\,t-i3\sec t.$

25. $z=3\,\mathrm{tg}\,t+i4\sec t.$

26. $z=-4\,\mathrm{tg}\,t-i2\sec t.$

27. $z=3\,\mathrm{cosec}\,t+i3\,\mathrm{ctg}\,t.$

28. $z=t^2+2t+5+i\left(t^2+2t+1\right).$

29. $z=2t^2+2t+1-i\left(t^2+t+4\right).$

30. $z=t-2+i\left(t^2-4t+5\right).$

31. $z = t^2 - 2t + 3 + i\left(t^2 - 2t + 1\right).$

Завдання 6.

Побудувати лінії та області, які задані такими співвідношеннями:

1. $|z+i| > |z-i|$
2. $1 \le |z+1| \le 2; \frac{\pi}{2} < argz < \pi$
3. $|z+2i| = |z|$
4. $|z+2| > |z|$
5. $3 \le |z+2i| < 4$
6. $|1+z| = |z+i|$
7. $|z-1+i| \le 2$
8. $|z| > 2 + Imz$
9. $|z+i| = |z-i|$
10. $|z| > |z+1|$
11. $-Rez + |z| \le 0$
12. $\frac{\pi}{4} \le \arg(z+1-i) \le \frac{3\pi}{4}$
13. $1 \le |z+2+i| \le 2$
14. $\frac{\pi}{3} < \arg(z-i) \le \frac{\pi}{2}$
15. $|z-i| + |z+i| = 4$
16. $Im\left(\frac{1}{z}\right) < -\frac{1}{2}$
17. $Im\frac{z-1+i}{z-3i} = 0$
18. $|z-1|^2 + |z+1|^2 = 5$
19. $Imz^2>2$
20. $Re\frac{z-i}{z-1} = 0$

21. $Im\frac{z-i}{z-1} = 0$

22. $Imz - 1 = |z|$

23. $Im\frac{z+i}{z+1} = 0$

24. $|z+1| + |z-1| \leq 3$

25. $\left|\frac{z-3}{z-2}\right| \geq 1$

26. $0 < Re\, iz < 1;\ |z+1| \geq 1$

27. $Rez+.\, Imz < 1;\ |z-1| < 1$

28. $|2z-3| \leq 1$

29. $|z-i| - |z+i| > 2$

30. $arg\frac{z-1}{z+1} = 0$

31. $|z-1| < |z-i|$

Розділ ІІ. Основні елементарні функції комплексної змінної

Функції e^z , sinz, та cosz визначаються як суми степеневих рядів:

$e^z=1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots$, причому функція e^z є періодичною з періодом $2\pi i$, тобто

$e^{z+2\kappa\pi i}=e^z$.

$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$

$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots$, причому функції sinz та cosz є періодичними з дійсним періодом 2π.

Мають місце формули Ейлера:

$e^{iz} = \cos z + i\sin z$;

$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$;

$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$.

Функції tgz та ctgz визначаються рівностями:

$\mathrm{tg}z = \frac{sinz}{cosz}$; $\mathrm{ctg} = \frac{cosz}{sinz}$;

Гіперболічні функції визначаються рівностями:

$\mathrm{sh}z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$; $\mathrm{ch}z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$;

$\mathrm{th}z = \frac{shz}{chz}$; $\mathrm{cth}z = \frac{chz}{shz}$;

Логарифмічна функція Lnz , де z≠0 , визначається як функція, обернена до показникової, причому

$\mathrm{Ln}z = \ln|z| + i\mathrm{Arg}z = \ln|z| + i\arg z + 2k\pi i$,

($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

Ця функція є багатозначною. Головним її значенням називається функція

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z .$$

Обернені тригонометричні функції Arcsinz, Arccosz, Arctgz є багатозначними і виражаються через логарифмічні функції

$\mathrm{Arcsin}z = -i\mathrm{Ln}\,(iz \pm \sqrt{1 - z^2})$,

$\mathrm{Arccos}z = -i\mathrm{Ln}\,(z \pm \sqrt{z^2 - z})$,

$\mathrm{Arctg}z = -\frac{i}{2}\,\mathrm{Ln}\,\frac{1+iz}{1-iz}$.

Загальна степенева функція $W = z^a$, де $a = \alpha + i\beta$, визначається співвідношенням

$z^a = e^{aLnz}$.

Завдання 7

Представити в алгебраїчній формі значення функції.

1. $\cos 2i$;
2. $\sin 3i$;
3. $\sin iy$, $y \in R$;
4. $\operatorname{ch} iy$, $y \in R$;
5. $\operatorname{tg} 2i$;
6. $\operatorname{ctg}(1-i)$;
7. $\sin(1+2i)$;
8. $\operatorname{sh} iy$, $y \in R$;
9. $\operatorname{tg}(2-i)$;
10. $\operatorname{ctg}(1+i)$;
11. $\operatorname{sh}(i-2)$;
12. $\cos(3+4i)$;
13. $\operatorname{ch}(-i)$;
14. $\cos(2i+1)$;
15. $\sin^2 i$;
16. $\cos(1-i)$;
17. $\sin(3i+4)$;
18. $\operatorname{sh}(2+i)$;
19. $\operatorname{tg}(1-i)$;
20. $\operatorname{tg}^2(2i)$;
21. $\sin \quad i$;
22. $\cos(1-i)$;
23. $\operatorname{ctg}^2(1+i)$;
24. $\sin\frac{i}{2}$;
25. $\cos(3i-1)$;
26. $\operatorname{ch}(1-i)$;
27. $\operatorname{sh}(3i-4)$;
28. $\sin \quad (2+i)$;
29. $\cos(1-4i)$;
30. $\operatorname{ctg}(1+2i)$.

Завдання 8

Представити в алгебраїчній формі значення функції.

1 ln(-2) ; Ln(-2) ;

2 lni ; Lni ;

3 ln(2+3i) ;

4 Ln(1+i) ;

5 i^i ;

6 i^{i+1} ;

7 2^i ;

8 $e^{-2+\frac{\pi i}{3}}$;

9 ln(4i – 3) ; Ln(4i – 3) ;

10 3^i ;

11 $(i+1)^i$;

12 ln(-1) ; Ln(-1) ;

13 $e^{2+\pi i}$;

14 ln(i^2 - 1) ; Ln(i^2 - 1) ;

15 ln$(i+1)^2$;

16 Ln$(3i+4)^2$;

17 $2^{(i+1)^{10}}$;

18 $(1-i)^i$;

19 i^{2i-1} ;

20 i^{lni} ;

21 $(lni)^i$;

22 $(1-2i)^{i+1}$;

23 Ln(ei) ;

24 $(\pi i)^i$;

25 $(1-i)^{10i}$;

26 $\mathrm{Ln}(1+i)^{10}$;

27 $\mathrm{Ln}\ 2^i$;

28 $(-2)^{5i}$;

29 $(i+1)^{2i}$;

30 $(3i-4)^i$;

Завдання 9

Представити в алгебраїчній формі .

1 Arcsin3;

2 Arcsin3i;

3 Arccos2i;

4 Arcsin2i;

5 Arctg i;

6 Arctg2i;

7 Arcsin i;

8 Arcsin(2-i);

9 Arcsin$(i-1)^4$;

10 Arccos$(i-1)$;

11 Arctg(i+1);

12 Arctg(i-1);

13 Arcsin (i^2+i-1);

14 Arccos5i;

15 Arccos(2+2i);

16 Arctg(1-2i);

17 Arctg$(i^4 - i)$;

18 Arcsin(5i-3);

19 Arccos(-i);

20 Arctg(-i);

21 Arcsin(-i);

22 Arcsin(-3i);

23 Arccos(-3i);

24 Arctg(i+2);

25 Arctg(i+3);

26 Arcsin $\frac{2}{i}$;

27 Arccos $\frac{1-i}{1+i}$;

28 Arctg $\frac{i}{i+1}$;

29 Arctg $\frac{1}{i}$;

30 Arcsin $\frac{2+i}{i}$;

Задача 10.

Подати в алгебраїчній формі .

1. $\sin(\pi/6 - 3i)$.
2. $\cos(\pi/3 + 3i)$.
3. $\mathrm{Ln}(1 - i)$.
4. $\mathrm{sh}(1 - \pi i/3)$.
5. $\mathrm{ch}(2 - \pi i/6)$.

6.

1^{2i}.

7.

$\sin(\pi/3 - 2i)$.

8.

$\cos(\pi/6 - i)$.

9.

i^{3i}.

10.

$\mathrm{sh}(2 - \pi i)$.

11.

$(-i)^{5i}$.

12.

$(-1)^{4i}$.

13.

$\mathrm{ch}(3 + \pi i/4)$.

14.

$\sin(\pi/4 + 2i)$.

15.

$\cos(\pi/6 + 2i)$.

16.

$\mathrm{Ln}\, 6$.

17.

$\mathrm{sh}(2 + \pi i/4)$.

18.

$\mathrm{ch}(2 + \pi i/2)$.

19.

$\mathrm{Ln}(1 + i)$.

20.

$\sin(\pi/3 + i)$.

21.

$\cos(\pi/4 + i)$.

22.

$$\mathrm{Ln}\left(\sqrt{3}+i\right).$$

23.

$$\mathrm{sh}\left(1+\pi i/2\right).$$

24.

$$\mathrm{ch}\left(1-\pi i\right).$$

25.

$$\mathrm{Ln}\left(1+\sqrt{3}i\right).$$

26.

$$\mathrm{Ln}\left(-1+i\right).$$

27.

$$\cos\left(\pi/4-2i\right).$$

28.

$$\sin\left(\pi/2-5i\right).$$

29.

$$\mathrm{sh}\left(3+\pi i/6\right).$$

30.

$$\mathrm{ch}\left(1+\pi i/3\right).$$

Задача 11.

Подати в алгебраїчній формі .

1.

$$\mathrm{Arctg}\left(\frac{3+4i}{5}\right).$$

2.

$$\mathrm{Arcth}\left(\frac{8+i3\sqrt{3}}{7}\right).$$

3.

$$\operatorname{Arctg}\left(\frac{3\sqrt{3}-8i}{7}\right).$$

4.

$$\operatorname{Arth}\left(\frac{4-3i}{5}\right).$$

5.

$$\operatorname{Arctg}\left(\frac{-2\sqrt{3}+3i}{7}\right).$$

6.

$$\operatorname{Arcth}\left(\frac{3-i2\sqrt{3}}{7}\right).$$

7.

$$\operatorname{Arccos}(-5).$$

8.

$$\operatorname{Arsh}(-4i).$$

9.

$$\left(-\sqrt{3}+i\right)^{-6i}.$$

10.

$$\operatorname{Arcctg}\left(\frac{2\sqrt{3}+3i}{7}\right).$$

11.

$$\operatorname{Arth}\left(\frac{3+i2\sqrt{3}}{7}\right).$$

12.

$$\operatorname{Arcth}\left(\frac{4+3i}{5}\right).$$

13.

$$\operatorname{Arctg}\left(\frac{3\sqrt{3}+8i}{7}\right).$$

14.

$\operatorname{Arccos}(-3i)$.

15.

$(4-3i)^{i}$.

16.

$(-12+5i)^{-i}$.

17.

$\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{-3i}$.

18.

$\operatorname{Arcsin} 4$.

19.

$\operatorname{Arch}(-2)$.

20.

$$\operatorname{Arctg}\left(\frac{-2\sqrt{3}+3i}{3}\right).$$

21.

$$\operatorname{Arcth}\left(\frac{3-4i}{5}\right).$$

22.

$$\operatorname{Arcctg}\left(\frac{4+3i}{5}\right).$$

23.

$$\operatorname{Arth}\left(\frac{3+i2\sqrt{3}}{3}\right).$$

24.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-i\right).$$

25.

$$\operatorname{sh}\left(1-\frac{\pi}{2}i\right).$$

26.

$(-1-i)^{4i}$.

27.

$\sin\left(\pi/4+i\right).$

28.

$\mathrm{Arch}\left(3i\right).$

29.

$\mathrm{Ln}\left(-1-i\right).$

30. $i^{\,i}$

Розділ III. Аналітичні функції, їх зв'язок з гармонічними функціями

Функція W=f(z)=u(x,y) + iv(x,y) називається аналітичною в точці $z \in D$, якщо вона диференційовна як в самій точці z , так і в деякому її околі.

Функція f(z) називається аналітичною в області D , якщо вона диференційована в кожній точці цієї області.

Функція f(z) диференційовна в точці, якщо її дійсна та уявна частини є диференційовні як функції двох змінних і виконуються рівності

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}, \end{cases}$$

які називаються умовами Коші-Рімана.

Функції u(x,y) та v(x,y) задовольняють рівняння

$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$ і називаються гармонічними функціями.

Якщо відома одна з функцій u чи v, то другу можна знайти, використовуючи умови Коші-Рімана, з точністю до константи.

Приклад .3.I. Знайти аналітичну функцію

f(z)=u(x,y) + iv(x,y) по заданій дійсній частині

Re f(z)=u=chx cosy.

Розв'язування. Для того щоб знайти f(z), знайдемо Im f(z). Для цього скористаємось умовами Коші-Рімана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

З першого рівняння, підставивши значення u , знайдемо

$$\frac{\partial u}{\partial y} = shx\, cosy.$$

Проінтегруємо цей вираз по y :

V=$\int shx\, cosy\, dy = shx\, siny + \varphi(x)$.

Оскільки при інтегруванні по y ми зважали x постійним, то довільна змінна так залежить від x. Тому ми її написали у вигляді $\varphi(x)$. Таким чином, задача буде розв'язана, якщо ми знайдемо $\varphi(x)$. Для її визначення скористаємося другим рівняння Коші-Романа. Знайдемо $\frac{\partial u}{\partial y}$ з умови задачі

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -chx\, siny, \frac{\partial v}{\partial x} = chx\, siny + \varphi'(x).$$

Тоді $chx\, siny = chx\, siny + \varphi'(x)$,

$\varphi'(x) = 0$ => $\varphi(x) = C$.

Отже, $v = shx\, siny$ +C ,

Функція f(z) має вигляд:

$$\begin{aligned} f(z) = chx\, cosy + i(shx\, siny + C) &= chx\, cosy + i\, shx\, siny + Ci \\ &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} cosy + i\, \frac{e^x - e^{-x}}{2} siny + Ci \\ &= \frac{e^x}{2}(cosy + i\, siny) + \frac{e^{-x}}{2}(cosy - i\, siny) + Ci = \frac{e^x}{2} e^{iy} + \frac{e^{-x}}{2} e^{-iy} + Ci \\ &= Ci + \frac{1}{2}\left(e^{x+iy} + e^{-(x+iy)}\right) = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) + Ci = chz + Ci. \end{aligned}$$

Відповідь: $f(z) = chz + Ci$.

Завдання 12

Перевірити, чи є функція $f(z)$ аналітичною. Якщо так, знайти її похідну.

1 $f(z) = (x^2 - y^2) + 2xyi$;

2 $f(z) = (x^2 + y^2) - 2xyi$;

3 $f(z) = e^{-y}cosx + ie^{-y}sinx$;

4 $f(z) = e^{x}cosy + ie^{x}siny$;

5 $f(z) = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2 - y^3)$;

6 $f(z) = x(x^2 + y^2) + iy(x^2 + y^2)$;

7 $f(z) = (x^2 - y^2 - 2x) + i2y(x - 1)$;

8 $f(z) = (x^2 - y^2 + 2x) + i(4xy + 2y)$;

9 $f(z) = (4xy - y) - i(2x^2 - x - 2y^2)$;

10. $f(z) = (3x^2y + 2x) + i(4xy^2 + 2y)$;

11. $f(z) = (x^2 - y^2 - y) + i(2xy + x)$;

12. $f(z) = (4x\ siny + cosx) + i(cosx - 4cosy)$;

13. $f(z) = sinx\ chy + i\ cosx\ she$;

14. $f(z) = \sin(x - iy)$;

15. $f(z) = -2cosx\ chy - i\ 2\ shy\ sinx$;

16. $f(z) = \cos(x - iy)$;

17. $f(z) = \cos(3x + y)\,ch(3y - x) + i\sin(3x + y)\,sh(3y - x)$;

18. $f(z) = chx\ chy - i\ shx\ shy$;

19. $f(z) = shx\ cosy + i\ siny\ chx$;

20. $f(z) = e^{x^2+y^2}cos2xy - ie^{x^2+y^2}sin2xy$;

21. $f(z) = e^{x^2-y^2}cos2xy + ie^{x^2-y^2}sin2xy$;

22. $f(z) = (2x^3 - 3y^2x) + i(6x^2y - y^3)$;

23. $f(z) = (2x^2 - 2y^2 - 3x) + i(4xy + 3y)$;

24. $f(z) = z^2 - ReZ$;

25. $f(z) = chz$;

26. $f(z) = z - 3\check{z} + 1$;

27. $f(z) = shz$;

28. $f(z) = z\,\check{z} + Re(i\check{z})$;

29. $f(z) = sinz$;

30. $f(z) = 2z + i\ Im$;

Завдання 13

Знайти аналітичну функцію $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, якщо задана її дійсна $Re\ f(z) = u(x,y)$ або уявна частина $Im\ f(z) = v(x,y)$.

1 $u(x,y) = e^{x}cosy$;

2 $v(x,y) = e^{-y}sinx$;

3 $u(x,y)$ =3x+2y+1;
4 $v(x,y) = 2x - y + 4$;
5 $u(x,y) = e^{y} cosx$;
6 $v(x,y) = e^{-x} cosy$;
7 $u(x,y) = shx\ cosy$;
8 $v(x,y) = -shx\ siny$;
9 $u(x,y) = cosx\ chy$;
10 $v(x,y) = sinx\ shy$;
11 $u(x,y) = 2^{-x}\cos(yln2)$;
12 $v(x,y) = x^2 - 6xy - y^2)$;
13 $u(x,y) = -x^2 + 4xy + y^2)$;
14 $v(x,y) = 2x^3 - 6xy^2$;
15 $u(x,y) = x^3 + x^2y - 3xy^2 - y^3$;
16 $v(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 2y$;
17 $u(x,y) = 6x^2y - 2y^3$;
18 $v(x,y) = y^3 - 3x^2y + 6xy^2 - 2x^3$;
19 $u(x,y) = 3x^2y - y^3 + 4x$;
20 $v(x,y) = x^2 - y^2 + 3y$;
21 $u(x,y) = x^2 - y^2 + 5x$;
22 $v(x,y) = 2^{y}\cos(xln2)$;
23 $u(x,y) = 3^{x}\sin(yln3)$;
24 $v(x,y) = 2^{y}\sin(xln2)$;
25 $u(x,y) = 2y^2 - 2x^2 + x$;
26 $v(x,y) = 3^{-y}\cos(xln3)$;
27 $u(x,y) = y^2 - x^2 + 2xy - y$;
28 $v(x,y) = -sh2y\sin(2x+1)$;
29 $u(x,y) = y^2 - x^2$;
30 $v(x,y) = arctg\frac{y}{x}$;

Завдання 14

Відновити аналітичну в околі точки z_0 функцію $f(z)$ за відомою дійсною $u(x,y)$ або уявною $v(x,y)$ частинами та значенням $f(z_0)$.

1. $u = e^{-y}\cos x,\ f(0) = 1.$

2. $u = y - 2xy,\ f(0) = 0.$

3. $\upsilon = x^2 - y^2 + 2x + 1, f(0) = i.$

4. $u = x^2 - y^2 - 2x + 1, f(0) = 1.$

5. $\upsilon = 3x^2 y - y^3 - y, f(0) = 0.$

6. $\upsilon = 2xy + y, f(0) = 0.$

7. $\upsilon = 3x^2 y - y^3, f(0) = 1.$

8. $u = e^x (x \cos y - y \sin y), f(0) = 0.$

9. $\upsilon = 2xy + 2x, f(0) = 0.$

10. $u = 1 - \sin y \cdot e^x, f(0) = 1 + i.$

11. $\upsilon = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^x} \sin y, f(0) = 2.$

12. $\upsilon = 1 - \dfrac{y}{x^2 + y^2}, f(1) = 1 + i.$

13. $u = e^{-y}\cos x + x,\ f(0) = 1.$

14. $\upsilon = e^{-y}\sin x,\ f(0) = 1.$

15. $u = \dfrac{x+1}{(x+1)^2 + y^2},\ f(0) = 1.$

16. $u = x/\left(x^2 + y^2\right) + x,\ f(1) = 2.$

17. $\upsilon = x^2 - y^2 - x,\ f(0) = 0.$

18. $u = -2xy - 2y,\ f(0) = i.$

19. $\upsilon = 2xy - 2y,\ f(0) = 1.$

20. $u = x^3 - 3xy^2 - x,\ f(0) = 0.$

21. $\upsilon = 2xy + x,\ f(0) = 0.$

22. $u = x^2 - y^2 + x,\ f(0) = 0.$

23. $u = x^3 - 3xy + 1,\ f(0) = 1.$

24. $v = e^{x}\left(y\cos y + x\sin y\right), f\left(0\right) = 0.$

25. $u = x^{2} - y^{2} - 2y, f\left(0\right) = 0.$

26. $u = \dfrac{e^{2x} + 1}{e^{x}}, f\left(0\right) = 2.$

27. $u = \dfrac{x}{x^{2} + y^{2}}, f\left(1\right) = 1 + i.$

28. $v = e^{-y}\sin x + y, f\left(0\right) = 1.$

29. $v = e^{x}\cos y, f\left(0\right) = 1 + i.$

30. $v = -\dfrac{y}{\left(x+1\right)^{2} + y^{2}}, f\left(0\right) = 1.$

31. $v = y - \dfrac{y}{x^{2} + y^{2}}, f\left(1\right) = 2.$

Якщо функція $w = f(z)$ аналітична в точці z_0 і $f'(z_0)$ не дорівнює нулеві, то відображення, яке задає ця функція, розтягує площину з коефіцієнтом $r = |f'(z_0)|$, тобто усі відстані $|\Delta w|$ в точці $f(z_0)$ будуть в r раз більше, ніж відповідні відстані $|\Delta z|$ у точці z_0 не залежно від напряму. В той же час усі криві, що проходять через точку z_0, повертаються на кут, що дорівнює $\varphi = \arg f'(z_0)$.

Приклад 3.2 Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту при відображенні

$w = \frac{e^z+1}{e^z-1}$ в точці $z_0 = \frac{\pi i}{2}$.

Розв’язання.

$$w' = \frac{e^z(e^z-1) - e^z(e^z+1)}{(e^z-1)^2} = -\frac{2e^z}{(e^z-1)^2}$$

Підставимо в похідну точку z_0:

$$w'\left(\frac{\pi}{2}i\right) = -\frac{2i}{(i-1)^2} = 1$$

Отже, $r = \left|w'(\frac{\pi}{2}i)\right| = 1$

$$\varphi = \arg w'(\frac{\pi}{2}i) = 0.$$

Відповідь: $r = 1, \varphi = 0$.

Завдання 15

Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту в точці z_0 , при відображенні комплексної площини, яка задається функцією:

1. $\frac{z+1}{z-1}$; $z_0 = 2i$
2. $\frac{2z+3}{z+4}$; $z_0 = 1$
3. $\frac{z}{z+2i}$; $z_0 = -i$
4. e^{-3z}; $z_0 = \frac{\pi}{3}i$
5. $\cos 2z$; $z_0 = 2i$
6. $Sin 3z$; $z_0 = i$
7. $2z^2 + 5$; $z_0 = \sqrt{3} - i$
8. $2z^3 + 4$; $z_0 = i - 1$
9. $\frac{z+2}{z-i}$; $z_0 = -i$

10. $e^{-5z}; \quad z_0 = \frac{\pi}{10} i$

11. $sh(z); \quad z_0 = \frac{\pi}{2} i + 2$

12. $ch(2z); \quad z_0 = \frac{\pi}{4} i + 3$

13. $sh(2z); \quad z_0 = \frac{\pi}{2} i + 1$

14. $e^{5z}; \quad z_0 = \frac{\pi}{10} i$

15. $e^{-2z}; \quad z_0 = \frac{\pi}{2} i + 1$

16. $z^3 + 2z; \quad z_0 = 1 + 2i$

17. $\frac{z+1}{z}; \quad z_0 = 1 + i$

18. $\frac{z-1}{z}; \quad z_0 = 1 - i$

19. $\frac{1}{z}; \quad z_0 = i$

20. $\frac{z+i}{z-i}; \quad z_0 = 1$

21. $Sin(z); \quad z_0 = \frac{\pi}{2} + i$

22. $\cos(z); \quad z_0 = \frac{\pi}{2} - i$

23. $Sin(z); \quad z_0 = i - \frac{\pi}{2}$

24. $\cos(z); \quad z_0 = i + \pi$

25. $e^{z}; \quad z_0 = 1 + \frac{\pi}{3} i$

26. $e^{2z}; \quad z_0 = 2 - \frac{\pi}{2} i$

27. $e^{3z}; \quad z_0 = \pi \cdot i$

28. $z^2 + 1; \quad z_0 = 1 + i\sqrt{3}$

29. $z^3 - 5; \quad z_0 = 1 + i$

30. $ch(z); \quad z_0 = \pi \cdot i + 1$

Завдання 16

Яка частина комплексної площини розтягується при відображенні

1. e^{5z};
2. 7(z-4)$^{-3}$;
3. e^{-2z};
4. z^3+2;
5. $\frac{z+1}{z}$;
6. $\frac{z-1}{z}$;
7. Ln(2z+4);
8. $\frac{1}{z}$;
9. $\frac{z+i}{z-i}$;
10. e^{z};
11. 4(2z-6)$^{-4}$;
12. e^{2z};
13. 3ln(z-5)+3;
14. e^{3z};
15. z^2+1;
16. 16(z-3)$^{-3}$;
17. z^3-5;
18. $\frac{z+1}{z-1}$;
19. 8ln(z-5)+1;
20. $\frac{2z+3}{z+4}$;
21. 4(3z+9)$^{-2}$+5;
22. $\frac{z}{z+2i}$;
23. e^{-3z};
24. $2z^2+5$;
25. 6lnz+3;
26. $2z^3+4$;
27. $\frac{z+2}{z-i}$;
28. e^{-5z};
29. 9(2z-6)$^{-5}$+7;
30. 4ln(3z-6)+7.

Розділ IV. ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

Якщо на площині задана гладка чи кусково-гладка орієнтована крива L кінцевої довжини і в точках цієї кривої задана неперервна комплекснозначна функція $f(z) = U(x, y) + iV(x, y)$,то інтегралом $\int_L f(z)\, dz$ називається $\lim_{d \to 0} \sum_{j=1}^{n} f(\varepsilon_j)(z_j - z_{j-1})$, де $z_0 = a, z_n = b$-відповідно комплексні координати початку і кінця кривої L , а z_j , j=1,2,...,n-1 ,-комплексні координати проміжних точок на кривій L, розміщених в порядку зростання їх дугових координат, рахуючи від точки z_o, під ε_j розуміємо будь-яку точку тієї дуги кривої L , кінці якої є z_{j-1} та z_j, d=max$|z_j - z_{j-1}| \to 0$. Якщо припустити , що крива L розміщена в області D, в якій задана функція $f(z)$, то точки $a = z_o$ і $z_n = b$ можна з'єднати нескінченною множиною гладких чи кусково-гладких кривих, які лежать в D.

Тоді $\int_L f(z)dz$ буде функцією кривої L, тобто для різних кривих він буде мати різні значення . Однак, якщо функція $f(z)$ є задана однозначна аналітична в D, а область D однозв'зна, то інтеграл $\int_L f(z)dz$ залежить тільки від координат початкової і кінцевої точок кривої L, тобто

$$\int_L f(z)dz = \int_a^b f(z)dz \tag{1}$$

Це є наслідком такої теореми.

<u>Теорема Коші</u>. Якщо L_o є проста замкнена гладка чи кусково-гладка крива, що знаходиться в однозв'язній області, а $f(z)$ є однозначна аналітична функція в цій області , то $\int_{L_o} f(z)dz = 0$, в якому б напрямку не відбувався обхід кривої L_o.

Якщо межа області D складається з декількох простих зімкнених гладких чи кусково-гладких кривих L_k, де $k = 0,1,2, \dots, n$, розміщених таким чином, що крива L=L_0 містить всередині себе всі інші, які при цьому попарно не перетинаються і не лежать одна всередині другої, то для такої області, в припущенні, що $f(z)$ аналітична всередині D і на її межі , має місце формула

$$\int_L f(z)\, dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{L_k} f(z)dz , \tag{2}$$

де всі криві обходяться в одному і тому ж напрямку, тобто проти годинникової стрілки. Такий обхід вважається обходом в додатному напрямку.

В тих же умовах має місце формула

$$f(z_o) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)}{z-z_o}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{L_k} \frac{f(z)}{z-z_o}dz \quad , \qquad (3)$$

де z_0 є довільною точкою області D, а обхід усіх кривих проводиться в додатному напрямку.

Якщо внутрішні криві L_k відсутні, то з (3) одержуємо:

$$f(z_o) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)}{z-z_o}dz \qquad (4)$$

Це <u>інтегральна формула Коші</u> . Формула Коші для похідної має вигляд

$$f^{(n)}(z_o) = \frac{n!}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)}{(z-z_o)^{n+1}}dz \text{ , n=0,1,2,...} \qquad (5)$$

<u>Обчислення інтегралів від функції комплексної змінної</u>

I. Обчислення $\int_L f(z)dz$, де $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ неперервна комплекснозначна функція у всіх точках кривої L-гладкої, або кусково-гладкої, зводиться до обчислення криволінійних інтегралів:

$$\int_L f(z)dz = \int_L (u(x,y) + iv(x,y))(dx + idy) = \int_L u(x,y)dx - v\,(x,y)dy + i\int_L v(x,y)dx + u(x,y)dy \qquad (1)$$

Якщо крива L задана параметричними рівняннями:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \qquad (2)$$

де $t_o \le t \le T$, то, підставивши під знак інтеграла замість x, y функції $x(t)$, $y(t)$, а замість dx, dy-диференціали цих функцій, можна звести обчислення криволінійних інтегралів в (1) до обчислення визначених інтегралів зі змінною інтегрування t, з нижньою межею t_o і верхньою межею T. З другого боку, параметричні рівняння (2) рівносильні рівнянню в комплексній формі:

$z = z(t), t_o \le t \le T,$ де $z(t) = x(t) + iy(t)$. Тоді $dz = z'(t)dt$ і інтеграл можна обчислити, користуючись формулою.

$$\int_L f(z)dz = \int_{t_o}^{T} f(z(t)) * z'(t)dt \ ,$$

<u>Приклад 4.1.</u> Обчислити інтеграл

$\int_L (z + Rez)\, dz$, де L-відрізок, що з'єднує точки $z_1 = 3i$ та $z_2 = 1 - i$.

Розв'язування: Числу $z_1 = 3i$ відповідає точка А(0;3), числу $z_2 = 1 - i$ відповідає точка В(1;-1). Рівняння прямої, яка проходить через точки А та В, має вигляд $y = -4x + 3$. Запишемо рівняння в параметричній формі, наприклад, так:

$\begin{cases} x = t \\ y = 3 - 4t \end{cases}$, де $0 \le t \le 1,$

і в комплексній формі:

$z = t + (3 - 4t)i,\ 0 \le t \le 1$, тоді $dz = (1 - 4i)dt$ і

$\int_L (z + Rez)dz = \int_0^1 (t + (3 - 4t)i + t)(1 - 4i)dt = (1 - 4i)(1 + i) = 5 - 3i.$

2. При обчисленні інтегралів по зімкненому контуру можна використати теорему Коші (1), інтегральну формулу Коші (4) та формулу (5).

Приклад 4.2. Обчислити інтеграл

$\int_L \frac{e^z dz}{z(z-2i)}$,

де L-коло радіуса 2 з центром в точці 3i.

Розв'язування. Функція $f(z) = \frac{e^z}{z}$ всередині кола, обмеженого колом, аналітична, тому, використовуючи інтегральну формулу Коші (4), одержимо

$\int_L \frac{e^z}{z(z-2i)} dz = \int_L \frac{f(z)}{z-2i} dz = \pi i f(2i) = 2\pi i \frac{e^{2i}}{2i} = \pi(\cos 2 + i \sin 2)$

Приклад 4.3. Обчислити інтеграл

$\int_L \frac{\cos z}{(z-i)^3} dz$,

де L-зімкнений контур, однократно оббігаючий точку i.

Розв'язування. Застосуємо формулу (5) до функції

$$f(z) = \cos z :$$

$\int_L \frac{\cos z}{(z-i)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} \frac{d^2(\cos z)}{dz^2}(i) = -\pi i \cos i = -\pi i ch 1.$

Завдання 17.

Обчислити інтеграл $\int_L f(z)\, dz$ по лініях, що з'єднують точки $z_1 = 0$ та $z_2 = 1 + i$

1)по прямій;

2)по параболі $y = x^2$;

3)по ламаній $z_1 z_2 z_3$, де $z_3 = 1$(завдання $1 - 15$);

$z_3 = i$ (завдання 16-30).

1 $f(z) = zRez$;
2 $f(z) = \bar{z}Rez$;
3 $f(z) = Re(z^2 + 1)$;
4 $f(z) = Re(z^3 + 1)$;
5 $f(z) = z^2\bar{z}$;
6 $f(z) = \bar{z}^2$;
7 $f(z) = (iRez)^2$;
8 $f(z) = Rez + Imz$;
9 $f(z) = |z|^2$;
10 $f(z) = Re(\bar{z}^3 + i)$;
11 $f(z) = \bar{z} + Rez$;
12 $f(z) = z + Re(z + 1)$;
13 $f(z) = Re(z^2 + \bar{z}^2)$;
14 $f(z) = \bar{z}^2 Rez$;
15 $f(z) = \bar{z} + 1 - i$;
16 $f(z) = zImz$;
17 $f(z) = \bar{z}Imz$;
18 $f(z) = Im(z^2 + 1)$;
19 $f(z) = Im(z^3 + 1)$;
20 $f(z) = z\bar{z}^2$;
21 $f(z) = \bar{z}^3$;
22 $f(z) = (iImz)^2$;
23 $f(z) = \bar{z} + Im\bar{z}$;

24 $f(z) = Im(\bar{z}^3 + 1)$;
25 $f(z) = \bar{z}^2 Imz$;
26 $f(z) = Im(z^2 + \bar{z}^2)$;
27 $f(z) = z + Im(z + i)$;
28 $f(z) = z^2 \cdot Im(z)$;
29. $f(z) = (1 - i)\bar{z}$;

30. $f(z) = Im(z \cdot |z|^2)$.

Завдання 18.

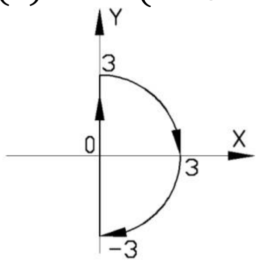
Обчислити $\oint_C f(z)dz$, де $f(z)$ задані в завданні 16 по контуру C, який складається з верхнього півкола $|z| = a$ та відрізка дійсної осі, з обходом контуру проти годинникової стрілки.

Завдання 19

Варіант №1

Обчислити інтеграл $\oint_L f(z)dz$ вздовж кривої, заданої графічно, якщо

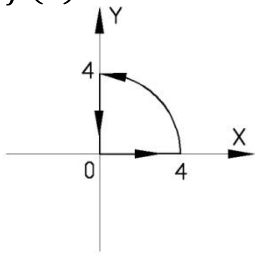
$$f(z) = \mathrm{Im}(z^2 + \bar{z}^2)$$



Варіант №2

Обчислити інтеграл $\oint_L f(z)dz$ вздовж кривої, заданої графічно, якщо

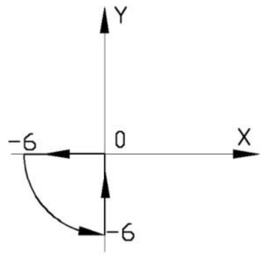
$$f(z) = \bar{z} + \mathrm{Im}\bar{z}$$



Варіант №3

Обчислити інтеграл $\oint_L f(z)dz$ вздовж кривої, заданої графічно, якщо

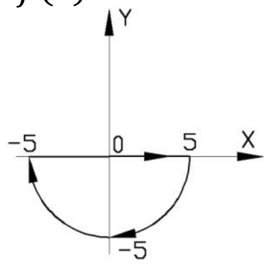
$$f(z) = \mathrm{Im}(\mathrm{z}^2 + i)$$



Варіант №4

Обчислити інтеграл $\oint_L f(z)dz$ вздовж кривої, заданої графічно, якщо

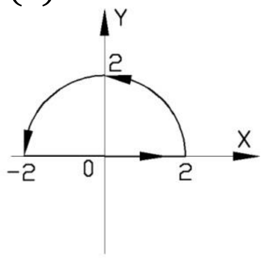
$$f(z) = z^2 \cdot \mathrm{Im}z$$



Варіант №5

Обчислити інтеграл $\oint_L f(z)dz$ вздовж кривої, заданої графічно, якщо

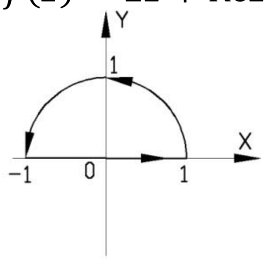
$$f(z) = \mathrm{Re}z^3 - 10i$$



Варіант №6

Обчислити інтеграл $\oint_L f(z)dz$ вздовж кривої, заданої графічно, якщо

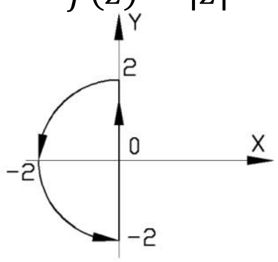
$$f(z) = 2\bar{z} + \mathrm{Re}z$$



Варіант №7

Обчислити інтеграл $\oint_L f(z)dz$ вздовж кривої, заданої графічно, якщо

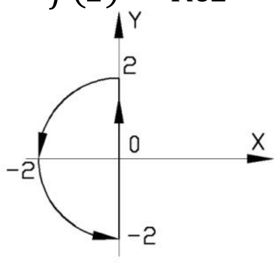
$$f(z) = |\bar{z}|$$



Варіант №8

Обчислити інтеграл $\oint_L f(z)dz$ вздовж кривої, заданої графічно, якщо

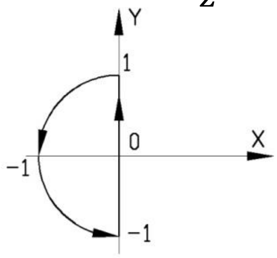
$$f(z) = \mathrm{Re} z^2$$



Варіант №9

Обчислити інтеграл $\oint_L f(z)dz$ вздовж кривої, заданої графічно, якщо

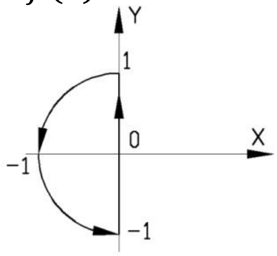
$$f(z) = \frac{\bar{z}}{z}$$



Варіант №10

Обчислити інтеграл $\oint_L f(z)dz$ вздовж кривої, заданої графічно, якщо

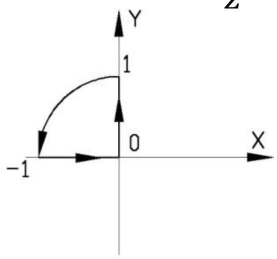
$$f(z) = z \cdot \mathrm{Im} z^2$$



Варіант №11

Обчислити інтеграл $\oint_L f(z)dz$ вздовж кривої, заданої графічно, якщо

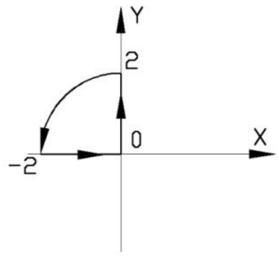
$$f(z) = \mathrm{Im} \frac{\bar{z}}{z}$$



Варіант №12

Обчислити інтеграл $\oint_L f(z)dz$ вздовж кривої, заданої графічно, якщо

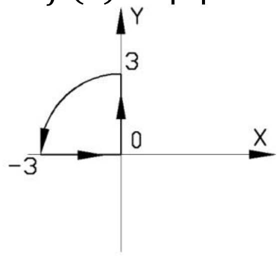
$$f(z) = z - \mathrm{Re} z$$



Варіант №13

Обчислити інтеграл $\oint_L f(z)dz$ вздовж кривої, заданої графічно, якщо

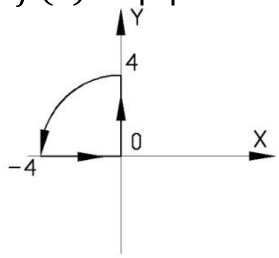
$$f(z) = |z| \cdot z$$



Варіант №14

Обчислити інтеграл $\oint_L f(z)dz$ вздовж кривої, заданої графічно, якщо

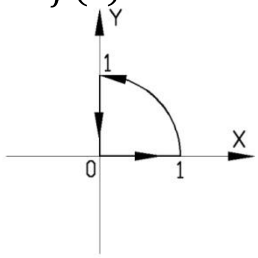
$$f(z) = |z| \cdot \mathrm{Im} z^2$$



Варіант №15

Обчислити інтеграл $\oint_L f(z)dz$ вздовж кривої, заданої графічно, якщо

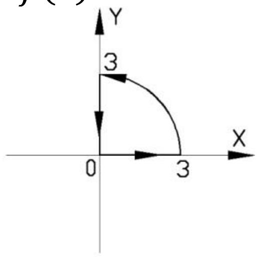
$$f(z) = \bar{z}^2$$



Варіант №16

Обчислити інтеграл $\oint_L f(z)dz$ вздовж кривої, заданої графічно, якщо

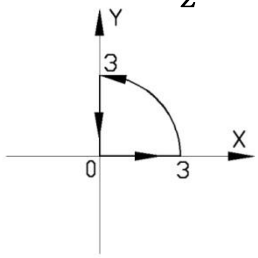
$$f(z) = z^2 + z$$



Варіант №17

Обчислити інтеграл $\oint_L f(z)dz$ вздовж кривої, заданої графічно, якщо

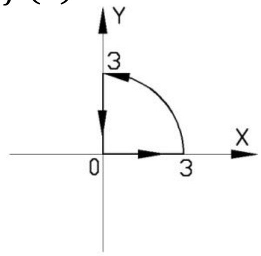
$$f(z) = \frac{z}{\bar{z}}$$



Варіант №18

Обчислити інтеграл $\oint_L f(z)dz$ вздовж кривої, заданої графічно, якщо

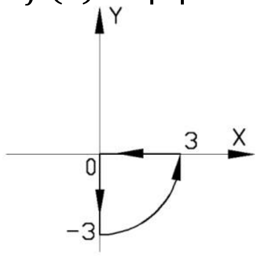
$$f(z) = \text{Im}z^2 + i$$



Варіант №19

Обчислити інтеграл $\oint_L f(z)dz$ вздовж кривої, заданої графічно, якщо

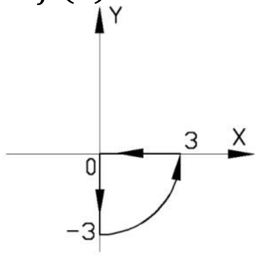
$$f(z) = |z| \cdot \bar{z}$$



Варіант №20

Обчислити інтеграл $\oint_L f(z)dz$ вздовж кривої, заданої графічно, якщо

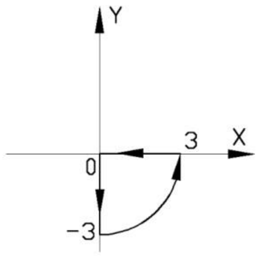
$$f(z) = z \cdot \bar{z}$$



Варіант №21

Обчислити інтеграл $\oint_L f(z)dz$ вздовж кривої, заданої графічно, якщо

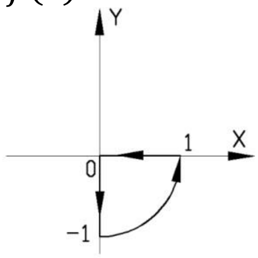
$$f(z) = \text{Re}\frac{\bar{z}}{z}$$



Варіант №22

Обчислити інтеграл $\oint_L f(z)dz$ вздовж кривої, заданої графічно, якщо

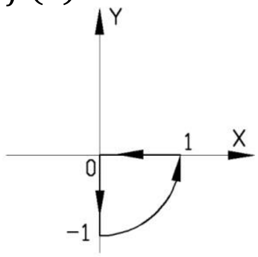
$$f(z) = \bar{z} - \mathrm{Im}z$$



Варіант №23

Обчислити інтеграл $\oint_L f(z)dz$ вздовж кривої, заданої графічно, якщо

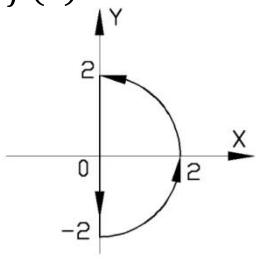
$$f(z) = \bar{z} + \mathrm{Im}z$$



Варіант №24

Обчислити інтеграл $\oint_L f(z)dz$ вздовж кривої, заданої графічно, якщо

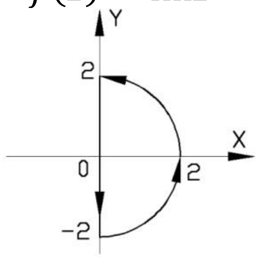
$$f(z) = z \cdot \mathrm{Re}z^2$$



Варіант №25

Обчислити інтеграл $\oint_L f(z)dz$ вздовж кривої, заданої графічно, якщо

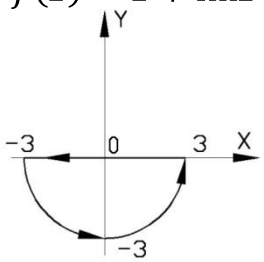
$$f(z) = \mathrm{Im}z^2$$



Варіант №26

Обчислити інтеграл $\oint_L f(z)dz$ вздовж кривої, заданої графічно, якщо

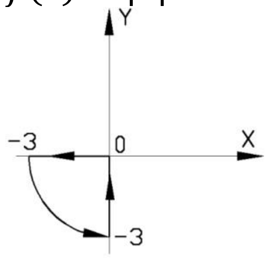
$$f(z) = z + \mathrm{Im} z$$



Варіант №27

Обчислити інтеграл $\oint_L f(z)dz$ вздовж кривої, заданої графічно, якщо

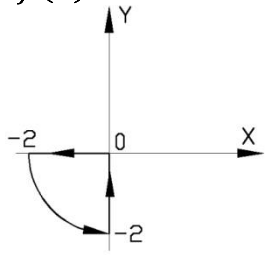
$$f(z) = |z| \cdot \mathrm{Re} z^2$$



Варіант №28

Обчислити інтеграл $\oint_L f(z)dz$ вздовж кривої, заданої графічно, якщо

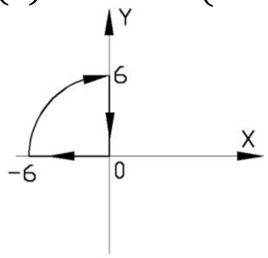
$$f(z) = \bar{z} + \mathrm{Re} z$$



Варіант №29

Обчислити інтеграл $\oint_L f(z)dz$ вздовж кривої, заданої графічно, якщо

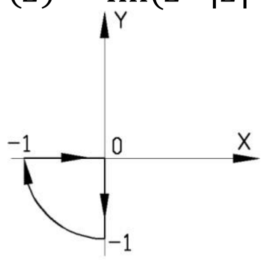
$$f(z) = z + \mathrm{Im}(z + i)$$



Варіант №30

Обчислити інтеграл $\oint_L f(z)dz$ вздовж кривої, заданої графічно, якщо

$$f(z) = \mathrm{Im}(z \cdot |z|^2)$$



Завдання 20.

Обчислити $\oint_C f(z)dz$, де C – коло радіуса R з центром у точці z_c, з допомогою теореми Коші, інтегральної формули Коші або формули для похідних від аналітичної функції.

1. $f(z) = \frac{\cos z}{z^2(z-i)}$, $R = 2,\ z_c = 0;$

2. $f(z) = \dfrac{\sin z}{z+i}$, $\begin{cases} R = 3, & z_c = 1; \\ R = 1, & z_c = i; \end{cases}$

3. $f(z) = \dfrac{1}{z^2+9}$, $\begin{cases} R = 2, & z_c = 2i; \\ R = 2, & z_c = -2i; \\ R = 2, & z_c = 0; \end{cases}$

4. $f(z) = \dfrac{\sin z}{(z-i)^2}$, $\begin{cases} R = 3, & z_c = 0; \\ R = \dfrac{1}{2}, & z_c = 0; \end{cases}$

5. $f(z) = \dfrac{e^z}{(z+2)^4}$, $R = 2,\ z_c = -1;$

6. $f(z) = \dfrac{e^z}{z(1-z)^2}$, $\begin{cases} R > 2, & z_c = 2; \\ R = 2, & z_c = -1; \end{cases}$

7. $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)^3(z-1)}$, $\begin{cases} R = 2, & z_c = 2; \\ R = 2, & z_c = -2; \end{cases}$

8. $f(z) = \dfrac{z^2}{(z-2i)^2}$, $\begin{cases} R = 3, & z_c = 0; \\ R = 1, & z_c = 0; \end{cases}$

9. $f(z) = \dfrac{1}{z(z^2-1)}$, $\begin{cases} R < 2, & z_c = 2; \\ R > 2, & z_c = -2; \\ R < 2, & z_c = 0; \end{cases}$

10. $f(z) = \dfrac{2z-1-i}{(z-1)(z-i)}$, $\begin{cases} R = 2, & z_c = 0; \\ R = 1, & z_c = i; \end{cases}$

11. $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+y)}$, $\begin{cases} R = 2, & z_c = 2i; \\ R = 2, & z_c = 0; \end{cases}$

12. $f(z) = \dfrac{z \cdot e^z}{(z-a)^2}$, $\quad R = a, \quad z_c = a;$

13. $f(z) = \dfrac{\sin z}{(z+1)^3}$, $\quad R = 3, \quad z_c = -i;$

14. $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$, $\quad \begin{cases} R = 2, & z_c = 0; \\ R = 2, & z_c = -2i; \end{cases}$

15. $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2-1}$, $\quad R = 2, \quad z_c = 0;$

16. $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2-\pi^2}$, $\quad R = 4, \quad z_c = 0;$

17. $f(z) = \dfrac{1}{(1+z)(z-1)^3}$, $\quad \begin{cases} R = 1, & z_c = -1; \\ R = 1, & z_c = 1; \end{cases}$

18. $f(z) = \frac{\cos z}{(z-i)^3}$, $R = 1, \; z_c = i;$

19. $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)^2}$, $\quad \begin{cases} R = 2, & z_c = 2i; \\ R = 2, & z_c = -2i; \\ R < 1, & z_c = 0; \end{cases}$

20. $f(z) = \dfrac{e^z}{z(1-z)^3}$, $\quad \begin{cases} R, < \dfrac{1}{2}, & z_c = 0; \\ R < \dfrac{1}{2}, & z_c = 1; \end{cases}$

21. $f(z) = \dfrac{z^2}{(z-i)^3}$, $\quad R = 1, \quad z_c = i;$

22. $f(z) = \dfrac{1}{z^3(z+1)}$, $\quad \begin{cases} R < 1, & z_c = 0; \\ R < 1, & z_c = -1; \end{cases}$

23. $f(z) = \dfrac{1}{z(z^2+1)}$, $\quad R = 3, \quad z_c = 0;$

24. $f(z) = \dfrac{\sin z}{z(z+1)}$, $\begin{cases} R < 1, & z_c = 0; \\ R < 1, & z_c = -1; \end{cases}$

25. $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z-1)}$, $R = 2,\quad z_c = 0;$

26. $f(z) = \dfrac{e^z}{z}$, $\begin{cases} R = 1, & z_c = 0; \\ R = 1, & z_c = 2; \end{cases}$

27. $f(z) = \dfrac{1}{z^2+16}$, $\begin{cases} R = 2, & z_c = 3i; \\ R = 2, & z_c = -3i; \end{cases}$

28. $f(z) = \dfrac{\sin z}{z+i}$, $R = 3,\quad z_c = -i;$

29. $f(z) = \dfrac{z^2}{z-3i}$, $\begin{cases} R = 1, & z_c = 0; \\ R = 4, & z_c = 0; \end{cases}$

30. $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+16)^2}$, $\begin{cases} R = 2, & z_c = 3i; \\ R = 2, & z_c = -3i; \end{cases}$

Завдання 21

Застосувати Формулу Ньютона – Лейбніца для обчислення інтеграла $\int_{z_2}^{z_1} f(z)dz$, попередньо показавши, що функція $f(z)$ є аналітичною в однозв'язній області, яка містить точки z_1 та z_2.

1. $f(z) = z^2;\quad z_1 = 0,\qquad z_2 = 2 + i;$
2. $f(z) = e^z;\quad z_1 = 0,\qquad z_2 = 1 + \dfrac{\pi}{2}i;$
3. $f(z) = \sin z\,;\quad z_1 = 0,\qquad z_2 = \pi i;$
4. $f(z) = z;\quad z_1 = 2 - i,\qquad z_2 = 1 + i;$
5. $f(z) = e^{-z}, z_1 = 0, z_2 = -2 + \frac{\pi}{2}i;$
6. $f(z) = \cos z\,, z_1 = 0, z_2 = \pi i;$
7. $f(z) = \mathrm{z} + 1, z_1 = 1 + i, z_2 = 3 + i;$
8. $f(z) = z^3, z_1 = 0, z_2 = 1 + i;$
9. $f(z) = e^{2z}, z_1 = 0, z_2 = 1 + \pi i;$

10. $f(z) = \sin 2z\,, z_1 = 0, z_2 = \frac{\pi}{2}i;$

11. $f(z) = z - i, z_1 = 2, z_2 = 2 + i;$

12. $f(z) = \cos 2z\,, z_1 = 0, z_2 = \frac{\pi}{2}i;$

13. $f(z) = z^2 - z, z_1 = 0, z_2 = 3(1 + i);$

14. $f(z) = \frac{1}{z}, z_1 = 1, z_2 = i;$

15. $f(z) = \operatorname{sh} z\,, z_1 = 0, z_2 = \pi i;$

16. $f(z) = 2z + 1, z_1 = 1 + i, z_2 = -1 + i;$

17. $f(z) = e^{-2z}, z_1 = 0, z_2 = -1 + \frac{3}{2}\pi i;$

18. $f(z) = \sin iz\,, z_1 = 0, z_2 = 1;$

19. $f(z) = z^3 - z^2 + 1, z_1 = 0, z_2 = 6i;$

20. $f(z) = \cos iz\,, z_1 = 0, z_2 = \pi;$

21. $f(z) = (1 + i)z, z_1 = 1, z_2 = 1 + i;$

22. $f(z) = e^{-iz}, z_1 = 0, z_2 = \pi;$

23. $f(z) = 3z^2 + z, z_1 = 0, z_2 = -1 + i;$

24. $f(z) = \frac{1}{z}, z_1 = 1, z_2 = \pi i;$

25. $f(z) = e^{iz}, z_1 = 0, z_2 = 1 + i;$

26. $f(z) = iz + 1, z_1 = -1 + i, z_2 = 2 + 4i;$

27. $f(z) = \sin z\,, z_1 = \frac{\pi}{2}, z_2 = 1 + \pi i;$

28. $f(z) = z^2 + iz + 1, z_1 = 0, z_2 = 3i;$

29. $f(z) = \cos z\,, z_1 = \pi, z_2 = -1 + \frac{\pi}{2};$

30. $f(z) = e^{-iz}, z_1 = \pi, z_2 = \pi i.$

Завдання 22

Обчислити інтеграл від функції комплексної змінної по даній кривій

1.

$$\int_L z\operatorname{Re} z^2 dz;\ L:\{|z| = R,\ \operatorname{Im} z \ge 0\}.$$

2.

$$\int_{ABC} (z^2+1)dz;\ ABC -$$ ламана $z_A = 0,\ z_B = -1+i,\ z_C = i.$

3.

$$\int_{AB} e^{|z|^2} dz;\ AB -$$ відрізок прямої $z_A = 1+i,\ z_B = 0.$

4.

$$\int_L (\sin iz + z)dz;\ L:\{|z| = 1,\ \operatorname{Re} z \ge 0\}.$$

5.

$$\int_L z|z|dz;\ L:\{|z| = 1,\ \operatorname{Im} z \ge 0\}.$$

.

6.

$$\int_{AB} (2z+1)dz;\ AB:\{y = x^3;\ z_A = 0;\ z_B = 1+i\}.$$

.

7.

$$\int_{ABC} z\bar{z}dz;\ AB:\{|z| = 1,\ \operatorname{Re} z \ge 0,\ \operatorname{Im} z \ge 0\},\ BC -$$ відрізок $z_B = 1,\ z_C = 0.$

8.

$$\int_L (\cos iz + 3z^2)dz;\ L:\{|z| = 1,\ \operatorname{Im} z \ge 0\}.$$

9.

$$\int_L |z|dz;\ L:\left\{|z|=\sqrt{2},\ 3\pi/4\le\arg\le 5\pi/4\right\}.$$

10.

$\int\limits_{ABC}\left(z^9+1\right)dz;\ ABC-$ ламана $z_A=0,\ z_B=1,\ z_C=2i.$

11.

$$\frac{1}{2i}\int\limits_{|z|=R}\bar{z}dz.$$

12.

$\int\limits_{ABC}\left(\sin z+z^5\right)dz;\ ABC-$ ламана $z_A=0,\ z_B=1,\ z_C=2i.$

13.

$\int\limits_{AB} z\,\mathrm{Im}\,z^2dz;\ AB-$ відрізок прямої $z_A=0,\ z_B=1+i.$

14.

$$\int_L\left(z^3+\sin z\right)dz;\ L:\left\{|z|=1,\ \mathrm{Re}z\ge 0\right\}.$$

15.

$$\int_L z|z|dz;\ L:\left\{|z|=1,\ \mathrm{Im}z\ge 0\right\}.$$

16.

$$\int\limits_{AB}\bar{z}^2dz;\ AB:\left\{y=x^2;\ z_A=0;\ z_B=1+i\right\}.$$

17.

$$\int_L(z+1)e^zdz;\ L:\left\{|z|=1,\ \mathrm{Re}z\ge 0\right\}.$$

18.

$\int\limits_{AB} \left(z^2+7z+1\right)dz;\ AB-$ відрізок прямої $z_A=1,\ z_B=1-i.$

19.

$\int\limits_{ABC} |z|dz;\ ABC-$ ламана $z_A=0,\ z_B=-1+i,\ z_C=1+i.$

20.

$\int\limits_{AB} \left(12z^5+4z^3+1\right)dz;\ AB-$ відрізок прямої $z_A=1,\ z_B=i.$

21.

$\int\limits_{AB} \bar{z}^2dz;\ AB-$ відрізок прямої $z_A=0,\ z_B=1+i.$

22.

$\int\limits_{ABC} z^3e^{z^4}dz;\ ABC$ ламана $z_A=i,\ z_B=1,\ z_C=0.$

23.

$\int \operatorname{Re}\frac{\bar{z}}{\ }dz;\ AB:\left\{|z|=1,\ \operatorname{Im}z\ge 0\right\}, BC$ відрізок $z_B=1,\ z_C=2.$

24.

$\int\limits_{ABC} \left(z^2+\cos z\right)dz;\ ABC-$ ламана $z_A=0,\ z_B=1,\ z_C=i.$

25.

$\int\limits_{ABC} \left(\operatorname{ch}z+\cos iz\right)dz;\ ABC-$ ламана $z_A=0,\ z_B=-1,\ z_C=i.$

26.

$\int\limits_{L} |z|\cdot\bar{z}dz,\ L:\left\{|z|=4,\ \operatorname{Re}z\ge 0\right\}.$

27.

$$\int_L (\operatorname{ch} z + z)dz;\ L:\{|z| = 1,\ \operatorname{Im} z \le 0\}.$$

28.

$$\int_L |z| \operatorname{Re} z^2 dz;\ L:\{|z| = R,\ \operatorname{Im} z \ge 0\}.$$

29.

$$\int_{AB} (3z^2 + 2z)dz;\ AB:\{y = x^2;\ z_A = 0;\ z_B = 1 + i\}.$$

30.

$\int_{AB} \operatorname{Im} z^3 dz; z_A = 0, z_B = 2 + 2i; AB -$ відрізок прямої.

Розділ V. СТЕПЕНЕВІ РЯДИ. РЯДИ ЛОРАНА

Степеневим рядом називається функціональний ряд виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ \dots\ , \qquad (1)$$

де a_n *– комплексні числа, коефіцієнти степеневого ряду,*
z_0 *– довільне фіксоване комплексне число.*

Питання про область збіжності степеневого ряду розв'язує теорема Коші – Адамара.

Нехай дано степеневий ряд (1) і нехай $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda$.

а) при $\lambda = 0$ ряд (1) збігається абсолютно в усій комплексній області;
б) при $\lambda = +\infty$ він збігається тільки в точці $z = z_0$ і розбігається в усіх інших точках;
в) при $0 < \lambda < +\infty$ ряд збігається абсолютно в крузі $|z - z_0| < \frac{1}{\lambda}$ і розбігається зовні цього круга.

Круг радіуса $R = \frac{1}{\lambda}$ з центром у точці z_0, в середині якого степеневий ряд (1) збігається абсолютно, а зовні розбігається, називають кругом збіжності степеневого ряду, а число $R = \frac{1}{\lambda}$ – радіусом збіжності, що обчислюється за формулою $R = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}$.

В якихось точках кола $|z - z_0| = R$ степеневий ряд може збігатися, а в інших розбігатися.

Структура області збіжності степеневого ряду визначається теоремою Абеля.

Якщо ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

збігається в точці $z_1 \neq z_0$, то він абсолютно збігається в крузі $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$, причому збіжність буде рівномірною в кожному замкненому крузі, що цілком міститься всередині круга збіжності цього ряду.

Приклад 5.1. Знайти радіус збіжності ряду

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2i)^n}{2^n(n+1)}$.

Розв'язування.

Загальний член ряду $\omega_n = \frac{(z+2i)^n}{2^n(n+1)}$, тому $\left|\frac{\omega_{n+1}}{\omega_n}\right| = \frac{|z+2i|^{n+1}}{2^{n+1}(n+2)} \cdot \frac{2^n(n+1)}{|z+2i|^n} = \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{|z+2i|}{2}$;

$\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{\omega_{n+1}}{\omega_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{|z+2i|}{2} = \frac{|z+2i|}{2}$.

За ознакою Даламбера степеневий ряд збігатиметься, якщо

$$\frac{|z + 2i|}{2} < 1 \text{ або } |z + 2i| < 2.$$

Відповідь. R=2.

Приклад 5.2. Знайти область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(1 + i)^n} (z - i)^n$$

Розв'язування.

Загальний член ряду :

$\omega_n = \frac{1}{n^2(1+i)^n}(z-i)^n$, тому $\left|\frac{w_{n+1}}{\omega_n}\right| = \frac{|z-i|^{n+1}}{(n+1)^2 \cdot |1+i|^{n+1}} \cdot \frac{n^2 \cdot |1+i|^n}{|z-i|^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \cdot \left|\frac{z-i}{1+i}\right| \to \frac{|z-i|}{\sqrt{2}}$, коли $n \to \infty$.

За ознакою Даламбера степеневий ряд збігатиметься, якщо $\frac{|z-i|}{\sqrt{2}} < 1$ або $|z-i| < \sqrt{2}$, тобто в середині круга радіуса $\sqrt{2}$ з центром в точці i.

Оскільки у кожній точці кола $|z-i| = \sqrt{2}$ наш ряд мажорується збіжним числовим рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

то область збіжності включає усі точки вказаного кола.≤

Відповідь. $|z-i| \le \sqrt{2}$.

Завдання 23.

Дослідити на збіжність ряди

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(in)}{n^2+2n+3}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2-i}{3}\right)^{n^2}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+i}{2}\right)^{n}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!\,(e-j)^n}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{i(2n+i)}{4n}\right]^{n}$

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp\left(\frac{\pi i}{n}\right)}{n+3}$

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n^2+1)}{n} \times i^n$

8) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-\frac{n}{2}} \times (1+i)^n \left(lnctg\frac{\pi}{4n}\right)^{-2}$

9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \times (2+i)^n$

10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{(n!)^2} \times \frac{i^n}{1+i^n}$

11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2i+1)ln^2 n}$

12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp\left(i\sqrt{n}\right)}{n^2}$

13) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n+2i}{(1+i)n+3}\right]^n$

14) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+i)^n \times n}{2^n}$

15) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-i)\sqrt{n}}$

16) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{(3n-1)ln^2(2n+1)}$

17) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-i)^n}{n2^n}$

18) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2i)^n}$

19) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(in)^n}$

20) $\sum_{n=1}^{\infty} (2i)^n \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{-n^2}$

21) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(3i)^n}{(2n+3)!}$

22) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+2}{(3n+5)(2i)^n}$

23) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{3}\right)^n \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2}$

24) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin^2(ni)}{(n+1)\sqrt{n}}$

25) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{n}}{n^2} \exp(in)$

26) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^{2n+1}$

27) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n n!}{(2n-1)!\, 2^n}$

28) $\sum_{n=1}^{\infty} (2i)^n \left(1+\frac{2}{n}\right)^{-n^2}$

29) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{(3n+5)(ln^2 n+4)}$

30) $\sum_{n=1}^{\infty} i^n \left(1-\frac{i}{2n}\right)$

Завдання 24.

Знайти область збіжності ряду

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-i)^n z^n}$$

$$2.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} z^n$$

$$3.\ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{5}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n$$

$$4.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (z+1)^n}{2^n \sqrt{3n-1}}$$

$$5.\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z-2)^n}{(2\mathrm{n}+1) \cdot 4^n}$$

$$6.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 z^n}{\mathrm{n}!}$$

$$7.\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(1+2i)^n}{(4-3i)^n} (z-3+i)^n + \frac{n(1+i)^n}{(z-3+i)^n} \right)$$

$$8.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 2^{-n}}{(\mathrm{z}-2-\mathrm{i})^{\mathrm{n}}}$$

$$9.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1-i)^{-1}}{n+i}$$

$$10.\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + in\right) (z+1+i)^n$$

$$11.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{2^{\mathrm{n}}}$$

$$12.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n(z-2+i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} (1+in)(\mathrm{z}-2+\mathrm{i})^{\mathrm{n}}$$

$$13.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n(1-i)^n}{\sqrt{(3n-2)2^n}}(z-1)^n$$

$$14.\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1-i)^n}{3^{\mathrm{n}}(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n+2)}{(z+1-i)^n}$$

$$15.\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\mathrm{z}}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{4}\right)^n$$

$$16.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(z+1-i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} n(z+1-i)^n$$

$$17.\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-i)^n}{(n+1)(n+2)}(z+1)^n$$

$$18.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}}$$

$$19.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{-n}}{\cos in}$$

$$20.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n(z+1)^{\mathrm{n}}}$$

$$21.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin in}{(\mathrm{z}-\mathrm{i})^{\mathrm{n}}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{z}-\mathrm{i})^{\mathrm{n}}}{\mathrm{n}!}$$

$$22.\ \frac{-i}{2(z-i)}+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-i)^n}{(2\mathrm{i})^{\mathrm{n}}}$$

$$23.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{(\mathrm{z}+1)^{\mathrm{n}}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{(\mathrm{i}+\mathrm{n})^{\mathrm{n}}}$$

$$24.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\mathrm{n}^4\cdot z^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{z}^{\mathrm{n}}}{n\cdot 2^n}$$

$$25.\ \sum_{n=0}^{\infty}\cos in\cdot z^n$$

$$26.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+1}{(z+2i)^{\mathrm{n}}}$$

$$27.\ \sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{n}}(iz)^{-1}$$

$$28.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{\mathrm{n}}}(z-i)^n$$

$$29.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n(z+i)^n}{(\mathrm{n}+1)(\mathrm{n}+2)}$$

$$30.\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2z^n}{(2\mathrm{n})!}$$

Завдання 25.

Знайти область збіжності рядів:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(1+2i)^n}{(4-3i)^n}(z-3+i)^n+\frac{n(1+i)^n}{(z-3+i)^n}\right]$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n(z-2+i)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}(1+in)(z-2+i)^n$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+1-i)^n}{3^n(n+1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(n+2)}{(z+1-i)^n}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{4}\right)^{2n}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(z+1-i)^n}\sum_{n=0}^{\infty}n(z+1-i)^n$

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+2}}$

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sinin}{(z-i)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{n!}$

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{(z+1)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{(i+n)^n}$

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n2^n}$

10) $\sum_{n=0}^{\infty}cosin+(z+2i)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+1}{(z+2i)^n}$

11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+1-i)^n}{n+i}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n(z+1-i)^n}{(n+1)(n+2)}$

12) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}e^n+(z-i)^n$

13) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2z^n}{(2n)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{-n}}{cosin}$

14) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n(z-2-i)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-2-i)^n}{(2n+1)+4^n}$

15) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{(z+i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{exp(in+1/2)}$

16) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+4i)^n}{(z+2i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+2i}{n}\right)^n$

17) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n(z+2+i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n}+in\right)(z+2+i)^n$

18) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n(z-i)^n}{(n+1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}ln(1+n)(z-i)^n}$

19) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{3}-1}{n}(z+2i)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nln^2n(z+2i)^n}$

20) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} + z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)z^{2n}}$

21) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i+z)^n}{(n+2)ln^2(2n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n5^n(i+z)^n}$

22) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)(z-2i)^i}{n^3 4^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)(z-2i)^n}$

23) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n(z-2i+1)^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^n}{(z-2i+1)^n}$

24) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(z+2+i)^n}{1+n^4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n(z+2+i)^n}$

25) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+4i)^{2n}}{nlnn} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)}{(2n)!\,(z+4i)^n}$

26) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,(z-i)^{2n}}{n^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2+1}{n\sqrt{n}} \left(\frac{4}{z-i}\right)^n$

27) $\sum_{n=1}^{\infty} (z+1+2i)^n sin\frac{\pi}{3^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n ln(1+n)}{(z+1+2i)^n}$

28) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+4i)}{9^n(2n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+2}-n} \left(\frac{3}{z+4i}\right)^n$

29) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n+1}\right)^{n}(z+5i)^{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n}(2n+1)}{(z+5i)^{n}}$

30) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-i+2)^{n}}{3^{n}+\sqrt{1+2n}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{2}(z-i+2)^{n}}$

Завдання 26

Варіант№1

Знайти область збіжності ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^{n}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{4}\right)^{n}$$

Варіант№2

Знайти радіус збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2iz)^{n}$$

Варіант№3

Знайти радіус збіжності ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nz^{n}}{2^{in}}$$

Варіант№4

Знайти радіус збіжності ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos(in) z^n$$

Варіант№5

Знайти радіус збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z^n}{Ln(in)} \right)$$

Варіант№6

Знайти радіус збіжності ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{in^2} \left(\frac{z}{2} \right)^n$$

Варіант№7

Знайти радіус збіжності ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1+n!) \left(\frac{z}{in} \right)^n$$

Варіант№8

Знайти радіус збіжності ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^{in} z^n$$

Варіант№9

Знайти радіус збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos^2(in) z^n$$

Варіант№10

Знайти радіус збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{\frac{\pi i}{n}} z^n$$

Варіант№11

Знайти радіус збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^i} z^n$$

Варіант№12

Знайти радіус збіжності ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin(in^2) z^n$$

Варіант№13

Знайти радіус збіжності ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin(in) z^n$$

Варіант№14

Знайти радіус збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2} z^n$$

Варіант№15

Знайти радіус збіжності ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) e^{in} z^n$$

Варіант№16

Знайти радіус збіжності ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{in} z^n}{3^n}$$

Варіант№17

Знайти радіус збіжності ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos(in^2) z^n$$

Варіант№18

Знайти радіус збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{in}\right)^n$$

Варіант№19

Знайти радіус збіжності ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty}(in+1)z^n$$

Варіант№20

Знайти радіус збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{2i}\right)^n$$

Варіант№21

Знайти радіус збіжності ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty}n\sin(in)z^n$$

Варіант№22

Знайти радіус збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{in} \frac{z^n}{n}$$

Варіант№23

Знайти радіус збіжності ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{i^{in}}$$

Варіант№24

Знайти радіус збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{in}}{n} z^n$$

Варіант№25

Знайти радіус збіжності ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(in)}{5^n} z^n$$

Варіант№26

Знайти область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\sin ni} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{-n}}{\cos in}$$

Варіант№27

Знайти радіус збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{ne^{in^2}}$$

Варіант№28

Знайти область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n-1}}$$

Варіант№29

Знайти область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{5}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{Z^n}$$

Варіант№30

Знайти радіус збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(in) z^n$$

Узагальненням степеневого ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

упорядкованого за цілими невід'ємними степенями $z - z_0$, буде ряд виду

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,$$

що називається рядом Лорана. Числа a_n називаються коефіцієнтами ряду. Ряд Лорана треба розуміти як суму двох рядів

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \text{ і } \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n} \qquad (2)$$

перший з них називається правильною частиною ряду Лорана, другий – головною частиною цього ряду.

Ряд Лорана збіжний у точці z тоді і тільки тоді, коли в цій точці збігаються обидва ряди (2).

Припустивши, що ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

збігається в крузі $|z-z_0| < R$, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$$

в області $|z-z_0| > R_1 = \frac{1}{r}$ і якщо при цьому $R_1 < R$, то ряд Лорана збігатиметься в області

$$R_1 < |z-z_0| < R \qquad (3)$$

Область (3) є, взагалі кажучи, деяке кругове кільце, що може виродитись в круг $|z-z_0| < R$ (при $R_1 = 0$ і $R < \infty$) з виключеною точкою $z = z_0$, в усю комплексну площину з виключеною точкою $z = z_0$ (при $R_1 = 0$ і $R = \infty$) ; у зовнішню частину круга $|z-z_0| \leq R_1$ (при $R_1 > 0$ і $R = \infty$). Отже, областю збіжності ряду Лорана (1) є кругове кільце, сума ряду – функція, аналітична в ньому. Кожну функцію $f(z)$, однозначну і аналітичну в круговому кільці, можна подати в цьому кільці збіжним рядом Лорана

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-z_0)^k.$$

Коефіцієнти a_k цього ряду визначаються за формулою

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

де Γ_ρ – коло радіуса ρ з центром у точці z_0 , $R_1 < \rho < R$.

Розглянемо три різні розклади в ряд Лорана однієї і тієї ж функції:

1. $\frac{2}{(z-1)(z-3)} = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{3\left(1-\frac{z}{3}\right)} + \frac{1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n =$

$= -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3^{n+1}} + 1\right) z^n$, якщо $|z| < 1$;

2. $\frac{2}{(z-1)(z-3)} = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{3\left(1-\frac{z}{3}\right)} - \frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}$,
   якщо $1 < |z| < 3$;
3. 3. $\frac{2}{(z-1)(z-3)} = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z\left(1-\frac{3}{z}\right)} - \frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} =$
   $= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 1}{z^{n+1}}$, коли $3 < |z| < \infty$.

Цей факт не суперечить теоремі про єдиність розкладу аналітичної функції в степеневий ряд, оскільки одержані розклади мають місце для різних множин.

Завдання 27.

Розвинути в ряд Лорана функції (в заданій області)

1. $z^4 \cos\frac{1}{z}$ в околі точки $z = 0$
2. $\frac{1 + \cos z}{z^4}$ в околі точки $z = 0$
3. $\frac{1}{(z+2)(1+z^2)}$ $(1 < |z| < 4)$
4. $\frac{1}{(z^2 + 2z - \gamma)}$ $(1 < |z + 2| < 4)$

5. $\dfrac{z^2 - z + 3}{z^3 - 3z + 2}$ $\quad |z| < 1$

6. $\dfrac{sinz}{z^2}$ в околі точки $z = 0$

7. $\dfrac{e^z}{z^3}$ в околі точки $z = 0$

8. $\dfrac{\sin^2 z}{z}$ в околі точки $z = 0$

9. $\dfrac{e^z}{z - 1}$ в околі точки $z = 0$

10. $z^3 e^{\frac{1}{z}}$ в околі точки $z = 0$

11. $\dfrac{1}{z}\sin^2\dfrac{1}{z}$ в околі точки $z = 0$

12. $\dfrac{e^{2z} - 1}{z}$ в околі точки $z = 0$

13. $\dfrac{1 - e^{-z}}{z^3}$ в околі точки $z = 0$

14. $\dfrac{1}{z^2 + z}$ $\quad (0 < |z| < 1)$

15. $\dfrac{z + 4}{z^2 + 3z + 2}$ $\quad (1 < |z| < 2)$

16. $\dfrac{4}{z^2 - 1}$ $\quad (1 < |z + 2| < 3)$

17. $\dfrac{1}{z^2 + 2z - 8}$ $\quad (1 < |z + 2| < 4)$

18. $\dfrac{z + 2}{z^2 - 4z + 3}$ $\quad (2 < |z - 1| < \infty)$

19. $\dfrac{z}{(z^2 - 4)(z^2 - 1)}$ $\quad (1 < |z| < 2)$

20. $\dfrac{1}{z^2 + z}$ $\quad (1 < |z| < +\infty)$

21. $\dfrac{z^2 - z + 3}{z^2 - 3z + 2}$ $(1 < |z| < 2)$

22. $\dfrac{z}{(z-2)(z-3)}$ $(3 < |z| < +\infty)$

23. $\dfrac{1}{(z+2)(1+z^2)}$, $(4<|z|<\infty)$

24. $\dfrac{2z-3}{z^2-3z+2}$, $(0<|z-1|<1)$

25. $\dfrac{1}{(z^2-4)^2}$, $(4<|z+2|<+\infty)$

26. $\dfrac{2z+1}{z^2+z-2}$, $(1<|z|<2)$

27. $\dfrac{z^2-z+3}{z^2-3z+2}$, $(2<|z|<+\infty)$

28. $e^{z+\frac{1}{z}}$, $(0<|z|<\infty)$

29. $\sin z \sin\frac{1}{z}$, $(0<|z|<\infty)$

30. $\dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$, $(1<|z|<2)$

Завдання 28

Знайти всі лоранівські розклади даної функції за степенями z.

1. $\dfrac{z-2}{2z^3+z^2-z}$.	2. $\dfrac{z-4}{z^4+z^3-2z^2}$.	3. $\dfrac{3z-18}{2z^3+3z^2-9z}$.
4. $\dfrac{2z-16}{z^4+2z^3-8z^2}$.	5. $\dfrac{5z-50}{2z^3+5z^2-25z}$.	6. $\dfrac{3z-36}{z^4+3z^3-18z^2}$.
7. $\dfrac{7z-98}{2z^3+7z^2-49z}$.	8. $\dfrac{4z-64}{z^4+4z^3-32z^2}$.	9. $\dfrac{9z-162}{2z^3+9z^2-81z}$.
10. $\dfrac{5z-100}{z^4+5z^3-50z^2}$.	11. $\dfrac{11z-242}{2z^3+11z^2-121z}$.	12. $\dfrac{6z-144}{z^4+6z^3-72z^2}$.
13. $\dfrac{13z-338}{2z^3+12z^2-169z}$.	14. $\dfrac{7z-196}{z^4+7z^3-98z^2}$.	15. $\dfrac{15z-450}{2z^3+15z^2-225z}$.

16. $\dfrac{8z-256}{z^4+8z^3-128z^2}$.	17. $\dfrac{z+2}{z+z^2-2z^3}$.	18. $\dfrac{z+4}{2z^2+z^3-z^4}$.
19. $\dfrac{3z+18}{9z+3z^2-2z^3}$.	20. $\dfrac{2z+16}{8z^2+2z^3-z^4}$.	21. $\dfrac{5z+50}{25z+5z^2-2z^3}$.
22. $\dfrac{3z+36}{18z^2+3z^3-z^4}$.	23. $\dfrac{7z+98}{49z+7z^2-2z^3}$.	24. $\dfrac{4z+64}{32z^2+4z^3-z^4}$.
25. $\dfrac{9z+162}{81z+9z^2-2z^3}$.	26. $\dfrac{5z+100}{50z^2+5z^3-z^4}$.	27. $\dfrac{11z+242}{121z+11z^2-2z^3}$.
28. $\dfrac{6z+144}{72z^2+6z^3-z^4}$.	29. $\dfrac{13z+338}{169z+13z^2-2z^3}$.	30. $\dfrac{7z+196}{98z^2+7z^3-z^4}$.
31. $\dfrac{15z+450}{225z+15z^2-2z^3}$.		

Завдання 29

Знайти всі лоранівські розклади даної функції за степенями $z-z_0$.

1. $\dfrac{z+1}{z(z-1)},\ z_0=1+2i.$	2. $\dfrac{z+1}{z(z-1)},\ z_0=2-3i.$
3. $\dfrac{z+1}{z(z-1)},\ z_0=-3-2i.$	4. $\dfrac{z+1}{z(z-1)},\ z_0=-2+i.$
5. $\dfrac{z-1}{z(z+1)},\ z_0=1+3i.$	6. $\dfrac{z-1}{z(z+1)},\ z_0=2-i.$
7. $\dfrac{z-1}{z(z+1)},\ z_0=-1+2i.$	8. $\dfrac{z-1}{z(z+1)},\ z_0=-2-3i.$
9. $\dfrac{z+3}{z^2-1},\ z_0=2+i.$	10. $\dfrac{z+3}{z^2-1},\ z_0=3-i.$
11. $\dfrac{z+3}{z^2-1},\ z_0=-2+3i.$	12. $\dfrac{z+3}{z^2-1},\ z_0=-2-2i.$

13. $\dfrac{z}{z^2+1},\ z_0 = 2+i.$	14. $\dfrac{z}{z^2+1},\ z_0 = 1-2i.$
15. $\dfrac{z}{z^2+1},\ z_0 = -3+i.$	16. $\dfrac{z}{z^2+1},\ z_0 = -3-2i.$
17. $4\cdot\dfrac{z+2}{(z-1)(z+3)},\ z_0 = -2+2i.$	18. $4\cdot\dfrac{z+2}{(z-1)(z+3)},\ z_0 = 1-3i.$
19. $4\cdot\dfrac{z+2}{(z-1)(z+3)},\ z_0 = -3-i.$	20. $4\cdot\dfrac{z+2}{(z-1)(z+3)},\ z_0 = -2+i.$
21. $4\cdot\dfrac{z-2}{(z+1)(z-3)},\ z_0 = -1-2i.$	22. $4\cdot\dfrac{z-2}{(z+1)(z-3)},\ z_0 = 3+i.$
23. $4\cdot\dfrac{z-2}{(z+1)(z-3)},\ z_0 = 2-2i.$	24. $4\cdot\dfrac{z-2}{(z+1)(z-3)},\ z_0 = -2-i.$
25. $\dfrac{2z}{z^2+4},\ z_0 = -1-3i.$	26. $\dfrac{2z}{z^2+4},\ z_0 = -3+2i.$
27. $\dfrac{2z}{z^2+4},\ z_0 = 2+3i.$	28. $\dfrac{2z}{z^2+4},\ z_0 = 3+2i.$
29. $\dfrac{2z}{z^2-4},\ z_0 = -1+3i.$	30. $\dfrac{2z}{z^2-4},\ z_0 = 2+2i.$
31. $\dfrac{2z}{z^2-4},\ z_0 = 3-2i.$	

Завдання 30

Дану функцію розкласти в ряд Лорана в околі точки z_0.

1. $z\cos\dfrac{1}{z-2},\ z_0 = 2.$	2. $\sin\dfrac{z}{z-1},\ z_0 = 1.$
3. $ze^{z/(z-5)},\ z_0 = 5.$	4. $\sin\dfrac{2z-z}{z+2},\ z_0 = -2.$

5. $\cos\frac{3z}{z-i},\ z_0=i.$	6. $\sin\frac{5z}{z-2i},\ z_0=2i.$
7. $\sin\frac{3z-i}{3z+i},\ z_0=-\frac{i}{3}.$	8. $z\cos\frac{3z}{z-1},\ z_0=1.$
9. $z\sin\frac{z}{z-1},\ z_0=1.$	10. $(z-3)\cos\pi\frac{z-3}{z},\ z_0=0.$
11. $z^2\sin\pi\frac{z+1}{z},\ z_0=0.$	12. $z\cos\frac{z}{z+2i},\ z_0=-2i.$
13. $\cos\frac{z^2-4z}{(z-2)^2},\ z_0=2.$	14. $\sin\frac{z+i}{z-i},\ z_0=i.$
15. $\sin\frac{z}{z-3},\ z_0=3.$	16. $ze^{\frac{1}{z-2}},\ z_0=2.$
17. $e^{\frac{z}{z-3}},\ z_0=3.$	18. $\sin\frac{2z}{z-4},\ z_0=4.$
19. $\sin\frac{z^2-4z}{(z-2)^2},\ z_0=2.$	20. $e^{\frac{4z-2z^2}{(z-1)^2}},\ z_0=1.$
.21. $ze^{\frac{\pi}{(z-a)}},\ z_0=a.$	22. $ze^{\frac{\pi z}{z-\pi}},\ z_0=\pi.$
23. $z\sin\pi\frac{z+2}{z},\ z_0=0.$	24. $z\cos\pi\frac{z+3}{z-1},\ z_0=1.$
25. $z^2\sin\frac{z+3}{z},\ z_0=0.$	26. $z\sin\frac{z^2-2z}{(z-1)^2},\ z_0=1.$
27. $z\cos\frac{z}{z-3},\ z_0=3.$	28. $z\sin\pi\frac{z-1}{z-2},\ z_0=2.$
29. $z\cos\frac{z}{z-5},\ z_0=5.$	30. $ze^{\frac{z}{z-4}},\ z_0=4.$
31. $z\sin\frac{\pi z}{z-a},\ z_0=a.$	

Розділ VI. ЛИШКИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Якщо функція $f(z)$ аналітична в кільці $0<|z-a|<\rho$, то точка a є або ізольованою особливою точкою однозначного характеру даної функції, або точкою аналітичності; сама ж функція зображається в кільці рядом Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-a)^n.$$

Інтегральним лишком однозначної аналітичної функції $f(z)$ в ізольованій особливій точці a називається коефіцієнт при $\frac{1}{z-a}$ у її розкладі в ряд Лорана в околі цієї точки.

Якщо функція $f(z)$ аналітична в околі нескінченно віддаленої точки, то її лишком в цій точці називатимемо коефіцієнт при $\frac{1}{z}$ в її разкладі в ряд Лорана, але з протилежним знаком:

$$\underset{\infty}{res} f(z) = -C_1 = -\frac{1}{2\pi i} \oint_L f(z)dz.$$

Якщо a є усувна особлива точка функції $f(z)$, то в її лорановому розкладі коефіцієнти $C_n = 0$ для $n=-1,-2, \; -n, \ldots$. Тому лишок функції відносно усувної особливої точки дорівнює нулю.

Якщо a – полюс чи істотна особлива точка, то лишок функції $f(z)$ відносно такої точки, взагалі кажучи, відмінний від нуля і обчислювати його можна за формулою

$$\underset{z=a}{res} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L f(z)dz.$$

У тому ж випадку, коли a – полюс, його можна знайти іншим способом.

Нехай a – простий полюс функції $f(z)$. Тоді розклад функції $f(z)$ в околі точки a матиме вигляд

$$f(z) = \frac{C_{-1}}{z-a} + \sum_{0}^{\infty} C_n (z-a)^n,$$

звідси $(z-a)f(z) = C_{-1} + (z-a)\sum_0^{\infty} C_n (z-a)^n$,

тому

$$\underset{z=a}{res} f(z) = C_{-1} = \lim_{z \to a} (z-a) f(z).$$

Наприклад,

$$\underset{z=1}{res}\frac{2z}{(z-1)(3z+1)}=\lim_{z\to 1}\frac{2z}{3z+1}=\frac{1}{2},$$

Лишок функції особливо просто обчислюється у випадку простого полюса, коли функція має вид частки двох функцій, аналітичних в околі точки $a : f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, причому $\varphi(a) \neq 0, \psi(a) = 0, \psi'(a) \neq 0$.

З того, що $\psi(a) = 0, \psi'(a) \neq 0$, випливає, що a – простий нуль функції $\psi(z)$, а отже простий полюс функції $f(z)$ $(\varphi(a) \neq 0)$.

Далі матимемо

$$\underset{z=a}{res} f(z) = \underset{z=a}{res}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z\to a}(z-a)\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z\to a}\frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

Наприклад,

$$\underset{z=0}{res}\,\mathrm{ct}g\,z = \underset{z=0}{res}\frac{\cos z}{\sin z} = \lim_{z\to 0}\frac{\cos z}{(\sin z)^{|}}=1.$$

Якщо ж a – полюс порядка n, то лоранове розвинення функції в околі точки a (z не дорівнює a) матиме вигляд

$$f(z) = \frac{c_n}{(z-a)^n} + \frac{c_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \quad ,$$

Звідки

$$(z-a)^n f(z) = c_{-n} + c_{-(n-1)}(z-a) + \cdots + c_{-1}(z-a)^{n-1} + (z-a)^n \sum_{0}^{\infty} c_n(z-a)^n.$$

Після (n – 1) – кратного диференціювання матимемо $\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} = (n-1)!\, c_{-1} + \cdots$

Отже,

$$\underset{z=a}{res} f(z) = c_{-1} = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-a)^n f(z)].$$

Наприклад,

$$\underset{z=1}{res}\frac{2z-1}{(z-1)^2(z+2)} = \frac{1}{1!}\lim\frac{d}{dz}\left(\frac{2z-1}{z+2}\right) = \lim_{z\to 1}\frac{2(z+2)-(2z-1)}{(z+2)^2} = \frac{5}{9}$$

В істотно особливій точці лишок знаходять, розкладаючи функцію в ряд Лорана та беручи коефіцієнти при $(z-a)^{-1}$.

Якщо f(z) – аналітична функція в області D і L – кусково-гладкий контур, то за інтегральною теоремою Коші інтеграл від функції f(z) по L дорівнює нулеві. Коли ж в середині L міститься скінченне число ізольованих особливих точок функції f(z), то значення інтеграла обчислюватимемо згідно з основною теоремою про лишки.

Інтеграл від функції по контуру області, в якій вона аналітична, за винятком скінченної кількості ізольованих особливих точок, дорівнює добутку 2πі на суму лишків в усіх цих особливих точках:

$$\int_L f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=a_k}{Res} f(z).$$

Приклад 6.1. Обчислити інтеграл $I = \int_{|z|=4} \frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{z-2} dz$

Розв’язування .

Функція $f(z) = \frac{1}{z-2} e^{1/(z-1)}$ має в крузі $|z| < 4$ дві особливі точки:

Z=1 та *Z=2*.

Отже, $I = 2\pi i(\underset{z=1}{res} f(z) + \underset{z=2}{res} f(z))$

Оскільки

$e^{\frac{1}{z-1}} = 1 + \sum_1^\infty \frac{1}{n!(z-1)^n}$, $\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{1-(z-1)} = -\sum_0^\infty (z-1)^n$,

то $\underset{z=1}{res} f(z) = -\sum_1^\infty \frac{1}{n!} = -(e-1) = 1-e.$

$$\underset{z=2}{res} f(z) = e^{\frac{1}{z-1}}\Big|_{z=2} = e \quad .$$

Відповідь. $I = 2\pi i$

Завдання 31

Знайти усі особливі точки функції, визначивши їх характер.

1. $\frac{1}{1-\sin z}$

2. $\frac{z}{\cos z-1}^{2}$

3. $\frac{1-\sin z}{\cos z}$

4. $\frac{z-\pi}{\sin^2 z}$

5. $\frac{1}{\cos z-\frac{1}{2}}$

6. $z^2 \sin\frac{1}{z}$

7. $(z-1)\cos\frac{1}{(z-1)^2}$

8. $\tan^2 2z$

9. $\frac{1}{z^3(z^2+4)^2}$

10. $z^2 e^{\frac{1}{z}}$

11. $\frac{1}{z-\sin z}$

12. $\frac{1}{\cos z-1+\frac{z^2}{2}}$

13. $\frac{1}{e^{-z}+z-1}$

14. $\frac{2z+3}{(z+1)^3(z^2-3z+2)^2}$

15. $\frac{\sin z-3\cos^2 z}{z(z^2+9)^2}$

16. $\frac{1}{z}e^{\frac{z+1}{z}}$

17. $\frac{1+\cos \pi z}{(3z^2+z-2)^2}$

18. $\frac{1}{2+z^2-2\operatorname{ch} z}$

19. $\frac{1-\cos z}{z^2}$

20. $e^{\frac{1}{z+2}}$

21. $\cos\frac{1}{z}$

22. $\frac{\sinh z}{z-\sinh z}$

23. $\frac{1}{e^{-z}-1}$

24. $\frac{z}{z^6+2z^5+z^4}$

25. $\frac{z^2}{\cos z-1}$

26. $\frac{1-\sin z}{\cos z}$

27. $\sin\frac{\pi}{z+1}$

28. $e^{-\frac{1}{z^2}}$

29. $\cosh\frac{1}{z}$

30. $\frac{1}{z^3(2-\cos z)}$

Завдання 32

Визначити тип особливої точки $z=0$ для даної функції.

1. $\frac{e^{9z}-1}{\sin z - z + z^3/6}$.	2. $z^3 e^{7/z^2}$.	3. $\frac{\sin 8z - 6z}{\cos z - 1 + z^2/2}$.
4. $\frac{\cos 7z - 1}{\operatorname{sh} z - z - z^3/6}$.	5. $\frac{\operatorname{sh} 6z - 6z}{\operatorname{ch} z - 1 - z^2/2}$.	6. $\frac{\operatorname{ch} 5z - 1}{e^z - 1 - z}$.
7. $z\sin\frac{6}{z^2}$.	8. $\frac{e^z - 1}{\sin z - z + z^3/6}$.	9. $\frac{\sin z^2 - z^2}{\cos z - 1 + z^2/2}$.
10. $\frac{\cos z^2 - 1}{\operatorname{sh} z - z - z^3/6}$.	11. $\frac{e^{5z}-1}{\operatorname{ch} z - 1 - z^2/2}$.	12. $\frac{\sin 4z - 4z}{e^z - 1 - z}$.
13. $z^4\sin\frac{5}{z^2}$.	14. $\frac{\cos 3z - 1}{\sin z - z + z^3/6}$.	15. $\frac{\operatorname{sh} 2z - 2z}{\cos z - 1 + z^2/2}$.
16. $\frac{\operatorname{ch} 2z - 1}{\operatorname{sh} z - z - z^3/6}$.	17. $\frac{e^{z^3}}{\operatorname{ch} z - 1 - z^2/2}$.	18. ze^{4/z^3}.
19. $\frac{\sin z^3 - z^3}{e^z - 1 - z}$.	20. $\frac{\cos z^3 - 1}{\sin z - z + z^3/6}$.	21. $\frac{e^{7z}-1}{\cos z - 1 + z^2/2}$.
22. $\frac{\sin 6z - 6z}{\operatorname{sh} z - z - z^3/6}$.	23. $z\sin\frac{3}{z^3}$.	24. $\frac{\cos 5z - 1}{\operatorname{ch} z - 1 - z^2/2}$.

25. $\dfrac{\operatorname{sh}4z-4z}{e^z-1-z}$.	26. $\dfrac{\operatorname{ch}3z-1}{\sin z-z+z^3/6}$.	27. $\dfrac{e^{z^4}-1}{\cos z-1+z^2/2}$.
28. $\dfrac{\sin z^4-z^4}{\operatorname{sh}z-z-z^3/6}$.	29. $z\cos\dfrac{2}{z^3}$.	30. $\dfrac{\cos z^4/2}{\operatorname{ch}z-1-z^2/2}$.
31. $\left(e^{z^5}-1\right)\Big/\left(e^z-1-z\right)$.		

Завдання 33

Для даної функції знайти ізольовані точки і визначити їх тип.

1. $e^{1/z}/\sin(1/z)$.	2. $1/\cos z$.	3. $\operatorname{tg}^2 z$.
4. $z\operatorname{tg}ze^{1/z}$.	5. $\dfrac{e^z-1}{z^3(z+1)^3}$.	6. $\dfrac{z^2+1}{(z-i)^2(z^2+4)}$.
7. $\dfrac{(z+\pi)\sin\frac{\pi}{2}z}{z\sin^2 z}$.	8. $\operatorname{tg}\dfrac{1}{z}$.	9. $\operatorname{ctg}\dfrac{1}{z}$.
10. $\dfrac{1}{e^z+1}$.	11. $\operatorname{ctg}\pi z$.	12. $\dfrac{\sin\pi z}{(z-1)^3}$.
13. $\dfrac{1}{\sin z^2}$.	14. $\dfrac{\sin 3z-3\sin z}{z(\sin z-z)}$.	15. $\dfrac{1}{e^z-1}-\dfrac{1}{z}$.
16. $\dfrac{e^z-1}{\sin\pi z}$.	17. $\operatorname{th}z$.	18. $\dfrac{\sin z}{z^3(1-\cos z)}$.
19. $\dfrac{e^{1/z}}{(e^z-1)(1-z)^3}$.	20. $\dfrac{1}{z^2}+\sin\dfrac{1}{z^2}$.	21. $\dfrac{z^2}{(z^2-4)^2\cos\frac{1}{z-2}}$.
22. $z^2\sin\dfrac{1}{z}$.	23. $\dfrac{\cos\frac{\pi}{2}z}{z^4-1}$.	24. $\dfrac{\sin\pi z}{(z^3-1)^2}$.

25. $\dfrac{\sin^3 z}{z(1-\cos z)}$.	26. $\operatorname{ctg}\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{z^2}$.	27. $\dfrac{\sin 3z^2}{z\left(z^3+1\right)}e^{1/z}$.
28. $\dfrac{\cos \pi z}{\left(4z^2-1\right)\left(z^2+1\right)}$.	29. $\dfrac{\sin 3z}{z(1-\cos z)}$.	30. $\dfrac{2z-\sin 2z}{z^2\left(z^2+1\right)}$.
31. $\dfrac{\sin \pi z}{z^4-1}e^{1/z}$.		

Завдання 34.

Обчислити усі лишки функції.

1. $f(z) = \frac{e^z-1-z}{(1-\cos 2z)\sin z}$

2. $f(z) = \frac{\sin z^2}{\left(z^3-\frac{\pi}{4}z^2\right)}$

3. $f(z) = z^2 \sin\frac{1}{z}$

4. $f(z) = \cos\frac{1}{z} + z^3$

5. $f(z) = \frac{\sin\frac{1}{z}}{1-z}$

6. $f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^3(z-2)}$

7. $f(z) = e^{\frac{z^2+1}{z}}$

8. $f(z) = \frac{z}{(z-1)^3(z+2)^2}$

9. $f(z) = \frac{\sin 2z}{(z+i)\left(z-\frac{i}{2}\right)^2}$

10. $f(z) = e^{z^2+\frac{1}{z^2}}$

11. $f(z) = e^{\frac{z}{z-1}}$

12. $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}$

13. $f(z) = e^{\frac{1}{z^2}} \cos z\,, \quad res\, f(0) - ?$

14. $f(z) = \frac{z^2}{\cosh z - 1 - \frac{z^2}{2}}, \quad res\, f(0) - ?$

15. $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$

16. $f(z) = z^2 \sin \frac{1}{z+1}$

17. $f(z) = \frac{\tan z}{z^2 - \frac{\pi}{4} z}$

18. $f(z) = \frac{e^{\pi z}}{z-i}$

19. $f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2-1)(z+3)}$

20. $f(z) = \frac{1-\cos z}{z^3(z-3)}$

21. f(z)=$e^{-\frac{1}{z^2}} / 1 + z^4$
22. f(z)= $e^z / z^3 (z-1)$
23. f(z)=chz $/(z^2+1)(z-3)$
24. f(z)=cosz $/ z^3 - \frac{\Pi}{2} z^2$
25. f(z)=(1-chz)shz /(1-cosz) $\sin^2$, resf(o) - ?
26. f(z)=$z^3 \sin \frac{1}{z^2}$
27. f(z)=sin2z-2z/ $(1-\cos z)^2$, resf(o) - ?
28. f(z)=1/$z^4 + 1$
29. f(z)=sin3z-3sinz/ (sinz-z)sinz, resf(o) - ?

30. f(z)=$e^z \sin \frac{1}{z^2}$

Завдання 35

З допомогою лишків обчисліть (контурні) інтеграли.

1. $\int_c \frac{e^z dz}{z^2(z^2-9)}$, c: |z|=1

2 $\int_c \frac{\sin z}{(z+1)^3}dz$, c: $|z|=2$

3. $\int_c z^2\sin\frac{1}{z}dz$, c: $|z|=\frac{1}{2}$

4. $\int_c (z+1)e^{\frac{1}{2}}dz$, c:$|z|=\frac{1}{3}$

5. $\int_c \frac{\cos\frac{3}{2}}{z^2-4}dz$, c: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

6. $\int_c \frac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2}dz$ c : $|z-i| = 3$

7. $\int_c \frac{dz}{z^5+z^3}$, c: $|z|=3$

8. $\int_c \frac{zdz}{1-\cos z}$, c: $|z|=5$

9. $\int_c \frac{e^z}{z^4(z^2-1)}dz$, c:$|z|=3$

10. $\int_c \left(\sin\frac{1}{z^2}+e^{z^2}\cos z\right)dz$, c:$|z|=\frac{2}{3}$

11 $\int_c z^n e^{\frac{1}{3z}}$, c : $|z|=4$

12 $\int_c \frac{z+1}{z^2+2z-3}dz$, c: $x^2+y^2=16$

13 $\int_c \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$, c:$|z|=4$

14. $\int_c \frac{e^z dz}{z(1-z)^3}$, c: $|z|=1{,}5$

15 $\int_c \frac{dz}{z^5+z^3}$, c: $|z|=2$

16 $\int_c \frac{dz}{1+z^4}$,c:$|z+1|=1$

17. $\int_c \frac{dz}{1+z^4}$, c: $x^2+y^2=2x$

18. $\int_c \frac{\sin\Pi z}{z^2-z}dz$, c: $|z|=\sqrt{2}$

19, $\int_c \frac{dz}{(z-1)^2(z+2)}$, c: $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=3^{\frac{2}{3}}$

20 $\int_c \frac{1}{z-1}\sin\frac{1}{z}dz$, c: |z|=2

21. $\int_c$ tgzdz , c: |z|=2

22. $\int_c \frac{\sin\Pi z}{(z^2-1)^2}dz$, c: $\frac{x^2}{4}+y^2=1$

23. $\int_c \frac{e^z dz}{z^2(z^2-9)}$, c: |z|=4

24. $\int_c \frac{z^3 dz}{1+2z^4}$, c: |z|= $\frac{1}{2}$

25. $\int_c \frac{zdz}{(z-1)(z-2)^2}$, c: |z-2|= $\frac{1}{2}$

26. $\int_c \frac{dz}{(z-3)(z^5-1}$, c: |z|=2

27. $\int_c \frac{tgz}{z-1}dz$, c: ромб з вершинами $z_1=3$, $z_2=-3$, $z_3=i$, $z_4=-i$.

28. $\int_c \frac{\cos\frac{\Pi}{6}z}{(z-1)(z+3)^2}dz$, c: |z-1|=5

29. $\int_c \frac{\sin z}{z^2\left(z-\frac{\Pi}{2}\right)^3}dz$, c: |z+i|= $\frac{3}{2}$

30. $\int_c \frac{ze^{27}dz}{z^4+8z^2-9}$, c: |z+i√2|=2

Завдання 36

. Обчислити інтеграл.

1. $\oint\limits_{\lvert z\rvert=1/2}\frac{dz}{z\left(z^2+1\right)}.$	2. $\oint\limits_{\lvert z-1-i\rvert=5/4}\frac{2dz}{z^2\left(z-1\right)}.$
3. $\oint\limits_{\lvert z-i\rvert=3/2}\frac{dz}{z\left(z^2+4\right)}.$	4. $\oint\limits_{\lvert z\rvert=1}\frac{2+\sin z}{z\left(z+2i\right)}dz.$
5. $\oint\limits_{\lvert z-3\rvert=1/2}\frac{e^z dz}{\sin z}.$	6. $\oint\limits_{\lvert z-3/2\rvert=2}\frac{z\left(\sin z+2\right)}{\sin z}dz.$

7. $\oint\limits_{\lvert z-1\rvert=3}\frac{ze^{z}}{\sin z}dz.$	8. $\oint\limits_{\lvert z-3/2\rvert=2}\frac{2z\lvert z-1\rvert}{\sin z}dz.$
9. $\oint\limits_{\lvert z-1/4\rvert=1/3}\frac{z(z+1)^2}{\sin 2\pi z}dz.$	10. $\oint\limits_{\lvert z-1/2\rvert=1}\frac{iz(z-i)}{\sin \pi z}dz.$
11. $\oint\limits_{\lvert z-3\rvert=1}\frac{\sin 3z+2}{z^2(z-\pi)}dz.$	12. $\oint\limits_{\lvert z-1/2\rvert=1}\frac{e^{z}+1}{z(z-1)}dz.$
13. $\oint\limits_{\lvert z\rvert=1}\frac{e^{zi}+2}{\sin 3zi}dz.$	14. $\oint\limits_{\lvert z-2\rvert=3}\frac{\cos^2 z+1}{z^2-\pi^2}dz.$
15. $\oint\limits_{\lvert z-1\rvert=3/2}\frac{\ln(z+2)}{\sin z}dz.$	16. $\oint\limits_{\lvert z-6\rvert=1}\frac{\sin^3 z+2}{z^2-4\pi^2}dz.$
17. $\oint\limits_{\lvert z+1\rvert=1/2}\frac{tgz+2}{4z^2+\pi z}dz.$	18. $\oint\limits_{\lvert z+3/2\rvert=1}\frac{\cos^3 z+3}{2z^2+\pi z}dz.$
19. $\oint\limits_{\lvert z+1\rvert=2}\frac{\sin^2 z-3}{z^2+2\pi z}dz.$	20. $\oint\limits_{\lvert z\rvert=1/4}\frac{\ln(e+z)}{z\sin\left(z+\frac{\pi}{4}\right)}dz.$
21. $\oint\limits_{\lvert z\rvert=\pi/2}\frac{z^2+z+3}{\sin z(\pi+z)}.$	22. $\oint\limits_{\lvert z\rvert=1}\frac{z^3-i}{\sin 2z(z-\pi)}dz.$
23. $\oint\limits_{\lvert z-1\rvert=2}\frac{z(z+\pi)}{\sin 2z}dz.$	24. $\oint\limits_{\lvert z\rvert=2}\frac{z^2+\sin z+2}{z^2+\pi z}dz.$
25. $\oint\limits_{\lvert z-3/2\rvert=1}\frac{z(z+\pi)}{\sin 3z(z-\pi)}dz.$	26. $\oint\limits_{\lvert z-3/2\rvert=2}\frac{\sin z}{z(z-\pi)\left(z+\frac{\pi}{3}\right)}dz.$
27. $\oint\limits_{\lvert z-\pi\rvert=1}\frac{(z^2+\pi)^2}{i\sin z}dz.$	28. $\oint\limits_{\lvert z\rvert=2}\frac{\sin^2 z}{z\cos z}dz.$

29. $\oint\limits_{\lvert z-\pi\rvert=2} \frac{\cos^2 z}{z\sin z}dz.$	30. $\oint\limits_{\lvert z-3/2\rvert=2} \frac{z^3+\sin 2z}{\sin\frac{z}{2}(z-\pi)}dz.$
31. $\oint\limits_{\lvert z-1\rvert=2} \frac{z^2+1}{(z^2+4)\sin\frac{z}{3}}dz.$	

Завдання 37.

Обчислити інтеграл.

1. $\oint\limits_{\lvert z\rvert=1} \frac{\cos z^2-1}{z^3}dz.$	2. $\oint\limits_{\lvert z\rvert=1/2} \frac{2-z^2+3z^3}{4z^3}dz.$
3. $\oint\limits_{\lvert z\rvert=3} \frac{e^{1/z}+1}{z}dz.$	4. $\oint\limits_{\lvert z\rvert=2} \frac{\sin z^3}{1-\cos z}dz.$
5. $\oint\limits_{\lvert z\rvert=1/3} \frac{1-2z+3z^2+4z^3}{2z^2}dz.$	6. $\oint\limits_{\lvert z\rvert=2} \frac{1-\cos z^2}{z^2}dz.$
7. $\oint\limits_{\lvert z\rvert=1} \frac{3z^4-2z^3+5}{z^4}dz.$	8. $\oint\limits_{\lvert z\rvert=3} \frac{1-\sin\frac{1}{z}}{z}dz.$
9. $\oint\limits_{\lvert z\rvert=1/2} \frac{e^{2z^2}-1}{z^3}dz.$	10. $\oint\limits_{\lvert z\rvert=1/3} \frac{3-2z+4z^4}{z^3}dz.$
11. $\oint\limits_{\lvert z\rvert=2} \frac{z-\sin z}{2z^4}dz.$	12. $\oint\limits_{\lvert z\rvert=1} \frac{z^3-3z^2+1}{2z^4}dz.$
13. $\oint\limits_{\lvert z\rvert=1/3} \frac{4z^5-3z^3+1}{z^6}dz.$	14. $\oint\limits_{\lvert z\rvert=1} \frac{e^{2z}-z}{z^2}dz.$

15. $\oint\limits_{\lvert z\rvert=1} \frac{\cos iz - 1}{z^3} dz.$	16. $\oint\limits_{\lvert z\rvert=1} \frac{\cos iz - 1}{z^3} dz.$
17. $\oint\limits_{\lvert z\rvert=1/3} \frac{1 - 2z^4 + 3z^5}{z^4} dz.$	18. $\oint\limits_{\lvert z\rvert=3} \frac{z^2 + \cos z}{z^3} dz.$
19. $\oint\limits_{\lvert z\rvert=1/2} \frac{z^5 - 3z^3 + 5z}{z^4} dz.$	20. $\oint\limits_{\lvert z\rvert=2} \frac{z - \sin z}{z^4} dz.$
21. $\oint\limits_{\lvert z\rvert=3} \frac{\cos z^2 - 1}{z^4} dz.$	22. $\oint\limits_{\lvert z\rvert=1/2} \frac{2 + 3z^3 - 5z^4}{z^5} dz.$
23. $\oint\limits_{\lvert z\rvert=1} \frac{ze^{\frac{1}{z}} - z - 1}{z^3} dz.$	24. $\oint\limits_{\lvert z\rvert=2} z^2 \sin \frac{i}{z^2} dz.$
25. $\oint\limits_{\lvert z\rvert=1/2} \frac{z^4 + 2z^2 + 3}{2z^6} dz.$	26. $\oint\limits_{\lvert z\rvert=1} \frac{e^{iz} - 1}{z^3} dz.$
27. $\oint\limits_{\lvert z\rvert=1/3} \frac{1 - z^4 + 3z^6}{2z^3} dz.$	28. $\oint\limits_{\lvert z\rvert=2} z^3 \cos \frac{2i}{z} dz.$
29. $\oint\limits_{\lvert z\rvert=1/3} \frac{e^z - \sin z}{z^2} dz.$	30. $\oint\limits_{\lvert z\rvert=3} \frac{2z^3 + 3z^2 - 2}{2z^5} dz.$
31. $\oint\limits_{\lvert z\rvert=1} \frac{z^2 e^{1/z^2} - 1}{z} dz.$	

Завдання 38.

Обчислити інтеграл.

1. $\oint\limits_{\lvert z\rvert=0,2} \frac{3\pi z - \sin 3\pi z}{z^2 - \operatorname{sh}^2 \pi^2 z} dz.$	2. $\oint\limits_{\lvert z\rvert=1} \frac{\cos 3z - 1 + 9z^2/2}{z^4 \operatorname{sh} \frac{9}{4} z} dz.$

3. $\displaystyle\oint\limits_{\lvert z\rvert=0,5} \frac{\operatorname{sh} 2\pi z - 2\pi z}{z^2 \sin^2 \frac{\pi^2 z}{3}} dz.$	4. $\displaystyle\oint\limits_{\lvert z\rvert=2} \frac{\operatorname{sh} 3z - 1 + 9z^2/2}{z^4 \sin \frac{9z}{8}} dz.$
5. $\displaystyle\oint\limits_{\lvert z\rvert=0,5} \frac{e^{2z} - 1 - 2z}{z \operatorname{sh}^2 4iz} dz.$	6. $\displaystyle\oint\limits_{\lvert z\rvert=0,4} \frac{e^{4z} - \cos 7z}{z \operatorname{sh} 2\pi z} dz.$
7. $\displaystyle\oint\limits_{\lvert z\rvert=0,2} \frac{e^{8z} \operatorname{ch} 4z}{z \sin 4\pi z} dz.$	8. $\displaystyle\oint\limits_{\lvert z\rvert=0,1} \frac{\operatorname{ch} z - \cos 3z}{z^2 \sin 5\pi z} dz.$
9. $\displaystyle\oint\limits_{\lvert z\rvert=1} \frac{\operatorname{sh} 3z - \sin 3z}{z^3 \operatorname{sh} 2z} dz.$	10. $\displaystyle\oint\limits_{\lvert z\rvert=0,05} \frac{e^{?z} - 1 - \sin 4z}{z^3 \operatorname{sh} 16\pi z} dz.$
11. $\displaystyle\oint\limits_{\lvert z\rvert=1} \frac{6z - \sin 6z}{z^2 \operatorname{sh}^2 2z} dz.$	12. $\displaystyle\oint\limits_{\lvert z\rvert=2} \frac{\cos 4z - 1 + 8z^2}{z^4 \operatorname{sh} \frac{4z}{3}} dz.$
13. $\displaystyle\oint\limits_{\lvert z\rvert=6} \frac{\operatorname{sh} \pi z - \pi z}{z^2 \sin^2 \frac{\pi z}{6}} dz.$	14. $\displaystyle\oint\limits_{\lvert z\rvert=1} \frac{\operatorname{ch} 4z - 8z^2 - 1}{z^4 \sin \frac{8z}{3}} dz.$
15. $\displaystyle\oint\limits_{\lvert z\rvert=0,9} \frac{e^{3z} - 1 - 3z}{\operatorname{sh}^2 \pi z} dz.$	16. $\displaystyle\oint\limits_{\lvert z\rvert=0,5} \frac{e^{6z} - \cos 8z}{z \operatorname{sh} 4z} dz.$
17. $\displaystyle\oint\limits_{\lvert z\rvert=1} \frac{e^{?z} - \operatorname{ch} 5z}{z \sin 2iz} dz.$	18. $\displaystyle\oint\limits_{\lvert z\rvert=0,5} \frac{\operatorname{ch} 3z - \cos 4iz}{z^2 \sin 5z} dz.$
19. $\displaystyle\oint\limits_{\lvert z\rvert=2} \frac{\operatorname{sh} 3z - \sin 3z}{z^3 \operatorname{sh} - iz} dz.$	20. $\displaystyle\oint\limits_{\lvert z\rvert=0,5} \frac{e^{5z} - 1 - \sin 5z}{z^2 \operatorname{sh} 5z} dz.$
21. $\displaystyle\oint\limits_{\lvert z\rvert=2} \frac{\sin 3z - 3z}{z^2 \operatorname{sh}^2 iz} dz.$	22. $\displaystyle\oint\limits_{\lvert z\rvert=2} \frac{\cos 2z - 1 + 2z^2}{z^4 \operatorname{sh} \frac{\pi z}{3}} dz.$
23. $\displaystyle\oint\limits_{\lvert z\rvert=5} \frac{sh 2z - 2z}{z^2 \sin^2 \frac{z}{3}} dz.$	24. $\displaystyle\oint\limits_{\lvert z\rvert=1} \frac{ch 2z - 1 - 2z^2}{z^4 \sin \frac{2\pi z}{3}} dz.$

25. $\oint\limits_{\lvert z\rvert=0,4} \frac{e^{2z}-1-2z}{z\,\mathrm{sh}^2\,2\pi z}dz.$	26. $\oint\limits_{\lvert z\rvert=0,3} \frac{e^{4z}-1-\sin 4z}{z^2\,\mathrm{sh}\,8iz}dz.$
27. $\oint\limits_{\lvert z\rvert=0,5} \frac{e^{5z}-\mathrm{ch}\,6z}{z\sin \pi z}dz.$	28. $\oint\limits_{\lvert z\rvert=0,2} \frac{\mathrm{ch}\,2z-\cos 2z}{z^2\sin 8z}dz.$
29. $\oint\limits_{\lvert z\rvert=4} \frac{\mathrm{sh}\,iz-\sin iz}{z^3\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi}{3}}dz.$	30. $\oint\limits_{\lvert z\rvert=0,3} \frac{e^{3z}-1-\sin 3z}{z^2\,\mathrm{sh}\,3\pi z}dz.$
.31. $\oint\limits_{\lvert z\rvert=0,5} \frac{e^{2z}-\cos 9z}{z\,\mathrm{sh}\,\pi iz}dz.$	

Завдання 39.

Обчислити інтеграл.

1. $\oint\limits_{\lvert z+i\rvert=3} \left(\frac{4\sin\frac{\pi z}{4-2i}}{(z-2+i)^2(z-4+i)} + \frac{\pi i}{e^{\pi z/2}+i} \right)dz.$
2. $\oint\limits_{\lvert z+6\rvert=2} \left(ze^{\frac{1}{z+6}} + \frac{2\cos \pi z/5}{(z+5)^2(z+3)} \right)dz.$
3. $\oint\limits_{\lvert z-i\rvert=3} \left(\frac{\pi}{e^{\pi z/2}-i} - \frac{2\,\mathrm{sh}\frac{\pi iz}{4+2i}}{(z-2-i)^2(z-4-i)} \right)dz.$

4. $\oint\limits_{\lvert z+2\rvert=2}\left(z\,\mathrm{ch}\,\frac{1}{z+2}-\frac{2\sin(\pi z/2)}{(z+1)^2(z-1)}\right)dz.$
5. $\oint\limits_{\lvert z-2i\rvert=2}\left(\frac{2\cos\frac{\pi z}{2+2i}}{(z-2-2i)^2(z-4-2i)}+\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}+1}\right)dz.$
6. $\oint\limits_{\lvert z+3\rvert=2}\left(z\,\mathrm{sh}\,\frac{i}{z+3}-\frac{4\,\mathrm{sh}(\pi i z/4)}{(z+2)^2 z}\right)dz.$
.7. $\oint\limits_{\lvert z+5i\rvert=2}\left(\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}+i}+\frac{8\,\mathrm{ch}\frac{\pi i z}{1-5i}}{(z-1+5i)^2(z-3+5i)}\right)dz.$
8. $\oint\limits_{\lvert z+2\rvert=2}\left(z\cos\frac{1}{z+4}+\frac{2\sin(\pi z/6)}{(z+3)^2(z+1)}\right)dz.$
9. $\oint\limits_{\lvert z-7i\rvert=2}\left(\frac{2\sin\frac{\pi i z}{2+14i}}{(z-1-7i)^2(z-3-7i)}+\frac{\pi}{e^{\pi z/2}+i}\right)dz.$
10. $\oint\limits_{\lvert z+5\rvert=2}\left(z\sin\frac{i}{z+5}-\frac{4\,\mathrm{ch}(\pi i z/4)}{(z+4)^2(z+2)}\right)dz.$
11. $\oint\limits_{\lvert z-3i\rvert=2}\left(\frac{\pi i}{e^{\pi z/2}+i}+\frac{8\cos\frac{\pi z}{1+3i}}{(z-1-3i)^2(z-3-3i)}\right)dz.$
12. $\oint\limits_{\lvert z-1\rvert=2}\left(ze^{\frac{2}{z-1}}+\frac{2\cos\pi z/2}{(z-2)^2(z-4)}\right)dz.$

13.	$\oint\limits_{\lvert z+i\rvert=2}\left(\dfrac{2\sin\dfrac{\pi z}{2-2i}}{(z-1+i)^2(z-3+i)}-\dfrac{3\pi i}{e^{\pi z/2}+i}\right)dz.$
14.	$\oint\limits_{\lvert z-2\rvert=2}\left(z\operatorname{ch}\dfrac{3}{z-2}+\dfrac{2\cos(\pi z/3)}{(z-3)^2(z-5)}\right)dz.$
15.	$\oint\limits_{\lvert z+7i\rvert=2}\left(\dfrac{\pi i}{e^{\pi z/2}-i}-\dfrac{8\operatorname{ch}\dfrac{\pi iz}{1-7i}}{(z-1+7i)^2(z-3+7i)}\right)dz.$
16.	$\oint\limits_{\lvert z-3\rvert=2}\left(z\operatorname{sh}\dfrac{1}{z-3}-\dfrac{4\sin(\pi z/8)}{(z-2)^2(z-6)}\right)dz.$
17.	$\oint\limits_{\lvert z+3i\rvert=2}\left(\dfrac{4\operatorname{sh}\dfrac{\pi iz}{2-6i}}{(z-1+3i)^2(z-3+3i)}-\dfrac{\pi}{e^{\pi z/2}-i}\right)dz.$
18.	$\oint\limits_{\lvert z-4\rvert=2}\left(z\cos\dfrac{1}{z-4}+\dfrac{10\operatorname{ch}(\pi iz/5)}{(z-5)^2(z-7)}\right)dz.$
19.	$\oint\limits_{\lvert z-5i\rvert=2}\left(\dfrac{\pi i}{e^{\pi z/2}-i}+\dfrac{2\cos\dfrac{\pi z}{1+5i}}{(z-1-5i)^2(z-3-5i)}\right)dz.$
20.	$\oint\limits_{\lvert z-5\rvert=2}\left(z\sin\dfrac{i}{z-5}+\dfrac{2\operatorname{sh}(\pi iz/12)}{(z-6)^2(z-8)}\right)dz.$
21.	$\oint\limits_{\lvert z+i\rvert=2}\left(\dfrac{4\sin\dfrac{\pi z}{2+2i}}{(z-1-i)^2(z-3-i)}+\dfrac{\pi i}{e^{\pi z/2}-i}\right)dz.$

22. $\oint\limits_{\lvert z-6\rvert=2}\left(ze^{\frac{1}{z-6}}+\dfrac{2\,\mathrm{ch}\,\pi iz/5}{(z-5)^2(z-3)}\right)dz.$
23. $\oint\limits_{\lvert z-6i\rvert=2}\left(\dfrac{\pi i}{e^{\pi z/2}+1}-\dfrac{8\,\mathrm{ch}\dfrac{\pi iz}{1+6i}}{(z-1-6i)^2(z-3-6i)}\right)dz.$
24. $\oint\limits_{\lvert z-5\rvert=2}\left(z\,\mathrm{ch}\dfrac{2}{z-5}+\dfrac{4\cos(\pi z/4)}{(z-4)^2(z-2)}\right)dz.$
25. $\oint\limits_{\lvert z+6i\rvert=2}\left(\dfrac{4\,\mathrm{sh}\dfrac{\pi iz}{2-12i}}{(z-1+6i)^2(z-3+6i)}-\dfrac{\pi i}{e^{\pi z/2}+1}\right)dz.$
26. $\oint\limits_{\lvert z-4\rvert=2}\left(z\,\mathrm{sh}\dfrac{1}{z-4}+\dfrac{2\sin(\pi z/6)}{(z-3)^2(z-1)}\right)dz.$
27. $\oint\limits_{\lvert z+2i\rvert=2}\left(\dfrac{\pi}{e^{\pi z/2}+1}+\dfrac{4\cos\dfrac{\pi z}{1-2i}}{(z-1+2i)^2(z-3+2i)}\right)dz.$
28. $\oint\limits_{\lvert z-3\rvert=2}\left(z\cos\dfrac{1}{z-3}+\dfrac{4\,\mathrm{ch}(\pi iz/2)}{z(z-2)^2}\right)dz.$
29. $\oint\limits_{\lvert z-2i\rvert=2}\left(\dfrac{2\sin\dfrac{\pi z}{2+4i}}{(z-1-2i)^2(z-3-2i)}-\dfrac{\pi}{e^{\pi z/2}+1}\right)dz.$
30. $\oint\limits_{\lvert z-2\rvert=2}\left(z\sin\dfrac{i}{z-2}-\dfrac{2\,\mathrm{sh}(\pi iz/2)}{(z-1)^2(z+1)}\right)dz.$

31. $$\oint\limits_{|z+2i|=2}\left(\frac{\pi}{e^{\pi z/2}+1}+\frac{6\operatorname{ch}\frac{\pi i z}{2-2i}}{(z-2+2i)^2(z-4-2i)}\right)dz.$$

Розділ YII. Обчислення деяких визначених та невласних інтегралів

1) Інтеграли вигляду

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x\,;\sin x)dx,$$

де R – раціональна функція, можна звести до контурного інтеграла від функції комплексної змінної. Дійсно, зробивши заміну $e^{ix}=z$, ми одержимо:

$$dx=\frac{dz}{iz};\ \cos x=\frac{z^2+1}{2z};\ \sin x=\frac{z^2-1}{2iz}.$$

Таким чином

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x\,;\sin x)dx=\oint\limits_{|z|=1} R(\frac{z^2+1}{2z};\frac{z^2-1}{2iz})\frac{dz}{iz},$$

де останній інтеграл можна обчислити за допомогою лишків.

2) Невласні інтеграли вигляду

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx,$$

де $P_m(x)$, $Q_n(x)$ – алгебраїчні многочлени, причому $n\geq m+2, Q_n(x)\neq 0$ при $x\in R$, обчислюються за формулою:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}dx=2\pi i\sum_{k=1}^{n} res_{z=z_k}\left(\frac{P_m(z)}{Q_n(z)}\right),$$

де z_k – усі ізольовані особливі точки функції $\frac{P_m(z)}{Q_n(z)}$, що лежать у півплощині $Im\,z>0$.

Якщо $n > m, t > 0$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} \cos tx\, dx = Re\,(2\pi i \sum_{k=1}^{n} res_{z=z_k}\left(\frac{P_m(z)e^{itz}}{Q_n(z)}\right)),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} \sin tx\, dx = Im(2\pi i \sum_{k=1}^{n} res_{z=z_k}\left(\frac{P_m(z)e^{itz}}{Q_n(z)}\right)),$$

де z_k – усі ізольовані особливі точки функції $\frac{P_m(z)}{Q_n(z)} e^{itz}$, що лежать у півплощині $Im\, z > 0$.

Завдання 40

Обчислити інтеграл.

1. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\sqrt{3}\sin t}$.	2. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{4+\sqrt{15}\sin t}$.
3. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5+2\sqrt{6}\sin t}$.	4. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{6+\sqrt{35}\sin t}$.
5. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{7+4\sqrt{3}\sin t}$.	6. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5-4\sin t}$.
7. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5-3\sin t}$.	8. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{8-3\sqrt{7}\sin t}$.
9. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{9-4\sqrt{5}\sin t}$.	10. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{4-\sqrt{7}\sin t}$.
11. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3-\sqrt{5}\sin t}$.	12. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3-2\sqrt{2}\sin t}$.
13. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{4-2\sqrt{3}\sin t}$.	14. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5-\sqrt{21}\sin t}$.

15. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{6-4\sqrt{2}\sin t}$.	16. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{8-2\sqrt{15}\sin t}$.
17. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{3}\sin t-2}$.	18. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{15}\sin t-4}$.
19. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{2\sqrt{6}\sin t-5}$.	20. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{35}\sin t-6}$.
21. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{4\sqrt{3}\sin t-7}$.	22. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{4\sin t+5}$.
23. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{3\sin t+5}$.	24. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{3\sqrt{7}\sin t+8}$.
.25. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{4\sqrt{5}\sin t+9}$.	26. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{7}\sin t+4}$.
27. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{5}\sin t+3}$.	28. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{2\sqrt{2}\sin t+3}$.
29. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{2\sqrt{3}\sin t+4}$.	30. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{21}\sin t+5}$.
31. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{4\sqrt{2}\sin t+6}$.	

Завдання 41.

Обчислити інтеграл.

1. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(1+\sqrt{10/11}\cos t\right)^2}$.	2. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(\sqrt{5}+\cos t\right)^2}$.

3. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(1+\sqrt{6/7}\cos t\right)^2}$.	4. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(2\sqrt{3}+\sqrt{11}\cos t\right)^2}$.
5. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\cos t\right)^2}$.	6. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(4+\cos t\right)^2}$.
7. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(4+3\cos t\right)^2}$.	8. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\cos t\right)^2}$.
9. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(\sqrt{7}+2\cos t\right)^2}$.	10. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(4+\sqrt{7}\cos t\right)^2}$.
11. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(3+\sqrt{5}\cos t\right)^2}$.	12. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(3+2\sqrt{2}\cos t\right)^2}$.
13. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(2\sqrt{2}+\sqrt{7}\cos t\right)^2}$.	14. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(\sqrt{6}+\cos t\right)^2}$.
15. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\cos t\right)^2}$.	16. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\cos t\right)^2}$.
17. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(\sqrt{2}+\cos t\right)^2}$.	18. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(\sqrt{5}+2\cos t\right)^2}$.
19. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(3+\cos t\right)^2}$.	20. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\cos t\right)^2}$.
21. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(\sqrt{3}+\cos t\right)^2}$.	22. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(2+\sqrt{3}\cos t\right)^2}$.

23. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(\sqrt{13}+2\sqrt{3}\cos t\right)^2}$.	24. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(2+\cos t\right)^2}$.
25. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(3+2\cos t\right)^2}$.	26. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(2+\cos t\right)^2}$.
27. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(\sqrt{10}+3\cos t\right)^2}$.	28. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\cos t\right)^2}$.
29. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\cos t\right)^2}$.	30. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(\sqrt{7}+\cos t\right)^2}$.
31. $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\cos t\right)^2}$.	

Завдання 42.

Обчислити інтеграл.

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}dx.$	2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-1}{\left(x^2+4\right)^2}dx.$
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^4+1\right)^2}$.	4. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2+4\right)^2\left(x^2+16\right)}$.
5. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2-x+1\right)^2}$.	6. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2+4\right)\left(x^2+9\right)^2}$.
7. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+10x^2+9}$.	8. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2+9\right)\left(x^2+4\right)^2}$.

9. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+3)^2}$.	10. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+2)(x^2+3)^2}$.
11. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+9)(x^2+1)^2}$.	12. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{(x^2+x+1)^2} dx$.
13. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{(x^2+4x+13)^2} dx$.	14. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+5)^2} dx$.
15. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)}$.	16. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+5}{x^4+5x^2+6} dx$.
17. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}$.	18. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+3}{(x^2+10x+29)^2} dx$.
19. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+5)^2}$.	20. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+7x^2+12}$.
21. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+4}{(x^2+9)^2} dx$.	22. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^5}$.
23. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+2)^2(x^2+10)^2}$.	24. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2-1}{(x^2+8x+17)^2} dx$.
25. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+10}{(x^2+4)^2} dx$.	26. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^4}$.
27. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+3)^2(x^2+15)^2}$.	28. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+2}{x^4+7x^2+12} dx$.
29. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-10x+29)^2}$.	30. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+11)^2} dx$.

31. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2\left(x^2+16\right)}.$	

Завдання 43.

Обчислити інтеграл.

1. $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x\sin 3x}{\left(x^2+4\right)^2}dx.$	2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-1)\sin x}{\left(x^2+9\right)^2}dx.$
3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{\left(x^2+1\right)^2}dx.$	4. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2\cos x}{\left(x^2+1\right)^2}dx.$
5. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x+1)\cos x}{x^4+5x^2+6}dx.$	6. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin\frac{x}{2}dx}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+9\right)}.$
7. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left(x^2+3\right)\cos 2x}{x^4+3x^2+2}dx.$	8. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left(x^3-2\right)\cos\frac{x}{2}dx}{\left(x^2+1\right)^2}.$
9. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left(x^2-x\right)\sin x}{x^4+9x^2+20}dx.$	10. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^2-2x+2}dx.$
11. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin 2x-\sin x}{\left(x^2+4\right)^2}dx.$	12. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 5x dx}{\left(x^2+1\right)^2\left(x^2+4\right)}.$
13. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^3\sin x}{x^4+5x^2+4}dx.$	14. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x+1)\sin 2x}{x^2+2x+2}dx.$
15. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{\left(x^2+1\right)^2}dx.$	16. $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{\left(x^2+\frac{1}{4}\right)^2}dx.$

17. $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\cos xdx}{\left(x^2+1\right)^3}.$	18. $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\cos xdx}{\left(x^2+16\right)\left(x^2+9\right)}.$
19. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin xdx}{x^2-2x+10}.$	20. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos xdx}{x^2-2x+10}.$
21. $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{x\sin\frac{x}{2}}{x^2+4}dx.$	22. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin 2x}{\left(x^2-x+1\right)^2}dx.$
23. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin 2xdx}{\left(x^2-x+1\right)^2}.$	24. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left(x^3+5x\right)\sin x}{x^4+10x^2+9}dx.$
25. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2\cos xdx}{x^4+10x^2+9}.$	26. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left(x^3+1\right)\cos x}{x^4+5x^2+4}dx.$
27. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left(x^3+1\right)\sin x}{x^4+5x^2+4}dx.$	28. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x-\cos x}{\left(x^2+1\right)^2}dx.$
29. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left(x^2+x\right)\sin x}{x^4+13x^2+36}dx.$	30. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left(x^2+x\right)\cos x}{x^4+13x^2+36}dx.$
31. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 3x-\cos 2x}{\left(x^2+1\right)^2}dx.$	

Розділ YIII. Конформні відображення

Нехай D – деяка однозв`язна область точок комплексної площини **C** (z=x+iy або $z=\rho e^{i\varphi}$, де x=Rez, y=Imz, ρ=|z| , φ=argz) ,на якій визначена аналітична функція w=f(z) (w=u+iv або $w=\gamma e^{i\theta}$, де

U=Rew , v=Imw , $\gamma = |w|$, $\theta = \arg w$),тобто існує похідна функції для всіх z∈D. Функція w=f(z) відображає область D на деяку область D_1, розміщену на комплексній w – площині.
Відображення може бути однозначним і багатозначним. Якщо $w_1 = f(z_1)$;

$w_2 = f(z_2)$ і для будь-яких $z_1 \neq z_2$ в області D має місце нерівність $w_1 \neq w_2$, то функцію w=f(z) називають однолистою і вона виконує взаємно однозначне відображення областей D і D_1.

Наприклад

1) $w = \frac{az+b}{cz+d}$ однолиста в будь-якій області D, якщо ad-bc≠o. Дійсно, маємо

$w_2 - w_1 = \frac{(ad-bc)(z_2-z_1)}{(cz_1+d)(cz_2+d)}$

Звідки очевидно $w_2 \neq w_1$, якщо $z_2 \neq z_4$.

2) $w=z^2$.

$w_2 - w_1 = (z_2 - z_1)(z_2 + z_1)$.

Ця функція однолиста в будь-якій області D , що не містить точок $z_2 = -z_1$.

Якщо W=f(z) однолиста в області D,то вона відображає цю область на D_1,з таким же порядком зв`язності,тобто границі D і D_1 складаються з однакової кількості ліній,які їх обмежують.

Відображення аналітичними однолистими в області D функціями звуться конформними. Це означає:

1) Постійність лінійного масштабу відображення в кожній фіксованій точці області D;

2) Рівність кутів і їх орієнтація ,тобто,якщо криві l_1 і l_2 виходять з точки z_0 і утворюють додатний чи від`ємний кут α,то їх образи $L_1$ і $L_2$ при відображенні виходять з точки $w_0 = f(z_0)$ в $D_1$і кут між ними теж α. Ця властивість може не мати місця хіба що в тих точках,де $f`(z) = o$.

Приклад 8.I.

За допомогою функції W=2z+1 знайти відображення кола $x^2 + y^2 = 1$ (це область D) на площину w.

Розв`язування: z=x+iy.

Тоді W=2(x+iy)+1=(2x+1)+2yi.

$$\begin{cases} u = 2x + 1 \\ v = 2y \end{cases}$$

Із системи знаходимо

$$x= \frac{u-1}{2},\ y= \frac{v}{2}$$

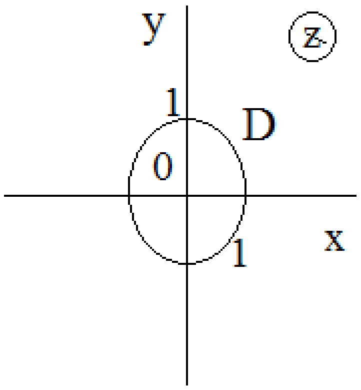
Підставимо в рівняння кола (D):

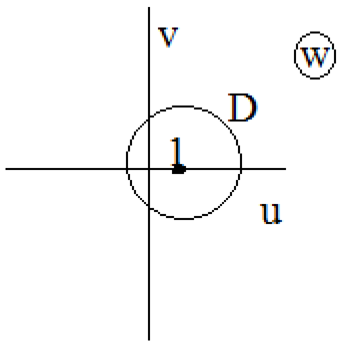
$\left(\frac{u-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2 = 1.$

Звідси отримуємо область D_1(коло);

$(u-1)^2+v^2=4.$

Графічна інтерпретація:





Приклад 8.2.

Знайти відображення області D: y>x+1 функцією

W= $\frac{z+1}{z-1}$.

Розв`язування:

Спочатку знайдемо образ лінії y=x+1. За цієї умови

W=1+$\frac{2}{z-1} = 1 + \frac{2}{x+iy-1} = 1 + \frac{2}{(x-1)+i(x+1)} = 1 + 2\frac{(x-1)-i(x+1)}{(x-1)^2+(x+1)^2} = 1 + \frac{(x-1)-i(x+1)}{x^2+1}$,

звідки

w-1=$\frac{x-1}{x^2+1} - i\frac{x+1}{x^2+1}$

Якщо w=u+iv,то маємо

$$\begin{cases} u-1 = \dfrac{x-1}{x^2+1} \\ v = -\dfrac{x+1}{x^2+1} \end{cases}$$

Для знаходження канонічного рівняння цієї лінії виключимо з системи x.

Спочатку розділимо першу рівність на другу:

$$\frac{u-1}{v} = \frac{1-x}{x+1}$$

звідки

$$x = \frac{v-u+1}{v+u-1}$$

Підставимо x в друге рівняння системи:

$$v = -\frac{\frac{v-u+1}{v+u-1}+1}{\left(\frac{v-u+1}{v+u-1}\right)^2+1} = -\frac{2v(v+u-1)}{(v-u+1)^2+(v+u-1)^2},$$

Оскільки $v \neq 0$, то $(v-u+1)^2 + (v+u-1)^2 = 2(1-u-v)$,

$$2u^2 + 2v^2 - 4u = -2u - 2v$$

$$u^2 + v^2 - u + v = 0$$

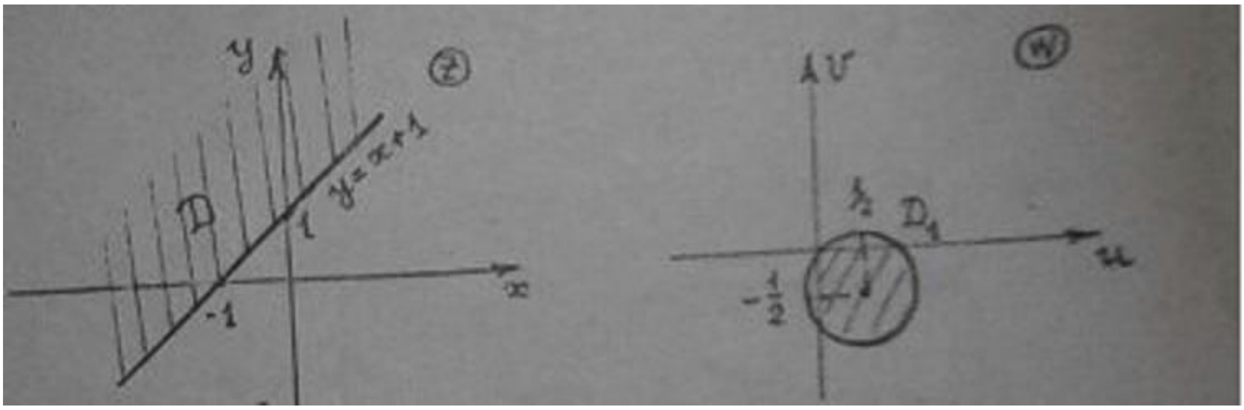
Маємо коло з центром $\left(\frac{1}{2}\ ;\ -\frac{1}{2}\right)$ і радіусом $\frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

Залишилось з`ясувати: D_1всередині кола чи зовні. Для цього візьмемо точку z=-2 ∈ D. Тоді $W=f(-2)=\frac{-2+1}{-2-1}=\frac{1}{3}$ - в середині кола.

<u>Відповідь</u>. D_1 – круг $\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2<\frac{1}{2}$.

Графічна інтерпретація:



Завдання 44.

Знайти образ області D при відображенні функцією $W=f(z)$ та дати графічну інтерпретацію.

1. $w=\frac{1}{z}$, D: $\begin{cases} x^2+y^2<2y \\ y>x \end{cases}$;

2. $w=\frac{2z+1}{z+2}$, D: $\begin{cases} |z|<1 \\ y>0 \end{cases}$;

3. $w=e^{2z}$, D: $\begin{cases} 0<y<\frac{\pi}{2}; \\ x>0 \end{cases}$

4. $w=z^2$, D: $\begin{cases} |z|>1/2, \\ Rez>0 \end{cases}$;

5. $w=z^3$, D: $\begin{cases} x^2+y^2\le 1, \\ 0<argz<\pi/6 \end{cases}$;

6. $w=\frac{z-1}{2z-6}$, D: $|z-1|<2$;

7. $w=e^{iz}$, D: $\begin{cases} 0<x<\pi \\ y>0 \end{cases}$;

8. $w=\frac{1}{z}$, D: $\begin{cases} x^2+y^2<x \\ y>\frac{1}{2}x \end{cases}$;

9. $w=\frac{z+1}{z-2}$, D $|z-1|<2$;

10. $w = z^2, D: \begin{cases} y \le x \\ 0 \le x \le 1; \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$

11. $w = lnz, D: y > 0;$

12. $w = 4 + 2iz, D: |z - i| < 1;$

13. $w = \frac{2}{z-1}, D: 1 < |z| < 2;$

14. $w = e^z, D: -\pi < y < 0;$

15. $w = z^2, D: \begin{cases} |z| < 2 \\ 0 < argz < \pi/2 \end{cases};$

16. $w = \frac{1}{z}, D: \begin{cases} |z - i| > 1 \\ Imz > 0 \end{cases};$

17. $w = \frac{1-z}{1+z}, D: \begin{cases} |z| < 1 \\ Imz > 0. \end{cases};$

18. w=z^4 , D:

$$\begin{cases} |z| \geqslant 2 \\ \frac{\pi}{8} \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

;

19.

$$w = \frac{z-3+i}{z+1+i}; \ \operatorname{Re} z < 1.$$

20. w=8z-1, D:x^2+y^2 >= 4;

21.

$$w = \frac{2}{z-1}; \text{ область } D: \{1 < |z| < 2\}.$$

22. w=e^z , D: 0 < y < πi/2 ;

23. w=(i-z)/(i+z), D: x > 0 , y < 0;

24. w= 2(z+1/z), D: |z|<1, 0<arg(z)<πi/2;

25. w=z^2 , D: xϵ[o;2] , yϵ[0;2] , y > x;

26.

$$w = \frac{1-z}{1+z}; \text{ область } D: \{|z| < 1, \ \operatorname{Im} z > 0\}.$$

27. w=1/z, D:

$$\begin{cases} |z-1|<1 \\ y>x \end{cases}$$

;

28. w= (2iz)/(z+3), D: |z-1|<2;

29. w=ln z, D: $x^2+y^2 < 1$, y > 0;

30. w=1/(z-i), D: y > 0.

Завдання 45.

З'ясувати , у що перетвориться геометрична фігура при відображенні за допомогою функції $w = f(z)$

1. $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, область: $\begin{cases} |z| = 1 \\ Imz > 0 \end{cases}$;

2. w=ctg z, область: 0 < x < πi/4;
3. w= cos z, область: xє[-πi/2;πi/2];
4. $$w = \frac{2}{z-1}; \text{ область } D: \{1 < |z| < 2\}.$$
5. $$w = \frac{2}{z-1}; \text{ область } D: \{1 < |z| < 2\}.$$
6. . $w = \cos z$, область $0 < x < \pi,\ y < 0.$
7. . $w = \cos z$, область $0 < x < \pi/2,\ y > 0.$
8. $w = \cos z$, область . $-\pi/2 < x < \pi/2,\ y > 0.$
9.

. $w = \cos z$, область $0 < x < \pi$.

10.

. $w = \cos z$, прямокутник $0 < x < \pi,\ -h < y < h,\ h > 0$.

11.

$w = \arcsin z$; верхня півплощина.

12.

$w = \arcsin z$; перший квадрант.

13.

. $w = \operatorname{ch} z$; прямокутна сітка $x = C,\ y = C$.

14.

$w = \operatorname{ch} z$; область $0 < y < \pi$.

15.

$w = \operatorname{ch} z$; область $x > 0,\ 0 < y < \pi$.

16.

$w = \operatorname{Arsh} z$, перший квадрант.

17.

$w = \operatorname{tg} z$; область $0 < x < \pi,\ y > 0$.

18.

. $w = \operatorname{tg} z$; область $0 < x < \pi$.

19.

. $w = \operatorname{tg} z$; область $0 < x < \pi/4$.

20.

. $w = \operatorname{tg} z$; область $-\pi/4 < y < \pi/4$.

21.

. $w = \operatorname{cth} z$; область $0 < y < \pi,\ x > 0$.

22.

$w = \operatorname{cth} z$; область $0 < y < \pi$.

23.

w=e^z,прямі x=C,y=C.

24.

w=e^z, область $\alpha < y < \beta$,$0 \le \alpha < \beta \le 2\pi$.

25.

w=e^z пряма y=kx+b.

26.

w=e^z область між y=x y=x+2π.

27.

w=e^z, область $x < 0, 0 < y < \alpha \leq 2\pi$.

28.

w=e^z область $0 < y < \alpha \leq 2\pi, x > 0$.

29.

$w = \ln z$; полярна сітка $|z| = R,\ \arg z = \theta$.

30.

$w = \ln z$; кут $0 < \arg z < \alpha \leq 2\pi$.

31.

. $w = \ln z$; сектор $|z| < 1,\ 0 < \arg z < \alpha \leq 2\pi$.

Список використаної літератури

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. –М.: Наука, 1985.
2. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного.
3. Лунц Т.Л., Эльсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного. –М.: Наука, 1958.
4. Краснов М.Л., Макаренко Г.И. Операционные исчесления. –М.: Наука, 1964.
5. Мартыненко В.С. Операционные исчесления. –М.: Наука, 1964.
6. Методические указания к типовому расчету по теории функций комплексног переменного и операционному исчеслению для студентов электрорадиотехнических специальностей / Сост. Л.П. Пеклова, С.В. Горлен А.А.Якубенко, Буценко Ю.П. и др. –К.: КПИ, 1989.

ЗМІСТ