Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України

Диференціальне числення функцій та вектор-функцій декількох змінних

Методичні вказівки
до виконання типової розрахункової роботи
з математичного аналізу
для студентів другого курсу
фізико-математичного факультету

Рекомендовано Методичною радою фізико-математичного факультету НТУУ «КПІ»

Київ
НТУУ «КПІ»
2015

Диференціальне числення функцій та вектор-функцій декількох змінних: Метод. вказівки до викон. типової розрахунк. роботи з матем. аналізу для студ. 2 курсу фіз..-мат. ф-ту/ Уклад.: В.В.Дрозд. – К.: НТУУ «КПІ», 2015

Гриф надано Методичною радою фізико-математичного факультету НТУУ «КПІ» (Протокол № від 2015 р.)

Навчальне видання

Диференціальне числення функцій та вектор-функцій декількох змінних

Методичні вказівки
до виконання типової розрахункової роботи
з математичного аналізу
для студентів другого курсу
фізико-математичного факультету

Укладачі: Дрозд Вячеслав Володимирович

Віповідальний редактор: Вірченко Ніна Опанасівна

Рецензент: Авраменко Людмила Григорівна

ПЕРЕДМОВА

Методичні вказівки складено до двох розділів математичного аналізу: «Диференціальне числення функцій декількох змінних» та «Диференціальне числення вектор-функцій декількох змінних». Вони містять теоретичні питання до колоквіумів, основні означення і формули, які використовуються при розв'язанні задач, розв'язки типових задач, завдання типової розрахункової роботи. Робота виконується у третьому семестрі і може бути запропонована як студентам фізико–математичного факультету так і студентам факультету інформатики та обчислювальної техніки. Кожен студент готує та здає усно теоретичний матеріал на колоквіумі і у письмовій формі завдання типової роботи, вказані викладачем. Зошит з розв'язаними задачами повинен бути зданий викладачеві, який проводить практичні заняття, до контрольної роботи.

Студент, який не здав колоквіум і типову роботу, не допускається до екзамену, як такий, що не виконав навчальний графік.

§1.ОБЛАСТЬ ВИЗНАЧЕННЯ ТА МНОЖИНА ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Якщо кожній точці деякої множини з простору $\mathbf{R_n}$ поставлено у відповідність одне дійсне число, то кажуть, що задано функцію n змінних $u=f(x_1;x_2;\ldots;x_n)$. При цьому вказану множину простору $\mathbf{R_n}$ називають областю визначення функції f. Якщо функцію задано аналітично, а область визначення окремо не задано, то областю визначення вважають область усіх допустимих точок простору $\mathbf{R_n}$, для яких функція існує.

<u>Приклад 1.1</u> Знайти область визначення $D(z)$ функції

$z=\ln(x^2+y^2-1)-\sqrt{4-x^2-y^2}$

<u>Розв´язування.</u>

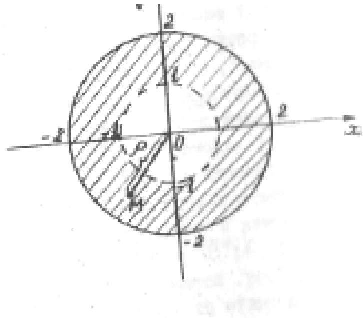


Рис.1.1

$$M(x;y)\in D(z)\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2-1>0\left(D\left(\ln(\bullet)\right)\right)\\ 4-x^2-y^2\geq 0\left(D\left(\sqrt{\bullet}\right)\right)\end{cases}\Leftrightarrow 1<x^2+y^2\leq 4$$

Враховуючи, що відстань від початку координат $D(0;0)$ до точки $M(x;y)$ дорівнює $\rho(0;M)=\sqrt{x^2+y^2}$,записуємо:

$D(z)=\left\{M(x;y)|1<\sqrt{x^2+y^2}\leq 2\right\}=\left\{M(x;y)|1<\rho(0;M)\leq 2\right\}$.

Область $D(z)$ зображується на координатній площині так, як показано на рис.1.1.

Зауважимо, що дана множина $D(z)$ не є ні відкритою /оскільки зовнішня межа $x^2+y^2=4$ належить $D(z)$/, ні замкненою/ оскільки внутрішня межа $x^2+y^2=1$ не належить $D(z)$, що зображено пунктирною лінією/.

Приклад 1.2. Знайти множину значень функції
v=(x+y+z+u)(1/x+1/y+1/z+1/u),
якщо x>0, y>0, z>0, u>0.

Розв'язування. Оскільки $(x+y+z+u)^4\geq 4^4xyzu$, застосувавши цю ж нерівність для чисел 1/x, 1/y, 1/z, 1/u, одержимо, що $v\geq 16$.

Відповідь: Множина значень – проміжок $[16;\infty)$.

Приклад 1.3. Знайти область визначення функції трьох змінних

$$u=\sqrt{4-x^2-y^2-z^2}+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-z^2-1}};$$

Розв'язування.

$$M(x;y;z)\in D(u)\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2+z^2\leq 4D(\sqrt{\bullet})\\ x^2+y^2-z^2>1D(\frac{1}{\sqrt{\bullet}})\end{cases}.$$

Область $D(\sqrt{\bullet})$ є замкнена куля радіуса 2 з центром в $O(0;0;0)$, а $D(\frac{1}{\sqrt{\bullet}})$ - зовнішня область однопорожнинного гіперболоїда обертання $x^2+y^2-z^2=1$, причому сам гіперболоїд в $D(\frac{1}{\sqrt{\bullet}})$ не включається. Схематично це можна зобразити так, як показано на рис. 1.2.

На рис.1.2 область $D(u)$ зображено як внутрішність кулі з «висвердленою» порожниною гіперболоїда, причому внутрішні стінки «висвердленої» частини в $D(u)$ не включаються.

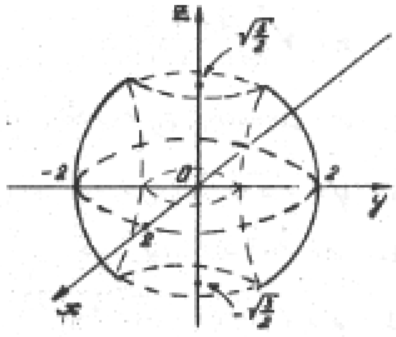


Рис. I.2

Завдання 1

Скласти функцію декількох змінних, розв'язавши задачу

1.Знайти сторону ромба, знаючи, що його площа дорівнює z , а довжини діагоналей відносяться як $x:y$.

2.Периметр ромба дорівнює 2z , довжини діагоналей відносяться як $x:y$. Знайти площу ромба.

3. Кожне із бокових ребер піраміди дорівнює z. Її основа є прямокутним трикутником, катети якого відносяться як $x:y$, а гіпотенуза дорівнює u. Знайти об'єм піраміди.

4.Знайти об'єм прямокутного паралелепіпеда, якщо його діагональ дорівнює u, а довжини ребер відносяться як $x:y:z$.

5. Площі бічних граней прямої трикутної призми дорівнюють x, y, z. Її бічне ребро дорівнює u. Знайти об'єм призми.

6. В паралелограмі зі сторонами x та y й гострим кутом z знайти тангенси кутів, що утворює велика діагональ паралелограма з його сторонами.

7. Дано сторони x, y, z, u чотирикутника, вписаного в коло. Знайти кут між сторонами x та y.

8. Висоти паралелограма, що проведені з вершини тупого кута, дорівнюють x та y, а кут між ними дорівнює u. Знайти велику діагональ паралелограма.

9. Діагональ прямокутника дорівнює z та ділить кут прямокутника у відношенні $y:x$. Знайти периметр прямокутника.

10. Знайти кут трикутника, якщо відомо, що сторони, які утворюють цей кут, дорівнюють x та y, а бісектриса кута дорівнює z.

11. Навколо круга радіуса x описана трапеція з кутами u і v при більшій основі. Знайти площу трапеції.

12.В трикутнику задані довжини двох сторін x і y та кут u між ними . Знайти довжину висоти, що проведена до третьої сторони.

13.Висота рівнобедреної трапеції дорівнює x. Верхню основу трапеції із середини нижньої основи видно під кутом $2u$, а нижню основу із середини верхньої – під кутом $2v$. Знайти площу трапеції.

14. В прямокутному паралелепіпеді діагональ основи дорівнює x та складає зі стороною основи кут u. Через цю сторону і протилежну їй сторону верхньої основи проведена площина, яка створює з площиною основи кут v. Знайти площу бічної поверхні паралелепіпеда.

15. Основою піраміди є правильний трикутник. Одне бічне ребро перпендикулярне до площини основи і дорівнює x, два інших утворюють з площиною основи кут u. В піраміду вписана пряма призма. Три її вершини лежать на бічних ребрах піраміди, три інші – на основі піраміди. Діагональ бічної грані призми складає з площиною основи кут v. Знайти висоту призми.

16. В основі прямої трикутної призми лежить рівнобедрений трикутник ABC, у якого $AB = BC = a, \angle BAC = u$. Через сторону AC проведена площина під кутом $\varphi\left(\varphi < \frac{\pi}{2}\right)$ до основи. Знайти площу перерізу, якщо відомо, що в перерізі утворився трикутник.

17. Трикутник ABC обертається навколо прямої, яка лежить в площині цього трикутника, має з ним тільки одну спільну точку A і однаково нахилена до сторін AB і AC. Знайти об'єм тіла обертання, якщо $AB = a, AC = b, \angle BAC = u.$

18. Сторона більшої основи правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнює x. Бічне ребро та діагональ піраміди утворюють з площиною основи кути, рівні відповідно u та v. Знайти площу меншої основи піраміди.

19. В основі прямої призми лежить прямокутний трикутник з гострим кутом u. Діагональ більшої бічної грані дорівнює x та утворює з бічним ребром кут v. Знайти об'єм призми.

20. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник, у якого бічна сторона дорівнює x, а кут при вершині дорівнює u. Всі бічні ребра нахилені до площини основи під кутом v. Знайти об'єм піраміди.

21. Основою прямої призми є рівнобедрена трапеція, у якої основи дорівнюють $x, y(x > y)$, а гострий кут дорівнює u. Площина, яка проходить через більшу основу верхньої трапеції та меншу основу нижньої трапеції, утворює з площиною нижньої основи кут v. Знайти об'єм призми.

22.Кут між діагоналями основи прямокутного паралелепіпеда дорівнює u. Діагональ паралелепіпеда утворює з площиною основи кут v. Знайти висоту паралелепіпеда, якщо його об'єм дорівнює w.

23. Кожне із бічних ребер чотирикутної піраміди утворює з висотою кут u. Основою піраміди є прямокутник з кутом v між діагоналями. Знайти об'єм піраміди, якщо його висота дорівнює x.

24. Основою прямої призми є рівнобедрений трикутник з кутом u при вершині. Діагональ грані, що лежить навпроти цього кута, дорівнює x та утворює з площиною основи кут v. Знайти об'єм призми.

25. Площина, що проведена паралельно осі циліндра, ділить коло основи у співвідношенні $x : y$. Площа перерізу дорівнює z. Знайти бічну поверхню циліндра.

26.Основою піраміди є прямокутний трикутник з гострим кутом u . Висота піраміди дорівнює x . Всі бічні ребра утворюють з площиною основи один і той же кут, рівний v. Знайти об'єм піраміди.

27. Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює x та утворює з бічним ребром кут u . Знайти об'єм паралелепіпеда, якщо периметр його основи дорівнює y.

28.Площина, яка проведена через твірну циліндра, утворює з площиною осьового перерізу, яка містить ту ж твірну, гострий кут u. Діагональ прямокутника, отриманого в перерізі циліндра цією площиною, дорівнює x та утворює з площиною основи кут v. Знайти об'єм циліндра.

29. Основою чотирикутної піраміди є ромб із стороною x і гострим кутом u. Всі бічні грані нахилені до площини основи під одним і тим самим кутом v. Знайти повну поверхню піраміди.

30. В основі прямої призми лежить рівнобедрена трапеція, у якої діагональ дорівнює x, а кут між діагоналлю і великою основою дорівнює u. Діагональ призми нахилена до основи під кутом v. Знайти об'єм призми.

Завдання 2

Знайти й зобразити в координатному просторі (площині) області визначення функцій

1. $z=\dfrac{1}{\sqrt{y-\sqrt{x}}}$.
2. $u=\arcsin\dfrac{x}{a}+\arccos\dfrac{y}{b}+arctg\,\dfrac{z}{c}$.
3. $u=\ln\left(-x^2-y^2+2z\right)$.
4. $z=\sqrt{\left(x^2+y^2-R^2\right)\ln\left(\dfrac{R^2}{x^2+y^2}\right)}$.
5. $z=\sqrt{\sin\left(x^2+y^2\right)}$.
6. $z=\arccos\dfrac{x}{y^2}+\arcsin\left(1-y\right)$.
7. $z=\ln x-x\ln\sin y$.
8. $z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2-x}{2x-x^2-y^2}}$.
9. $z=\arccos\dfrac{3\left(x-y\right)}{2+\left(x-y\right)^2}$.
10. $z=\sqrt{9-x^2-y^2}+\sqrt{x^2+y^4-4}$.
11. $z=\sqrt{\dfrac{4x-y^2}{\ln\left(1-x^2-y^2\right)}}$.
12. $z=\arcsin\left[2y\left(1+x^2\right)-1\right]$.
13. $y=\sqrt{z\left(2-z\right)}+\ln\left(4-x^2\right)$.

14. $z=\ln\left[x\ln\left(y-x\right)\right]$.

15. $z=1+\sqrt{2xy-\left(x^2+y^2\right)}$.

16. $z=\ln xy+\arccos\dfrac{9}{x^2+y^2}$.

17. $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-4}$.

18. $u=\arccos\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{z}}$.

19. $z=\sqrt{\log_a\left(x^2+y^2\right)}+\ln\left(x+y\right)(0<a<1)$.

20. $z=\arcsin\dfrac{y-1}{x}$.

21. $z=\sqrt{x\sin y}$.

22. $u=\sqrt{r^2-x^2-y^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-R^2}}(r<R)$.

23. $z=\sqrt{\left(x^2+y^2-2a^2\right)\left(a^2-x^2-y^2\right)}(a>0)$.

24. $u=\arcsin\dfrac{z}{x^2+y^2}$.

25. $u=\arcsin\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

26. $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-r^2}}(r<R)$.

27. $z=\sqrt{x-y^2}+\ln xy$.

28. $z=\arccos\dfrac{x^2+y^2}{4}+\arcsin\dfrac{1}{xy}$.

29. $z=\dfrac{y}{\sqrt{x+y}}+\dfrac{x}{\sqrt{x-y}}$.

30. $z=\sqrt{\dfrac{x^2+2x+y^2-3}{2x-x^2-y^2}}$.

Завдання 3

Знайти множину значень функції:

1)u=(x+y+z)($\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$) на множині D:x>0,y>0,z>0

2)u=$\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{x+y}$ на множині D: x>0,y>0

3)u=$2\sqrt{xy}-\sqrt[4]{xy}$ ($\sqrt{x+y}$) на множині D: x>0,y>0

4)u$=(x+2)(y+2)(x+y)-16xy$ на множині D: x>0,y>0

5)u=xy(x+y)- $x^3 - y^3$ на множині D: x≥0,y≥0

6) $u = x^2 + 2y^2 + 2xy + 6y + 10$ на множині $\mathbb{R}_2$

7) $u = 3xy - x^2 - y^2$ на множині $D: 2y + 5x = 10$

8) $u = x^2 + 4y^2$ на множині $D: 4y + x = 1$

9) $u = (x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ на множині $D: x > 0, y > 0$

10) $u = x + y + z$ на множині $D: x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$

11) $u = \left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)$ на множині $x + y = 1, x > 0, y > 0$

12) $u = 5x^2 - 6xy + 5y^2$ на множині $\mathbb{R}_2$

13) $v = \sqrt{(x+z)(y+u)} - \sqrt{xy} - \sqrt{zu}$ на множині $x, y, z, u \geq 0$

14) $u = 2x^2 - xy + 5y^2 - 2x + 2$ на множині $\mathbb{R}_2$

15) $u = (x+y)(x+z)(y+z) - 8xyz$ на множині $\mathbb{R}_2$

16) $u = xy(x + y - 2z) + yz(y + z - 2x) + xz(x + z - 2y)$ на множині $D: x, y, z > 0$

17) $u = x^4 + y^4$ на множині $D: x + y = 1$

18) $u = x^2 + y^2$ на множині $D: 2x + 4y = 1$

19) $u = \frac{x}{y} + \frac{z}{x} + \frac{y}{z}$ на множині $x, y, z > 0$

20) $u = x^4 + y^4 + z^4 - xyz(x + y + z)$ на множині $\mathbb{R}_3$

21) $u = x^2 + 10y^2 + z^2 + 6xy + 2y + 2z + 7$ на множині $\mathbb{R}_3$

22) $u = x^2 + y^2 + z^2$ на множині $D: x + y + z = 1$

23) $u = \sqrt{4x+1} + \sqrt{4y+1} + \sqrt{4z+1}$ на множині
$D: x + y + z = 1, 4x + 1 \geq 0, 4y + 1 \geq 0, 4z + 1 \geq 0$

24) $u = \left(1 + \frac{x}{y}\right)\left(1 + \frac{y}{z}\right)\left(1 + \frac{z}{x}\right)$ на множині $D: x, y, z > 0$

25) $u = \frac{x^3 + y^3}{2} - \left(\frac{x+y}{2}\right)^3$ на множині $D: x, y > 0$

26) $u = \frac{x^4 + y^4}{2} - \left(\frac{x+y}{2}\right)^4$ на множині $\mathbb{R}_2$

27) $u = \sqrt{\frac{y^2}{x}} + \sqrt{\frac{x^2}{y}} - \sqrt{x} - \sqrt{y}$ на множині $D: x, y > 0$

28) $u = \frac{x+y}{2} \cdot \frac{x^3 + y^3}{2} - \frac{x^4 + y^4}{2}$ на множині $\mathbb{R}_2$

29) $u = \sqrt{x^2 + y^2} - \left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 - \sqrt{2xy}$ на множині $D: x, y > 0$

30) $u = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - 3\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 4$ на множині $D: x, y \neq 0$

§2. ОБЧИСЛЕННЯ ГРАНИЦЬ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ НА НЕПЕРЕРВНІСТЬ

В означенні границі функції багатьох змінних умову $M \to M_0$ слід розуміти як $\rho(M_0;M) \to 0$, де ρ - відстань між розглядуваними точками. Тому природно перевести задачу про обчислення границі в таку систему кординат, де відстань точок простору від точки M_0 є однією з координат розглядуваних точок M. Розв´язування такої задачі доцільно проводити в три етапи.

1.Якщо $M_0(a_1;a_2;...;a_n)$ не збігається з початком координат і $M(x_1;...;x_n) \to M_0$, тобто $x_1 \to a_1, x_2 \to a_2, ..., x_n \to a_n$, то виконуємо заміну одного з таких видів:

а)для змінних x_i, таких що $x_i \to \infty$, маємо $t_i = \dfrac{1}{x_i}$ (тоді $t_i \to 0$);

б)для змінних x_j, таких що $x_j \to a_j \neq 0$, маємо $t_j = x_j - a_j$ (тоді $t_j \to 0$).

Отже, досягаємо того, що $M(t_1;...;t_n) \to O(0;...;0)$.

Наприклад:

$$\begin{cases} x \to 1 \\ y \to \infty \\ z \to 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 \to 0 \\ t_2 \to 0, \partial e \\ t_3 \to 0 \end{cases} \begin{cases} t_1 = x-1 \\ t_2 = \dfrac{1}{y} \\ t_3 = z \end{cases}.$$

2.Якщо $M(x_1;...;x_n) \to O(0;...;0)$, уводимо n-вимірну сферичну систему координат, яку утворюють відстань ρ точки M від початку координат та кути $(\varphi_1;\varphi_2;...;\varphi_{n-1})$, за формулами

$$x_1 = \rho \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 ... \sin\varphi_{n-1}, \qquad (1)$$

$$x_2 = \rho \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 ... \sin\varphi_{n-1}, \qquad (2)$$

$$x_3 = \rho \cos\varphi_2 \sin\varphi_3 ... \sin\varphi_{n-1}, \qquad (3)$$

$$x_4 = \rho \cos\varphi_3 \sin\varphi_4 ... \sin\varphi_{n-1}, \qquad (4)$$

……………………………………..

…………………………………….

$$x_{n-1} = \rho \cos\varphi_{n-2} \sin\varphi_{n-1}, \qquad (n-1)$$

$$x_n = \rho \cos\varphi_{n-1}, \qquad (n)$$

Звідси легко вивести співвідношення $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = \rho^2$.

Частинними випадками цієї системи є такі.

а)На площині E_2-полярна система координат (рис.2.1):

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases};$$

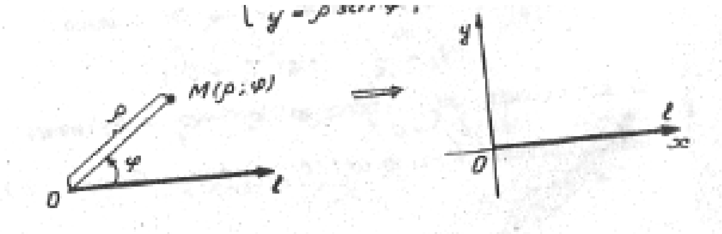


Рис.2.1

б) у тривимірному просторі E_3 - сферична система координат (рис.2.2):

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\sin\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ \quad z = \rho\cos\theta \end{cases}$$

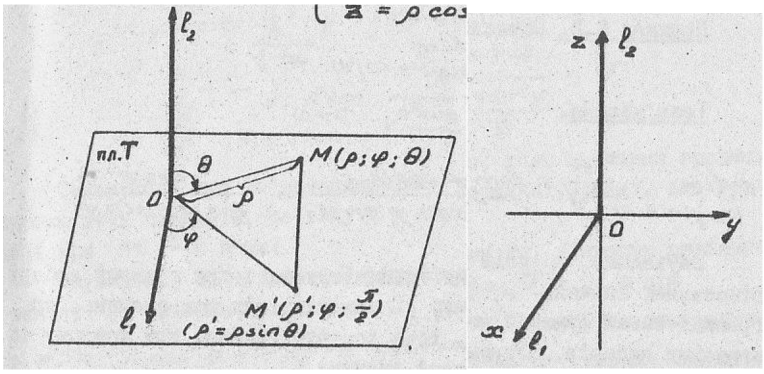


Рис. 2.2

3. Коли виконано етапи 1 і 2, розв’язання зводиться до обчислення границі при $\rho \to 0$. Інакше, говорити про існування границі можна тоді і тільки тоді, коли виконуються такі дві умови:

а) існує границя при $\rho \to 0$ за будь-яких залежностей $\varphi_i = \varphi_i(\rho)$, $i = \overline{1, n-1}$;

б) значення границі при $\rho \to 0$ лишається тим самим у разі вибору довільних залежностей $\varphi_i = \varphi_i(\rho)$, $i = \overline{1, n-1}$.

Приклад 2.1.

Обчислити $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} (x^3 + y^3)\sin\dfrac{1}{x^2 + y^2}$.

Розв'язування.

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)} (x^3 + y^3)\sin\frac{1}{x^2 + y^2} = \begin{vmatrix} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{vmatrix} = \lim_{\rho\to 0} \rho^3(\sin^3\varphi + \cos^3\varphi)\sin\frac{1}{\rho^2} = 0$$ (як границя добутку нескінченно малої величини ρ^3 на обмежену $(\sin^3\varphi + \cos^3\varphi)\sin\dfrac{1}{\rho^2}$).

Відповідь. 0.

Приклад 2.2.

Обчислити $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{x}{x - y}$.

Розв'язування.

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{x}{x-y} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho\cos\varphi}{\rho\cos\varphi - \rho\sin\varphi} = \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi}$$

Зауважимо, що коли значення границі функції при кожному наборі фіксованих значень $\varphi_1,...,\varphi_{n-1}$ залежить від цих значень, то границі такої функції не існує, хоча існують границі при кожному із згаданих наборів, зокрема повторні границі.

Відповідь. Границі не існує.

Приклад 2.3.

Обчислити $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$

Розв'язання.

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3\cos^2\varphi\sin\varphi}{\rho^4\cos^4\varphi + \rho^2\sin^2\varphi} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho\cos^2\varphi\sin\varphi}{\rho^2\cos^4\varphi + \sin^2\varphi} = \begin{vmatrix} \rho^2\cos^4\varphi = A \\ \sin^2\varphi = B \end{vmatrix} = T\ .$$

Стикаємось тут із найскладнішим випадком, коли значення границь вздовж усіх променів, що ведуть у початок координат, рівні, але границі при $M\to 0$ немає.

Зауважимо, що тут легко припуститися помилки, вважаючи означення границі Т=0. Справді, при $\varphi = \pi n$ $T = 0$, а при $\varphi \neq \pi n$ $\rho\cos^2\varphi\sin\varphi \to 0$, $\rho^2\sin^4\varphi \to 0$ і $\sin^2\varphi$ набуває конкретного значення, відмінного від нуля. Проте наведене міркування некоректне, оскільки ми припустили, що φ завжди стале, тобто не залежить від ρ. Це означає, що ми прямуємо до $O(0;0)$ вздовж променів (мал 2.3.). Для всіх цих випадків границя буде сталою і такою, що дорівнює нулю.

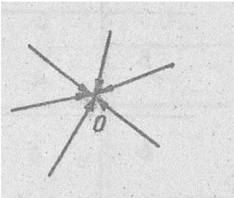


Рис.2.3

Рис.2.4

Водночас для деяких кривих виду $\varphi = \varphi(\rho)$ значення границі $\dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}$ при $(x;y)\to(0;0)$ буде іншим (мал.2.4.): розглянувши $\varphi = \rho$ або навіть $\varphi = \arcsin\rho$ (або $\rho = \sin\varphi$), дістанемо

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho\cos^2\rho\sin\rho}{\rho^2\cos^4\rho + \sin^2\rho} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho\sin\rho}{\rho^2\cos^4\rho + \sin^2\rho} = \left|\rho \sim \sin\rho\right| = \lim_{\rho\to 0} \frac{1}{\cos^4\rho + \dfrac{\sin^2\rho}{\rho^2}} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Відповідь. Границі не існує.

Цей приклад показує, що при розв'язувані задач зазначеним методом не можна параметр φ розглядати як константу, слід допускати його залежність від ρ, беручи найнесприятливіші для обчислення залежності φ від ρ.

Завдання 4

Обчислити границю $\lim\limits_{(x,y)\to(A,B)} f(x,y)$ або довести, що вона не існує, обчислити також повторні границі $\lim\limits_{y\to B}\lim\limits_{x\to A} f(x,y)$ і $\lim\limits_{x\to A}\lim\limits_{y\to B} f(x,y)$ або довести, що вони не існують.

1. $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$ а) $(0,0)$ б) (∞,∞)

2. $f(x,y)=\dfrac{\sin xy}{y}$ а) $(0,0)$ б) $(2,0)$

3. $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^4}{x^4+y^2}$ а) $(0,0)$ б) (∞,∞)

4. $f(x,y)=\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$ а) $(+\infty,+\infty)$ б) $(0,0)$

5. $f(x,y)=\dfrac{xy}{3-\sqrt{xy+9}}$ а) $(0,0)$ б) $(+\infty,9)$

6. $f(x,y)=(1+xy^2)^{\frac{y}{yx^7+xy^2}}$ а) $(0,0)$ б) $(0,3)$

7. $f(x,y)=e^{\frac{x}{x^2+y^2}}$ а) $(0,0)$ б) $(+\infty,\infty)$

8. $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ а) $(0,0)$ б) (∞,∞)

9. $f(x,y)=(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$ а) $(0,0)$ б) (∞,∞)

10. $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ а) $(0,0)$ б) (∞,∞)

11. а) $f(x,y)=x^2e^{-(x^2-y)}$ (∞,∞)

б) $f(x,y)=\log_x(x+y)$ $(1,0)$

12. а) $f(x,y)=\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$ $(0,0)$

б) $f(x,y)=(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$ (∞,∞)

13. а) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ $(0,0)$

б) $f(x,y)=e^{x^2-y^2}\sin 2xy$ (∞,∞)

14. $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$ а) (∞,∞) б) $(0,0)$

15. а) $f(x,y)=(x+y)e^{-(x^2+y^2)}$ (∞,∞)

б) $f(x,y)=\dfrac{\sin|x|-\sin|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $(0,0)$

16. а) $f(x,y)=\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$ (∞,a), $a\in\mathbb{R}$

б) $f(x,y)=\sin\dfrac{\pi(x+y)}{2x+3y}$ (∞,∞)

17. а) $f(x,y)=\sin\dfrac{\pi x}{2x+y}$ (∞,∞)

б) $f(x,y)=\dfrac{\ln(x+e^{y})}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}}\quad (0,0)$

18. а) $f(x,y)=\dfrac{\sin(x+y)}{2x+3y}\quad (\infty,\infty)$

б) $f(x,y)=(x^{2}+y^{2})^{x^{2}y^{2}}\quad (0,0)$

19. а) $f(x,y)=\dfrac{1}{xy}tg\dfrac{xy}{1+xy}\quad (0,\infty)$

б) $f(x,y)=\dfrac{\sin(x+y)}{2x+3y}\quad (0,0)$

20. $f(x,y)=(1+xy)^{\frac{2}{x^{2}+xy}}$ а) $(0,2)$ б) $(0,0)$

21. $f(x,y)=\dfrac{tg^{2}xy}{x^{2}y}$ а) $(1,0)$ б) $(0,0)$

22. а) $f(x,y)=\sin(x+y)\ln(x^{2}+y^{2})\quad (0,0)$

б) $f(x,y)=\dfrac{x^{2}+y^{2}}{x^{2}+y^{4}}\quad (\infty,\infty)$

23. $f(x,y)=\dfrac{\sin(x+y)}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}}$ а) $(0,0)$ б) (∞,∞)

24. а) $f(x,y)=\dfrac{\ln(x+y)}{y}\quad (1,0)$

б) $f(x,y)=(x^{2}+y^{2})^{|x|}\quad (0,0)$

25. а) $f(x,y)=\dfrac{x^{4}}{1+x^{y}}\quad (\infty,\infty)$

б) $f(x,y)=(1+x^{2}+y^{2})^{\frac{1}{x^{2}+y^{2}}}\quad (0,0)$

26. $f(x,y)=\dfrac{\sin xy}{xy}$ а) (∞,∞) б) $(0,0)$

27.

$f(x,y)=(x^{2}+y^{2})\sin\dfrac{1}{x+y}$

а) $A=0$, $B=0$;

б) $A=\infty$, $B=\infty$.

28.

$f(x,y)=\dfrac{\cos x-\cos y}{x^{2}+y^{2}}$

а) $A=\infty$, $B=\infty$;

б) $A=0$, $B=0$.

29.

$f(x,y)=\dfrac{x^{2}+y^{2}}{|x|^{3}+|y|^{3}}$

а) $A=\infty$, $B=\infty$;

б) $A=0$, $B=0$.

30.

а) $f(x,y)=(1+\frac{y}{x})^x$

$A=\infty$; $B: a\in R$.

б) $f(x,y)=\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$

$A=\infty$; $B=\infty$.

Завдання 5

Дослідити на неперервність /1-30/. У точках розриву дослідити на неперервність по кожній із змінних. Нанести точки розриву на площину xOy.

1. $f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}, x^2+y^2\neq 0 \\ 0, x=y=0 \end{cases}$.

2. $f(x,y)=\cos\frac{1}{xy}$.

3. $f(x,y)=\frac{y^2+2x}{y^2-2x}$.

4. $f(x,y)=\frac{1}{\sin x\sin y}$.

5. $f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{(x+y)(y^2-x)}$.

6. $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

7. $f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^4-y^4}{x^4+y^4}, x^2+y^2\neq 0 \\ 0, x=y=0 \end{cases}$.

8. $f(x,y)=\frac{1}{\sin^2\pi x+\sin^2\pi y}$.

9. $f(x,y)=\frac{1}{(x^2+y^2-1)(x^2-y^2-1)}$.

10. $f(x,y)=\frac{1}{\sin(x+y)}$.

11. $f(x,y)=\ln(1-x^2-y^2)$.

12. $f(x,y)=\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$.

13. $f(x,y)=\frac{x+y}{(x-1)^2+(y+1)^2}$.

14. $f(x,y)=\frac{x+y^2}{x^2-xy+y^2}$.

15. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, x^2+y^2\neq 0\\ 0, x=y=0\end{cases}$.

16. $f(x,y)=\dfrac{x-y}{(x+y)^3}$.

17. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y^3}{x^2+y^2}, x^2+y^2\neq 0\\ 0, x=y=0\end{cases}$.

18. $f(x,y)=x\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

19. $f(x,y)=\dfrac{x^2}{|x|+|y|}$.

20. $f(x,y)=\sin\dfrac{x}{y}$.

21. $f(x,y)=\dfrac{1}{\cos^2 x-\cos^2 y}$.

22. $f(x,y)=\dfrac{\sin|x-y|}{\sqrt{x^2-y^2}}$.

23. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2+y^2}, x^2+y^2\neq 0\\ 0, x=y=0\end{cases}$.

24. $f(x,y)=\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}$.

25. $f(x,y)=\dfrac{x+y}{x-y}$.

26. $f(x,y)=\dfrac{x}{x+y}$.

27. $f(x,y)=\dfrac{\sin x+\sin y}{x+y}$.

28. $f(x,y)=\dfrac{\sin x\sin y}{xy}$.

29. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, x^2+y^2\neq 0\\ 1, x=y=0\end{cases}$.

30. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin x+\sin y}{x+y}, x+y\neq 0\\ 1, x=y=0\end{cases}$.

31. Довести, що функція $f(x,y)=\sin(x+\ln(y^2+e^{\frac{8x-y}{x^2+y^2+1}}))$ неперервна на всій площині xOy.

§3 ЧАСТИННІ ПОХІДНІ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛИ ФУНКЦІЙ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ

Приклад 3.1. Знайти $d^2z(x;y)$, якщо $F(zy;x+y)=0$. /3.1/

Розв’язування. Введемо позначення $t=zy, u=x+y$.

Продиференціюємо /3.1/ за x:

$$F_t'y\frac{\partial z}{\partial x}+F_u'=0\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'}{F_t'y};\qquad /3.2/$$

та за y:

$$F_t'(z+y\frac{\partial z}{\partial y})+F_u'=0\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{z}{y}-\frac{F_u'}{F_t'y};\qquad /3.3/$$

Продиференціюємо /3.2/ за x:

$$(F_{tt}''y\frac{\partial z}{\partial x}+F_{tu}'')y\frac{\partial z}{\partial x}+P_t'y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+F_{ut}''y\frac{\partial z}{\partial x}+F_{uu}''=0.$$

Підставляючи в останню рівність значення $\frac{\partial z}{\partial x}$ із /3.2/, з урахуванням того, що $F_{tu}''=F_{ut}''$, дістаємо

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{y}(2\frac{F_u'F_{tu}''}{(F_t')^2}-\frac{(F_u')^2F_{tt}''}{(F_t')^3}-\frac{F_{uu}''}{F_t'}\ .\qquad /3.4/$$

Продиференціюємо /3.2/ за y:

$$(F_{tt}''(z+y\frac{\partial z}{\partial y})+F_{tu}'')y\frac{\partial z}{\partial y}+F_t'\frac{\partial z}{\partial x}+yF_t'\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}+F_{ut}''(z+y\frac{\partial z}{\partial y})+F_{uu}''=0.$$

Звідси з урахуванням /3.2/ і /3.3/ маємо

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{1}{y}(\frac{F_u'}{yF_t'}+2\frac{F_u'F_{tu}''}{(F_t')^2}-\frac{(F_u')^2F_{tt}''}{(F_t')^3}-\frac{F_{uu}''}{F_t'}).\qquad /3.5/$$

Продифферрнціюємо /3.3/ за y:

$$(F_{tt}''(z+y\frac{\partial z}{\partial y})+F_{tu}''(z+y\frac{\partial z}{\partial y})+F_t'(2\frac{\partial z}{\partial y}+y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2})+F_{ut}''(z+y\frac{\partial z}{\partial y})+F_{uu}''=0.$$

Далі згідно з /3.3/ запишемо

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{y}(\frac{2z}{y}+\frac{F_u'}{yF_t'}+2\frac{F_u'F_{tu}''}{(F_t')^2}-\frac{(F_u')^2F_{tt}''}{(F_t')^3}-\frac{F_{uu}''}{F_t'}).\qquad /3.6/$$

Залишилося підставити /3.4/, /3.5/, /3.6/ у формулу

$$d^2z(x,y)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Завдання 6

Знайти повний диференціал функції в точці

1.

$$u=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}};du\Big|_{M_0(0,-1,1)}=?$$

2.

$$u = \ln\left(x + \frac{y}{2z}\right); du\Big|_{M_0(1,2,1)} = ?$$

3.

$$u = (\sin x)^{yz}; du\Big|_{M_0\ \frac{\pi}{6},1,2} = ?$$

4.

$$u = \ln(x^3 + 2y^3 - z^3); du\Big|_{M_0(2,1,0)} = ?$$

5.

$$u = \frac{x}{\sqrt{y^2 + z^2}}; du\Big|_{M_0(1,0,1)} = ?$$

6.

$$u = \ln\cos(x^2y^2 + z); du\Big|_{M_0(0,0,\frac{\pi}{4})} = ?$$

7.

$$u = \sqrt[3]{x + y^2 + z^3}; du\Big|_{M_0(3,4,2)} = ?$$

8.

$$u = \operatorname{arctg}(xy^2 + z); du\Big|_{M_0(2,1,0)} = ?$$

9.

$$u = \arcsin\left(\frac{x^2}{y} - z\right); du\Big|_{M_0(2,5,0)} = ?$$

10.

$$u = \sqrt{z}\sin\frac{y}{x}; du\Big|_{M_0(2,0,4)} = ?$$

11.

$$u = \frac{y}{\sqrt{x^2 + z^2}}; du\Big|_{M_0(-1,1,0)} = ?$$

12.

$$u = \operatorname{arctg}\frac{xz}{y^2}; du\Big|_{M_0(2,1,1)} = ?$$

13.

$$u = \ln\sin\left(x - 2y + \frac{z}{4}\right); du\Big|_{M_0(1,\frac{1}{2},\pi)} = ?$$

14.

$$u = \frac{y}{x} + \frac{z}{y} - \frac{x}{z}; du\Big|_{M_0(1,1,2)} = ?$$

15.

$$u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - z^2}}; du\Big|_{M_0(1,2,2)} = ?$$

16.

$$u = \ln(x + y^2) - \sqrt{x^2 - z^2}; du\Big|_{M_0(5,2,3)} = ?$$

17.

$$u = \sqrt{z}x^y; du\Big|_{M_0(1,2,4)} = ?$$

18.

$$u = -\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}; du\Big|_{M_0(\sqrt{2},\sqrt{2},\sqrt{2})} = ?$$

19.

$$u = \ln(x^3 + \sqrt[3]{y} - z); du\Big|_{M_0(2,1,8))} = ?$$

20.

$$u = \frac{z}{x^4 + y^2}; du\Big|_{M_0(2,3,25)} = ?$$

21.

$$u = 8\sqrt[5]{x^3 + y^2 + z}; du\Big|_{M_0(3,2,1)} = ?$$

22.

$$u = \ln(\sqrt[5]{x} + \sqrt[4]{y} - z); du\Big|_{M_0(1,1,1)} = ?$$

23.

$$u = \frac{-2x}{\sqrt{y^2 + z^2}}; du\Big|_{M_0\ 3,0,1} = ?$$

24.

$$u = z\exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right); du\Big|_{M_0(0,0,1)} = ?$$

25.

$$u = z^{-1}\sin(x - y); du\Big|_{M_0\ \frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3},\sqrt{3}} = ?$$

26.

$$u = \sqrt{z}\ln(\sqrt{x} + \sqrt{y}); du\Big|_{M_0(4,1,4)} = ?$$

27.

$$u = \frac{xz}{x - y}; du\Big|_{M_0(3,1,1)} = ?$$

28.

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 - 2\cos z}; du\Big|_{M_0\ 3,4,\frac{\pi}{2}} = ?$$

29.

$u = ze^{-xy}; du\Big|_{M_0(0,1,1)} = ?$

30.
$u = \arcsin(x\sqrt{y}) - yz^2; du\Big|_{M_0(0,4,1)} = ?$

Завдання 7

Показати, що функція u задовольняє рівняння (ρ) /1-16/.

1. $u = \sqrt{x}\sin\frac{y}{x}$; $(\rho): 2x\frac{\partial u}{\partial x} + 2y\frac{\partial u}{\partial y} = u$.

2. $u = (x-y)(y-z)(z-x)$; $(\rho): \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$.

3. $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$; $(\rho): \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. /рівняння Лапласа/

4. $u = arctg\frac{x}{y}$; $(\rho): \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. /рівняння Лапласа/

5. $u = \arcsin\sqrt{\frac{x-y}{x}}$; $(\rho): \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$.

6. $u = x^y$; $(\rho): \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$.

7. $u = \sin x ch y$; $(\rho): \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. /рівняння Лапласа/

8. $u = \frac{1}{r}; r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$. /рівняння Лапласа/

9. $u = \frac{\cos kr}{r}; k - const$; $(\rho): \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = 0$; $z = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

10. $u = \ln(x^2 + xy + y^2)$; $(\rho): x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 2$.

11. $u = \varphi(x - ct) + \psi(x + ct); c - const; \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

12. $u = arctg\frac{x}{y}$; $(\rho): \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. /рівняння Лапласа/

13. $u = \ln\frac{1}{r}; a, b - const, r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$; $(\rho): \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. /рівняння Лапласа/

14. $u = \frac{\sin kr}{r}; r = \sqrt{x^2 + y^2}, k - const$; $(\rho): \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. /рівняння Лапласа/

15. $u = \frac{e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2 t}}}{2a\sqrt{\pi t}}$; $(\rho): \frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

16. $u=(c_1r^2+c_2)\ln r+c_3r^2+c_4; r=\sqrt{x^2+y^2}, c_1,c_2,c_3,c_4-const$; $(\rho): \frac{\partial^2 u}{\partial x^4}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^4}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^4}=0$.

Знайти значення похідних /17-22, 25-30/ або складених із них виразів /23, 24/.

17. $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, якщо $z=r^{xy}\sin(x^2+y^2)$.

18. $f''_{xx}(0,0)$ і $f''_{yy}(0,0)$, якщо $f(x,y)=(1+x)^m(1-y)^n \quad (m,n-const)$.

19. $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, якщо $z=c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}} \quad (a,b-const, c^2=a^2-b^2)$.

20. $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, якщо $z=\sqrt{2xy+y^2}$.

21. $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, якщо $z=arctg\frac{x+y}{1-xy}$.

22. $\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$, якщо $z=\sin(xy)$.

23. $u'_x+u'_y+u'_z$ в точці $M_0(1;1;1)$, якщо $u=\ln(1+x^2+y^2+z^2)$.

24. $\Phi(x,y)=\frac{f'_x+f'_y}{f'_x f'_y}$ та $\Phi(1,2)$, якщо $f(x,y)=x^3y-xy^3$.

25. $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)$, якщо $z=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

26. $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$, якщо $u=x\sqrt[4]{z}+zy+\frac{y}{\sqrt[4]{x}}$.

27. $\frac{\partial z}{dx}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $z=\arcsin\frac{x+y}{xy}-\sqrt{1-\left(\frac{x+y}{xy}\right)^2}$.

28. $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, якщо $u=arctg\frac{y}{xz}$.

29. $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$, якщо $u=x^\alpha y^\beta z^\gamma \quad (\alpha,\beta,\gamma-const)$.

30. $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, якщо $z=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Завдання 8

Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ (1-10).

1. $z = v^2 + \sqrt{uw} + \sin u$; $v = x + y$, $w = x^2 - y$, $u = xy$.

2. $z = u^2 w - w^2 u$, $u = x\cos y$, $w = x\sin y$.

3. $z = \varphi(\xi, \eta)$, $\xi = x + y$, $\eta = x - y$.

4. $z = \varphi(\xi, \eta)$, $\xi = x^2 + y^2$, $\eta = xy$.

5. $z = f(t)$, $t = \frac{x}{y}$.

6. $z = f(t)$, $t = xy$.

7. $z = \varphi(\xi, \eta)$, $\xi = xy$, $\eta = \frac{x}{y}$.

8. $z = f(\xi, \eta, \zeta)$, $\xi = x^2 + y^2$, $\eta = x^2 - y^2$, $\zeta = 2xy$.

9. $z = arctg\frac{\alpha}{\beta}$, $\alpha = x\sin 2y$, $\beta = x\cos y$.

10. $z = f(u)$, $u = xy + \frac{y}{2x}$.

Знайти $\frac{\partial z}{\partial t}$ (11-21)

11. $z = x^2 + xy^2$, $x = e^{2t}$, $y = \sin t$.

12. $z = e^{xy}\ln(x + y)$, $x = 2t^2$, $y = 1 - 3t^2$.

13. $z = arctg\frac{t+1}{x}$, $x = e^{(1+t)^2}$.

14. $z = \cos(2t + 4x^2 - y)$, $x = \frac{1}{t}$, $y = \frac{\sqrt{t}}{\ln t}$.

15. $z = tg(2t + y^2 - x)$, $y = \frac{1}{t}$, $x = \sqrt{t}$.

16. $z = e^{x^2 - y^2}$, $x = \cos t$, $y = \sin t$.

17. $z = \ln\sin\frac{x}{\sqrt{y}}$, $x = 3t^2$, $y = \sqrt{1 + t^2}$.

18. $z = \ln\cos\frac{y}{\sqrt{x}}$, $x = \sqrt{1 + 2t^2}$, $y = 4t^2$.

19. $z=\dfrac{u}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $x=\rho\cos t$, $y=\rho\sin t$.

20. $z=u^v$, $u=\sin t$, $v=2t$.

21. $z=xyu$, $x=1+t^2$, $y=\ln t$, $u=tgt$.

Знайти $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, du (22-24)

22. $u=v^2+\sqrt{wz}+\dfrac{1}{\cos z}$, $v=\dfrac{x}{y}$, $w=x+y$, $z=xy$.

23. $u=-v^2+w^2$, $v=x\sin y$, $w=x\cos y$.

24. $u=\varphi(v,t)$, $v=x^2+y^2$, $t=2xy$.

25.Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial x} i \dfrac{dz}{dx}$, якщо $z=\ln(e^x+e^y)$, $y=x^2$.

26.Знайти $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}$, якщо $u=\varphi(\xi,\eta,\zeta)$, $\xi=ax$, $\eta=by$, $\zeta=cz$ $(a,b,c-const)$.

27.Знайти $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, якщо $u=f(t)$, $t=xyz$.

28.Знайти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, якщо $z=f(u,v)$, $u=x^2+y^2$, $v=xy$.

Знайти $\dfrac{dz}{dt}$ і dz (29-30)

29. $z=x^2+xy+y^2$, $x=\sin t$, $y=\cos t$.

30. $z=e^{xy}\ln(x+y)$, $x=t^3$, $y=1-3t^2$.

Завдання 9

Знайти частинні похідні функції

1. $z=x^2y^2, x=ue^v, y=ve^u; z'_u, z'_v=?$
2. $z=y^2\cos x, x=u\ln v, y=v\ln u;\quad z'_u, z'_v=?$
3. $z=x^3y-yx, x=u\cos v, y=u\sin v;\quad z'_u, z'_v=?$
4. $z=x^2\ln y, x=\dfrac{u}{v}, y=3u-2v;\quad z'_u, z'_v=?$
5. $z=\arcsin xy, x=u\cos v, y=u^2v^{-1};\quad z'_u, z'_v=?$
6. $z=\operatorname{tg} x^2y, x=u\operatorname{tg} v, y=v\operatorname{ctg} u;\quad z'_u, z'_v=?$

7. $z = x^2 2^y, x = u - \sin v, y = u + \cos v; \quad z'_u, z'_v = ?$

8. $z = x^2 y^2, x = ue^v, y = ve^u; z'_u, z'_v = ?$

9. $z = x^2 y^2, x = ue^v, y = ve^u; z'_u, z'_v = ?$

10. $z = x^2 y^2, x = ue^v, y = ve^u; z'_u, z'_v = ?$

11. $z = x^3 y - yx, x = u\cos v, y = u\sin v; \quad z'_u, z'_v = ?$

12. $z = x^2 \ln y, x = uv^{-1}, y = 3u - 2v; \quad z'_u, z'_v = ?$

13. $z = \arcsin xy, x = u\cos v, y = u^2 v^{-1}; \quad z'_u, z'_v = ?$

14. $z = \operatorname{tg} x^2 y, x = u2^v, y = v \operatorname{ctg} u; z'_u, z'_v = ?$

15. $z = x^2 2^y, x = u - \sin v, y = u + \cos v; \quad z'_u, z'_v = ?$

16. $z = x^2 y - \ln y, x = ve^u, y = ue^v; z'_u, z'_v = ?$

17. $z = y^2 \cos x, x = u\ln v, y = v\ln u; \quad z'_u, z'_v = ?$

18. $z = \ln x \cdot y^2, x = ue^{-v}, y = 2ve^u; \quad z'_u, z'_v = ?$

19. $z = x^3 y - yx, x = u\cos v, y = u\sin v; \quad z'_u, z'_v = ?$

20. $z = x^2 \ln y, x = \dfrac{u}{v}, y = 3u - 2v; z'_u, z'_v = ?$

21. $z = \arcsin xy, x = u\cos v, y = u^2 v^{-1}; \quad z'_u, z'_v = ?$

22. $z = \operatorname{tg} x^2 y, x = ue^{2v}, y = v \operatorname{ctg} u; \quad z'_u, z'_v = ?$

23. $z = x^2 3^y, x = u - \sin v, y = u\cos v; \quad z'_u, z'_v = ?$

24. $z = x^2 y - \ln y, x = e^v \cos u, \quad y = e^u \sin v; z'_u, z'_v = ?$

25. $z = y^2 \cos x, x = u\ln v, y = v\ln u; \quad z'_u, z'_v = ?$

26. $z = \sqrt{x} y^2, x = u^2 e^{-v}, y = v\ln u; \quad z'_u, z'_v = ?$

27. $z = x^3 \sqrt{y} - \ln y, x = u\cos v, y = ve^u; \quad z'_u, z'_v = ?$

28. $z = x^2 \ln y, x = \dfrac{u}{v}, y = 3u - 2v; \quad z'_u, z'_v = ?$

29. $z = \arcsin xy, x = u\cos v, y = u^2 v^{-1}; \quad z'_u, z'_v = ?$

30. $z = \operatorname{tg} x^2 y, x = u\ln v, y = v \operatorname{ctg} u; \quad z'_u, z'_v = ?$

Завдання 10

Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ (1-12)

1. $x^2 + y^4 x + z^2 - zx - 1 = 0$.
2. $z^3 + 3xyz = a^3 (a - const)$.
3. $e^z - xyz = 0$.
4. $\sin(xy) + \cos(xz) + tg(yz) = 0$.
5. $z\ln(x+z) - \frac{xy}{z} = 0$.
6. $x\cos y + y\cos x + z\cos x = a(a - const)$.
7. $z = \sqrt{x^2 - y^2}\, tg \frac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}}$.
8. $x + y + z = e^{-(x+y+z)}$.
9. $x^2 + y^2 + z^2 - 2zx = 1$.
10. $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0$.
11. $z\cos y + y\cos x + x\cos y = 1$.
12. $x^2 y - y^2 z + zx = 2$.

Знайти $du(x, y, z)$ (13-20)

13. $xy + xu + yu = 1$.
14. $u^3 - 3(x+y)u^2 + z^3 = 0$.
15. $\frac{x}{u} = \ln\frac{u}{y}$.
16. $u = x + arctg\frac{y}{u-x}$.
17. $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 u = 1$.
18. $u = ye^{\frac{x}{u}}$.
19. $x^3 - 2y^2 + u^2 - 4x + 2u - 5 = 0$.
20. $x + y + u = e^{-(x+y+u)}$.

Знайти $d^2 z(x, y)$ (21-23)

21. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

22. $xyz=x+y+z$.

23. $x^2+y^2-z^2-xy=0$.

Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ (24-28)

24. $x^2+y^3+z^4=x+z$.

25. $x^2-2y^2+z^2-4x+2z-5=0$.

26. $z^3-3xyz=a^5(a-const)$.

27. $x+y+z=e^z$.

28. $z^2-ax+byz=0(a,b-const)$.

29. Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, якщо $x^2+y^2+z^2=2z$.

30. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$, якщо $x^2-arc\cos 2z+\frac{yz}{x}=0$.

Завдання 11

Довести, що задана функція задовольняє рівнянню

1. $Z=\sqrt{x}sin\frac{y}{x}, x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}z$
2. $Z=(x+a)(y+b), \frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=z$
3. $Z=e^{\frac{x}{y^2}}, 2x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$
4. $Z=\ln(e^x+e^y), \frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$
5. $Z=\ln(x^2+xy+y^2), x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2$
6. $Z=xy+\frac{y^2}{x}, x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xy+z$
7. $Z=\frac{1}{x^2+y^2}, y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$
8. $Z=\frac{y^2}{3x}+\ln(xy), x^2\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial z}{\partial y}+y^2=0$
9. $Z=ye^{y+\frac{x^2}{2y^2}}, (x^2+y^2)\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=xyz$
10. $Z=xsin\frac{y}{x^2}, x\frac{\partial z}{\partial x}+2y\frac{\partial z}{\partial y}=z$

$11. Z=\sin(x-y)+\ln(x+y), \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

$12. Z=ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

$13. U=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$

$14. Z=arctg\frac{y}{x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

$15. Z=\frac{1}{\sqrt{y}}e^{-\frac{x^2}{4y}}, \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

$16. Z=e^{-x}(x-y), \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2\frac{\partial z}{\partial y}=z$

$17. Z=4e^{-2y}+(2x+4y-3)e^{-y}-x-1, \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial y}+x+y=0$

$18. U=\ln(x^3+y^3+z^3-3xyz), \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{3}{x+y+z}$

$19. U=\frac{x-y}{z-t}+\frac{t-x}{y-z}, \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial t}=0$

$20. Z=ycos^2(x-y), \frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y}$

$21. Z=\frac{y^3}{x^2}-x^2-y^2, x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-x^2-y^2$

$22. Z=\frac{y}{(x^2-y^2)^2}, \frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$

$23. U=\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{6}x^3(y+z)+\frac{1}{2}x^2yz+(y-x)(z-x), \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=xyz$

$24. Z=xcos(x+y)+ye^{x+y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

$25. Z=tgxy+e^{\frac{y}{x}}, x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\frac{\partial z}{\partial y}-y\frac{\partial z}{\partial y}=0$

$26. Z=\frac{y}{(x^2-y^2)^5}, \frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{z}{y^2}=0$

$27. Z=\frac{y^2}{3x}+\arcsin(xy), x^2\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial z}{\partial y}+y^2=0$

$28. Z=ln(x^2+y^2+2x+1), \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

$29. Z=e^{xy}, x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2xyz=0$

$30. Z=\ln(x+e^{-y}), \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$

Завдання12

1) Довести, що функція $z=\exp\left(-2(y+3x)\right)\cdot f(x+y)+g(y+3x)$ задовольняє рівнянню: $z''_{xx}-4z''_{xy}+3z''_{yy}+4z'_x-12z'_y=0$.
2) Довести, що функція $z=f(y-x^2)+g(y+x^2)$ задовольняє рівнянню: $z''_{xx}-4x^2\cdot z''_{yy}=\frac{1}{x}\cdot z'_x$.

3) Довести, що функція $z = x \cdot f(x+y) + y \cdot g(x+y)$ задовольняє рівнянню: $z''_{xx} - 2z''_{xy} + z''_{yy} = 0$.

4) Довести, що функція $z = x + \varphi(xy)$ задовольняє рівнянню: $x \cdot z'_x - y \cdot z'_y = x$.

5) Довести, що функція $z = x \cdot \varphi\left(\frac{x}{y^2}\right)$ задовольняє рівнянню: $2x \cdot z'_x + y \cdot z'_y = 2z$

6) Довести, що функція $z = \varphi\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$ задовольняє рівнянню: $y \cdot z'_x - x \cdot z'_y = 0$.

7) Довести, що функція $u = \varphi(x - y; y - z)$ задовольняє рівнянню: $u'_x + u'_y + u'_z = 0$.

8) Довести, що функція $u = \varphi\left(\frac{x}{y}; \frac{y}{z}\right)$ задовольняє рівнянню: $x \cdot u'_x + y \cdot u'_y + z \cdot u'_z = 0$.

9) Довести, що функція $z = \varphi(x) + \psi(y)$ задовольняє рівнянню: $z''_{xy} = 0$.

10) Довести, що функція $z = \varphi(x) \cdot \psi(y)$ задовольняє рівнянню: $z \cdot z''_{xy} = z'_x \cdot z'_y$.

11) Довести, що функція $z = \varphi(x+y) + \psi(x-y)$ задовольняє рівнянню: $z''_{xx} - z''_{yy} = 0$.

12) Довести, що функція $z = x \cdot \varphi\left(\frac{x}{y}\right) + y \cdot \psi\left(\frac{x}{y}\right)$ задовольняє рівнянню: $x \cdot z'_x + y \cdot z'_y = z$.

13) Довести, що функція $z = \varphi(xy) + \psi\left(\frac{x}{y}\right)$ задовольняє рівнянню: $x^2 \cdot z''_{xx} - y^2 \cdot z''_{yy} + x \cdot z'_x - y \cdot z'_y = 0$.

14) Довести, що функція $z = x^n \cdot f\left(\frac{y}{x^2}\right)$ задовольняє рівнянню: $x \cdot z'_x + 2y \cdot z'_y = nz$.

15) Довести, що функція $z = y \cdot f(x^2 - y^2)$ задовольняє рівнянню: $y^2 \cdot z'_x + xy \cdot z'_y = xz$

16) Довести, що функція $z = \varphi(x^2 + y^2)$ задовольняє рівнянню: $y \cdot z'_x - x \cdot z'_y = 0$.

17) Довести, що функція $z = \frac{y^2}{3x} + \varphi(xy)$ задовольняє рівнянню: $x^2 \cdot z'_x - xy \cdot z'_y + y^2 = 0$.

18) Довести, що функція $z = e^y \cdot \varphi(ye^{\frac{x^2}{2y^2}})$ задовольняє рівнянню: $\left(x^2 - y^2\right) \cdot z'_x + xy \cdot z'_y = xyz$.

19) Довести, що функція $u = x^n \varphi(\frac{y}{x^\alpha}, \frac{z}{x^\beta})$ задовольняє рівнянню: $x \cdot u'_x + \alpha y \cdot u'_y + \beta u'_z = nu$.

20) Довести, що функція $u = \frac{xy}{z} \ln x + x\varphi(\frac{y}{x}, \frac{z}{x})$ задовольняє рівнянню: $x \cdot u'_x + y \cdot u'_y + z \cdot u'_z = u + \frac{xy}{z}$.

21) Довести, що функція $u = \varphi(x - at) + \psi(x + at)$ задовольняє рівнянню: $u''_t = a^2 u''_x$.

22) Довести, що функція $u = x\varphi(x + y) + y\psi(x + y)$ задовольняє рівнянню: $u''_x - 2u''_{xy} + u''_y = 0$.

23) Довести, що функція $u = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x\psi\left(\frac{y}{x}\right)$ задовольняє рівнянню: $x^2 \cdot u''_x + 2xy \cdot u''_{xy} + y^2 \cdot u''_y = 0$.

24) Довести, що функція $u = x^n \cdot \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x^{1-n} \cdot \psi\left(\frac{y}{x}\right)$ задовольняє рівнянню: $x^2 \cdot u''_x + 2xy \cdot u''_{xy} + y^2 \cdot u''_y = n(n-1)u$.

25) Довести, що функція $u = \varphi\left(x + \psi(y)\right)$ задовольняє рівнянню: $u'_x \cdot u''_{xy} = u'_y \cdot u''_x$.

26) Довести, що функція $u = f(x + at) + g(x - at)$ задовольняє рівнянню: $u''_t = a^2 \cdot u''_x$.

27) Довести, що функція $u = x \cdot f(x + y) + y \cdot g(x + y)$ задовольняє рівнянню: $u''_x - 2u''_{xy} + u''_y = 0$.

28) Довести, що функція $u = f(x + 2t)e^{\frac{x}{2} - t} + g(x - 2t)$ задовольняє рівнянню: $u''_t - 4u''_x + 2u'_t + 4u'_x = 0$.

29) Довести, що функція $u = f(xy) + \sqrt{xy} \cdot g\left(\frac{y}{x}\right)$ задовольняє рівнянню: $x \cdot u''_x - y^2 \cdot u''_y = 0$.

30) Довести, що функція $u = \frac{f(x - t) + g(x + t)}{x}$ задовольняє рівнянню: $u''_t = u''_x + \frac{2}{x} u'_x$.

31) Довести, що функція $u = f(x + 2\sqrt{-y}) + g\left(x - 2\sqrt{-y}\right)$ задовольняє рівнянню: $u''_x + y \cdot u''_y + \frac{1}{2} u'_y = 0$.

32) Довести, що функція $u = f(xy) + g\left(\frac{x}{y}\right)$ задовольняє рівнянню: $x^2 \cdot u''_x - y^2 \cdot u''_y = y \cdot u'_y - x \cdot u'_x$.

33) Довести, що функція $u = f(x)\cdot g(y)$ задовольняє рівнянню: $u\cdot u''_{xy} = u'_x \cdot u'_y$.

34) Довести, що функція $u = f\left(x + g(y)\right)$ задовольняє рівнянню: $u'_x \cdot u''_{xy} = u'_y \cdot u''_x$.

Завдання 13

Знайти повний диференціал функції

1. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & z^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ln x \\ 4 & \sin y & 3 & -6 \\ y & 0 & 7 & 5 \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & e^y \\ \cos z & 0 & 0 & -4 \\ -4 & x^3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & y & 1 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} ctg(z) & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 8 & y^2 & 2 \\ 0 & \ln x & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} 0 & 3 & y^6 & -3 \\ tg(x) & 1 & -3 & 6 \\ 0 & \ln z & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & x^2 \end{vmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix} 0 & \sin y & 0 & 8 \\ 0 & -1 & x^2 & 2 \\ e^z & 3 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & y \end{vmatrix}$.

6. $\begin{vmatrix} 0 & \ln x & 0 & -5 \\ 0 & 5 & z^3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x \\ \mathrm{ctg}(y) & 6 & 1 & -4 \end{vmatrix}$.

7. $\begin{vmatrix} 0 & \mathrm{arctg}(x) & 0 & 0 \\ \ln z & 7 & -2 & 0 \\ 0 & 8 & y^3 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & z \end{vmatrix}$.

8. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \arcsin(y) & 0 \\ \cos(z) & 0 & 1 & 0 \\ 5 & x^3 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 3 & y \end{vmatrix}$.

9. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & arctg(z) \\ 3 & x^4 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & \cos(y) & -3 \\ y & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

10. $\begin{vmatrix} 0 & -2 & y^3 & 4 \\ \arccos(x) & 3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & e^z \\ 0 & z & 0 & 7 \end{vmatrix}$.

11. $\begin{vmatrix} 0 & ln\, z & 0 & 5 \\ 0 & 1 & x^3 & 3 \\ arcsin\, y & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & z \end{vmatrix}$.

12. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & arctg\, z & 0 \\ 5 & 0 & 1 & -4 \\ \ln x & y^4 & 3 & 0 \\ 7 & 0 & -2 & x \end{vmatrix}$.

13. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \arccos z \\ \sin x & 0 & 6 & 3 \\ 7 & y^3 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & x^2 & -1 \end{vmatrix}$.

14. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & y^2 & 2 & 1 \\ z^3 & 0 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & e^x \end{vmatrix}$.

15. $\begin{vmatrix} ctg\, y & 7 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & e^x \\ 0 & 1 & z^3 & 2 \\ 0 & x^2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

16. $\begin{vmatrix} 0 & y^2 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & x^3 & 2 \\ \sin z & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 21 \end{vmatrix}$.

17. $\begin{vmatrix} 0 & 3 & z^2 & 1 \\ tgx & 7 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & \ln x & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

18. $\begin{vmatrix} 0 & \sin z & 0 & 6 \\ 0 & 3 & x^4 & 2 \\ e^y & 7 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & z \end{vmatrix}$.

19. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & z \\ 7 & x^4 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & \cos y & 3 \\ e^Z & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

20. $\begin{vmatrix} 0 & tgy & 0 & 4 \\ 0 & 7 & e^x & 3 \\ 0 & 0 & 0 & y \\ \arccos z & 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

21. $\begin{vmatrix} 0 & \operatorname{ctg} x & 0 & 0 \\ 5 & 3 & x & 4 \\ 0 & 4 & 0 & y^5 \\ \ln z & 7 & 0 & -3 \end{vmatrix}$.

22. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \sqrt{x} & 0 \\ z^2 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & \ln y & 5 & 0 \\ 7 & 6 & -2 & e^z \end{vmatrix}$.

23. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \operatorname{arctg} y \\ 0 & x^3 & 0 & 3 \\ \sqrt{z} & 5 & 0 & -2 \\ 2 & 6 & \ln z & 1 \end{vmatrix}$.

24. $\begin{vmatrix} \operatorname{tg} x & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 7 & x \\ 3 & z^3 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & e^y & 0 \end{vmatrix}$.

25. $\begin{vmatrix} \ln x & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & z^3 & 7 \\ 0 & \operatorname{ctg} y & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & x^2 \end{vmatrix}$.

26. $\begin{vmatrix} 0 & e^z & 0 & 3 \\ \sin y & 8 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & x^4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & z \end{vmatrix}$.

27. $\begin{vmatrix} 0 & 7 & x^5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & y \\ \ln z & -1 & 6 & 3 \\ 0 & \sin y & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

28. $\begin{vmatrix} 0 & \ln x & 0 & 4 \\ 0 & 1 & y^3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & z \\ ctgz & 7 & 5 & -3 \end{vmatrix}$.

29. $\begin{vmatrix} e^x & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & \sin y \\ 2 & z & 0 & 4 \\ -1 & 8 & x^2 & 6 \end{vmatrix}$.

30. $\begin{vmatrix} 0 & \sin y & 0 & 0 \\ y & 7 & 0 & 2 \\ 8 & -1 & x^3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & \ln z \end{vmatrix}$.

§4. ЗАСТОСУВАННЯ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛІВ

Приклад 4.1. За допомогою першого диференціала обчислити наближено

$$\frac{1{,}03^2}{\sqrt[3]{0{,}98\sqrt[4]{1{,}05}}}.$$

Розв'язування. Розглянемо диференційовну функцію

$$u=\frac{x}{\sqrt[3]{y\sqrt[4]{z}}}=xy^{\frac{-1}{3}}z^{\frac{-1}{12}}$$

Потрібно знайти $u(1{,}03;0{,}98;1{,}05)$. Візьмемо $x=y=z=1$;

$\Delta x=0{,}03;\quad \Delta y=-0{,}02;\quad \Delta z=0{,}05$. Враховуючи, що для $M(1;1;1)$

$$\frac{du}{dx}(M)=y^{\frac{-1}{3}}z^{\frac{-1}{12}}\Big|_M=1;$$

$$\frac{du}{dy}(M)=-\frac{1}{3}xy^{\frac{-4}{3}}z^{\frac{-1}{12}}\Big|_M=\frac{-1}{3};$$

$$\frac{du}{dz}(M)=-\frac{1}{12}xy^{\frac{-1}{3}}z^{\frac{-13}{12}}\Big|_M=\frac{-1}{12},$$

дістанемо $du(1;1;1)=\Delta x-\frac{1}{3}\Delta y-\frac{1}{12}\Delta z=0{,}0325.$

Для довільної диференційованої функції f

$$\Delta f(x_1,\dots,x_n)=f(x_1+\Delta x_1,\dots,x_n+\Delta x_n)-f(x_1,\dots,x_n)\approx df(x_1,\dots,x_n),$$

звідки

$$f(x_1+\Delta x_1,\dots,x_n+\Delta x_n)\approx f(x_1,\dots,x_n)+df(x_1,\dots,x_n), \qquad (4.1)$$

де

$$df(x_1,\dots,x_n)=\Delta x_1\frac{df}{dx_1}(x_1,\dots,x_n)+\dots+\Delta x_n\frac{df}{dx_n}(x_1,\dots,x_n) \qquad (4.2).$$

Тоді згідно з (4.1)

$u(1{,}03; 0{,}98; 1{,}05) \approx u(1; 1; 1) + du(1; 1; 1) = 1 + 0{,}0325 = 1{,}0325.$

Відповідь. 1,0325.

Завдання 14

Обчислити наближено:

1. $(1{,}04)^{2{,}03}$.
2. $\sqrt{(4{,}05)^2 + (2{,}93)^2}$.
3. $(0{,}97)^{2{,}02}$.
4. $arctg\left(\frac{1{,}97}{1{,}02} - 1\right)$.
5. $\frac{(1{,}03)^2}{\sqrt[3]{0{,}98}}$.
6. $\sqrt{(1{,}02)^3 + (1{,}97)^3}$.
7. $arctg\,\frac{0{,}98}{1{,}01}$.
8. $(1{,}01)^{2{,}02}$.
9. $sin29^\circ tg46^\circ$.
10. $(0{,}98)^{1{,}05}$.
11. $(2{,}003)^2(3{,}004)^3$.
12. $\ln 2{,}73 - (1{,}03)^{2{,}73}$.
13. $\ln\left(\sqrt[3]{0{,}98} + \sqrt[4]{1{,}03} - 1\right)$.
14. $(1{,}02)^{2{,}04} - \ln 1{,}02$.
15. $cos59^\circ ctg46^\circ$.
16. $sin32^\circ cos58^\circ$.
17. $(1{,}01)^{3{,}01}$.
18. $(1{,}08)^{3{,}96}$.
19. $sin1{,}49\ arctg0{,}07$.
20. $\frac{sin1{,}48}{2^{2{,}95}}$.

$21.(1{,}94)^2 e^{0{,}12}$.

$22.sin1{,}59\ tg3{,}09$.

$23.arctg(\frac{1{,}96}{0{,}9}-1)$.

$24.e^{1{,}15+1{,}1}$.

$25.(3{,}1)^{1{,}02}$.

$26.sin29°tg31°$.

$27.(sin1{,}48)2^{1{,}2}$.

$28.arctg\frac{0{,}97}{1{,}02}$.

$29.\sqrt{(1{,}01)^3+(2{,}02)^3}$.

30.Обчислити наближено $(2{,}68)^{sin0{,}05}$ виходячи зі значення функції $z=x^{siny}$ в точці $M(e,0)$.

§5. ПОХІДНА У ЗАДАНОМУ НАПРЯМКУ. ГРАДІЄНТ

Нехай в області D задано функцію u=f(x ;y ;z). та точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$. В області D розглянемо точку $M_1(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y; z_0+\Delta z)$ таку, щоб вектор M_0M_1 був співнаправленим з одиничним вектором **e** = (cosα; cosβ; $cos\gamma$). Довжину вектора M_0M_1 позначимо через Δe, $\Delta e=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}$.

Похідна функції u=f(x ;y ;z) в точці M_0 в напрямку вектора **e** – це границя $\lim_{\Delta e\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta e}$, яка позначається через $\frac{\partial u}{\partial e}$, отже $\frac{\partial u}{\partial e}=\lim_{\Delta e\to 0}\frac{u(x_0+\Delta x;\, y_0+\Delta y;\, z_0+\Delta z)-u(x\ ;y\ ;z\ )}{\Delta e}$.

Обчислюється похідна у даному напрямку за формулою:

$$\frac{\partial u}{\partial e}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\ cos\gamma.$$

Вектор $grad\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$ називається градієнтом функції u=f(x ;y ;z). Похідна функції u в напрямку вектора **e** є проекцією вектора $grad\, u$ на вектор **e**. Звідси випливає, що похідна функції в напрямку **e** приймає найбільше значення, коли напрям вектора **e** співпадає з напрямком градієнта функції u. Це найбільше значення похідної функції дорівнює $|\, grad\, u\, |$.

Приклад 5.1.

Розв'язування. Знайти похідну від функції $z = arctg\frac{y}{x}$ у точці M(1;$\frac{1}{3}$) , що міститься на кривій $3y = x^3$ в напрямку цієї кривої.

Знайдемо частинні похідні функції

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2};$

$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x^2+y^2}.$

Підставимо в них координати точки M:

$\frac{\partial z}{\partial x}(M) = -0.3, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(M) = 0.9.$

Щоб знайти вектор **e**, який задає напрям диференціювання, задамо нашу криву вектор-функцією $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$, поклавши t≡x. Одержимо $\boldsymbol{r} = (t; \frac{1}{3}t^3)$.

Тоді $\boldsymbol{r}' = (1; t^2)$.

За умовою $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{r}'(M) = (1; 1)$. Напрямні косинуси цього вектора дорівнюють $cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $cos\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Таким чином

$\frac{\partial z}{\partial e}(M) = -0{,}3 * \frac{1}{\sqrt{2}} + 0{,}9 * \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Відповідь.: $\frac{\partial z}{\partial e}(M) = 0{,}3\sqrt{2}$.

Завдання 15

Знайти похідну функції $u(x, y, z)$ в точці M у напрямі нормалі до поверхні S, яка утворює гострий кут з віссю Oz.

1. $u = 4\ln\left(3 + x^2\right) - 8xyz, \quad S:\ x^2 - 2y^2 + 2z^2 = 1, \quad M(1,\ 1,\ 1).$

2. $u = x\sqrt{y} + y\sqrt{z}, \quad S:\ 4z + 2x^2 - y^2 = 0, \quad M(2,\ 4,\ 4).$

3. $u = -2\ln\left(x^2 - 5\right) - 4xyz, \quad S:\ x^2 + 2y^2 - 2z^2 = 1, \quad M(1,\ 1,\ 1).$

4. $u = \frac{1}{4}x^2y - \sqrt{x^2 + 5z^2}, \quad S:\ z^2 = x^2 + 4y^2 - 4, \quad M\left(-2,\ \frac{1}{2},\ 1\right).$

5. $u = xz^2 - \sqrt{x^3 y}, \quad S: \; x^2 - y^2 - 3z + 12 = 0, \quad M(2,\ 2,\ 4).$

6. $u = x\sqrt{y} - yz^2, \quad S: \; x^2 + y^2 = 4z, \quad M(2,\ 1,\ \text{-}1).$

7. $u = 7\ln\left(1/13 + x^2\right) - 4xyz, \quad S: \; 7x^2 - 4y^2 + 4z^2 = 7, \quad M(1,\ 1,\ 1).$

8. $u = \operatorname{arctg}(y/x) - 8xyz, \quad S: \; x^2 + y^2 - 2z^2 = 10, \quad M(2,\ 2,\ \text{-}1).$

9. $u = \ln\left(1 + x^2\right) - xy\sqrt{z}, \quad S: \; 4x^2 - y^2 + z^2 = 16, \quad M(1,\ \text{-}2,\ 4).$

10. $u = \sqrt{x^2 + y^2} - z, \quad S: \; x^2 + y^2 = 24z, \quad M(3,\ 4,\ 1).$

11. $u = x\sqrt{y} - (z + y)\sqrt{x}, \quad S: \; x^2 - y^2 + z^2 = 4, \quad M(1,\ 1,\ \text{-}2).$

12. $u = \sqrt{xy} - \sqrt{4 - z^2}, \quad S: \; z = x^2 - y^2, \quad M(1,\ 1,\ 0).$

13. $u = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}, \quad S: \; 2x^2 - y^2 + z^2 - 1 = 0, \quad M(0,\ \text{-}3,\ 4).$

14.
$u = \ln\left(1 + x^2 + y^2\right) - \sqrt{x^2 + z^2}, \quad S: \; x^2 - 6x + 9y^2 + z^2 = 4z + 4, \quad M(3,\ 0,\ \text{-}4).$

15. $u = \dfrac{yz^2}{x^2}$, S: $x^2 + y^2 + z^2 + 6z - 4x + 8 = 0.$ $M_0(2,1,-1)$:.

16. $u = x^2yz^3$, S: $z^2 = 4y^2 - x^2 - 2xy.$ $M_0(-2,1,2)$:.

17. $u = \dfrac{z^3}{xy^2}$, S: $x^2 + y^2 + z^2 - xy + 3z - 7 = 0.$ $M_0(1,2,1)$:.

18. $u = \dfrac{z}{x^3y^2}$, S: $x^2 + y^2 + z^2 + 6y + 4x - 8 = 0.$ $M_0(-1,1,2)$:.

19. $u = \dfrac{x^2}{yz^2}$, S: $2x^2 - y^2 + z^2 - 4z + y - 13 = 0.$ $M_0(2,1,-1)$:.

20. $u = \dfrac{z^2}{xy^2}$, S: $x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 4z + 4 = 0.$ $M_0(2,1,-1)$:.

21. $u = \dfrac{xz^2}{y}$, S: $x^2 + z^2 - 5yz + 3y - 46 = 0.$ $M_0(1,2,-3)$:.

22. $u = \dfrac{yz^2}{x}$, S: $x^2 + y^2 - z^2 + 2yz + y - 2z - 2 = 0$, $M_0(1,1,1)$:.

23. $u = \dfrac{xy^2}{z^2}$, S: $x^2 + y^2 - z^2 - 2xz + 2x - z = 0.$ $M_0(1,1,1)$:.

24. $u = \dfrac{x^3y^2}{z}$, S: $z = x^2 + y^2 - 2xy + 2x - y.$ $M_0(1,1,1)$:.

25. $u = \dfrac{1}{x^2yz}$, S: $z = y^2 - x^2 + 2xy - 3y.$ $M_0(1,-1,1)$:.

26. $u = \dfrac{x^2}{y^2z^3}$, S: $z = x^2 - y^2 - 2xy - x - 2y.$ $M_0(-1,1,1)$:.

27. $u = xyz$, S: $x^2 - 2y^2 + z^2 + xz - 4y - 13 = 0.$ $M_0(3,1,2)$:.

28. $u = \dfrac{y^3}{x^2z}$, S: $4y^2 - z^2 + 4xy - xz + 3z - 9 = 0$, $M_0(1,-2,1)$:.

29. $u = \dfrac{x^3y^2}{z}$, S: $2x^2 - y^2 + 2z^2 + xy + xz - 3 = 0$, $M_0(1,2,1)$:.

30. $u = \dfrac{x}{yz^2}$, S: $x^2 - y^2 + z^2 - 4x + 2y - 14 = 0.$ $M_0(3,1,4)$:.

Завдання 16

Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial l_1} + \dfrac{\partial z}{\partial l_2}$, де $\vec{l}_1$ та $\vec{l}_2$ - лінійно-незалежні власні вектори лінійного оператора з матрицею A, якщо

1. $z = x^2 - 2xy$; $A = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$.

2. $z = x^3 + 6xy$; $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -8 & -5 \end{pmatrix}$.

3. $z = 3x^4 - xy$; $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$.

4. $z = x^2 + 6xy + y^2$; $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

5. $z = x^2 + 5y^2$; $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$.

6. $z = 2x^2 - 3y^2$; $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

7. $z = x^2 - 2xy + 3y$; $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

8. $z = 5x^2y - 3xy^4$; $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

9. $z = 3x^2 + 5y^2$; $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

10. $z = 6x^2y^2 + y^4$; $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

11. $z = 4xy^2 - y^3$; $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$.

12. $z = 4xy^2 + 2y^3;\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

13. $z = x^2 - 3y + xy;\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$

14. $z = \ln(x + y);\quad A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$

15. $z = \sqrt{x^2 + y^2};\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$

16. $z = x^3 - 3x^2 y;\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

17. $z = arctg(xy);\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

18. $z = x^2 y^2 - xy^3;\quad A = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

19. $z = arctg\,\frac{y}{x};\quad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

20. $z = x^2 + 2yx;\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

21. $z = 2xy - y^3;\quad A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$

22. $z = \ln(x^2 - y^2);\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

23. $z = \ln(xy + 1);\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$

24. $z = arctg\,\frac{x}{y};\quad A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

25. $z = x^3 - 2xy^2;\quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$

26. $z = x^2 - 2y^3;\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}.$

27. $z = 2x^2 + y^2 x;\quad A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

28. $z = \ln(xy^2 + 1);\quad A = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

29. $z = arctg(xy^2)$; $\quad A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

30. $z = x^2 + 3y^2 - 3x$; $\quad A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Завдання 17

Знайти кут між градієнтами скалярних полів у точці

1. $v = \frac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3$ і $u = \frac{yz^2}{x^2}$ $M\ \ \sqrt{2},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{3}}$.

2. $v = \frac{4\sqrt{6}}{x} - \frac{\sqrt{6}}{9y} + \frac{3}{z}$ і $u = x^2yz^3$ $M\left(2,\frac{1}{3},\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

3. $v = 9\sqrt{2}x^3 - \frac{y^3}{2\sqrt{2}} - \frac{4z^3}{\sqrt{3}}$ і $u = \frac{z^3}{xy^2}$ $M\left(\frac{1}{3},2,\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

4. $v = \frac{3}{x} + \frac{4}{y} - \frac{1}{\sqrt{6}z}$ і $u = \frac{z}{x^3y^2}$ $M\ \ 1,2,\frac{1}{\sqrt{6}}$.

5. $v = \frac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3$ і $u = \frac{x^2}{yz^2}$ $M\ \ \sqrt{2},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{3}}$.

6. $v = 3\sqrt{2}x^2 - \frac{y^2}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{2}z^2$ і $u = \frac{z^2}{xy^2}$ $M\left(\frac{1}{3},2,\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

7. $v = 6\sqrt{6}x^3 - 6\sqrt{6}y^3 + 2z^3$ і $u = \frac{xz^2}{y}$ $M\ \ \frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},1$.

8. $v = \frac{\sqrt{6}}{2x} - \frac{\sqrt{6}}{2y} + \frac{2}{3z}$ і $u = \frac{yz^2}{x}$ $M\ \ \frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{3}}$.

9. $v = 3\sqrt{2}x^2 - \frac{y^2}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{2}z^2$ і $u = \frac{xy^2}{z^2}$ $M\left(\frac{1}{3},2,\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

10. $v = \frac{3}{x} + \frac{4}{y} - \frac{1}{\sqrt{6}z}$ і $u = \frac{x^3y^2}{z}$ $M\ \ 1,2,\frac{1}{\sqrt{6}}$.

11. $v = -\frac{4\sqrt{2}}{x} + \frac{\sqrt{2}}{9y} + \frac{1}{\sqrt{3}z}$ і $u = \frac{1}{x^2yz}$ $M\ \ 2,\frac{1}{3},\frac{1}{\sqrt{6}}$.

12. $v = \frac{6}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}z}$ і $u = \frac{x^2}{y^2z^3}$ $M\left(\sqrt{2},\sqrt{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

13. $v = x^2 + 9y^2 + 6z^2$ і $u = xyz$ $M\ \ 1,\frac{1}{3},\frac{1}{\sqrt{6}}$.

14. $v = \frac{2}{x} + \frac{3}{2y} - \frac{\sqrt{6}}{4z}$ і $u = \frac{y^3}{x^2z}$ $M\left(\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{3}{2}},\frac{1}{2}\right)$.

15. $v = \frac{3}{x} + \frac{4}{y} - \frac{1}{\sqrt{6}z}$ і $u = \frac{x^3y^2}{z}$ $M\ \ 1,2,\frac{1}{\sqrt{6}}\ \ .$

16. $v = -\frac{\sqrt{6}}{2x} + \frac{\sqrt{6}}{2y} - \frac{2}{3z}$ і $u = \frac{x}{yz^2}$ $M\ \ \frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{3}}\ \ .$

17. $v = \frac{6}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}z}$ і $u = \frac{y^2z^3}{x^2}$ $M\left(\sqrt{2},\sqrt{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$

18. $v = \frac{1}{\sqrt{2}x} - \frac{2\sqrt{2}}{y} - \frac{3\sqrt{3}}{2z}$ і $u = \frac{y^2z^3}{x}$ $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$

19. $v = 6\sqrt{6}x^3 - 6\sqrt{6}y^3 + 2z^3$ і $u = \frac{y}{xz^2}$ $M\ \ \frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},1\ \ .$

20. $v = x^3 - y^2 - 3z^2$ і $u = \frac{yz^2}{x}$ $M\ \ \frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{3}}\ \ .$

21. $v = \frac{3x^2}{\sqrt{2}} - \frac{y^2}{\sqrt{2}} - \sqrt{32}z^2$ і $u = \frac{z^2}{x^2y^2}$ $M\left(\frac{2}{3},2,\sqrt{\frac{2}{3}}\right).$

22. $v = \frac{x^3}{\sqrt{2}} - \frac{y^3}{\sqrt{2}} - \frac{8z^3}{\sqrt{3}}$ і $u = \frac{x^2}{y^2z^3}$ $M\left(\sqrt{2},\sqrt{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$

23. $v = \frac{3}{2}x^2 + 3y^2 - 2z^2$ і $u = x^2yz^3$ $M\left(2,\frac{1}{3},\sqrt{\frac{3}{2}}\right).$

24. $v = 9\sqrt{2}x^3 - \frac{3y^3}{2\sqrt{2}} - \frac{4z^3}{\sqrt{3}}$ і $u = \frac{xy^2}{z^3}$ $M\left(\frac{1}{3},2,\sqrt{\frac{3}{2}}\right).$

25. $v = \sqrt{2}x^2 - \frac{3y^2}{\sqrt{2}} - 6\sqrt{2}z^2$ і $u = \frac{1}{xy^2z}$ $M\ \ 1,\frac{2}{3},\frac{1}{\sqrt{6}}\ \ .$

26. $v = x^2 + 9y^2 + 6z^2$ і $u = \frac{1}{xyz}$ $M\ \ 1,\frac{1}{3},\frac{1}{\sqrt{6}}\ \ .$

27. $v = \frac{1}{\sqrt{2}x} - \frac{2\sqrt{2}}{y} - \frac{3\sqrt{3}}{2z}$ і $u = \frac{x}{y^2z^3}$ $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$

28. $v = -\frac{4\sqrt{2}}{x} + \frac{\sqrt{2}}{9y} + \frac{1}{\sqrt{3}z}$ і $u = x^2yz$ $M\ \ 2,\frac{1}{3},\frac{1}{\sqrt{6}}\ \ .$

29. $v = \frac{x^3}{\sqrt{2}} - \frac{y^3}{\sqrt{2}} - \frac{8z^3}{\sqrt{3}}$ і $u = \frac{y^2z^3}{x^2}$ $M\left(\sqrt{2},\sqrt{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$

30. $v = -\frac{3x^3}{\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{2}y^3}{3} + 8\sqrt{3}z^3$ і $u = \frac{x^2z}{y^3}$ $M\left(\sqrt{\frac{2}{3}},\sqrt{\frac{3}{2}},\frac{1}{2}\right).$

Завдання 18

Знайти величину і напрям найбільшої зміни функції u(x;y;z) у точці

1. $u(M) = xyz$ $M_0(0,1,-2).$

2. $u(M) = x^2yz\ M_0(2,0,2).$

3. $u(M) = xy^2z\ \ M_0(1,-2,0).$

4. $u(M) = xyz^2\ \ M_0(3,0,1).$

5. $u(M) = x^2y^2z\ \ M_0(-1,0,3).$

6. $u(M) = x^2yz^2\ \ M_0(2,1,-1).$

7. $u(M) = xy^2z^2\ \ M_0(-2,1,1).$

8. $u(M) = y^2z - x^2\ \ M_0(0,1,1).$

9. $u(M) = x^2y - z^2\ \ M_0(0,-2,1).$

10. $u(M) = xy + xz\ \ M_0(0,1,2).$

11. $u(M) = xy - xz\ \ M_0(-1,2,1).$

12. $u(M) = x^2yz\ \ M_0(1,-1,1).$

13. $u(M) = xyz\ \ M_0(2,1,0).$

14. $u(M) = xyz^2\ \ M_0(4,0,1).$

15. $u(M) = 2x^2yz\ \ M_0(-3,0,2).$

16. $u(M) = x^2yz\ \ M_0(1,0,4).$

17. $u(M) = (x+y)z^2\ \ M_0(0,-1,4).$

18. $u(M) = (x+z)y^2\ \ M_0(2,2,2).$

19. $u(M) = x^2(y^2+z)\ \ M_0(4,1,-3).$

20. $u(M) = (x^2+z)y^2\ \ M_0(-4,1,0).$

21. $u(M) = x^2(y+z^2)\ \ M_0(3,0,1).$

22. $u(M) = (x^2-y)z^2\ \ M_0(1,3,0).$

23. $u(M) = x(y^2+z^2)\ \ M_0(1,-2,1).$

24. $u(M) = x^2 + 3y^2 - z^2\ \ M_0(0,0,1).$

25. $u(M) = x^2z - y^2\ \ M_0(1,1,-2).$

26. $u(M) = xz^2 + y\ \ M_0(2,2,1).$

27. $u(M) = x^2y - z\ \ M_0(-2,2,1).$

28. $u(M) = xy^2 - z\ \ M_0(-1,2,1).$

29. $u(M) = y(x+z)\ \ M_0(0,2,-2).$

30. $u(M) = z(x+y)\ \ M_0(1,-1,0).$

§6 ДОТИЧНА ПЛОЩИНА ТА НОРМАЛЬ ДО ПОВЕРХНІ

Якщо повержню S задано рівнянням $F(x;y;z)=0$, то дотична до поверхні S, що проходить через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ цієї поверхні, має рівняння:

$$F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)+F'_z(M_0)(z-z_0)=0,$$

а нормаль до цієї ж поверхні, що проходить через точку M_0, має рівняння:

$$\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}.$$

Якщо поверхню задано рівнянням $z=f(x;y)$, то рівняння дотичної площини та нормалі мають відповідно вигляд:

$$f'_x(x_0;y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0;y_0)(y-y_0)-\big(z-f(x_0;y_0)\big)=0,$$

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0;y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0;y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

Приклад 6.1. До поверхні $z=x^2+y^2$ скласти рівняння дотичної площини, що проходить через точку $M(2;1;1)$ паралельно до вектора $\vec{e}=(1;0;2)$.

Розв'язування. Позначимо точку дотику через $M_0(a;b;a^2+b^2)$. Тоді рівняння дотичної площини матиме вигляд:

$$2a(x-a)+2b(y-b)-z+a^2+b^2=0.$$

Підставимо в нього координати точки M, одержимо рівність:

$$2a(2-a)+2b(1-b)-3+a^2+b^2=0,$$

$$a^2+b^2-4a-2b+3=0.$$

За умовою нормальний вектор $(2a;2b;-1)$ є перпендикулярним до вектора $(1;0;2)$, отже: $2a*1+2b*0-1*2=0$, таким чином $a=1$.

Одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} a=1 \\ a^2+b^2-4a-2b+3=0 \end{cases}.$$

Вона має два розв'язки (1;0) та (1;2). Отже, шуканих площин – дві.

Відповідь: $2x-z-1=0, 2x+4y-z-5=0$

Завдання 19

Складти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні в точці

1. $M_0(2,1,-1):\ x^2+y^2+z^2+6z-4x+8=0.$
2. $M_0(-2,1,2):\ z^2=4y^2-x^2-2xy.$
3. $M_0(1,2,1):\ x^2+y^2+z^2-xy+3z-7=0.$
4. $M_0(-1,1,2):\ x^2+y^2+z^2+6y+4x-8=0.$
5. $M_0(2,1,-1):\ 2x^2-y^2+z^2-4z+y-13=0.$
6. $M_0(2,1,-1):\ x^2+y^2+z^2-6y+4z+4=0.$
7. $M_0(1,2,-3):\ x^2+z^2-5yz+3y-46=0.$
8. $M_0(0,2,2):\ x^2+y^2-xz-yz=0.$
9. $M_0(1,1,1):\ x^2+y^2-z^2+2yz+y-2z-2=0$

10. $M_0(1,1,1):\ x^2+y^2-z^2-2xz+2x-z=0.$

11. $M_0(1,1,1): z=x^2+y^2-2xy+2x-y.$

12. $M_0(1,-1,1):\ z=y^2-x^2+2xy-3y.$

13. $M_0(-1,1,1): z=x^2-y^2-2xy-x-2y.$

14. $M_0(3,1,2): x^2-2y^2+z^2+xz-4y-13=0.$

15. $M_0(1,-2,1):\ 4y^2-z^2+4xy-xz+3z-9=0$

16. $M_0(2,1,0):\ z=x^2+y^2-3xy-x+y+2.$

17. $M_0(1,2,1): 2x^2-y^2+2z^2+xy+xz-3=0.$

18. $M_0(3,1,4):\ x^2-y^2+z^2-4x+2y-14=0.$

19. $M_0(1,1,2): x^2+y^2-z^2+xz+4y-4=0.$

20. $M_0(-2,1,0):\ x^2-y^2-z^2+xz+4x+5=0.$

21. $M_0(1,4,-1):\ x^2+y^2-xz+y-3z-11=0.$

22. $M_0(0,2,0):\ x^2+2y^2+z^2-4xz-8=0.$

23. $M_0(-1,-1,1):\ x^2-y^2-2z^2-2y=0.$

24. $M_0(1,0,1): x^2+y^2-3z^2+xz-2z=0.$

25. $M_0(1,-1,1):\ 2x^2-y^2+z^2-6x+2y+6=0$

26. $M_0(1,1,0): x^2+y^2-z^2+6xy-z-8=0.$

27. $M_0(-1,1,3): z=2x^2+4x-3y^2-2y+10.$

28. $M_0(-1,3,4): z=x^2+y^2-4xy+3x-15.$

29. $M_0(-7,1,8): z=x^2+2y^2+4xy-5y-10.$

30.
$M_0(1,-1,2):\ z=2x^2+3x-3y^2+xy+1.$

Завдання 20

1. До поверхні $z=x^2-4xy+9y^2+17$ скласти рівняння дотичної площини, що перпендикулярна до прямої

$$\begin{cases} x+5z=y \\ y-z=1 \end{cases}.$$

2. До поверхні $z=3x+y-xy$ скласти рівняння дотичної площини, що перпендикулярна до прямої

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - 5 = z \end{cases}.$$

3. До поверхні $z = xy - x - 2y$ скласти рівняння дотичної площини, що перпендикулярна до прямої
$$\begin{cases} x = y \\ x = z \end{cases}.$$
4. До поверхні $z = x^2 + 2xy - y^2 - 6x + 2y + 8$ скласти рівняння дотичної площини, що перпендикулярна до прямої
$$\begin{cases} x + z = 5 \\ y - 1 = 0 \end{cases}.$$
5. До поверхні $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ скласти рівняння дотичної площини, що перпендикулярна до прямої
$$\begin{cases} x - 3y = 4 \\ y + 2z = 1 \end{cases}.$$
6. До поверхні $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 8x - 4y + 7$ скласти рівняння дотичної площини, що перпендикулярна до прямої
$$\begin{cases} 3y + z = 4 \\ x - 3y = -2 \end{cases}.$$
7. До поверхні $z = 5x^2 - 3xy + y^2$ скласти рівняння дотичної площини, що перпендикулярна до прямої
$$\begin{cases} x + 6y = 7 \\ y - z = 2 \end{cases}.$$
8. До поверхні $z = x^2 + xy - 2y^2 - 2x + 5y + 1$ скласти рівняння дотичної площини, що перпендикулярна до прямої
$$\begin{cases} x = y \\ x + z = 1 \end{cases}.$$
9. До поверхні $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y$ скласти рівняння дотичної площини, що перпендикулярна до прямої

$$\begin{cases} x+y=5 \\ y-z=1 \end{cases}.$$

10. До поверхні $z=x^2-2xy+4y^2+x-2y+15$ скласти рівняння дотичної площини, що перпендикулярна до прямої

$$\begin{cases} x-5y=1 \\ z=y \end{cases}.$$

11. До поверхні $z=x^2+y^2-2x-2y$ скласти рівняння дотичної площини, що перпендикулярна до прямої

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+y-5z=0 \end{cases}.$$

12. До поверхні $z=2xy-5x^2-3y^2+2x+10$ скласти рівняння дотичної площини, що перпендикулярна до прямої

$$\begin{cases} x-2z=10 \\ y+x=1 \end{cases}.$$

13. До поверхні $z=x^2-4xy+9y^2+17$ скласти рівняння дотичної площини, що перпендикулярна до прямої

$$\begin{cases} x+y=6 \\ y-2z=2 \end{cases}.$$

14. До поверхні $z=3x+6y-x^2-xy-y^2$ скласти рівняння дотичної площини, що перпендикулярна до прямої

$$\begin{cases} x+y+2z=4 \\ 2x-y=1 \end{cases}.$$

15. До поверхні $z=2xy-5x^2-3y^2+2$ скласти рівняння дотичної площини, що перпендикулярна до прямої

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x+z=0 \end{cases}.$$

16. До поверхні $z=x^2-xy+y^2+9x-6y+20$ скласти рівняння дотичної площини, що перпендикулярна до прямої

$$\begin{cases} x+5y=1 \\ \\ y+3z=3 \end{cases}.$$

17. До поверхні $z=x^2+xy-2y^2-4x+7y+8$ скласти рівняння дотичної площини, що перпендикулярна до прямої

$$\begin{cases} x+4z=5 \\ \\ 2x-y=1 \end{cases}.$$

18. До поверхні $z=x^2+xy+y^2+x-y+1$ скласти рівняння дотичної площини, що перпендикулярна до прямої

$$\begin{cases} x+5z=6 \\ \\ 2y+z=3 \end{cases}.$$

19. До поверхні $z=x^2+y^2-xy+x+y$ скласти рівняння дотичної площини, що перпендикулярна до прямої

$$\begin{cases} x+5z=6 \\ \\ y-2z=4 \end{cases}.$$

20. До поверхні $z=xy-3x-2y$ скласти рівняння дотичної площини, що перпендикулярна до прямої

$$\begin{cases} x+2y=3 \\ \\ 2y-z=1 \end{cases}.$$

21. До поверхні $z=2xy-5x^2-3y^2+2$ скласти рівняння дотичної площини, що перпендикулярна до прямої

$$\begin{cases} x+5y=4 \\ \\ 2x-z=1 \end{cases}.$$

22. До поверхні $z=10xy-9x^2-y^2$ скласти рівняння дотичної площини, що перпендикулярна до прямої

$$\begin{cases} x+3z=7 \\ \\ 2y-z=1 \end{cases}.$$

23. До поверхні $z=x^2-4xy+9y^2$ скласти рівняння дотичної площини, що перпендикулярна до прямої

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-z=5 \end{cases}.$$

24.До поверхні $z=1+6x-x^2-xy-y^2$ скласти рівняння дотичної площини, що перпендикулярна до прямої

$$\begin{cases} x-2y=2 \\ y+z=3 \end{cases}.$$

25.До поверхні $z=xy-x^2-y^2+9$ скласти рівняння дотичної площини, що перпендикулярна до прямої

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ y-z=0 \end{cases}.$$

26.До поверхні $z=x^2+2xy-y^2-4x$ скласти рівняння дотичної площини, що перпендикулярна до прямої

$$\begin{cases} 2x-y+z=0 \\ x+2y-z=0 \end{cases}.$$

27.До поверхні $z=4(x-y)-x^2-y^2$ скласти рівняння дотичної площини, що перпендикулярна до прямої

$$\begin{cases} x+2y=3 \\ z+y=2 \end{cases}.$$

28.До поверхні $z=2xy-3x^2-2y^2+10$ скласти рівняння дотичної площини, що перпендикулярна до прямої

$$\begin{cases} x+z=2 \\ y-2z=0 \end{cases}.$$

29.До поверхні $z=x^2-xy+y^2+x-2y+1$ скласти рівняння дотичної площини, що перпендикулярна до прямої

$$\begin{cases} x+2y+3z=6 \\ y+2z=3 \end{cases}.$$

30.До поверхні $z=x^2+xy+y^2-6x-9y$ скласти рівняння дотичної площини, що перпендикулярна до прямої

$$\begin{cases} x+5z=10 \\ y-z=1 \end{cases}.$$

§7. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

Нехай n≥0 – ціле число, функція $u = f(x;y;z)$ задана в деякому околі точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ та (n+1) раз диференційовна у цьому околі. Тоді має місце формула Тейлора:

$f(x;y;z) = f(x_0;y_0;z_0) + du(M_0) + \frac{1}{2!}d^2u(M_0) + \cdots + \frac{1}{n!}d^n u(M_0) + R_n$,

де $d^к u(M_0)$ – к-тий диференціал функції $u = f(x;y;z)$ в точці M_0, R_n називається залишковим членом, а точка $M(x;y;z)$ належить вказаному околу. Диференціали змінних dx, dy, dz, які входять в вирази для диференціалів $d^к u(M_0)$, дорівнюють $dx = \Delta x = x - x_0, dy = \Delta y = y - y_0, dz = \Delta z = z - z_0$.

Залишковий член у формі Лагранжа має вигляд:

$R_n = \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}(x_0 + \theta\Delta x; y_0 + \theta\Delta y; z_0 + \theta\Delta z)$, де $0 \le \theta \le 1$.

Залишковий член у формі Пеано має вигляд:

$R_n = {}_o(\rho^n)$, де ρ − це відстань від точки M_0 до точки M,

$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$, ${}_o(\rho^n)$ − це нескінченно-мала функція більш високого порядку, ніж ρ^n, при $\rho \to 0$.

Приклад 7.1. Обчислити наближено $1{,}97^{2{,}98}$, використовуючи формулу Тейлора порядку n=1. Вказати абсолютну похибку.

Розв'язування. Розглянемо функцію $z = x^y$. Знайдемо її частинні похідні.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^y lnx;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^y ln^2 x;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x^{y-1} + yx^{y-1}lnx.$$

Візьмемо $x_0 = 2; y_0 = 3; \Delta x = -0{,}03, \Delta y = -0{,}02$. Тоді за формулою Тейлора

$1{,}97^{2{,}98} \approx 2^3 - 3 * 2^2 * 0{,}03 - 8 * ln2 * 0{,}02$.

Враховуючи, що $ln2 \approx 0{,}69$, одержимо $1{,}97^{2{,}98} \approx 7{,}53$.

Щоб оцінити похибку, запишемо залишковий член у формі Лагранжа:

$$R_1 = (3+\theta\Delta y)(2+\theta\Delta y)(2+\theta\Delta x)^{1+\theta\Delta y} * (\Delta x)^2 + 2((2+\theta\Delta x)^{2+\theta\Delta y} +$$
$$+(3+\theta\Delta y)(2+\theta\Delta x)^{2+\theta\Delta y} * \ln(2+\theta\Delta x)) * \Delta x * \Delta y + (2+\theta\Delta x)^{3+\theta\Delta y} *$$
$$* ln^2(2+\theta\Delta x) * (\Delta y)^2$$

Враховуючи, що $\theta > 0, \Delta x < 0, \Delta y < 0, ln2 < 1,$ одержимо

$|R_1| \leq 3 * 2 * 2 * (0{,}03)^2 + 2 * (2^2 + 3 * 2^2) * 0{,}03 * 0{,}02 + 8 * (0{,}02)^2$=0,0108+0,0192+0,0032=0,0332.

Відповідь: $1{,}97^{2{,}98} \approx 7{,}53$,
де абсолютна похибка не перебільшує числа 0,0332.

Завдання 21

Розкласти за формулою Тейлора функцію $f(x, y)$ в околі заданої точки (1-5):

1. $f(x, y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$, (-2;1) ;
2. $f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y$, (1;-2) ;
3. $f(x, y) = x^3 - 2y^3 + 3xy$, (1;2) ;
4. $f(x, y) = x^3 - 5x^2 - xy + y^2 + 10x + 5y$, (2;-1) ;
5. Розкласти за формулою Тейлора в околі точки (x_0, y_0) функцію

$f(x; y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, де a, b, c – константи.

Розкласти за формулою Тейлора функцію $f(x; y; z)$в околі заданої точки (6-9):

6. $f(x; y; z) = (x + y + z)^2$, $(1; 1; -2)$;
7. $f(x; y; z) = x^2 + 3z^2 - 2yz - 3z$, $(0; 1; 2)$;
8. $f(x; y; z) = xyz$, $(1; 2; 3)$;
9. $f(x; y; z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$, $(1; 0; 1)$;

Виписати члени до другого порядку включно формули Тейлора для функції $f(x, y)$ в околі заданої точки (10-13):

10. $f(x; y) = 1 \setminus (x - y)$, $(2; 1)$;
11. $f(x; y) = \sqrt{x + y}$, $(2; 2)$;
12. $f(x; y) = \mathrm{arctg}(x / y)$, $(1; 1)$;
13. $f(x, y) = \sin x \cos y$, $(x_0; y_0)$;
14. Розкласти функцію $f(x; y) = x\sqrt{1 + y}$ за формулою Маклорена до $o(\rho^2)$,
 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$; і записати залишковий член другого порядку в формі Лагранжа.

Розкласти функцію $f(x, y)$ в околі точки (x_0, y_0) за формулою Тейлора до $o(\rho^2)$,
$\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, і записати залишковий член 2-го порядку в формі Лагранжа, якщо (15-16):

15. $f(x; y) = \sin x \sin y$, $x_0 = y_0 = \pi / 4$;
16. $f(x; y) = x^y$, $x_0 = y_0 = 1$;

Розкласти за формулою Тейлора функцію $f(x, y)$ в околі точки $M_0(x_0, y_0)$ до $o(\rho^2)$, де $\rho^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2$, якщо (17-23):

17. $f(x; y) = \frac{\cos x}{\cos y}, \quad M_0(0,0);$

18. $f(x; y) = \arctan\frac{1+x}{1+y}, \quad M_0(0,0);$

19. $f(x; y) = \sqrt{\frac{(1+x)^\alpha + (1+y)^\beta}{2}}, \ \alpha, \beta \in R, \quad M_0(0,0)$;

20. $f(x; y) = \operatorname{arctg}(x^2 y - 2e^{x-1}), \quad M_0(1; 3);$

21. $f(x; y) = \arcsin\left(2x - \frac{3}{2}xy\right), \quad M_0(-1; 1);$

22. $f(x; y) = \cos(3\arcsin x + y^2 - 2xy), \quad M_0\left(\frac{1}{2}; 1\right);$

23. $f(x; y) = \ln\left(\pi - 4\arctan x + \frac{x^2}{y}\right), \quad M_0(1; 1);$

24. Розкласти за формулою Маклорена до $o(\rho^2), \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ функцію

$$f(x; y; z) = \cos x \cos y \cos z - \cos(x + y + z);$$

25. Розкласти за формулою Тейлора в околі точки $(0; 0; 1)$ до $o(\rho^2)$, $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-1)^2}$ функцію $f(x; y) = \ln(xy + z^2)$;

Розкласти за формулою Маклорена до $o(\rho^4), \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ функцію f , якщо (26-31):

26. $f = \frac{1}{(1-x)(1-y)};$

27. $f = \sqrt{1 - x^2 - y^2};$

28. $f = \cos x \cos y;$

29. $f = \sin x / \cos y;$

30. $f = e^x \sin y;$

31. $f = e^{2x} \ln(1 + y).$

§8. ЕКСТРЕМУМ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Функція $f(M)$, де $M = M(x_1, \dots, x_n)$, за означенням має екстремум у точці $K(k_1, \dots, k_n)$, якщо в досить малому околі точки K приріст функції $\Delta f(K)$ зберігає сталий знак. Питання про знак $\Delta f(K)$ можна дослідити, скориставшись формулою Тейлора порядку 1:

$$\Delta f(K) = df(K) + o(\rho), \qquad (8.1)$$

де

$$\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots \Delta x_n^2} \qquad (8.2)$$

і

$\lim_{\rho\to\infty}\frac{o(\rho)}{\rho}$=0.

У досить малому околі точки K можна розглядати $\Delta f(K)$ як лінійну функцію змінних $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$. Справді,

$$df(K)=\Delta x_1\frac{df(K)}{dx_1}+\Delta x_2\frac{df(K)}{dx_2}+\ldots+\Delta x_n\frac{df(K)}{dx_n}$$

[див. (4.2)], причому в разі $df(K)\not\equiv 0$ функція $\Delta f(K)$ має перший порядок відносно ρ і членом $o(\rho)$ можна знехтувати. Водночас лінійна функція при різних значеннях $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$ набуває як додатних, так і від'ємних значень, що суперечить означенню екстремуму.

Отже, точка екстремуму K диференційованої функції $f(x_1, \dots, x_n)$ завжди є стаціонарною точкою цієї функції, тобто

$$df(K)\equiv 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{df(K)}{dx_1}=0\\ \vdots\\ \frac{df(K)}{dx_n}=0\end{cases} \qquad (8.3)$$

Тому дослідження диференційовної функції f на екстремум завжди слід починати з відшукання всіх стаціонарних точок цієї функції, тобто з розв'язування системи (8.3).

Критерій Сільвестра

Для дослідження стаціонарних точок функції трьох і більшого числа змінних замість перетворення $d^2 f(M_0)$ за алгоритмом Лагранжа можна використовувати інший прийом.

Нехай задано квадратичну форму

$$Q(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)=(\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta x_1\\ \Delta x_2\\ \dots\\ \Delta x_n\end{pmatrix}=$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\Delta x_i\Delta x_j\ ,$$

де $\forall(i,j), a_{ij} = a_{ji}$, що завжди можна зробити для довільної квадратичної форми.

Розглянемо допоміжні визначники

$$\delta_1 = a_{11}; \delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \ldots; \delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Квадратична форма $Q(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$ буде:

а) <u>Додатно визначеною</u> тоді і тільки тоді, коли:

$\forall k = \overline{1,n}; \delta_k > 0;$

б) <u>Додатно напіввизначеною</u> тоді і тільки тоді, коли

$\forall k = \overline{1,m}; \delta_k > 0,$ а $\forall l = \overline{m+1,n}; \delta_l = 0$ для деякого m є {0,1,…,n-1} (тут m –ранг Q, тобто кількість повних квадратів, до суми яких зводиться Q);

в) <u>Від’ємно визначеною</u> тоді і тільки тоді, коли

$\forall k = \overline{1,n}; (-1)^k \delta_k > 0;$

г) <u>Від’ємно напіввизначеною</u> тоді і тільки тоді, коли

$\forall k = \overline{1,m}; (-1)^k \delta_k > 0,$ а $\forall l = \overline{m+1,n}; \delta_m = 0$ для деякого m є $\{0,\ldots,n-1\},$ де m –ранг Q.

<u>Зауваження</u>**.** Пункти б та г сформульовані з точністю до перенумерації змінних.

З формулювання цього критерію випливає, що в усіх інших випадках квадратична форма $Q(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$ є невизначеною.

Зауважимо, що для функції трьох змінних $f(x,y,z)$ квадратична форма $d^2f(M_0) = Q$ (див.(8.7 в)) має допоміжні визначники:

$$\delta_1 = f''_{xx}(M_0); \delta_2 = f''_{xx}(M_0) f''_{yy}(M_0) - (f''_{xy}(M_0))^2 = \Delta = -D;$$

$$\delta_3 = \begin{vmatrix} f''_{xx}(M_0) & f''_{xy}(M_0) & f''_{xz}(M_0) \\ f''_{yx}(M_0) & f''_{yy}(M_0) & f''_{yz}(M_0) \\ f''_{xz}(M_0) & f''_{yz}(M_0) & f''_{zz}(M_0) \end{vmatrix}.$$

Згідно з критерієм Сільвестра для визначеності квадратичної форми d^2f в стаціонарній точці M_0 необхідно і достатньо, щоб виконувались одночасно дві умови.

1) $\delta_2 > 0 \Leftrightarrow D < 0 \Leftrightarrow (f''_{xy}(M_0))^2 < f''_{xx}(M_0) f''_{yy}(M_0).$

2) Знаки визначників δ_3 і $\delta_1 = f''_{xx}(M_0)$ збігаються.

У такому разі M_0 є точкою екстремуму, причому якщо $f''_{xx}(M_0) > 0$, то це локальний мінімум, а якщо $f''_{xx}(M_0) < 0$, то це локальний максимум.

Коли $f''_{xx}(M_0) \neq 0$ і $\delta_3 = 0$ або $f''_{xx}(M_0) = D = \delta_3 = 0$, то квадратична форма $d^2f(M_0)$ напіввизначена і , щоб з’ясувати питання про екстремум

$f(x,y,z)$ у точці M_0 , необхідно провести додаткове дослідження (див. приклад 8.2).

У всіх інших випадках квадратична форма $d^2f(M_0)$ буде невизначеною, тобто екстремуму $f(x,y,z)$ в точці немає.

Приклад 8.4 Знайти екстремуми $u = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$ в області $D(x>0;y>0;z>0)$.

Розв'язування. Насамперед знайдемо всі стаціонарні точки функції u :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 - \left(\frac{y}{2x}\right)^2; \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{2x} - \left(\frac{z}{y}\right)^2;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2\left(\frac{z}{y}\right) - \frac{2}{z^2} = 2\left(\frac{z}{y} - \frac{1}{z^2}\right)$$

Прирівнюючи ці вирази до нуля і розв'язуючи систему, дістанемо дві стаціонарні точки $M_0(0,5;1;1)$ і $M_1(-0,5;-1;-1)$, але $M_1 \notin D$.

Далі дослідимо $d^2u(M_0)$:

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{M_0} = \left.\frac{y^2}{2x^3}\right|_{M_0} = 4; \quad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{M_0} = \left.\left(\frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3}\right)\right|_{M_0} = 3;$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right|_{M_0} = \left.\left(\frac{2}{y} + \frac{4}{z^3}\right)\right|_{M_0} = 6; \quad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right|_{M_0} = -\left.\frac{y}{2x^2}\right|_{M_0} = -2;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0; \quad \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\right|_{M_0} = -\left.\frac{2z}{y^2}\right|_{M_0} = -2.$$

Звідси $\delta_1 = 4 > 0; \delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 8 > 0, \delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 32 > 0$

Отже, $d^2u(M_0)$ –додатно визначена квадратична форма. Таким чином, функція u має в області D єдиний екстремум –локальний мінімум у точці $M(0,5;1;1)$;

Відповідь. $loc.\min u = u(0,5;1;1) = 4.$

Загальні поради

Для відшукання екстремумів двічі диференційовної функції багатьох змінних $f(x_1,...,x_n)$ потрібно:

1) Знайти всі стаціонарні точки для f , розв'язавши систему (8.3), і перевірити при цьому їх належність області визначення функції $D(f)$;
2) Дослідити квадратичну форму $d^2f(x_1,\dots,x_n)$ в кожній стаціонарній точці згідно з критерієм Сільвестра або за правилом для $f(x,y)$.

Нагадаємо, що коли $d^2 f(M_0)$ –визначена квадратична форма, то M_0 –точка екстремуму, коли невизначена квадратна форма, то екстремуму в точці M_0 немає; у разі напіввизначеної квадратичної форми потрібне додаткове дослідження.

Завдання 22

Дослідити функцію на екстремум

1. $z = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 14y.$
2. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5.$
3. $z = 15x - 2x^2 - xy - 2y^2.$
4. $z = 6x - x^2 - xy - y^2.$
5. $z = x^3 + y^3 - 6xy - 39x + 18y.$
6. $z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5.$
7. $z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10.$
8. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y.$
9. $z = 6x - 6y - 3x^2 - 3y^2.$
10. $z = 4x - 4y - x^2 - y^2.$
11. $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y.$
12. $z = (x-2)^2 + 2y^2 - 10.$
13. $z = (x-5)^2 + y^2 + 1.$
14. $z = x^3 + y^3 - 3xy.$
15. $z = 2xy - 2x^2 - 4y^2.$
16. $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3.$
17. $z = 2xy - 5x^2 - 3y^2 + 2.$
18. $z = xy(12 - x - y).$
19. $z = xy - x^2 - y^2 + 9.$
20. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10.$
21. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1.$
22. $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y.$
23. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y.$
24. $z = xy(6 - x - y).$
25. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y.$
26. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y.$
27. $z = (x-1)^2 + 2y^2.$

28. $z = xy - 3x^2 - 2y^2$.

29. $z = x^2 + 3(y+2)^2$.

30. $z = 2x + 2y - x^2 - y^2$.

Завдання 23

Знайти всі екстремуми функцій (1-30).

1. $u = 2x^2 + xy + y^2 - 5x - 3y$.
2. $u = \frac{2}{x} + \frac{x^2}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z^2}{2}$.
3. $u = x^3 + y^3 - 3xy + 11$.
4. $u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$.
5. $u = x^2 - y^2 + xy + 7x$.
6. $u = x^2 - y^2 + 2x - 3y + 7$.
7. $u = x^2 + y^2 - 4\ln x - 36\ln y$.
8. $u = xy + \frac{40}{x} + \frac{30}{y}$.
9. $u = x^2 + y^2 + z^2 + xy + 4z - 1$.
10. $u = x^2 + y^2 - z^2 + 3x - 2z + 10$.
11. $u = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.
12. $u = x^2 - 4xy + 5y^2 - 2x + 10y$.
13. $u = 2x^2 + 3y^2 + z^2 + 2xz - 2yz + 1$.
14. $u = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$.
15. $u = x - 2y + \ln\sqrt{x^2 + y^2} + 3arctg\,\frac{y}{x}$.
16. $u = xy^2(1 - x - y)$.
17. $u = x^3 + y^3 + 3xy$.
18. $u = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$.
19. $u = e^{-3x-y}(2y + x)$.
20. $u = x^3 + y^2 + z^2 + 2xy + 2z$.
21. $u = e^{5x-y}(y - 3x)$.
22. $u = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$.
23. $u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$.
24. $u = e^{x^2-y}(5 - 2x + y)$.

25. $u = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y.$
26. $u = e^{y-4x}(3x + y).$
27. $u = y\sqrt{1+x} + x\sqrt{1+y}.$
28. $u = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2).$
29. $x^2 + y^2 + u^2 - 2x + 2y - 4u - 20 = 0,$ де $u = u(x, y).$
30. $u = 3\ln x + 2\ln y + 5\ln z + \ln(22 - x - y - z).$

§9. УМОВНИЙ ЕКСТРЕМУМ. НАЙБІЛЬШЕ ТА НАЙМЕНШЕ ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ В ЗАМКНЕНІЙ ОБЛАСТІ

Умовний екстремум

Нехай криву(або поверхню) Γ_3 задано системою незалежних рівнянь

$$\begin{cases} \varphi_k(x_1, x_2, ..., x_n) = 0; \\ k = 1, 2, ..., m(m < n). \end{cases} (S)$$

Нехай функція $f(M)$, де $M = M(x_1, ..., x_n)$, має область визначення D і нехай множина W=D∩Γ_3 не є пустою. Розглянемо функцію $\mathbf{F}(M)$, яка визначена лише в точках множини W і дорівнює в цих точках $f(M)$.

Тоді екстремум функції F(M) (максимум чи мінімум) називається умовним екстремумом (відповідно максимумом чи мінімумом) функції *f(M)* на кривій(поверхні) Γ_3 або за умови, записаної як система (S). Система (S) називається також умовою зв'язку.

Найпростіший спосіб відшукання умовного екстремуму *f(M)* за умови зв'язку (S) полягає в тому, щоб записати цю умову в параметричному вигляді

$x_i=x_i(t_1;t_{2;\dots;}t_n)$, i=1,2,…,n,

тобто розв'язати систему (S) відносно невідомих $x_1, \dots ,x_n$.

Далі знаходимо екстремум функціїї

$F(t_1,t_2, \dots ,t_m)=f(x_1(t_1, \dots ,t_m), \dots ,x_n(t_1, \dots ,t_m))$

як функції $t_1, \dots ,t_m$.

Проте не завжди можна скористатися цим прийомом. У тих випадках, коли для всіх $k=1,2,\dots,m$ існують тотожно нерівні нулю диференціали $d\varphi_k(x_1,\dots,x_n)$ функцій зв'язку із системи (S), цю задачу розв'язують методом Лагранжа. Згідно з цим методом складають допоміжну функцію Лагранжа

$$L(x_1,\dots,x_n ; \lambda_1,\dots,\lambda_m)=f(x_1,\dots,x_n)+\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi_k(x_1,\dots,x_n),$$

де $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ - множники Лагранжа, які не залежать від $x_1,\dots,x_n$. Далі знаходять усі стаціонарні точки P_j (див.§8) функції L і, записавши їх координати, опускають у них значення множників Лагранжа. Усі точки умовного екстремуму $f(x_1,\dots,x_n)$ за умови (S) містяться серед здобутих таким чином точок M_j .

Але в загальному випадку деякі з точок, знайдених за допомогою функції Лагранжа, можуть не бути точками умовного екстремуму. Щоб дослідити достатні умови, треба знайти диференціали обох частин усіх рівнянь зв'язку:

$$\begin{cases} d\varphi_k = 0 \\ k = 1, \dots, m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \frac{d\varphi_k}{dx_i} dx_i \\ k = 1, \dots, m \end{cases}$$

З цієї системи легко виразити усі dx_i через будь-які m з них, незалежні між собою.

Підставивши знайдені значення координат точок M_j у $d^2f(M_l)$, дослідимо питання про визначеність здобутої квадратичної форми від m змінних , а саме тих dx_i, через які виразились усі інші.

Далі питання розв'язується, як і в §8:

якщо форма визначена, то існує екстремум (додатньо визначена – умовний мінімум; від'ємно визначена – умовний максимум);

якщо форма не визначена то екстремуму немає;

якщо форма напіввизначена, то потрібне додаткове дослідження.

Звідси в прикладі 9.1 M_1 і M_2 – точки умовного максимуму, а M_3 і M_4 – точкого умовного мінімуму.

Приклад 9.2. Знайти екстремуми функції $f(x,y,z)=xyz$ при умові зв'язку $x+y+z=c$.

Розвязування. . Розв'яжемо приклад методом Лагранжа.

Функція Лагранжа

$$L(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda(x+y+z-c),$$

звідки

$$L_x'=yz+\lambda;\ L_y'=xz+\lambda;$$

$$L_z'=xy+\lambda;\ L_\lambda'=x+y+z-c.$$

Прирівнюючи ці вирази до нуля і розв'язуючи систему, дістаємо чотири стаціонарні точки

$$P_0\left(\frac{c}{3}; \frac{c}{3}; \frac{c}{3}; -\frac{c}{9} * c\right),\ P_1(c;0;0;0),\ P_2(0;c;0;0),\ P_3(0;0;c;0).$$

Таким чином, точки умовного екстремуму слід шукати серед

$$M_0\left(\frac{c}{3}; \frac{c}{3}; \frac{c}{3}\right),\ M_1(c;0;0);\ M_2(0;c;0),\ M_3(0;0;c).$$

Далі продиференціюємо рівняння зв'язку

$$d(x+y+z-c)=0 \Leftrightarrow dx+dy+dz=0 \Leftrightarrow dz=-(dx+dy).\ (*)$$

$$d^2f(x,y,z)=f''_{xx}dx^2+f''_{yy}dy^2+f''_{zz}dz^2+2(f''_{xy}dxdy+f''_{xz}dxdz+f''_{yz}dydz)=2(zdxdy+ydxdz+xdydz);$$

$$d^2f(M_0)=\frac{2}{3}c(dxdy+dxdz+dydz);$$

$$d^2f(M_1)=2cdydz;\ d^2f(M_2)=2cdxdz;\ d^2f(M_3)=2cdxdy.$$

Підставивши в чотири останні рівності (*), дістанемо, що три останні квадратичні форми невизначені:

$$d^2f(M_1)=-2c(dxdy+dy^2),\ D=c^2>0(c\neq0);$$

$$d^2f(M_2)=-2c(dx^2+dxdy),\ D=c^2>0;$$

$$d^2f(M_3)=2cdxdy,\ D=c^2>0.$$

Отже, точки M_1, M_2, M_3 не є точками умовного екстремуму , а для точки M_0

$d^2f(M_0)=\frac{2c}{3}(dxdy-dy(dx+dy)-dx(dx+dy))= -\frac{2c}{3}(dx^2+dxdy+dy^2);\ D= -\frac{c^2}{3}<0.$

Це означає, що квадратична форма визначена (при $c<0$ – додатньо, а при с>0 – від'ємно).

Відповідь. При $c\neq 0$ точка $M_0(\frac{c}{3};\frac{c}{3};\frac{c}{3})$ є точкою умовного екстремуму функції $f(x,y,z)=xyz$ за умови $x+y+z=0$, причому коли $c>0$, це умовний екстремум, а коли $c<0$, - умовний мінімум.

Знаходження найбільшого та найменшого значення функції в замкненій області $\bar{D}$

Згідно з теоремою Вейєрштрасса будь-яка функція $f(x_1,\dots,x_n)$, неперервна в обмеженій замкненій області $\bar{D}$, досягає свого найбільшого та найменшого значення в цій області. Щоб відшукати ці значення, виконаємо такі дії.

Загальна схема розв'язування задач на найбільше та найменше значення

1.Знайдемо всі точки області $\bar{D}$, в яких може мати екстремум /точки, підозрілі на екстремум/. Це можуть бути:

1.а /стаціонарні точки $f(x_1,\dots,x_n)$, які належать $\bar{D}$, тобто /див. § 8/ точки, де всі частинні похідні f'_{xi} дорівнюють нулю;

1.б /точки області $\bar{D}$, де принаймні одна з частинних похідних має розрив /адже лише серед таких точок містяться всі точки, в яких функція не є диференційовною/.

У жодному з цих випадків не потрібно перевіряти, що це справді точки екстремуму.

2.Запишемо рівняння (S) межі Γ_3 області $\bar{D}$ і знайдемо всі точки Γ_3, де може досягатись умовний екстремум /точки, підозрілі на екстремум на межі/. Це можуть бути:

2.а /стаціонарні точки допоміжної функції Лагранжа

$$L(x_1,\dots x_n,\lambda_1,\dots,\lambda_n);$$

2.б /точки, де принаймні одна з частинних похідних $L'_{xi}(i=\overline{1,n})$ має розрив;

2.в /точки «ребер», тобто ліній перетину різних гладких кусків межі /для дослідження «на ребрах» потрібно до системи звязку включити як рівняння одного гладкого куска, так і рівняння другого куска, а якщо це лінія перетину більшого числа кусків, то й усіх інших, і знову застосувати метод Лагранжа/.

Зауважимо, що у випадках 2.а, 2.б, 2.в не треба перевіряти достатні умови екстремуму, так само, як і у випадках 1.а і 1.б.

Розглянемо вибір усіх підозрілих точок згідно з діями 1 і 2 на поданому далі прикладі. /Дію 3, спрямовану на відшукання найбільшого і найменшого значень функції $f(x_1, ..., x_n)$, див. далі/

Приклад 9.4. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = 2x^3 + 3y^2$ в області $D = \{(x;y) \mid x^2 + y^2 \le 4, y \ge -1\}$.

Розв'язування.

1. $z_x' = 6x^2, z_y' = 6y$. Функція має єдину стаціонарну точку

   $M_0(0;0) : dz = 0 \Leftrightarrow (x;y) = (0;0)$.

Оскільки $z(x;y)$ скрізь диференційовна ($z_x' = 6x^2, z_y' = 6y$ - неперервні) , то переходимо до дослідження на межі Γ_3.

2. Γ_3 складається з двох гладких кусків: відрізка $[AB]$ та дуги l кола $x^2 + y^2 = 4$, що сполучає точки А та В так, що *yє[-1;2]*.

Згідно з п. 2.в точки А, В є «ребрами».

Дослідимо $z(x;y)$ на дузі l :

$$L(x;y;\lambda) = 2x^2 + 3y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 4);$$
$$L_x' = 6x^2 + 2\lambda(x) = 6x(x + \lambda/3); L_y' = 6y + 2\lambda(y) = 2y(3 + \lambda);$$

$$\begin{cases} L_x' = 0 \\ L_y' = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \lambda = -3 \\ x(x-1) = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \\ \begin{cases} \lambda = -3 \\ y = 0 \\ x^2 = 4 \\ x(x + \lambda/3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \end{array}\right. \left[\begin{array}{ll} (x;y;\lambda) = (0;2;-3) & /1/ \\ (x;y;\lambda) = (0;-2;-3) & /2/ \\ (x;y;\lambda) = (1;3^{1/2};-3) & /3/ \\ (x;y;\lambda) = (1;-(3^{1/2});-3) & /4/ \\ & \\ (x;y;\lambda) = (2;0;-6) & /5/ \\ (x;y;\lambda) = (-2;0;6) & /6/ \end{array}\right.$$

Розвязки /2/ і /4/ не задовольняють умову $y \ge -1$. Отже, маємо чотири «підозрілі» точки: $M_1(0;2)$, $M_2(1;3^{1/2})$, $M_3(2;0)$, $M_4(-2;0)$.

Дослідимо $z(x;y)$ на $[AB]$: $y = -1$, $-(3^{1/2}) \le x \le 3^{1/2}$. Підставляючи знайдене значення *y* в $z = 2x^3 + 3y^2$, маємо $z = 2x^2 + 3$. Відшукуємо стаціонарну точку: $z_x = 6x^2 = 0 \Rightarrow M_3(0;-1)$.

Зауваження. Можна було б відразу виключити з числа «підозрілих» точку $M_5(0;-1)$, оскільки для будь-якого *x*, що задовольняє нерівності $-(3^{1/2}) \le x \le 3^{1/2}$ вздовж $[AB]$ $z_x' = 6x^2 \ge 0$, тобто $z(x;y)$ на цьому відрізку зростає. Проте згідно з домовленістю перевірку достатніх умов виконувати не потрібно.

На цьому перші два пункти розвязання прикладу 9.4 завершено.

Повернеиось до загальної схеми розвязування задачі на найбільше та найменше значення.

3.Обчислимо значення f у всіх відібраних точках, підозрілих на екстремум, та на «ребрах». Найбільше серед здобутих значень буде $\max f(x_1, ..., x_n)$, а найменше - $\min f(x_1, ..., x_n)$.

Саме тому, що ця операцвя порівнянно нескладна, відпадає необхідність в об'ємних перевірках достатніх умов в 1 і 2. Отже, завершуємо розвязання прикладу 9.4:

$z(M_0) = 0; z(M_1) = 12; z(M_2) = 11; z(M_3) = 16;$
$z(M_4) = -16; z(M_5) = 3; z(A) = 3(1 - 2\sqrt{3}); z(B) = 3(4 + 2\sqrt{3}).$

Оскільки $-16 < 3(1 - 2\sqrt{3}), 16 > 3(1 + 2\sqrt{3})$, то маємо

<u>Відповідь.</u> z(2;0)=16 – найбільше значення, z(-2;0)=-16 – найменше значення.

Завдання 24

Знайти екстремум функції u(x,y,z) за умови $\varphi(x, y, z) = c$

1. $u = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4;\ \varphi = x + y + 3, c = 0.$
2. $u = x^{-1} + y^{-1};\ \varphi = x + y, c = 2.$
3. $u = \frac{x-y-4}{\sqrt{2}};\ \varphi = x^2 + y^2, c = 1.$
4. $u = xy^2;\ \varphi = x + 2y, c = 1.$
5. $u = x^2 + y^2 + z^2;\ \varphi = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4}, c = 1.$
6. $u = 2x + y - 2z;\ \varphi = x^2 + y^2 + z^2, c = 36.$
7. $u = cos^2 x + cos^2 y;\ \varphi = y - x, c = \frac{\pi}{4}.$
8. $u = 2x^2 + 6xy + 2y^2 - 1;\ \varphi = 4x^2 + y^2, c = 25.$
9. $u = x^3 + y^2 + z^2;\ \varphi = x + y + z, c = c - const.$
10. $u = x - 2y - 2z;\ \varphi = x^2 + y^2 + z^2, c = 9.$
11. $u = 2x + y;\ \varphi = x^3 + y^2, c = 1.$
12. $u = x^2 + y^2;\ \varphi = \frac{x}{2} + \frac{y}{3}, c = 1.$
13. $u = xy;\ \varphi = x + y, c = 1.$
14. $u = xyz;\ \varphi = x + y + z, c = 3.$
15. $u = 4x^3 + 8y^4 - 6xy + 1, c = 2.$
16. $u = 2xy - 3x;\ \varphi = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{6}, c = 1.$
17. $u = 4(x - y) - x^2 - y^2;\ \varphi = x^2 + 2y, c = 0.$
18. $u = 2x^3 - xy^2 + x^2 + y^2;\ \varphi = x + y, c = 1.$

19. $u = x^2 - xy + y^2 + x - 2y + 1;\ \varphi = 2x + 3y, c = 1.$
20. $u = x^2 - xy + y^2 + 15x - 6y + 1;\ \varphi = x^2 + y, c = 0.$
21. $u = x + 2y;\ \varphi = x^2 + y^2, c = 5.$
22. $u = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2);\ \varphi = x - 2y, c = 1.$
23. $u = (x - 2)^2 + 2y^2;\ \varphi = x - 3y, c = 5.$
24. $u = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z;\ \varphi = x + y - 2z, c = 1.$
25. $u = x^2 + y^2 + z^2 + xy - x + y - 4z;\ \varphi = x - y + 2z, c = 0.$
26. $u = xy(x + y);\ \varphi = x - y, c = 1.$
27. $u = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2;\ \varphi = x^2 + y^2, c = 1.$
28. $u = xy(x - y);\ \varphi = x + y, c = 1.$
29. $u = 4x^2 + 4xy - 2y^2 + 1;\ \varphi = 2x + y, c = 2.$
30. $u = (x - 2)^2 - 2y^2;\ \varphi = x^2 + y^2, c = 4.$

Завдання 25

Знайти найбільше та найменше значення функції в області $\overline{D}$

1. $z = 3x + y - xy\ \ \overline{D}: y = x, y = 4, x = 0.$
2. $z = xy - x - 2y\ \ \overline{D}: x = 3, y = x, y = 0.$
3. $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y\ \ \overline{D}: x = 0, x = 1, y = 0, y = 2.$
4. $z = 5x^2 - 3xy + y^2\ \ \overline{D}: x = 0, x = 1, y = 0, y = 1.$
5. $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y\ \ \overline{D}: x - y + 1 = 0, x = 3, y = 0.$
6. $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y\ \ \overline{D}: x = 0, y = 0, x + y - 1 = 0.$
7. $z = 2x^3 - xy^2 + y^2\ \ \overline{D}: x = 0, x = 1, y = 0, y = 6.$
8. $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2\ \ \overline{D}: x = 0, x = 1, y = 0, y = 1.$
9. $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x\ \ \overline{D}: x = 0, y = 0, x + y - 3 = 0.$
10. $z = x^2 + 2xy - 10\ \ \overline{D}: y = 0, y = x^2 - 4.$
11. $z = xy - 2x - y\ \ \overline{D}: x = 0, x = 3, y = 0, y = 4.$
12. $z = \dfrac{x^2}{2} - xy\ \ \overline{D}: y = 8, y = 2x^2.$
13. $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y\ \ \overline{D}: x = 0, y = 0, x + y = 1.$
14. $z = 2x^2 + 3y^2 + 1\ \ \overline{D}: y = \sqrt{9 - \dfrac{9}{4}x^2}, y = 0.$
15. $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x\ \ \overline{D}: x = -3, y = 0, x + y = -1.$
16. $z = 3x^2 + 3y^2 - x - y\ \ \overline{D}: x = 5, y = 0, x - y = 1.$
17. $z = 2x^2 + 2xy - \dfrac{y^2}{2} - 4x\ \ \overline{D}: y = 2x, y = 2, x = 0.$
18. $z = x^2 - 2xy + \dfrac{5y^2}{2} - 2x\ \ \overline{D}: x = 0, x = 2, y = 0, y = 2.$

19. $z = xy - 3x - 2y \;\; \overline{D} : x = 0, x = 4, y = 0, y = 4.$

20. $z = x^2 + xy - 2 \;\; \overline{D} : y = 4x^2 - 4, y = 0.$

21. $z = x^2 y(4 - x - y) \;\; \overline{D} : x = 0, y = 0, y = 6 - x.$

22. $z = x^3 + y^3 - 3xy \;\; \overline{D} : x = 0, x = 2, y = -1, y = 2.$

23. $z = 4x - 4y - x^2 - y^2 \;\; \overline{D} : x + 2y = 4, x - 2y = 4, x = 0.$

24. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x \;\; \overline{D} : x = 3, y = 0, y = x + 1.$

25. $z = 6xy - 9x^2 - 9y^2 + \; +4x + 4y \;\; \overline{D} : x = 0, x = 1, \; y = 0, y = 2.$

26. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y \;\; \overline{D} : y = x + 2, y = 0, x = 2.$

27. $z = 4 - 2x^2 - y^2 \;\; \overline{D} : y = 0, y = \sqrt{1 - x^2}.$

28. $z = 5x^2 - 3xy + y^2 \;\; \overline{D} : x = -1, x = 1, y = -1, y = 1.$

29. $z = x^2 + 2xy + 4x - y^2 \;\; \overline{D} : x + y + 2 = 0, x = 0, y = 0.$

30. $z = 2x^2 y - x^3 y - x^2 y^2 \;\; \overline{D} : x = 0, y = 0, x + y = 6.$

Завдання 26

Знайти найбільше та найменше значення функції $u(x, y, z)$ в області D.

1. $u = \frac{x^2 + y}{x^2 + y^2 + 1}; D = \{(x; y): |x| \le 1, |y| \le 1\}.$
2. $u = x^2 + y^2 + x + y - xy; D = \{(x; y): x \le 0, y \le 0, x + y = -3\}.$
3. $u = 1 + x + 2y; D = \{(x; y): x \ge 0, y \ge 0, x + y = 1\}.$
4. $u = x^2 y; D = \{(x; y): x^2 + y^2 \le 1\}.$
5. $u = e^{-(x^2 + y^2)}(2x^2 + 3y^2); D = \{(x; y): x^2 + y^2 \le 1\}.$
6. $u = x^2 y(4 - x - y); D = \{(x; y): x > 0, y > 0, x + y < 6\}.$
7. $u = x^2 - xy + y^2; D = \{(x; y): |x| + |y| \le 1\}.$
8. $u = x + y + z; D = \{(x; y; z): x^2 + y^2 - z \le 1 \}.$
9. $u = sinx + siny + sin(x + y); D = \left\{(x; y): 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}.$
10. $u = x^3 + y^3 - 3xy; D = \{(x; y): 0 \le x \le 2, -1 \le y \le 2\}.$
11. $u = x^2 - y^2; D = \{(x; y): x^2 + y^2 \le 1\}.$
12. $u = cosxcosycos(x + y); D = \{(x; y): 0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \pi\}.$
13. $u = xy(x + y + 1); D = \left\{(x; y): 1 \le x \le 2, -\frac{3}{2} \le y \le \frac{1}{3}\right\}.$
14. $u = 1 + x - 2y; D = \{(x; y): x \le 0, y \ge 0, x^2 + y^2 \le 9\}.$
15. $u = \begin{cases} 1; \; 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1; \\ 2(2 - y); 0 \le x \le 1, 1 \le y \le 2; \end{cases} D = \{(x; y): 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2\}.$
16. $u = x^3 y^2 (6 - x - y); D = \{(x; y): x > 0, y > 0\}.$
17. $u = \frac{z^2}{y} + \frac{y^2}{4x} + x + \frac{2}{z}; D = \{(x; y; z): x > 0, y > 0, z > 0\}.$

18. $u = \frac{4}{x} + \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{4}; D = \{(x; y; z): x > 0, y > 0, z > 0\}.$
19. $u = x - 2y - 3; d = \{(x; y): x \geq 0, y \geq 0\}.$
20. $u = x^2 + y^2 - 12x + 16y; D = \{(x; y): x^2 + y^2 \leq 25\}.$
21. $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2; D = \{(x; y; z): x^2 + y^2 + z^2 \leq 100\}.$
22. $u = x^2 - xy + y^2 - 2x + y; D = \{(x; y): |x| + |y| \leq 2\}.$
23. $u = x^2 + y^2 - 2y + 3; D = \{(x; y): |x| + |y| \leq 2\}.$
24. $u = x^2 - y^2 + 3y + 1; D = \{(x; y): x \geq 0, y \geq 0, x + y < 3\}.$
25. $u = (x - y + 1)^2; D = \{(x; y): |x| + |y| \leq 1\}.$
26. $u = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2; D = \{(x; y): x^2 + y^2 \leq 1\}.$
27. $u = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2; D = \{(x; y): |x| \leq 1, |y| \leq 1\}.$
28. $u = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}; D = \{(x; y): 1 \leq 2x^2 + y^2 \leq 2\}.$
29. $u = (1 + e^4)cosx - ye^4; D = \{(x; y): |x| \leq \pi, |y| \leq 1\}.$
30. $u = xy^2z^3; D = \{(x; y; z): x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + 2y + 3z \leq 1\}.$

Завдання 27

1. З усіх трикутників, вписаних у коло радіуса R, знайти той, площа якого найбільша.

2. Додатне число α розкласти на добуток трьох додатних множників так, щоб сума обернених до них величин була найменша.

3. У півкулі радіуса R вписати прямокутний паралелепіпед найбільшого об’єму.

4. Знайти розміри прямокутного паралелепіпеда, який має найбільший об’єм за даної площі S повної поверхні.

5. Додатне число α розкласти на чотири додатних доданки так, щоб сума їх квадратів була найменша.

6. У деякий прямий круговий конус (висота H та радіус основи R) вписати прямокутний паралелепіпед найбільшого об’єму.

7. За яких розмірів відкрита циліндрична ванна з півкруглим поперечним перерізом має найбільшу місткість, якщо площа повної її поверхні S?

8. У прямий круговий конус, який має твірну l, нахилену до основи під кутом α, вписати прямокутний паралелепіпед найбільшої повної поверхні.

9. У просторі знайти точку, сума відстаней якої до сторін даного трикутника найменша.

10. У даний трикутник вписати трикутник найменшого периметра.

11. Усередині даного плоского чотирикутника знайти точку, сума відстаней якої до його вершин найменша.

12. Серед прямих кругових конусів, які мають площу S бічної поверхні, знайти той, об’єм якого найбільший.

13. На еліпсоїді $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$ знайти найбільш віддалену від початку координат точку.

14. На площині даного трикутника знайти точку , сума квадратів відстаней якої до сторін трикутника найменша.

15.У дане коло вписати трикутник , який має найбільшу суму квадратів сторін.

16. Серед плоских чотирикутників із сторонами *a, b, c, d* знайти той, який має найбільшу площу.

17. З усіх прямокутних паралелепіпедів, що мають суму всіх ребер *12a* , знайти той, який має найбільший об'єм.

18. У кулі діаметром *d* вписати прямокутний паралелепіпед найбільшого об'єму.

19. Зобразити додатне число *a* у вигляді добутку чотирьох додатних множників так, щоб їх сума була найменшою.

20. З усіх трикутників даного периметра *2p* знайти той, який має найбільшу площу.

21. В еліпсоїді вписати паралелепіпед з ребрами , паралельним ребрам еліпсоїда, об'єм якого найбільший.

22. За яких розмірів відкрита прямокутна ванна даного об'єму *V* має найменшу поверхню?

23.Додатнє число а розбити на три додатних доданки так, щоб їх добуток був найбільшим.

24.Знайти трикутник даного периметра *2p*, який при обертанні навколо однієї із своїх сторін утворює туло найбільшого об'єму.

25. Задано *n* нерухомих матеріальних точок $P_i\,(x_i\,;\,y_i)$ а масами $m_i(i=1\ldots n)$, для якої сума квадратів її відстаней до цих нерухомих точок , помножених на масу відповідної точки, найменша.

26.Через точку *M (6; 8; 10*) провести площину, яка утворює з осями координат тетраедр найменщого об'єму.

27. В області $D=\{(x, y, z)|\ x>0, y>0, z>0\}$ знайти найбільше значення функції $u=xy^2z^3$ за умовою $x+2y+3z=12$, якщо вони існують.

28. Знайти розміри циліндричного стакана поверхні *S* найбільшого об'єму .

29. В якій точці еліпса $x^2/a^2+y^2/b^2=1(a>b)$ дотична до нього утворює з осями координат трикутник найменшої площі ?

30. Знайти прямокутник даного периметра, який при обертанні навколо однієї із своїх сторін утворює тіло найбільшого об'єму.

§10. ВЕКТОР-ФУНКЦІЇ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ

Нехай $A\subset\mathbb{R}_{\boldsymbol{m}}$. Вектор-функція або відображення $\bar{f}\colon A\to\mathbb{R}_n$ означає, що для будь-якого вектора $\bar{x}=(x_1;x_2;\ldots x_m)^T\in A$ поставлено у відповідність вектор $\bar{f}(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}); f_2(\bar{x}); \dots f_n(\bar{x}))^T \in \mathbb{R}_n$, тобто упорядковану сукупність n дійсних функцій $f_1, f_2, \dots f_n$ на множині A.

Якщо задано числову матрицю $D = \{d_{i_j}\}$ розміру $n \times m$, то відображення $\bar{f}(\bar{x}) = D\bar{x},\ \bar{x} \in \mathbb{R}_n$ називається лінійним.

Нехай А-відкрита множина $A \subset \mathbb{R}_m$. Відображення $\bar{f}: A \to \mathbb{R}_n$ називається диференційованим в точці, якщо існує числова матриця $D = \{d_{i_j}\}$ розміру $n \times m$ така, що

$$\left\| \overline{f(\bar{x} + \overline{\Delta x})} - \bar{f}(\bar{x}) - D\overline{\Delta x} \right\| = o(\|\overline{\Delta x}\|), \overline{\Delta x} \to \bar{0}.$$

Тут $\|.\|$ є норма в просторі $\mathbb{R}_m$. Якщо $\forall$ і функції f_{i} диференційовані в точці $\bar{x}$, то матриця D носить назву похідної відображення $\bar{f}$ та дорівнює

$$D = \bar{f}'(\bar{x}) = \left\{\frac{df_i(\bar{x})}{dx_j}\right\}; i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}.$$

Якщо m=n, то визначник

$$d\bar{f}'(\bar{x})) = \frac{D(f_1, f_2, \dots f_n)}{D(x_1; x_2; \dots x_m)}(\bar{x})etD = \det($$

Називається я якобіаном.

Нехай А – відкрита множина в $\mathbb{R}_m$, В – відкрита множина в $\mathbb{R}_n$, $\bar{f}: A \to$ В - функція, диференційована в точці $\bar{x} \in A$, $\bar{g}: B \to \mathbb{R}_k$- функція, диференційована в точці $\bar{y} = \bar{f}(\bar{x})$.Тоді складена функція

$\bar{h} = \bar{g}(\bar{f}): A \to \mathbb{R}_k$ є диференційовною в точці $\bar{x} \in A$, причому $\overline{h'}(\bar{x}) = \bar{g}'\left(\bar{f}(\bar{x})\right)\bar{f}'(\bar{x})$.

Приклад 10.1. За допомогою відображення $u = 2x + 1, v = 2y$ знайти образ кола $x^2 + y^2 = 1$ (D).

Розв'язування. Із системи знаходимо

$$x = \frac{u-1}{2}, y = \frac{v}{2}.$$

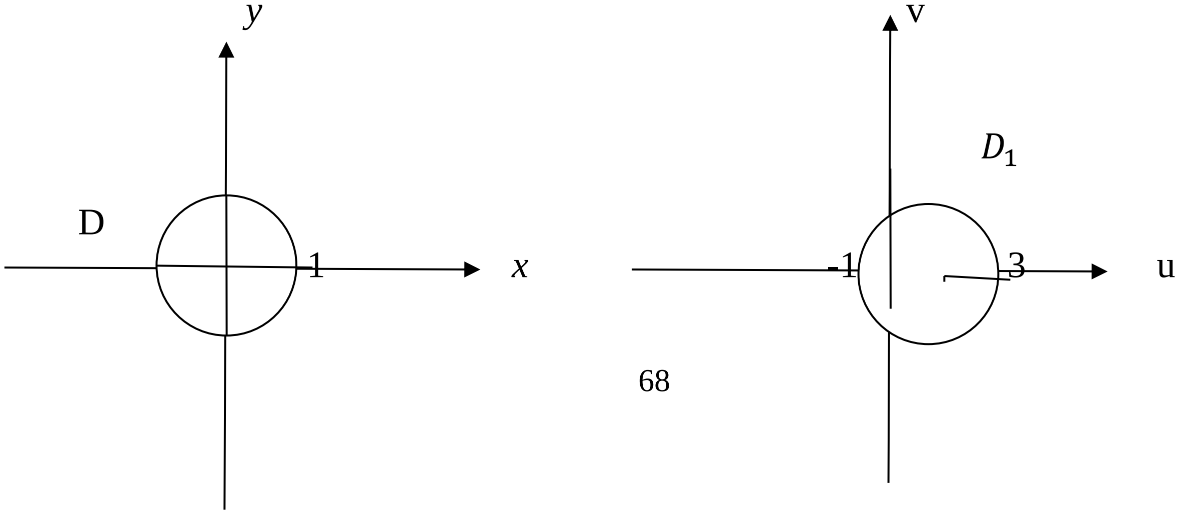
Підставимо в рівняння кола (D):

$$\left(\frac{u-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2 = 1.$$

Звідси отримуємо область D_1 (коло):

$$(u-1)^2 + v^2 = 4$$

Графічна інтерпретація:



Приклад 10.2. За допомогою відображення

$$u=\frac{x-1}{x^2+1}+1, v=-\frac{x+1}{x^2+1}$$

знайти образ множини $y>x+1$.

Розв'язування. Для знаходження канонічного рівняння цієї лінії виключимо з системи x. Спочатку розділимо дві останні рівності, одержимо:

$$\frac{u-1}{v}=\frac{1-x}{x+1},$$

звідки

$$x=\frac{v-u+1}{v+u-1}.$$

Підставимо x в друге рівняння системи:

$$v=-\frac{\frac{v-u+1}{v+u-1}+1}{\left(\frac{v-u+1}{v+u-1}\right)^2+1}=-\frac{2v(v+u-1)}{(v-u+1)^2+(v+u-1)^2}.$$

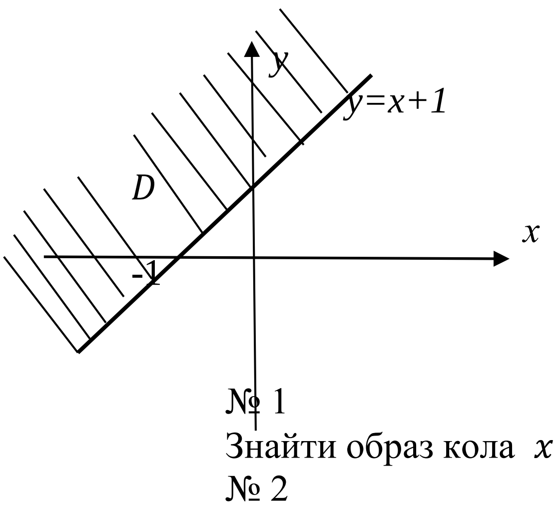
Оскільки $v\neq 0$. то $(v-u+1)^2+(v+u-1)^2=2(1-u-v)$,
$2u^2+2v^2+2-4u=2-2u-2v$,
$u^2+v^2-u+v=0$.

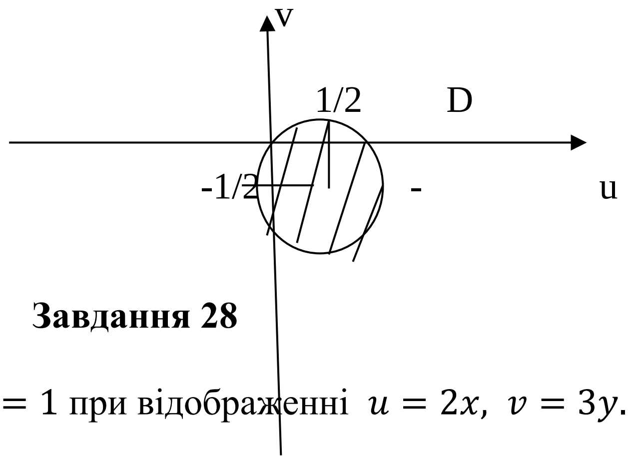
Маємо коло з центром $\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ і радіусом $\frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

Залишилось з'ясувати: D_1 всередині кола чи зовні. Для цього візьмемо точку $z=-2\in D$. Тоді
$w=f(-2)=\frac{-2+1}{-2-1}=\frac{1}{3}$ - середина кола. D_1 - круг на площині w.

Графічна інтерпретація:





Завдання 28

№ 1

Знайти образ кола $x^2+y^2=1$ при відображенні $u=2x,\ v=3y$.

№ 2

Знайти образ кола $x^2+y^2=1$ при відображенні $u=ax+a_0,\ v=by+b_0$.

№ 3

Знайти образ прямої $x=a$ при відображенні $u=y, v=xy$.

№ 4

Знайти образ прямої $x = a$ при відображенні $u = x\cos y$, $v = x\sin y$.

№ 5

Знайти образ квадрата $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$при відображенні $u = x - xy, v = xy$.

№ 6

Знайти образ області $G \subset R^2$, заданої нерівностями $xy < 2, xy > 1, y < x + 1, y > x - 1$, при відображенні $u = xy, v = x - y$.

№ 7

Знайти образ кола $x^2 + y^2 = 2x$ при відображенні $u = \frac{x}{x^2+y^2}$, $v = \frac{y}{x^2+y^2}$;

довести, що образом кожної прямої і кожного кола при цьому відображенні є або коло або пряма.

№ 8

Знайти образ кола $x^2 + y^2 = 4$ при відображенні $u = \frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2}$, $v = \frac{2y}{(x+1)^2+y^2}$;

№ 9

Знайти образ прямої $x = a$, при відображенні $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$.

№ 10

Знайти образ прямої $y = b$, при відображенні $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$.

№ 11

Знайти образ області $x^2 + y^2 < 1$, $x > 0$, $y > 0$ при відображенні $u = x^2 - y^2$,
$v = 2xy$.

№ 12

Знайти образ кола $x^2 + y^2 = 1$, при відображенні $u = \frac{x}{2}\left(1 + \frac{1}{x^2+y^2}\right)$,
$v = \frac{y}{2}\left(1 - \frac{1}{x^2+y^2}\right)$.

№ 13

Знайти образ кола $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$. при відображенні $u = \frac{x}{2}\left(1 + \frac{1}{x^2+y^2}\right)$,
$v = \frac{y}{2}\left(1 - \frac{1}{x^2+y^2}\right)$.

№ 14

Знайти образ кола $x^2 + y^2 = 4$. при відображенні $u = \frac{x}{2}\left(1 + \frac{1}{x^2+y^2}\right)$,
$v = \frac{y}{2}\left(1 - \frac{1}{x^2+y^2}\right)$.

№ 15

Знайти образ кривої $y = |x|, y \ne 0$; при відображенні $u = \frac{x}{2}\left(1 + \frac{1}{x^2+y^2}\right)$;

$$v = \frac{y}{2}\left(1 - \frac{1}{x^2 + y^2}\right).$$

№ 16

Знайти образ прямої $x = a$, при відображенні $u = e^x \cos y\,, v = e^x \sin y$.

№ 17

Знайти образ відрізка $x = a, |y| \le \pi$, при відображенні $u = e^x \cos y\,, v = e^x \sin y$.

№ 18

Знайти образ прямої $y = b, |b| < \frac{\pi}{2}$, при відображенні $u = e^x \cos y\,, v = e^x \sin y$.

№ 19

Знайти образ прямої $y = ax + b, a \neq 0$, при відображенні $u = e^x \cos y\,, v = e^x \sin y$.

№ 20

Знайти образ прямої $x = a$, при відображенні $u = \cos x \cosh y$,

$$v = \sin x \sinh y$$

№ 21

Знайти образ прямої $y = b$, при відображенні $u = \cos x \cosh y$,

$$v = \sin x \sinh y$$

№ 22

Знайти образ півсмуги $0 < x < \pi,\ y > 0$, при відображенні $u = \cos x \cosh y$,

$$v = \sin x \sinh y$$

№ 23

Знайти образ смуги $0 < x < \pi$, при відображенні $u = \cos x \cosh y$,

$$v = \sin x \sinh y$$

№ 24

Знайти образ простору R при відображенні $u = \sin x\,, v = \cos 2x$.

№ 25

Знайти образ простору R при відображенні $u = ax + a_0,\ v = by + b_0$, $w = cx + c_0$.

№ 26

Знайти образ простору R^2 при відображенні $u = y + 2, v = 3x + 4y + 5, w = 6x + 7y + 8$.

№ 27

Знайти образ простору R^2 при відображенні $u = \cos x \cos y, v = \cos x \sin y, w = \sin x$.

№ 28

Знайти образ простору R^2 при відображенні $u = (2+\cos y)\cos x$, $v = (2+\cos y)\sin x$, $w = \sin y$.

№ 29

Знайти образ прямої $x = a$ при відображенні $u = x\cos y$, $v = x\sin y$, $w = y$.

№ 30

Знайти образ простору R^2 при відображенні $u = \frac{x}{x^2+y^2+1}$, $v = \frac{y}{x^2+y^2+1}$, $w = \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1}$. Довести, що при цьому відображенні образом кожного кола є коло.

№ 31

Знайти образ куба $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1$ при відображенні $u = x(1-y), v = xy(1-z), w = xyz$.

Завдання 29

Знайти похідну, якобіан та лінійну частину приросту вектор-функції в точці M(2;1)

1. U=$x^2 - 2xy$, v=$\arcsin\frac{x}{x+y}$.
2. U=$x^3 + 2xy$, v=$arctg\frac{y}{x}$.
3. U=$3x^4 + 2y^3$, v=$\sqrt{4+x^2+y^2}$.
4. U=$x^2 + 2y^2$, v=$\sqrt{x^2+4y^2}$.
5. U=$x^2 - 2y^2$, v=$3y+\sqrt{xy}$.
6. U=$x^2 - 2xy + 3y$, v=$\ln(x+\frac{1}{y})$.
7. U=$5x^2y - 3xy^3 + y^4$, v=$(x^2+y^2)^3$.
8. U=$2x^2 + y^2$, v=$arctg(xy)$.
9. U=$x^3 - 3x^2y + 3xy^2$, v=$\ln(e^x + e^y)$.
10. U=$x^2y^2 - xy^3$, v=$\ln(x^2 - y^2)$.
11. U=$x^2 + 3xy + y^2$, v=$\ln(xy^2+1)$.
12. U=$2xy - y^3$, v=$arctg(x^2y)$.
13. U=$x^3 - 2xy + y^2$, v=$\ln(x^3y^2+1)$.
14. U=$x^2 + xy - y^3$, v=$arctgxy^3$.
15. U=$2x^2 + y^2x$, v=$x^2 + y^2 - 3x$.
16. $u = 2x,\ v = 3y$.
17. $u = ax + a_0,\ v = by + b_0$.
18. $u = y, v = xy$.
19. $u = x\cos y, v = x\sin y$.

20. $u = x - xy, v = xy.$
21. $u = xy, v = x - y.$
22. $u = e^x \cos y\,, v = e^x \sin y\,.$
23. $u = \frac{x}{x^2+y^2}, V = 2xy + 2x.$
24. $u = x^2 - y^2, V = e^{-y} sinx + y.$
25. $u = \frac{x}{2}\left(1 + \frac{1}{x^2+y^2}\right), V = x^2 - y^2 - x.$§
26. $U = e^{-y} \cdot cosx + x, V = 3x^2y - y^3.$
27. $U = x^3 - 3xy^2 - x, V = \frac{e^{2x}-1}{e^x} \sin y.$
28. $U = -sh2y \cdot \sin(2x+1), V = 3x^2y - y^3 - y.$
29. $U = 2^y \sin(x \ln 2), V = 2xy + x.$
30. $U = x^3 - 3xy + 5, V = 2^{-x} \cos(y \ln 2).$

Завдання 30

Знайти похідну та якобіан складених вектор-функцій f(g) та g(f), якщо вектор-функцію f задано у попердньому завданні, а вектор-функцію g задано нижче рівностями:

31. $u = 2x,\ v = 3y.$
32. $u = ax + a_0,\ v = by + b_0.$
33. $u = y, v = xy.$
34. $u = x \cos y\,, v = x \sin y.$
35. $u = x - xy, v = xy.$
36. $u = xy, v = x - y.$
37. $u = e^x \cos y\,, v = e^x \sin y\,.$
38. $u = \frac{x}{x^2+y^2}, V = 2xy + 2x.$
39. $u = x^2 - y^2, V = e^{-y} sinx + y.$
40. $u = \frac{x}{2}\left(1 + \frac{1}{x^2+y^2}\right), V = x^2 - y^2 - x.$
41. $U = e^{-y} \cdot cosx + x, V = 3x^2y - y^3.$
42. $U = x^3 - 3xy^2 - x, V = \frac{e^{2x}-1}{e^x} \sin y.$
43. $U = -sh2y \cdot \sin(2x+1), V = 3x^2y - y^3 - y.$
44. $U = 2^y \sin(x \ln 2), V = 2xy + x.$
45. $U = x^3 - 3xy + 5, V = 2^{-x} \cos(y \ln 2).$
46. U= $x^2 - 2xy$, v= $\arcsin \frac{x}{x+y}$.
47. U= $x^3 + 2xy$, v= $arctg\, \frac{y}{x}$.

48. U= $3x^4+2y^3$, v= $\sqrt{4+x^2+y^2}$.

49. U= x^2+2y^2, v= $\sqrt{x^2+4y^2}$.

50. U= x^2-2y^2, v= $3y+\sqrt{xy}$.

51. U= $x^2-2xy+3y$, v= $\ln(x+\frac{1}{y})$.

52. U= $5x^2y-3xy^3+y^4$, v= $(x^2+y^2)^3$.

53. U= $2x^2+y^2$, v= $arctg(xy)$.

54. U= $x^3-3x^2y+3xy^2$, v= $\ln(e^x+e^y)$.

55. U= $x^2y^2-xy^3$, v= $\ln(x^2-y^2)$.

56. U= $x^2+3xy+y^2$, v= $\ln(xy^2+1)$.

57. U= $2xy-y^3$, v= $arctg(x^2y)$.

58. U= $x^3-2xy+y^2$, v= $\ln(x^3y^2+1)$.

59. U= x^2+xy-y^3, v= $arctgxy^3$.

60. U= $2x^2+y^2x$, v= x^2+y^2-3x.

§11. ДОДАТОК

За допомогою формул диференціювання складених функцій декількох змінних деякі диференціальні рівняння у частинних похідних можна перетворити до іншого вигляду (часто більш зручного для розв’язання).

Завдання 31

Перетворити рівняння, запровадивши нові незалежні змінні u та v (1-9):

1) $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0,\ u=x, v=x^2+y^2;$

2) $z=x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y},\ u=x, v=y/x;$

3) $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\ u=y+ax, v=y-ax;$

4) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ x=u\cos v, y=u\sin v;$

5) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,\ u=x+y,\ v=x-y,\ w=xy-z,$ де $w=\varphi(u;v)$ – нова функція;

6) $\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{1}{2}y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{x},\ u=\frac{x}{y},\ v=x,\ w=xz-y,$
де $w=\varphi(u;v)$ – нова функція;

7) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}$, $u = x - 2\sqrt{y}$, $v = x + 2\sqrt{y}$, $y > 0$;

8) $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, $u = xy$, $v = \frac{x}{y}$;

9) Якого вигляду набуває рівняння $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = 0$, якщо $u = \varphi(z)$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$;

Перейти від декартових координат x, y до полярних, поклавши $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ (10-14):

10) $w = (\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x})/(1 + \frac{y}{x}\frac{dy}{dx})$;

11) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$;

12) $x(2y - x)(\frac{dy}{dx})^2 + 2xy\frac{dy}{dx} + y(2x - y) = 0$;

13) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + x(x^2 + y^2), \\ \frac{dy}{dt} = y(x^2 + y^2) - x; \end{cases}$

14) $w = x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}$;

15) Перетворити рівняння $x\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, перевівши його в полярну систему координат.

Перетворити рівняння, запровадивши нові незалежні змінні u та v (16-22):

16) $x\frac{\partial z}{\partial x} + \sqrt{1 + y^2}\frac{\partial z}{\partial y} = xy$, $u = lnx$, $v = ln(y + \sqrt{1 + y^2})$;

17) $(x + y)\frac{\partial z}{\partial x} - (x - y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, $u = ln\sqrt{x^2 + y^2}$, $v = arctg\,\frac{y}{x}$;

18) $(x + z)\frac{\partial z}{\partial x} + (y + z)\frac{\partial z}{\partial y} = x + y + z$, $u = x + z$, $v = y + z$;

19) $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{z}$, $u = 2x - z^2$, $v = -\frac{y}{z}$;

20) $\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, $u = x + y$, $v = x - y$;

21) $\frac{\partial z}{\partial x} + \alpha\frac{\partial z}{\partial y} = 1$, $u = x$, $v = y - \alpha x$, $\alpha = const$;

22) $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z+\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ u=\frac{y}{x},\ v=z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}$;

23) Перетворити рівняння, прийнявши u та v за незалежні змінні, а w за функцію: $(x\frac{\partial z}{\partial x})^2+(y\frac{\partial z}{\partial y})^2=z^2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y},\ x=ue^w,\ y=ve^w,\ z=we^w$;

24) Перетворити рівняння $(z-x)\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=0$, прийнявши x за функцію, а y та z за незалежні змінні;

25) Перетворити рівняння $(y-z)\frac{\partial z}{\partial x}+(y+z)\frac{\partial z}{\partial y}=0$, прийнявши x за функцію, а $u=y-z$ та $v=y+z$ за незалежні змінні;

Перетворити рівняння, перейшовши до змінних u, v ,де $w=w(u; v)$ є новою функцією(26-27):

26) $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=(y-x)z,\ u=x^2+y^2,\ v=\frac{1}{x}+\frac{1}{y},\ w=\ln z\ --x-y$;

27) $(xy+z)\frac{\partial z}{\partial x}+(1-y^2)\frac{\partial z}{\partial y}=x+yz,\ u=yz-x,\ v=xz-y,$
$w=xy-z$;

28) Перетворити рівняння$\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$, перейшовши до нових незалежних змінних $u=x,\ v=y-x,\ t=z-x$;

29) Перетворити рівняння
$(y+z+w)\frac{\partial w}{\partial x}+(x+z+w)\frac{\partial w}{\partial y}+(y+x+w)\frac{\partial w}{\partial z}=x+y+z,$
перетворивши його до нових незалежних змінних
$u=\ln(x-w),\ v=\ln(y-w),\ t=\ln(z-w)$;

30) Перетворити рівняння $x\frac{\partial w}{\partial x}+y\frac{\partial w}{\partial y}+z\frac{\partial w}{\partial z}=w+\frac{xy}{z}$,
прийнявши за незалежні змінні $u=\frac{x}{z},\ v=\frac{y}{z}, t=z,$ а за функцію
$s=w/z$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз, Ч. 1,2. К., Либідь, 1994.
2. Зорич В.А. Математический анализ, Ч.1, М., Наука, 1984.
3. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа, Т.1,2, М., Наука, 1981.
4. Никольский С.М. Курс математического анализа, Т.1,2, М., Наука, 1983.

5. Рудин У. Основы математического анализа, М., Мир, 1966.

6. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа, М., Наука, 1988.

7. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, Т, 2,3, М., Наука, 1969.

8. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу, М., Физматгиз, 1962.

9. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа, М., Наука, 1971.

10. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу, М., Высшая школа, 2000.

11. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу, М., Наука, 1984.

12. Дороговцев А.Я. Сборник задач по математическому анализу, К., Вища школа, 1991.

ЗМІСТ

§1.ОБЛАСТЬ ВИЗНАЧЕННЯ ТА МНОЖИНА ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ 3
§2. ОБЧИСЛЕННЯ ГРАНИЦЬ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ НА НЕПЕРЕРВНІСТЬ . 10
§3 ЧАСТИННІ ПОХІДНІ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛИ ФУНКЦІЙ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ . . .17
§4. ЗАСТОСУВАННЯ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛІВ 34
§5. ПОХІДНА У ЗАДАНОМУ НАПРЯМКУ. ГРАДІЄНТ 37
§6 ДОТИЧНА ПЛОЩИНА ТА НОРМАЛЬ ДО ПОВЕРХНІ 44
§7. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА 50
§8. ЕКСТРЕМУМ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ 53
§9. УМОВНИЙ ЕКСТРЕМУМ. НАЙБІЛЬШЕ ТА НАЙМЕНШЕ ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ В ЗАМКНЕНІЙ ОБЛАСТІ 64
§10. ВЕКТОР-ФУНКЦІЇ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ 77
§11. ДОДАТОК 84