

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Криві, поверхні та тіла

Методичні вказівки до виконання
типової розрахункової роботи
з математичного аналізу
для студентів другого курсу
фізико-математичного факультету

*Рекомендовано Методичною радою фізико-математичного факультету НТУУ
«КПІ імені Ігоря Сікорського»*

Київ
НТУУ «КПІ імені Ігоря Сікорського»

2017

Криві, поверхні та тіла: Метод. вказівки з матем. аналізу для студ. 2 курсу
фіз.-мат. ф-ту/ Уклад.: В.В.Дрозд. – К.: НТУУ «КПІ імені Ігоря Сікорського»,
2017

*Гриф надано Методичною радою фізико-математичного факультету
НТУУ «КПІ імені Ігоря Сікорського» (Протокол № від
2017 р.)*

Навчальне видання

Криві, поверхні та тіла

Методичні вказівки до виконання

типової розрахункової роботи

з математичного аналізу

для студентів другого курсу

фізико-математичного факультету

Укладачі:

Дрозд Вячеслав

Володимирович

Віповідальний редактор:

Диховичний Олесандр

Олександрович

Рецензент:

Каніовська Ірина

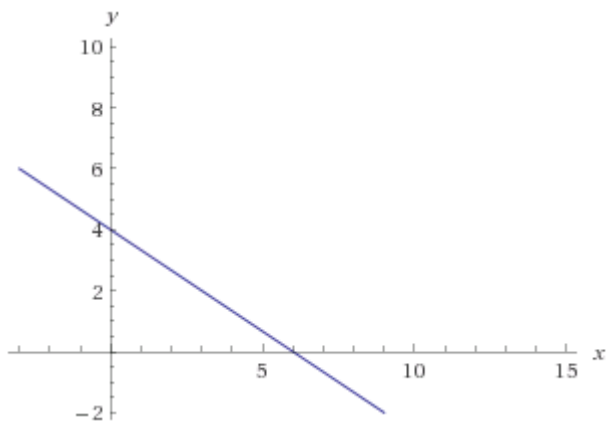
Передмова

При роботі на практичних заняттях, при самостійній роботі, при виконанні типової розрахункової роботи та різних контрольних робіт на тему «Кратні, криволінійні, поверхневі інтеграли та теорія поля» студенти вимушені постійно малювати криві, поверхні та тіла у просторі. Як показує багаторічна практика, це є постійним каменем спотикання для студентів як технічних, так і фізико-математичних спеціальностей. З метою поліпшити цей стан речей укладачі методичної розробки вирішили допомогти студентам зібрати до купи всі свої знання про криві та поверхні, допомогти їх малювати та малювати тіла у просторі, що утворюються перетином декількох поверхонь.

Деякі відомі криві

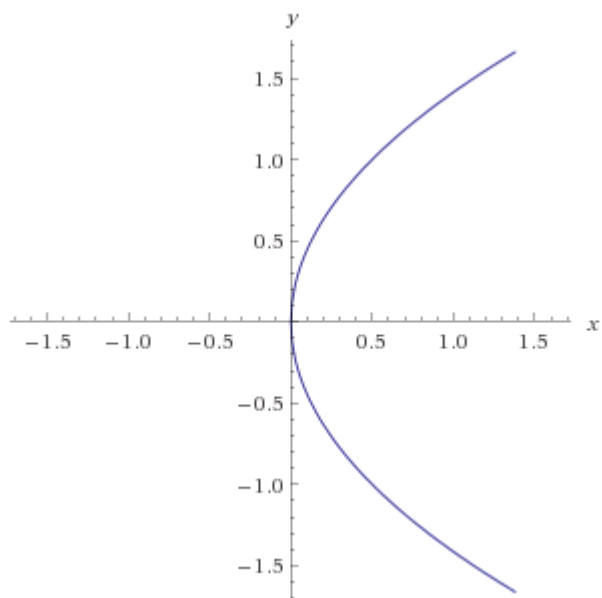
Пряма:

$$2x + 3y = 12$$

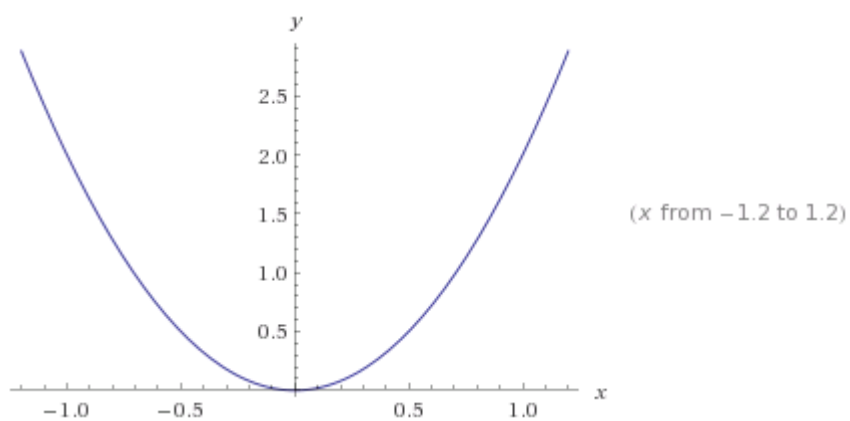


Параболи:

$$y^2 = 2x$$

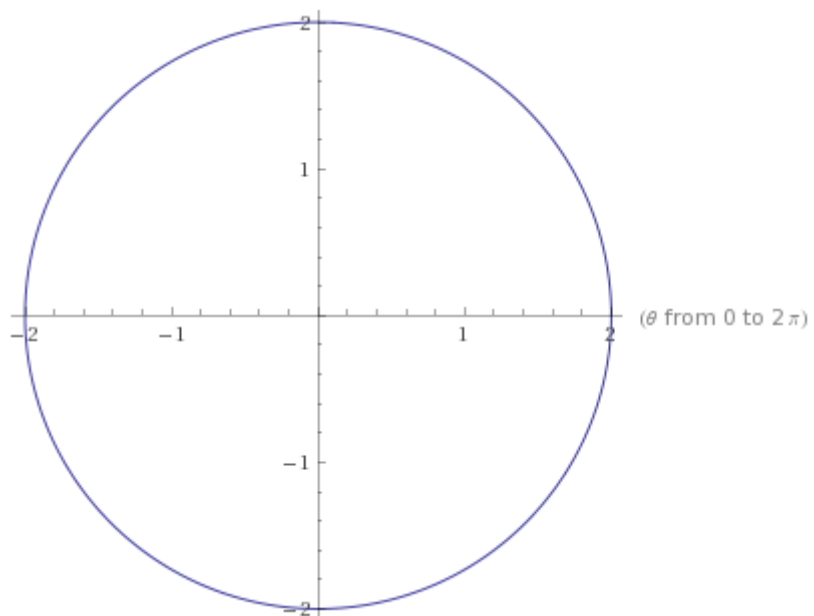


$$y=2x^2$$



Коло:

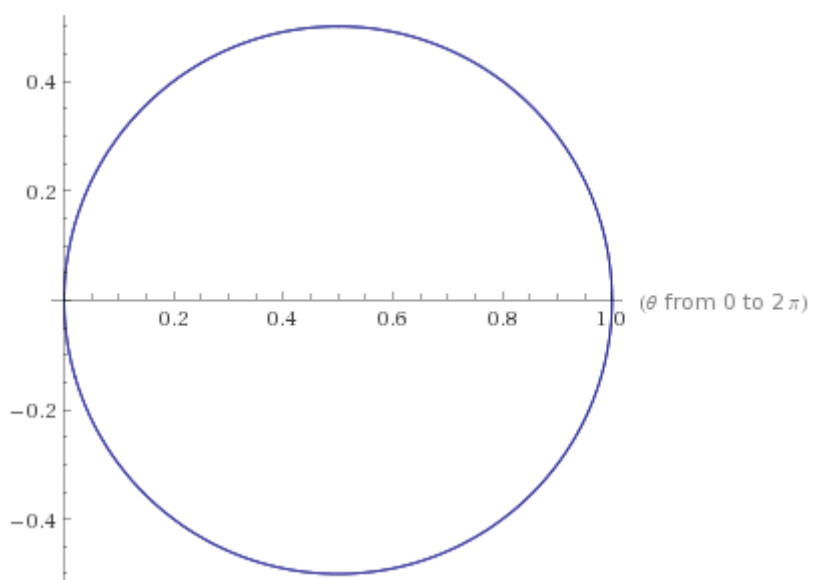
$$R=2$$



(якщо в рівнянні число 2 замінити на параметр a (тут і далі будемо вважати параметри додатніми), то вийде коло радіуса a).

Коло:

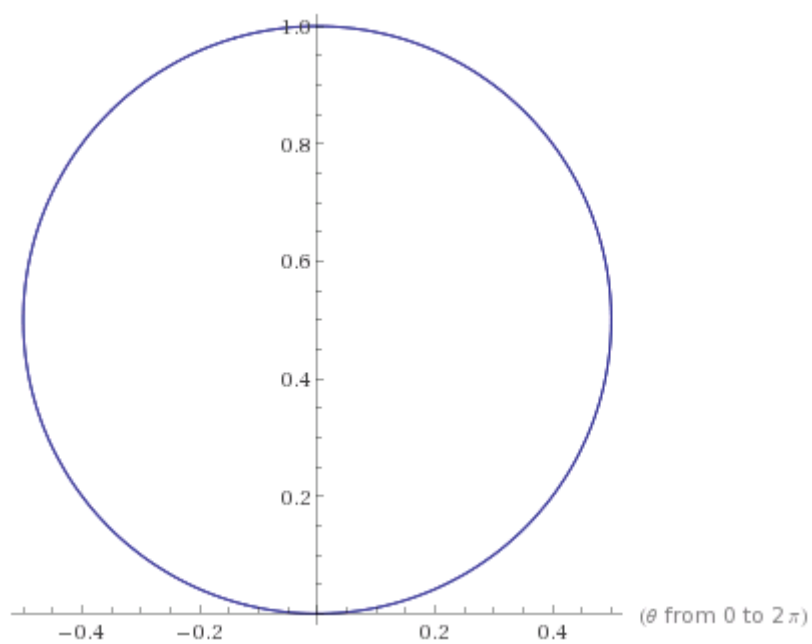
$$r = \cos(\theta)$$



Рівняння кривої в декартових координатах: $x^2 + y^2 = x$.

Коло:

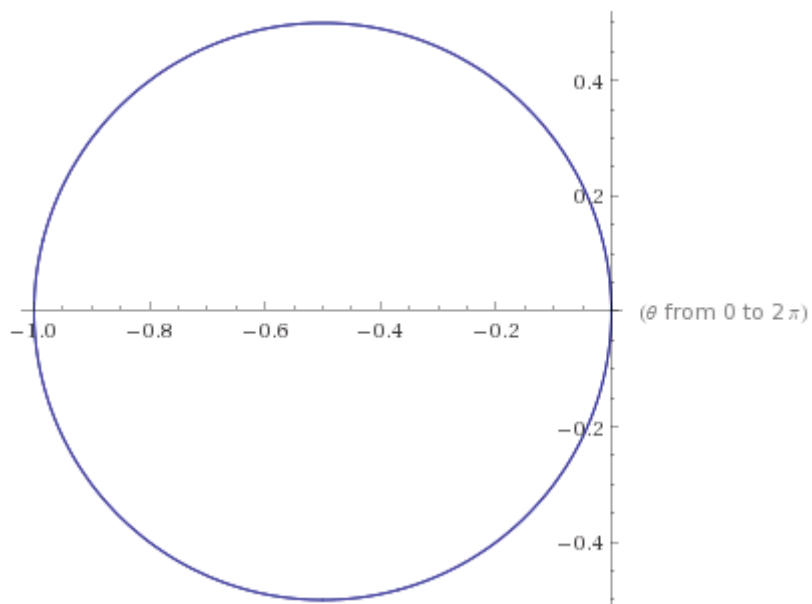
$$r = \sin(\theta)$$



Рівняння кривої в декартових координатах: $x^2 + y^2 = y$.

Коло:

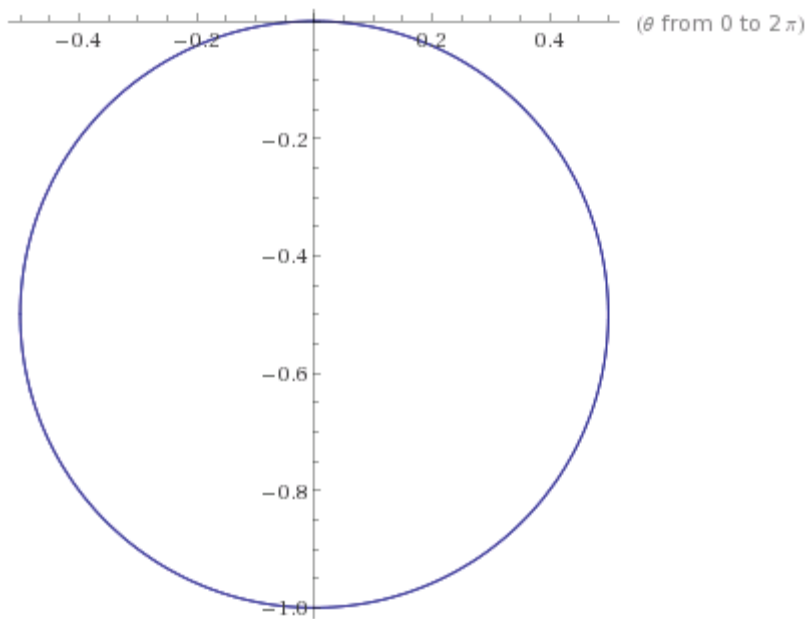
$$r = -\cos(\theta)$$



Рівняння кривої в декартових координатах: $x^2 + y^2 = -x$.

Коло:

$$r = -\sin(\theta)$$

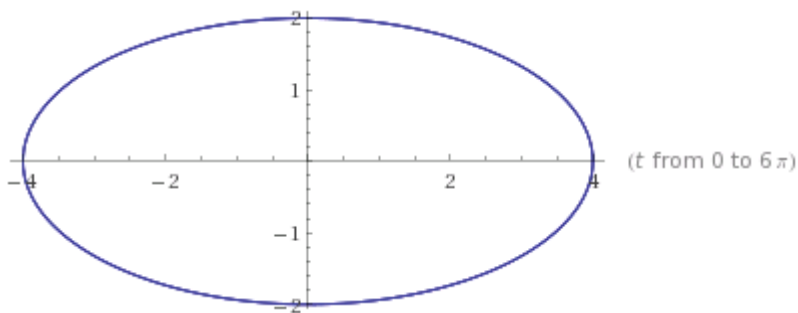


Рівняння кривої в декартових координатах: $x^2 + y^2 = -y$,

(якщо криву задано рівністю $r = \pm 2a \cdot \cos(\theta)$, або $r = \pm 2a \cdot \sin(\theta)$, то радіус кола дорівнюватиме a ; при цьому рівняння в декартових координатах приймуть вигляд відповідно $x^2 + y^2 = \pm 2ax$ та $x^2 + y^2 = \pm 2ay$).

Еліпс:

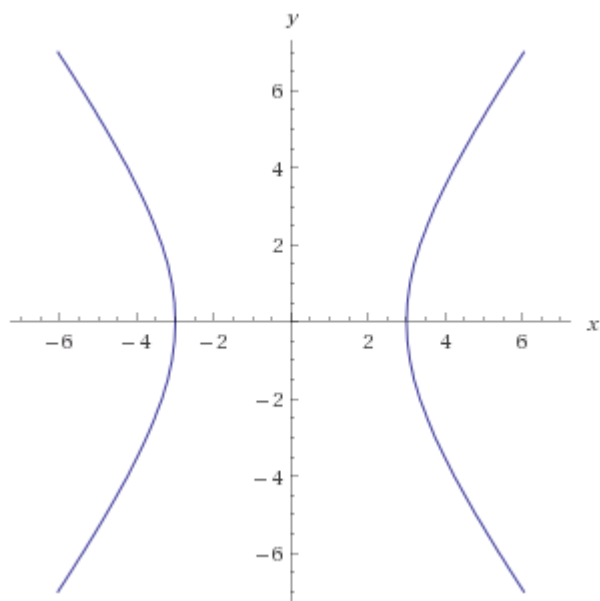
$$x = 4 \cos t, y = 2 \sin t$$



(якщо в рівняннях кривої числа 4 та 2 замінити на параметри a та b , характер кривої не зміниться, крива перетинатиме вісь Ox у точках з абсцисами $x=a$ та $x=-a$, а вісь Oy – у точках з ординатами $y=b$ та $y=-b$; при цьому рівняння кривої в декартових координатах матиме вигляд $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$).

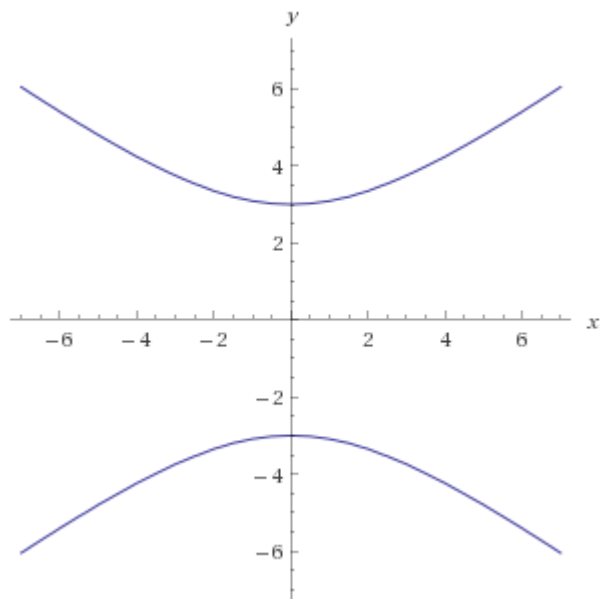
Гіперболи:

$$x=3cht, y=4sht$$



(якщо в рівняннях кривої числа 3 та 4 замінити на параметри a та b , характер кривої не зміниться, крива перетинатиме вісь Ox у точках з абсцисами $x=a$ та $x=-a$; при цьому рівняння кривої в декартових координатах матиме вигляд $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$).

$$y=3cht, x=4sht$$

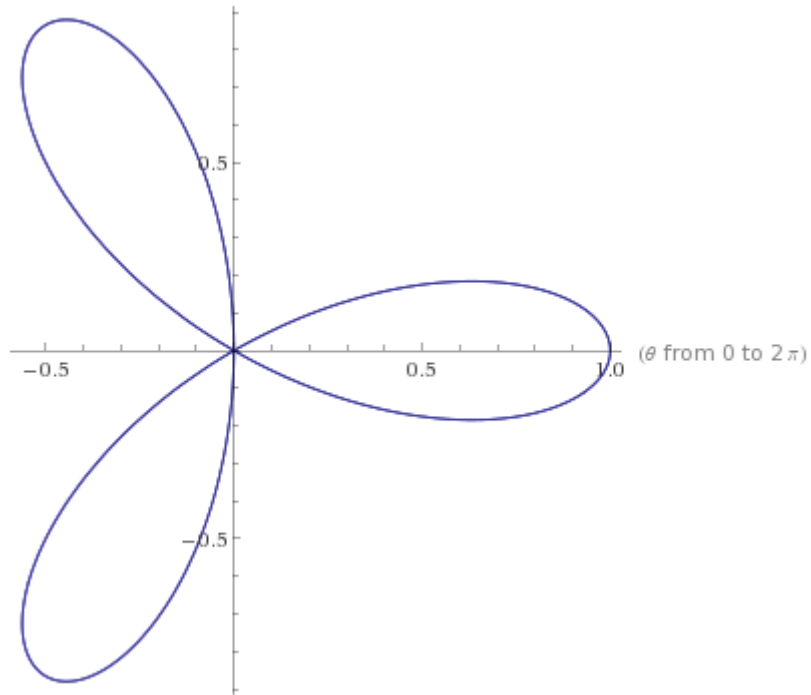


(якщо в рівняннях кривої числа 3 та 4 замінити на параметри a та b , характер кривої не зміниться, крива перетинатиме вісь Oy у точках з ординатами $y=a$ та $y=-a$).

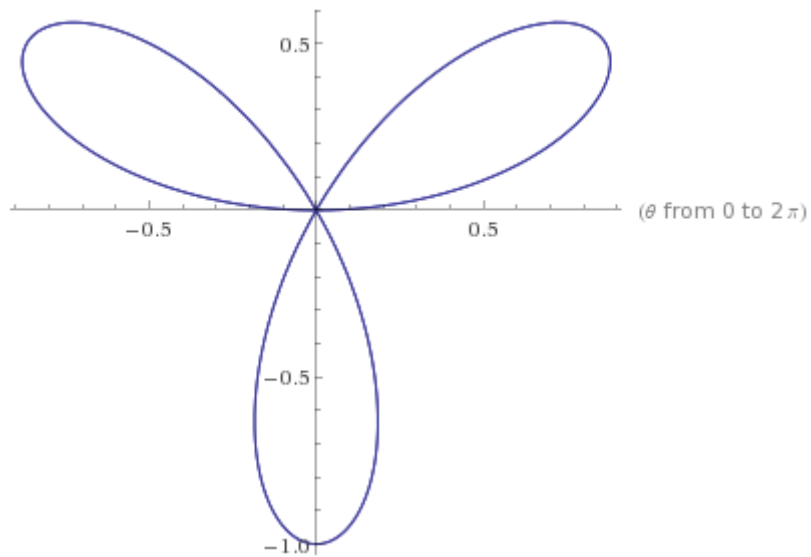
$y=-a$; при цьому рівняння кривої в декартових координатах матиме вигляд $y^2/a^2 - x^2/b^2=1$).

Трипелюсткові троянди:

$$r=\cos(3\theta)$$



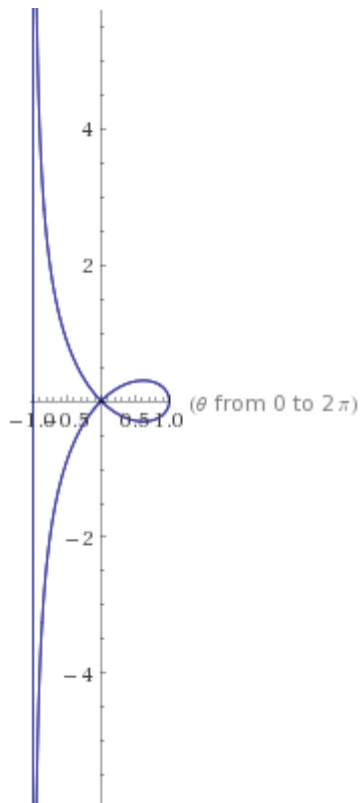
$$r=\sin(3\theta)$$



(якщо криву задано рівністю $r=a \cdot \cos(n\theta)$, або $r=a \cdot \sin(n\theta)$, де n – натуральне, то кількість пелюсток дорівнюватиме n , а довжина кожної з них дорівнюватиме a одиниць).

Строфоїда:

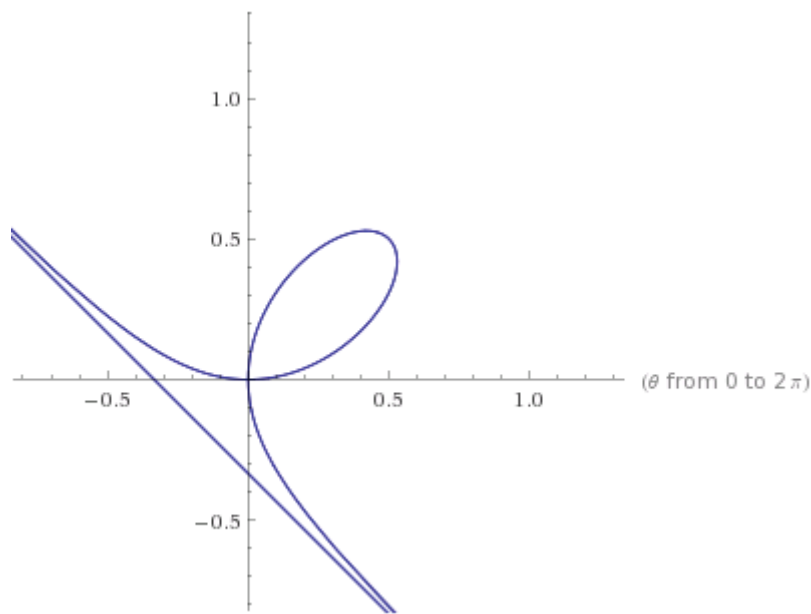
$$r = \cos(2\theta) / \cos(\theta)$$



(якщо криву задано рівністю $r=a \cdot \cos(2\theta)/\cos(\theta)$, то асимптота матиме рівняння $x=a$; при цьому параметричні рівняння кривої матимуть вигляд $x=a(t^2-1)/(t^2+1)$, $y=at(t^2-1)/(t^2+1)$).

Декартів лист:

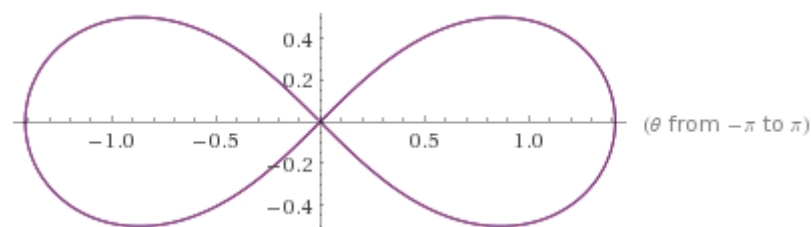
$$r=\cos(\theta) \cdot \sin(\theta)/(\cos^3(\theta)+\sin^3(\theta))$$



(якщо криву задано рівністю $r=3a \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\theta)/(\cos^3(\theta)+\sin^3(\theta))$, то асимптота матиме рівняння $x+y=-a$; при цьому параметричні рівняння кривої матимуть вигляд $x=3at/(t^3+1)$, $y=3at^2/(t^3+1)$).

Лемніскати Бернуллі:

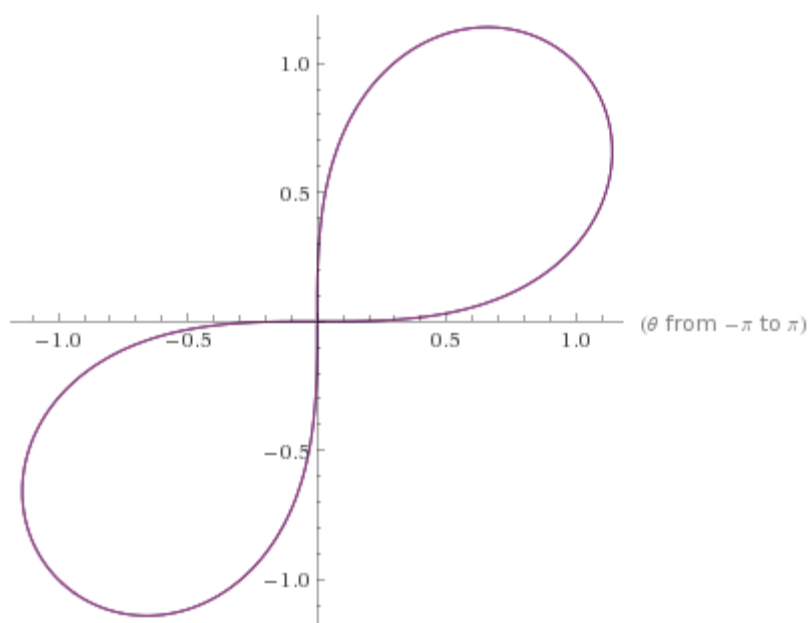
$$r^2=2\cos(2\theta)$$



(якщо криву задано рівністю $r^2=2a^2 \cdot \cos(2\theta)$, то максимальне значення r дорівнюватиме $a \cdot (2)^{1/2}$; для довільного a крива має дотичні $y=x$ та $y=-x$ в початку координат, тобто θ змінюється в межах від $-\pi/4$ до $\pi/4$, та від $3\pi/4$ до

$5\pi/4$; при цьому рівняння кривої в декартових координатах матиме вигляд $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$).

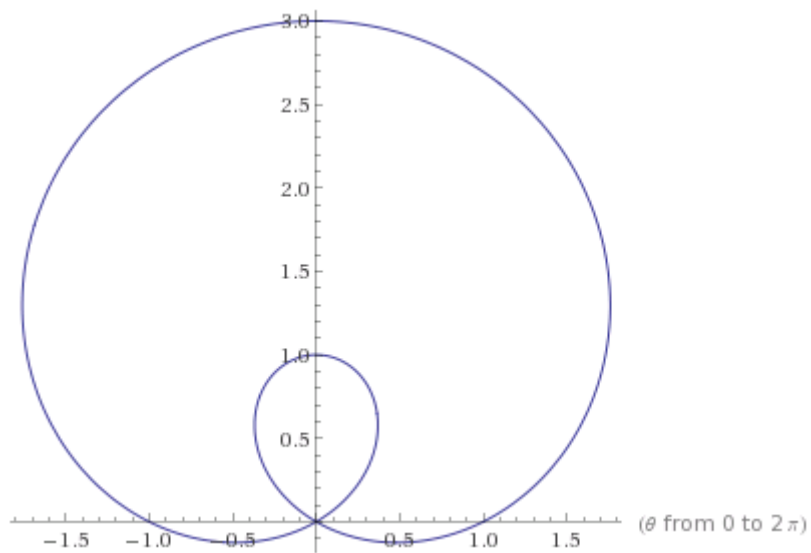
$$r^2=2\sin(2\theta)$$



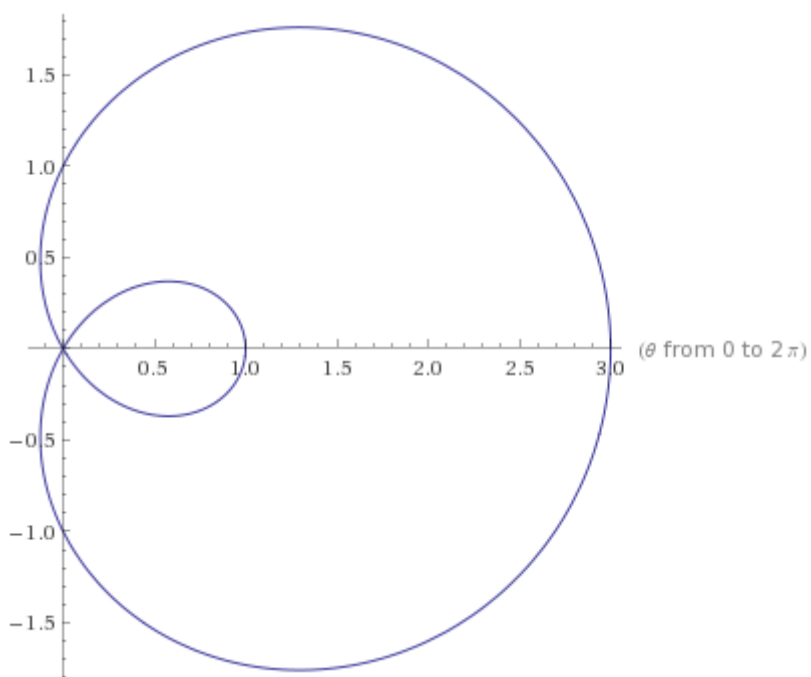
(якщо криву задано рівністю $r^2=2a^2\cdot\sin(2\theta)$, то максимальне значення r дорівнюватиме $a\cdot(2)^{1/2}$; для довільного a крива має дотичні $x=0$ та $y=0$ в початку координат, тобто θ змінюється в межах від 0 до $\pi/2$, та від π до $3\pi/2$).

Равлики Паскаля:

$$r=2\sin(\theta)+1$$

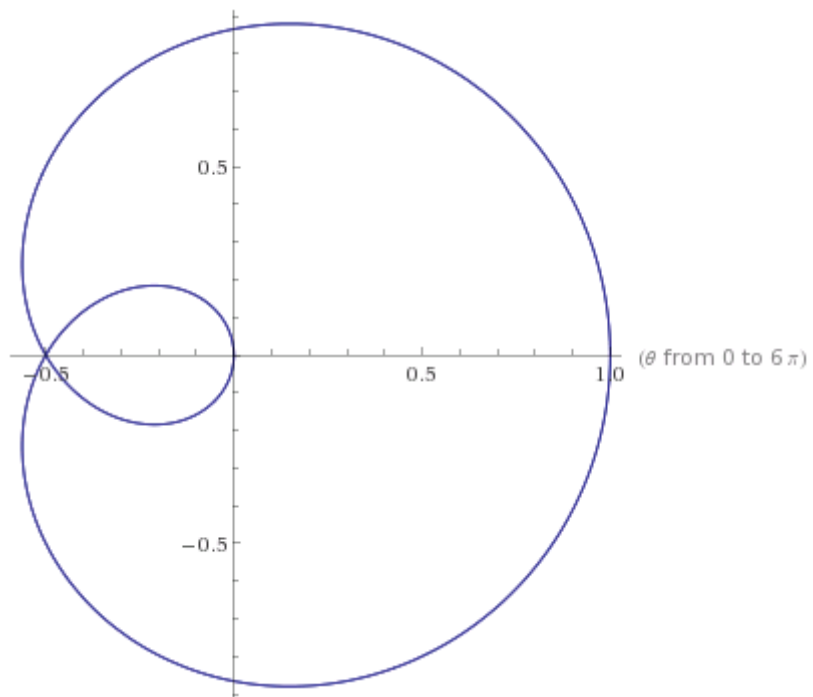


$$r=2\cos(\theta)+1$$

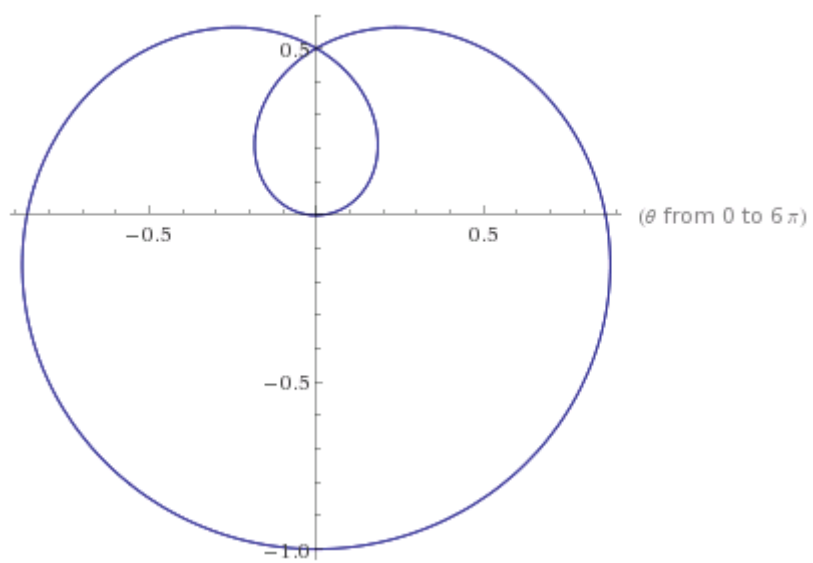


(якщо в рівняннях кривих числа 2 та 1 замінити на параметри a та b , де $a > b$, характер кривих не зміниться, максимальне значення r дорівнюватиме $a+b$).

Крива $r=\cos(\theta/3)$:

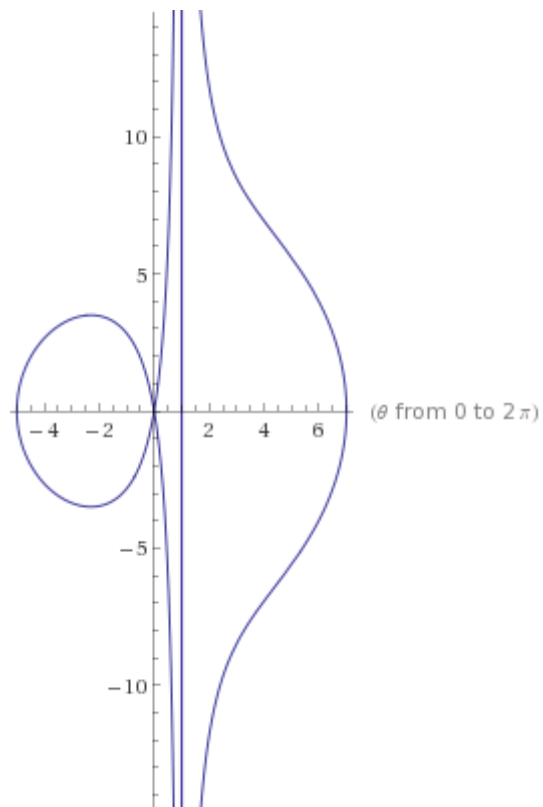


Крива $r = \sin(\theta/3)$:



Конхоїда Нікомеда:

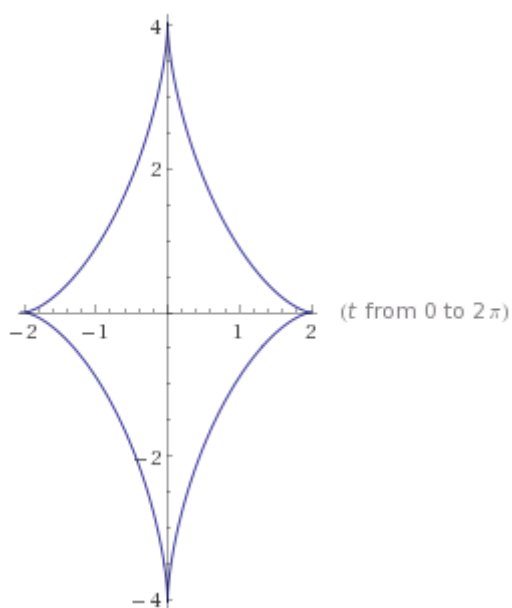
$$r = 6 + 1/\cos(\theta)$$



(якщо в рівнянні кривої числа 6 та 1 замінити на параметри a та b , де $a > b$, характер кривої не зміниться; асимптота при цьому матиме рівняння $x=b$).

Астроїда:

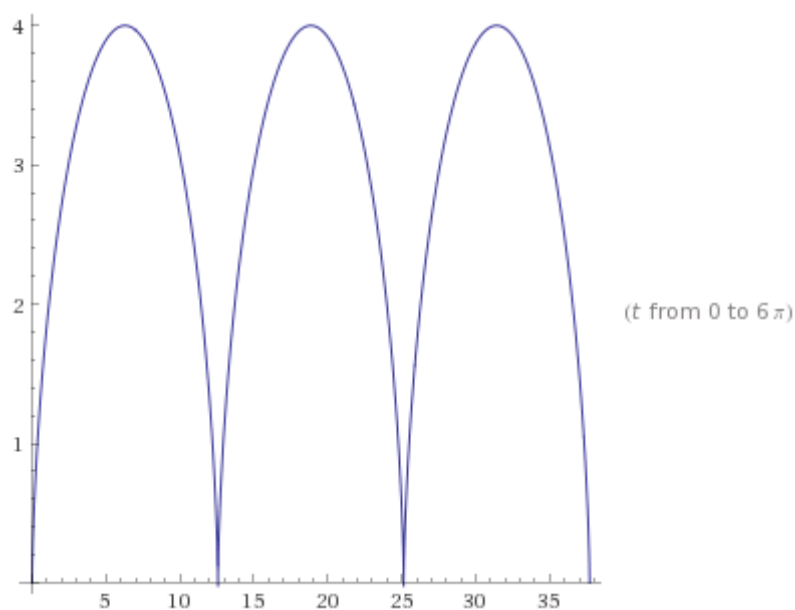
$$x=2\cos^3 t, y=4\sin^3 t$$



(якщо в рівняннях кривої числа 2 та 4 замінити на параметри a та b , характер кривої не зміниться, крива перетинатиме вісь Ox у точках з абсцисами $x=a$ та $x=-a$, а вісь Oy – у точках з ординатами $y=b$ та $y=-b$).

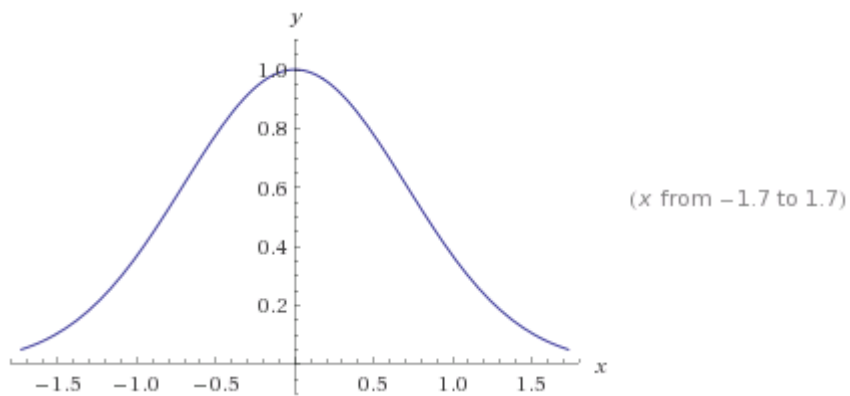
Циклоїда:

$$x=2(t - \sin t), y=2(1 - \cos t)$$



(якщо в рівняннях кривої число 2 замінити на параметр a , характер кривої не зміниться, крива перетинатиме вісь Ox у точках з абсцисами $x=2\pi na$, де $n=0; 1; 2; 3 \dots$, а точки $(2\pi na + \pi; 2a)$ будуть точками максимуму).

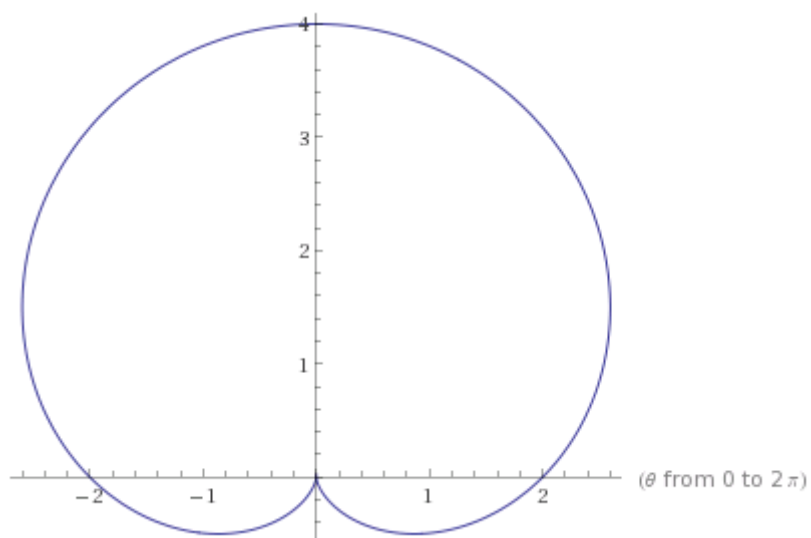
Крива $y=\exp(-x^2)$:



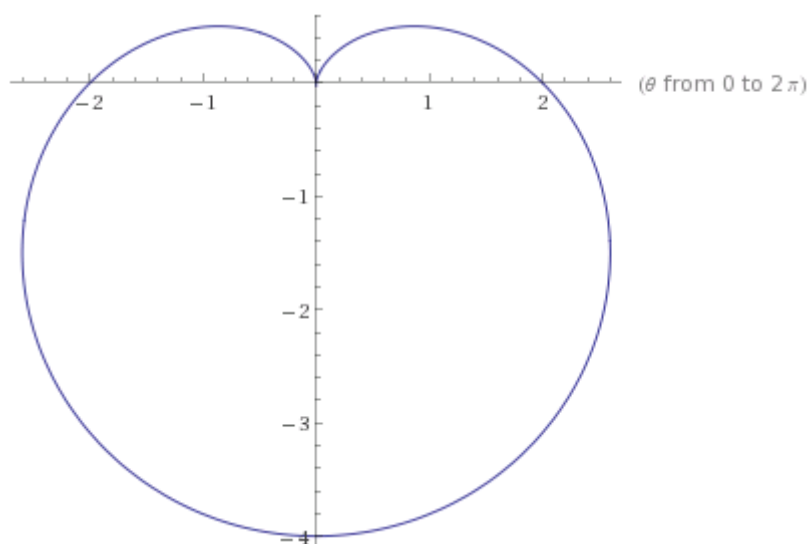
(якщо криву задано рівністю $y = a \cdot \exp(-bx^2)$, то точка максимуму матиме координати $(0; a)$).

Кардіоїди:

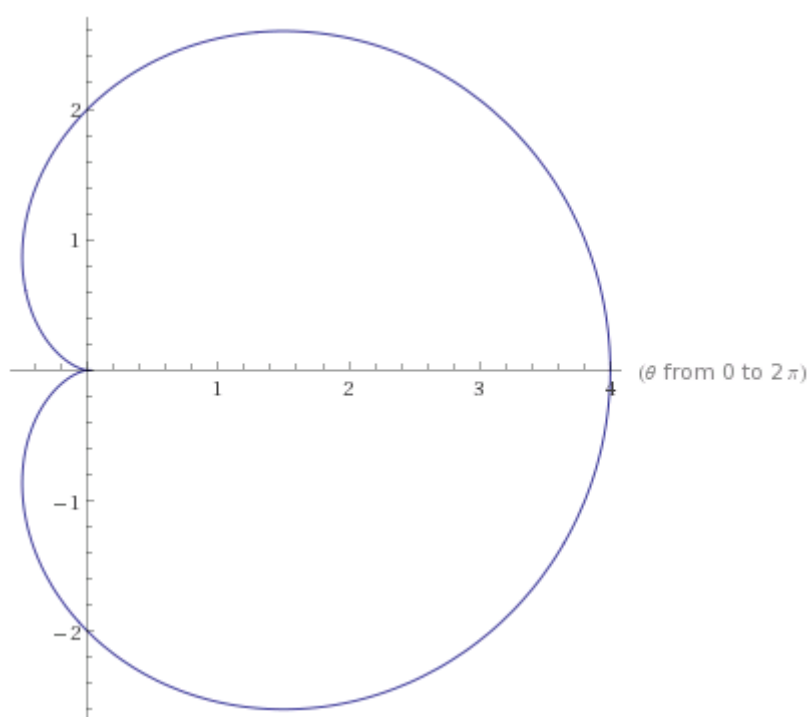
$$r = 2(1 + \sin t)$$



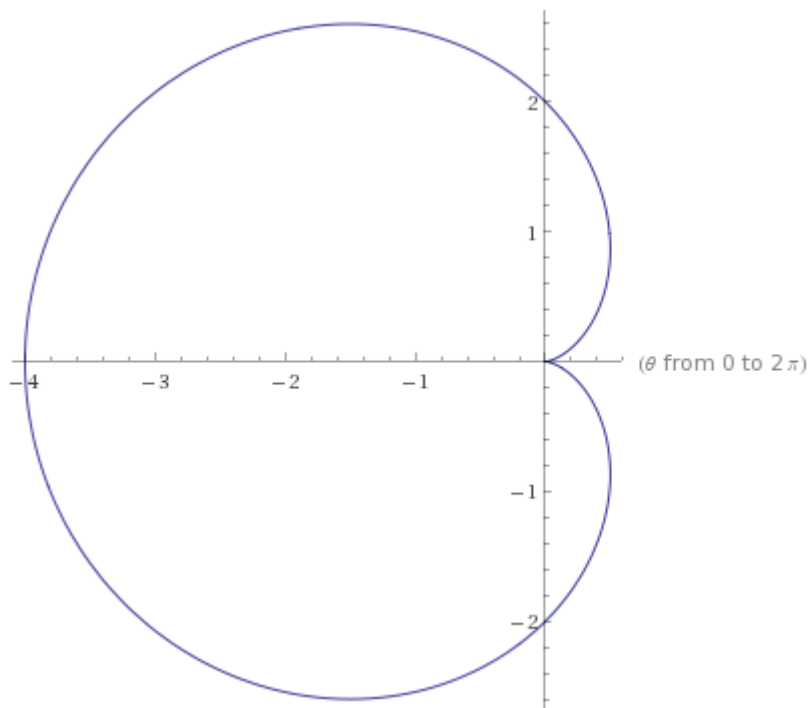
$$r = 2(1 - \sin t)$$



$$r=2(1 + \cos \theta)$$



$$r=2(1 - \cos \theta)$$



(якщо в рівняннях усіх кардіоїд число 2 замінити на параметр a , характер кривої не зміниться, максимальне значення r дорівнюватиме $2a$).

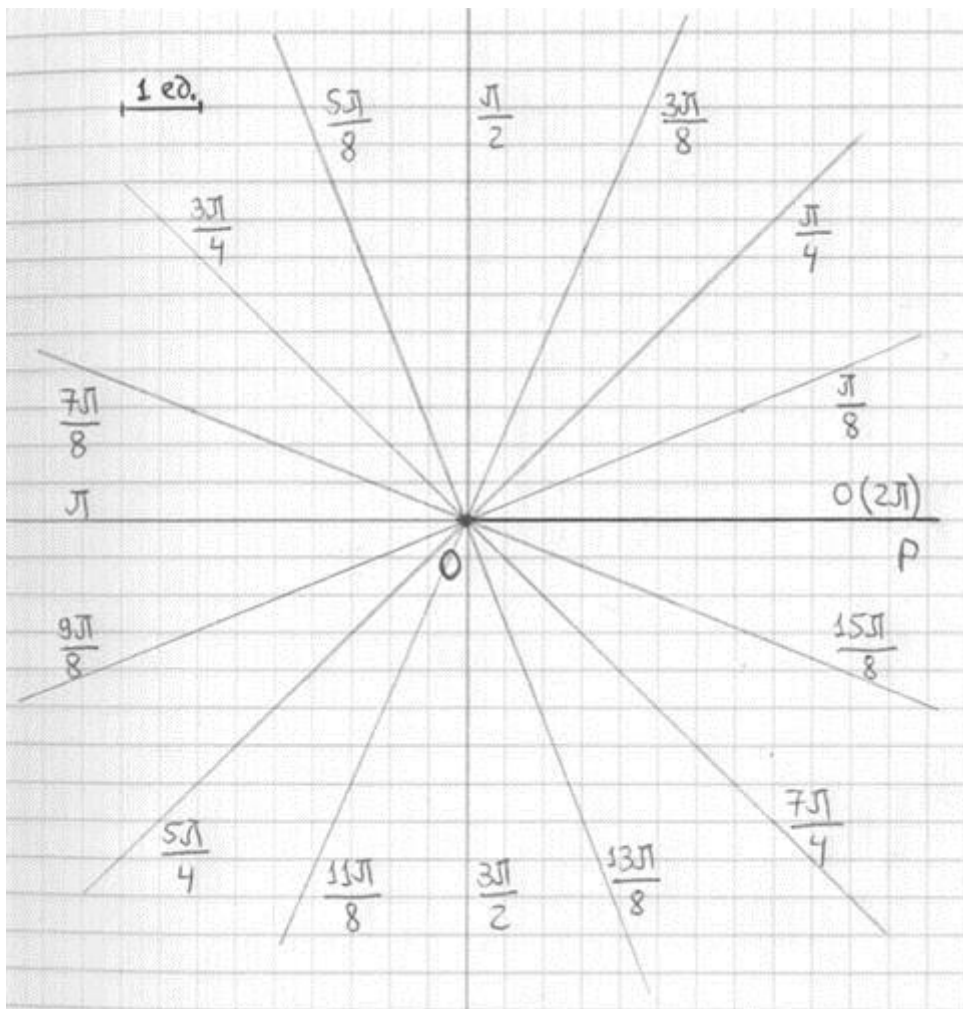
Як будувати криві

Приклад 1. Побудувати криву, що задано в полярній системі координат рівнянням $r=1 + \cos\varphi$.

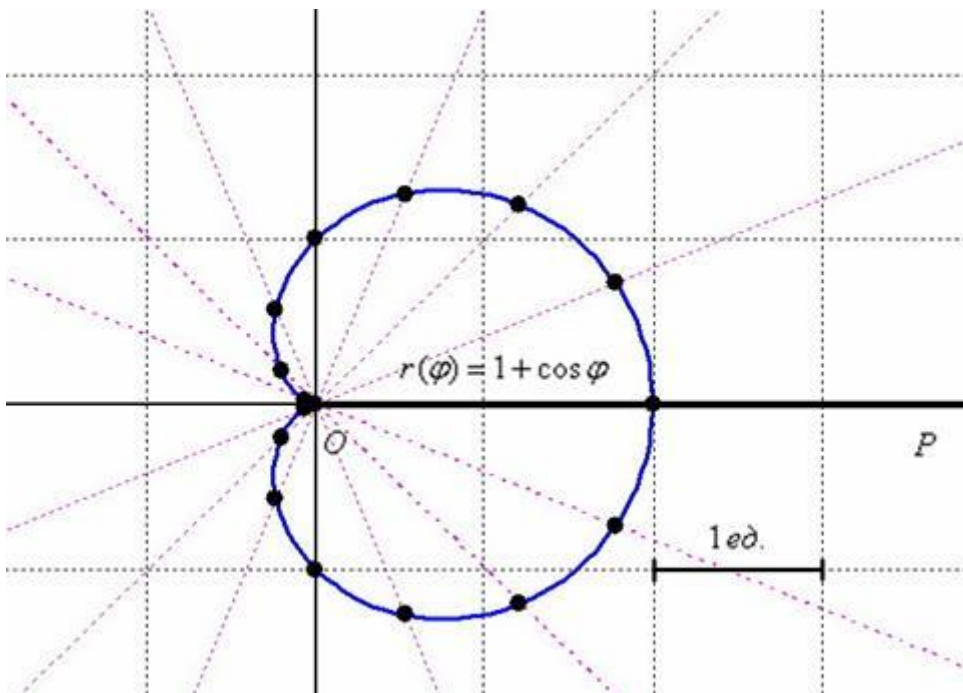
Розв'язування. Область визначення функції $1 + \cos\varphi$ є усі дійсні числа. Враховуючи, що ця функція парна (а отже крива є симетричною відносно полярної осі), побудуємо таблицю:

φ	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π
r	2	1,92	1,71	1,38	1	0,62	0,29	0,08	0
φ	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{13\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{15\pi}{8}$	2π	
r	0,08	0,29	0,62	1	1,38	1,71	1,92	0	

Очевидно, що всі значення r крім цілих є наближеними. Намалюємо обрані кути на площині:



На кожному промені відкладемо відрізок довжиною r , який відповідає йому з таблиці. Одержані точки з'єднаємо неперервною лінією:



Приклад 2. Побудувати криву, що задано в полярній системі координат рівнянням $r=9/(4-5\cos\varphi)$.

Розв'язування. Знайдемо область визначення функції $9/(4-5\cos\varphi)$. Для цього розв'яжемо нерівність

$$4 > 5 \cos \varphi$$

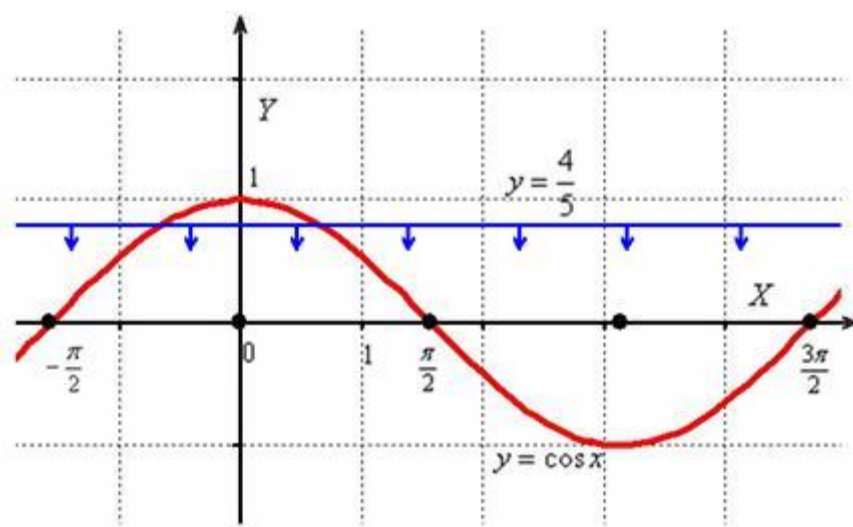
$$5 \cos \varphi < 4$$

$$\cos \varphi < \frac{4}{5}.$$

Для цього намалюємо графіки функцій

$$y = \cos x, y = \frac{4}{5}$$

на проміжку $[-\pi/2; 3\pi/2]$. Розв'язком нерівності будуть ті значення аргумента, які відповідають точкам графіка $y = \cos x$, що лежать під прямою $y = 4/5$:



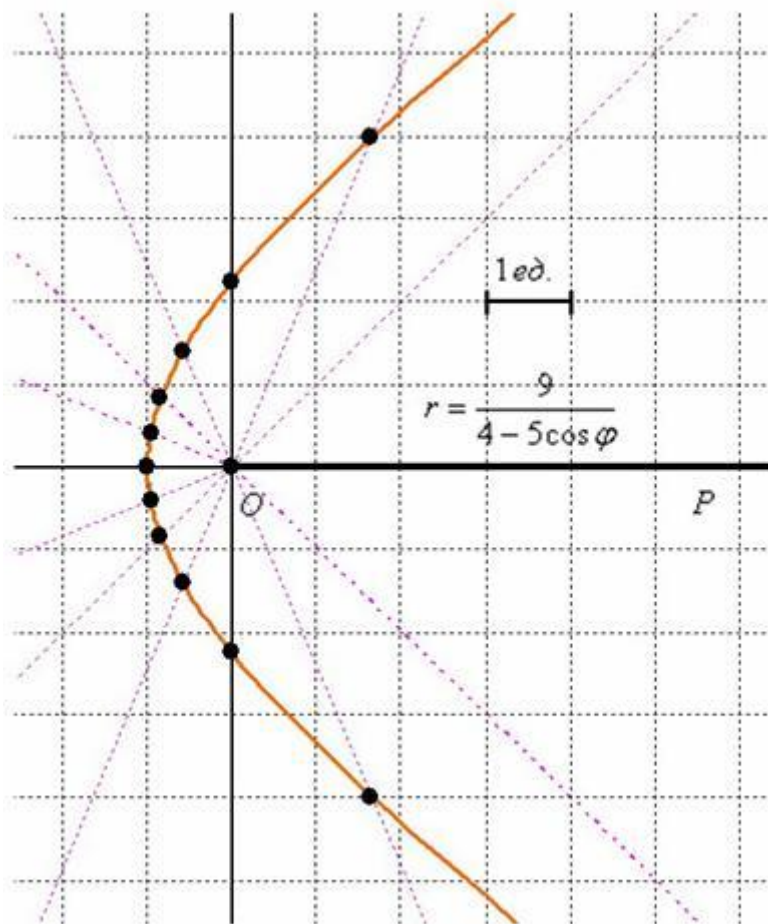
Таким чином, на проміжку, який ми розглянули,

$$\varphi \notin \left[-\arccos \frac{4}{5}; \arccos \frac{4}{5} \right].$$

Якщо будувати таблицю з кроком $\pi/8$ на проміжку $[0; 2\pi]$, то наша функція не існуватиме в точках $0; \pi/8; 15\pi/8; 2\pi$:

φ	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π
r	—	—	19,38	4,31	2,25	1,52	1,19	1,04	1,00
φ	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{13\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{15\pi}{8}$	2π	
r	1,04	1,19	1,52	2,25	4,31	19,38	—	—	

Далі діємо, як у попередньому прикладі. Одержуємо малюнок:



Зауваження. Перейдемо в декартову систему координат. Враховуючи, що

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, r \cos \varphi = x,$$

одержимо рівність

$$4\sqrt{x^2 + y^2} - 5x = 9,$$

яку можна перетворити слідуєчим чином:

$$\begin{aligned}
4\sqrt{x^2 + y^2} &= 5x + 9 \\
(4\sqrt{x^2 + y^2})^2 &= (5x + 9)^2 \\
16(x^2 + y^2) &= 25x^2 + 90x + 81 \\
16x^2 + 16y^2 &= 25x^2 + 90x + 81 \\
25x^2 + 90x + 81 - 16x^2 - 16y^2 &= 0 \\
9x^2 + 90x + 81 - 16y^2 &= 0 \\
9(x^2 + 10x + 25) - 9 \cdot 25 + 81 - 16y^2 &= 0 \\
9(x + 5)^2 - 16y^2 &= 144 \\
9(x + 5)^2 - 16y^2 &= 144 \\
\frac{(x + 5)^2}{16} - \frac{y^2}{9} &= 1
\end{aligned}$$

З останнього рівняння бачимо, що намальована крива є правою віткою гіперболи.

Приклад 3. Побудувати криву, що задано в полярній системі координат рівнянням $r=4/(1 + \sin\varphi)$.

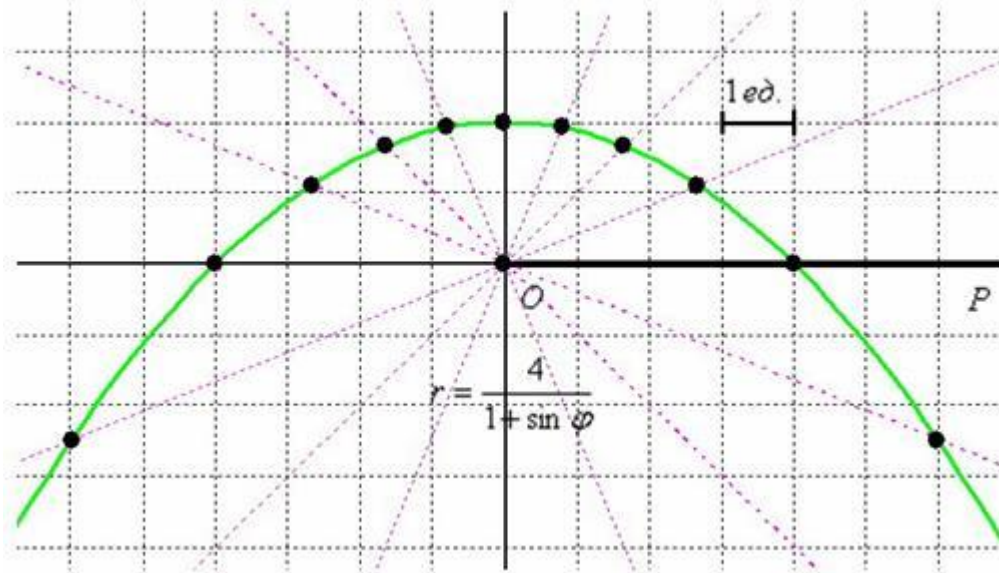
Розв'язування. Знайдемо область визначення функції $4/(1 + \sin\varphi)$:

$$r \geq 0 \Rightarrow 1 + \sin \varphi > 0 \Rightarrow \sin \varphi > -1 \Rightarrow \varphi \neq \frac{3\pi}{2}.$$

Побудуємо таблицю:

φ	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π
r	4	2,89	2,34	2,08	2	2,08	2,34	2,89	4
φ	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{13\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{15\pi}{8}$	2π	
r	6,48	13,66	52,55	—	52,55	13,66	6,48	4	

Одержимо малюнок:



Зауваження. Перейдемо в декартову систему координат. Перепишемо рівність у вигляді:

$$\begin{aligned} r &= \frac{4}{1 + \sin \varphi} \\ r(1 + \sin \varphi) &= 4 \\ r + r \sin \varphi &= 4 \end{aligned}$$

Враховуючи, що

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad r \sin \varphi = y,$$

одержимо:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} + y &= 4 \\ \sqrt{x^2 + y^2} &= 4 - y \\ (\sqrt{x^2 + y^2})^2 &= (4 - y)^2 \\ x^2 + y^2 &= 16 - 8y + y^2 \\ x^2 &= 16 - 8y \\ x^2 &= 8(2 - y) \end{aligned}$$

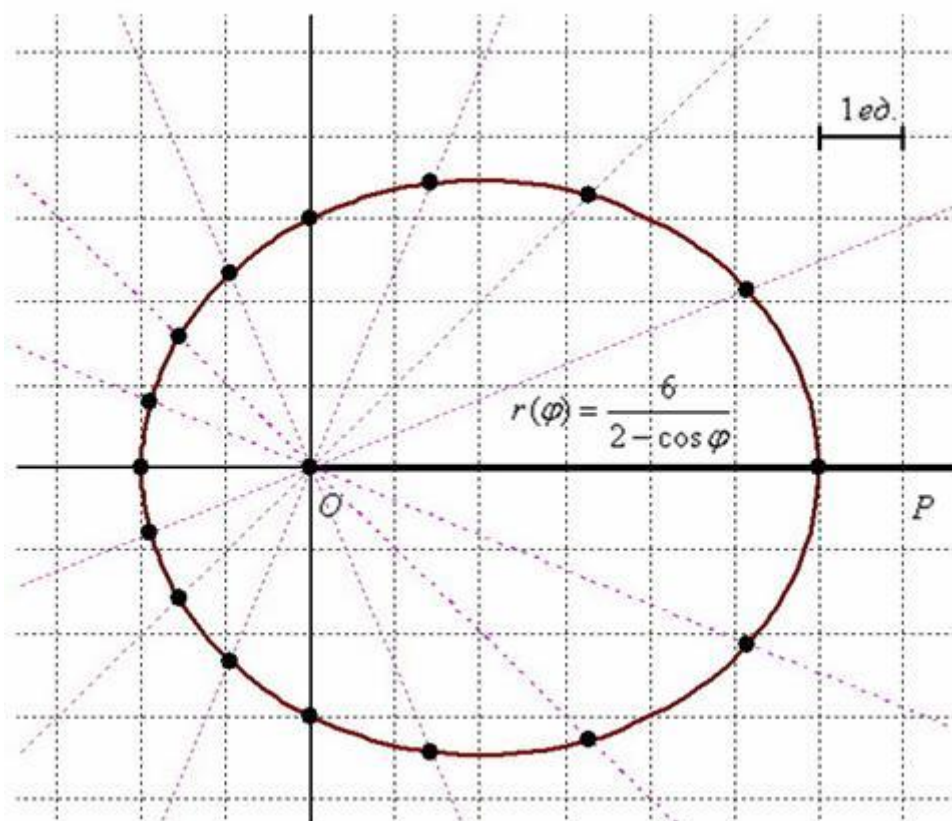
З останнього рівняння бачимо, що намальована крива є параболою.

Приклад 4. Побудувати криву, що задано в полярній системі координат рівнянням $r = 6/(2 - \cos \varphi)$.

Розв'язування. Область визначення функції $6/(2 - \cos\varphi)$ є усі дійсні числа. Враховуючи, що ця функція парна (а отже крива є симетричною відносно полярної осі), побудуємо таблицю:

φ	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π
r	6	5,58	4,64	3,71	3	2,52	2,22	2,05	2
φ	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{13\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{15\pi}{8}$	2π	
r	2,05	2,22	2,52	3	3,71	4,64	5,58	6	

Одержимо малюнок:



Зауваження. Перейдемо в декартову систему координат. Перепишемо рівність у вигляді:

$$\begin{aligned}
 r &= \frac{6}{2 - \cos \varphi} \\
 r(2 - \cos \varphi) &= 6 \\
 2r - r \cos \varphi &= 6
 \end{aligned}$$

Враховуючи, що

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, r \cos \varphi = x,$$

одержимо:

$$\begin{aligned}2\sqrt{x^2 + y^2} - x &= 6 \\2\sqrt{x^2 + y^2} &= x + 6 \\(2\sqrt{x^2 + y^2})^2 &= (x + 6)^2 \\4(x^2 + y^2) &= x^2 + 12x + 36 \\3x^2 - 12x + 4y^2 &= 36 \\3(x^2 - 4x + 4) - 12 + 4y^2 &= 36 \\3(x - 2)^2 + 4y^2 &= 48 \\\frac{(x - 2)^2}{16} + \frac{y^2}{12} &= 1.\end{aligned}$$

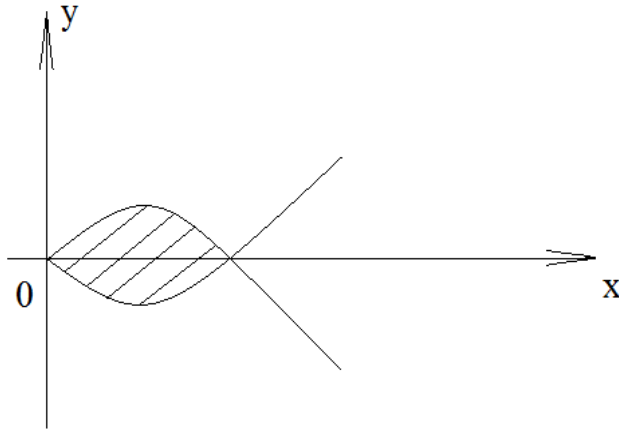
З останнього рівняння бачимо, що намальована крива є еліпсом.

Приклад 5. Намалювати фігуру, обмежену петлею лінії, що задано рівністю $y^2 = x(x - 1)^2$.

Розв'язування. Область визначення є проміжок $x \in [0; +\infty)$. Якщо деяка точка $(x_0; y_0)$ лежить на кривій, то разом з нею на кривій лежить точка $(x_0; -y_0)$. Це означає, що крива симетрична відносно осі Ox . Запишемо явно рівняння половини кривої, яка відповідає значенням $y \geq 0$:

$$y = f(x) = \sqrt{x}|x - 1| = \begin{cases} \sqrt{x}(1 - x), & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ \sqrt{x}(x - 1), & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Спільні точки симетричних кривих $y = f(x)$ та $y = -f(x)$ лежать на осі Ox , отже вони мають абсциси: $x_1 = 0, x_2 = 1$. Таким чином, кривими $y = \sqrt{x}(1 - x)$ та $y = \sqrt{x}(x - 1)$ при $0 \leq x \leq 1$ утворюється петля.



Приклад 6. Намалювати фігуру, обмежену петлею лінії, що задано параметрично $x = 2t - t^2$, $y = 2t^2 - t^3$.

Розв'язування. Знайдемо два значення параметра t таким чином, щоб виконувались рівності $x(t_1) = x(t_2)$ та $y(t_1) = y(t_2)$. Нехай $t_1 < t_2$, тоді

$$\begin{cases} 2t_1 - t_1^2 = 2t_2 - t_2^2, \\ 2t_1^2 - t_1^3 = 2t_2^2 - t_2^3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(t_1 - t_2) - (t_1^2 - t_2^2) = 0, \\ 2(t_1^2 - t_2^2) - (t_1^3 - t_2^3) = 0; \end{cases}$$

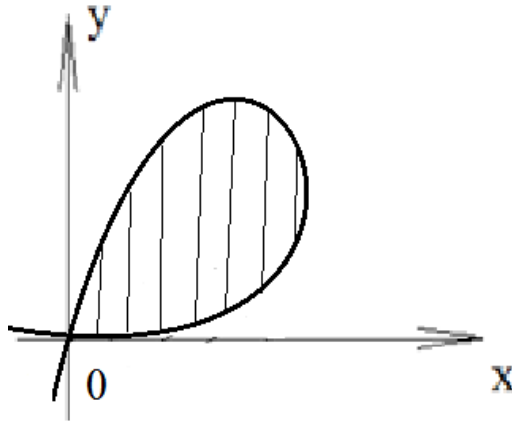
$$\begin{cases} (t_1 - t_2)(2 - (t_1 + t_2)) = 0, \\ (t_1 - t_2)(2(t_1 + t_2) - (t_1 + t_2)^2 + t_1 t_2) = 0. \end{cases}$$

Оскільки $t_1 - t_2 \neq 0$, то

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 2, \\ t_1 t_2 = 0. \end{cases}$$

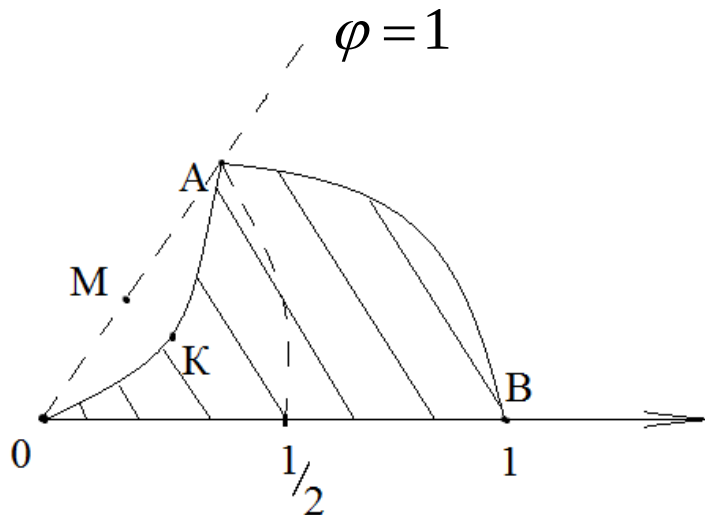
Умові $t_1 < t_2$ відповідає розв'язок $t_1 = 0, t_2 = 2$.

Оскільки $x(0) = x(2) = 0, y(0) = y(2) = 0$, то крива утворює петлю вигляду ($x \geq 0, y \geq 0$ при $t \in [0; 2]$):



Приклад 7. Намалювати фігуру, обмежену кривими $\varphi = \sin \pi \rho$ ($0 \leq \rho \leq 1$) та $\varphi = 0$.

Розв'язання. Коли ρ зростає від 0 до $\frac{1}{2}$, значення φ зростає від 0 до 1. Коли ρ зростає від $\frac{1}{2}$ до 1, значення φ спадає від 1 до 0. Тому задана фігура має такий схематичний вигляд:



Приклад 8. Побудувати криву, що задано параметрично $x = t^2$, $y = t - \frac{t^3}{3}$.

Розв'язання. Знайдемо такі значення параметра t , щоб виконувались рівності $x(t_1) = x(t_2)$, $y(t_1) = y(t_2)$:

$$\begin{cases} t_1^2 = t_2^2, \\ t_1 - \frac{1}{3}t_1^3 = t_2 - \frac{1}{3}t_2^3; \end{cases} \quad \begin{cases} (t_1 - t_2)(t_1 + t_2) = 0, \\ (t_1 - t_2)(3 - (t_1 + t_2)^2 + t_1 t_2) = 0. \end{cases}$$

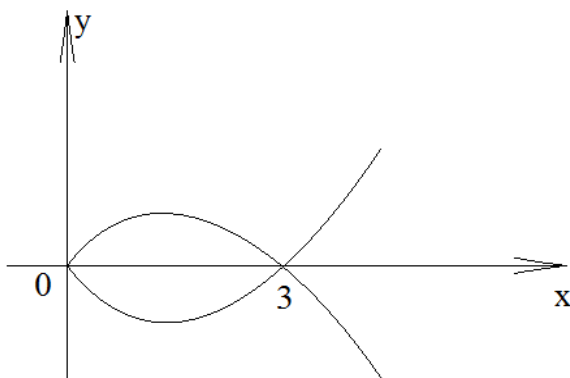
Оскільки $t_1 \neq t_2$, то одержимо систему:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 0, \\ t_1 t_2 = -3, \end{cases}$$

яка має розв'язки $t_1 = -\sqrt{3}, t_2 = \sqrt{3}$.

При $t = \pm\sqrt{3}$ маємо $x = 3$. Знайдемо $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{3t - t^3}{3} = \mp\infty$.

Оскільки $x(-t) = x(t)$, $y(-t) = -y(t)$, то крива симетрична відносно осі Ox та має вигляд:

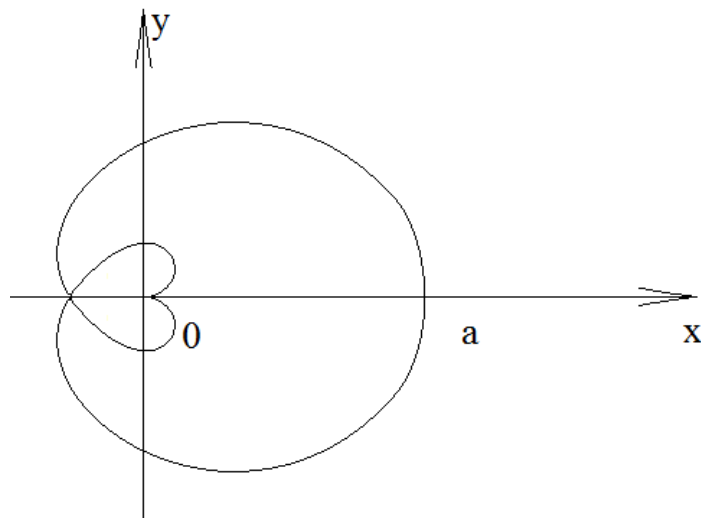


Приклад 9. Побудувати криву, що задано в полярній системі координат рівнянням

$$\rho = a \sin^4 \frac{\varphi}{4}.$$

Розв'язування. Оскільки функція $\rho = a \sin^4 \frac{\varphi}{4}$ парна, то крива симетрична

відносно полярної осі. Оскільки ця функція має період 4π та на половині періода від 0 до 2π вона зростає, а при зміні φ від -2π до 0 ми одержимо другу половину кривої, симетричну першій відносно полярної осі, то вся крива має вигляд:



Приклад 10. Намалювати фігуру, обмежену кривими $\rho_1 = 3 + \cos 4\varphi$ та $\rho_2 = 2 - \cos 4\varphi$.

Розв'язування. Знайдемо період функцій: $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Отже, досить зробити схематичний рисунок при $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Знайдемо декілька значень ρ і занесемо їх до таблиці :

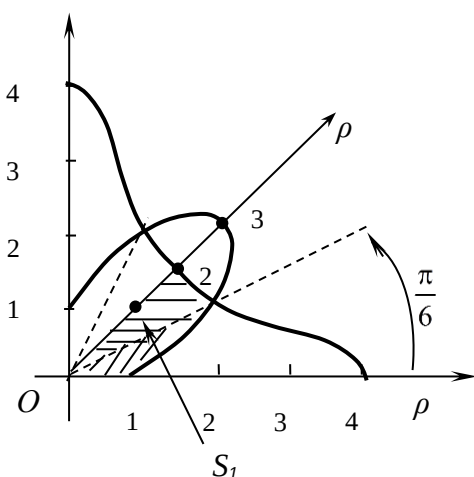
φ	0	$\pi/4$	$\pi/2$
ρ_1	4	2	4
ρ_2	1	3	1

Зауважимо, що усі значення ρ в таблиці є відповідно найбільшими та найменшими значеннями функцій ρ_1 та ρ_2 .

Знайдемо точки перетину кривих:

$$3 + \cos 4\varphi = 2 - \cos 4\varphi \Rightarrow \cos 4\varphi = -\frac{1}{2} \Rightarrow \Rightarrow \varphi = \pm \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Таким чином, частина фігури, що міститься в першій чверті, має вигляд (заштриховано її половину):

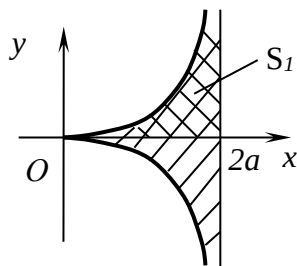


Приклад 11. Намалювати фігуру, обмежену кривою $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$, $a > 0$ та її асимптотою.

Розв'язування. Знайдемо область визначення функції:

$$\frac{x^3}{2a-x} \geq 0 \Rightarrow x(2a-x) \geq 0 \Rightarrow x \in [0, 2a).$$

Наша крива, яка має назву *цисоїда*, симетрична відносно осі Ox , перетинає цю вісь в одній точці $x=0$. Знайдемо $\lim_{x \rightarrow 2a-0} \pm \sqrt{\frac{x^3}{2a-x}} = \pm\infty$. Отже пряма $x=2a$ є вертикальною асимптотою графіка. Таким чином фігура, про яку йде мова, має вигляд:



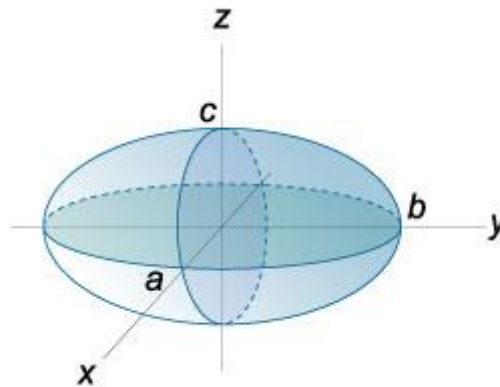
Поверхні другого порядку

Загальне рівняння поверхні другого порядку має вигляд $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Fyz + 2Gzx + 2Hxy + 2Px + 2Qy + 2Rz + D = 0$, де x, y, z – координати точок поверхні, $A, B, C, \dots$ – дійсні числа.

Спростивши його, можна одержати 17 різних канонічних рівнянь, які відповідають певним поверхням(або точці чи пустій множині). Розглянемо їх.

1. *Еліпсоїд*

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$$

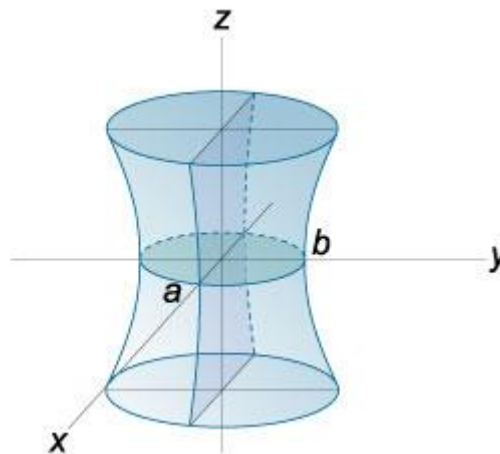


2. *Уявний еліпсоїд*

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = -1$$

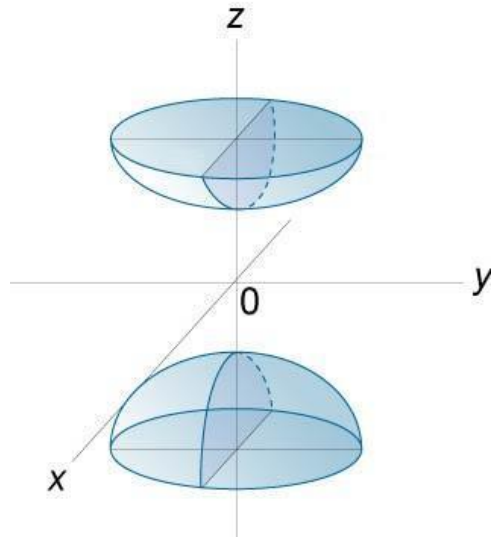
3. *Однополый гіперболоїд*

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$$

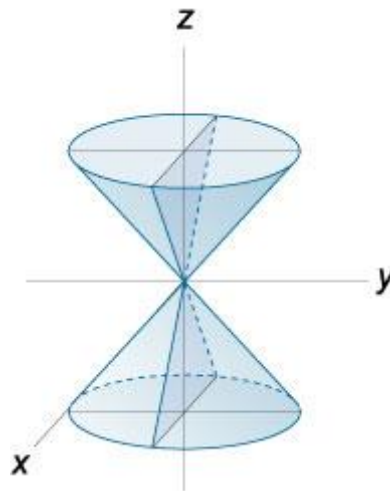


4. *Двополий гіперболоїд*

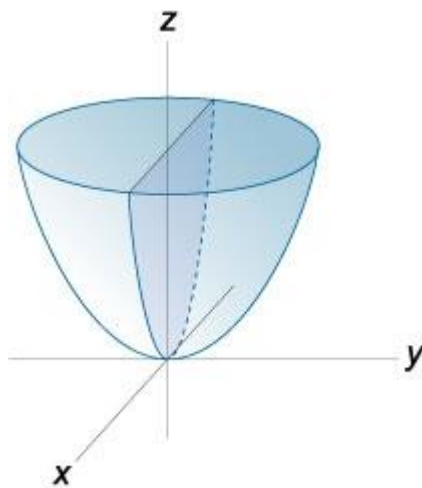
$$x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = -1$$



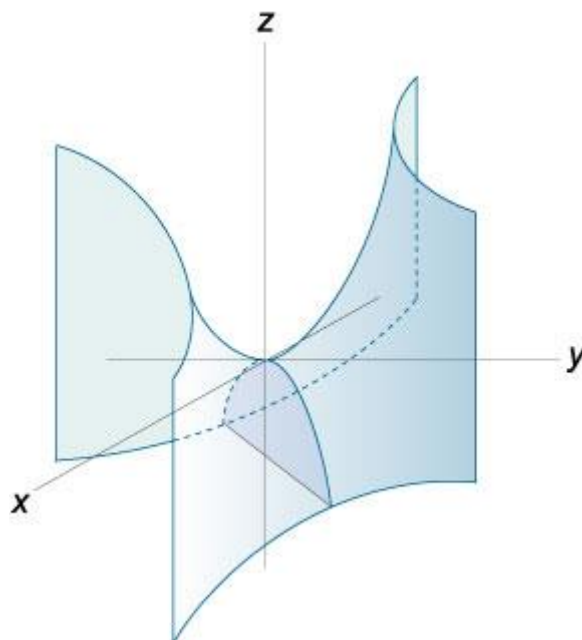
5. *Конічна поверхня*
 $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 0$



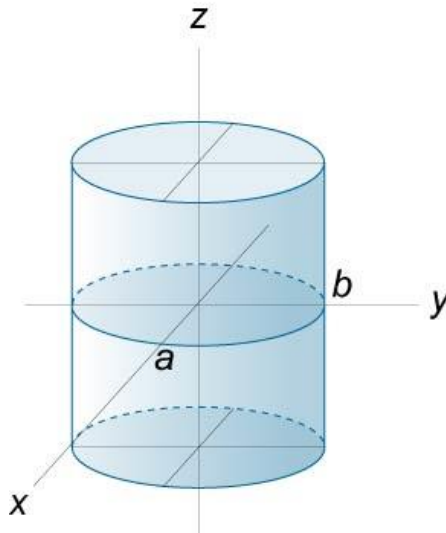
6. *Уявна конічна поверхня*
 $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 0$
7. *Еліптичний параболоїд*
 $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z = 0$



8. *Гіперболічний параболоїд*
 $x^2/a^2 - y^2/b^2 - z = 0$



9. *Еліптичний циліндр*
 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$

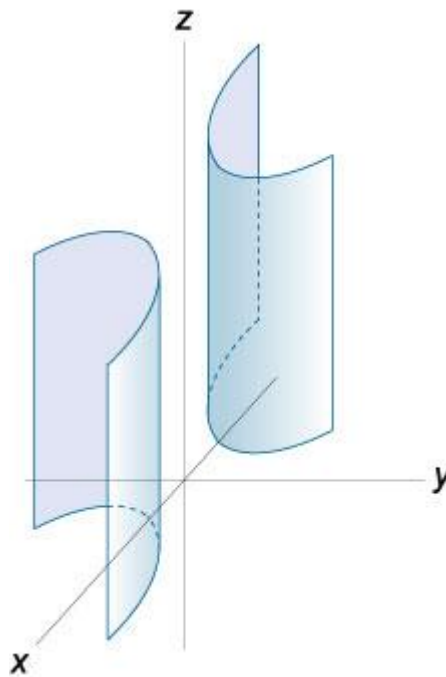


10. *Уявний еліптичний циліндр*

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = -1$$

11. *Гіперболічний циліндр*

$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$$



12. *Площини, що перетинаються*

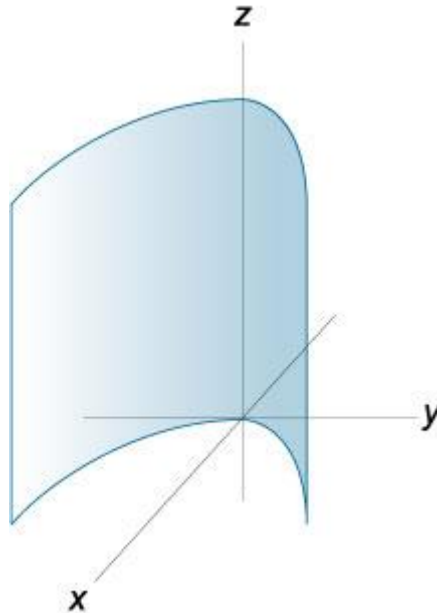
$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 0$$

13. *Уявні площини, що перетинаються*

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 0$$

14. *Параболічний циліндр*

$$x^2/a^2 - y = 0$$



15. *Паралельні площини*

$$x^2/a^2 = 1$$

16. *Уявні паралельні площини*

$$x^2/a^2 = -1$$

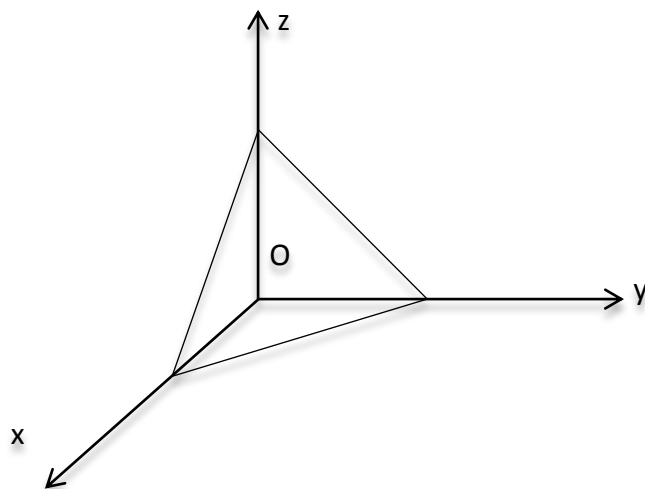
17. *Площини, що співпадають*

$$x^2/a^2 = 0$$

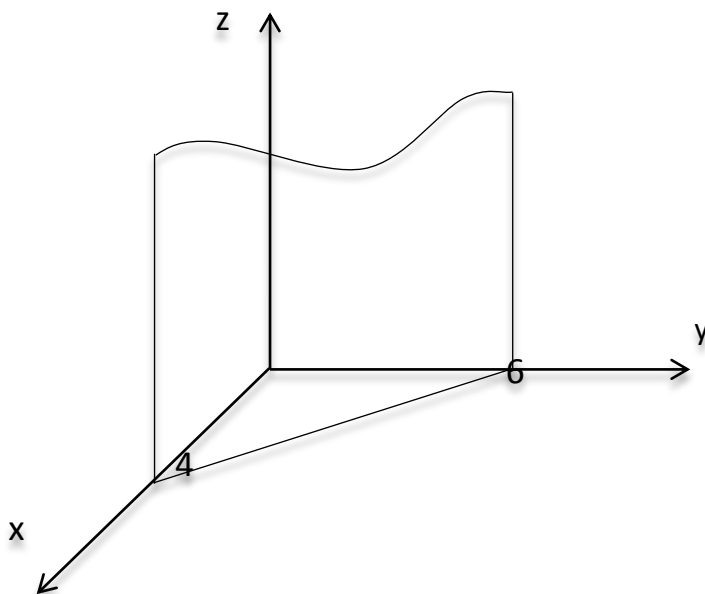
Як будувати перетин поверхонь

1). Площини.

Якщо в рівнянні $Ax + By + Cz + D = 0$ $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$, то ця площина перетинає усі координатні осі і виглядає так:

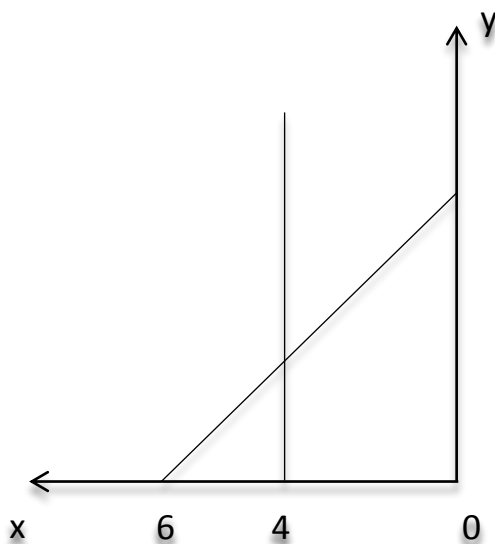


Якщо в рівнянні площини одна з констант А, чи В, чи С дорівнює нулю ($D \neq 0$), то площина паралельна одній з координатних осей. Наприклад, площина $3x + 2y = 12$ виглядає так:

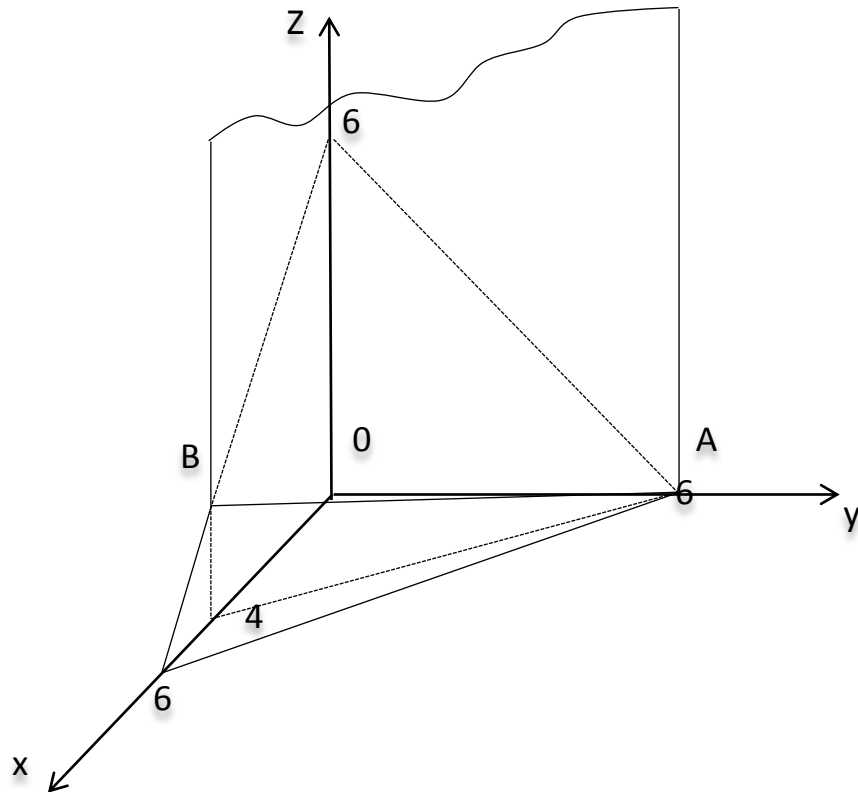


Приклад 1. Намалювати перетин площин $3x + 2y = 12$ та $x + y + z = 6$:

Розв'язування. Перша площина вже намальована. Друга площина перетинає координатні осі в точках $x = 6$, $y = 6$, $z = 6$. Легко помітити, що площини мають спільну точку $A(0;6;0)$. Координатну площину xOz площини перетинають по прямих $x = 4$ та $x + z = 6$:



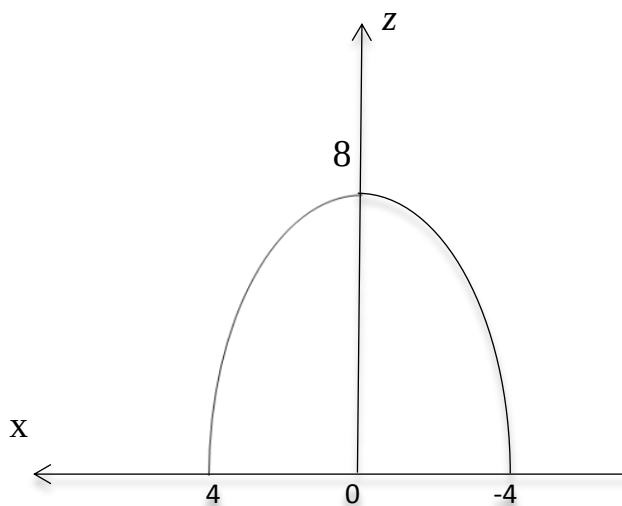
Ці прямі перетинаються в точці $B(4;0;2)$. Таким чином площини перетинаються по прямій AB , частина якої лежить у першому октанті:



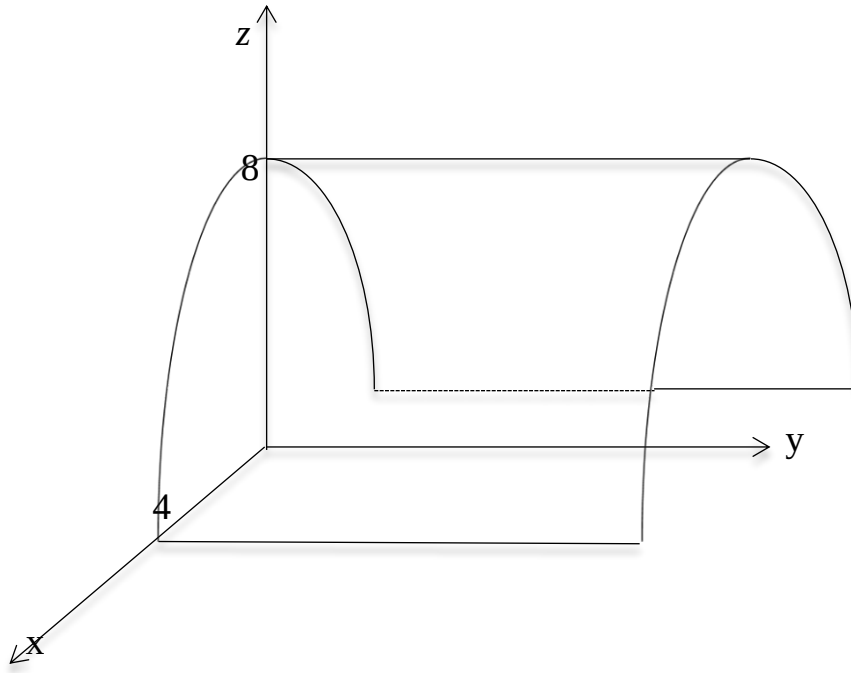
2). Якщо в рівнянні поверхні відсутня якась змінна (тобто коефіцієнти тих членів рівняння, які містять цю змінну, дорівнюють нулю), то ця поверхня циліндрична.

Приклад 2. Намалювати поверхню $2z = 16 - x^2$.

Розв'язування. В площині xOz малюємо параболу $2z = 16 - x^2$:

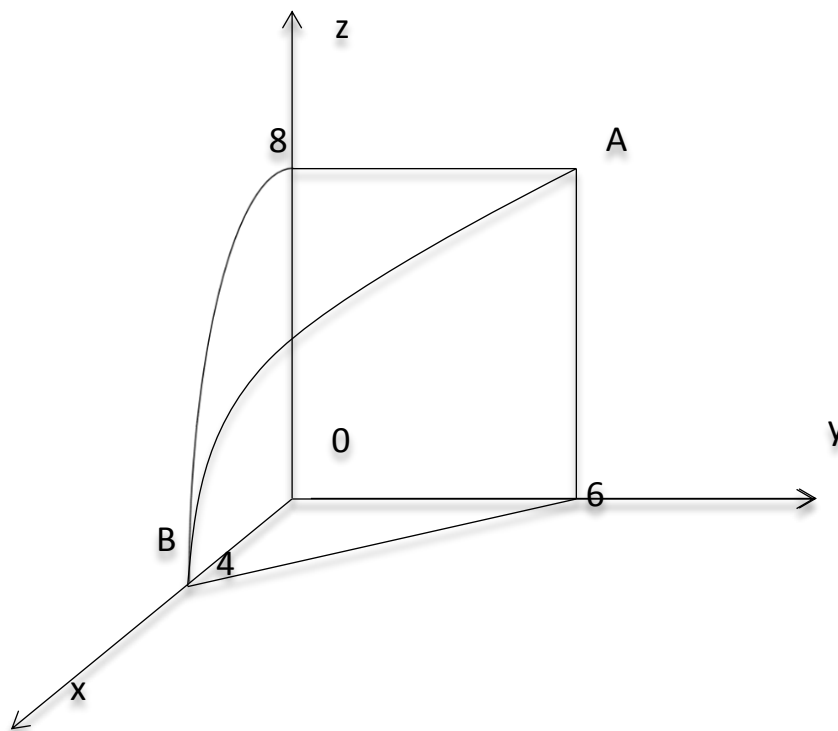


Рухаємо її вздовж осі Oy . Одержуємо поверхню:



Приклад 3. Намалювати лінію перетину поверхні $2z = 16 - x^2$ та площини $3x + 2y = 12$.

Розв'язування. Циліндрична поверхня та площина перетинають координатну площину yOz по прямих $z = 8$ та $y = 6$. Отже наші поверхні мають спільну точку $A(0;6;8)$. Крім того легко помітити, що обидві поверхні перетинають вісь Ox в точці $B(4;0;0)$. З'єднуємо точки A та B гладкою, опуклою догори кривою, частина якої лежить у першому октанті:



3). Якщо ви пам'ятаєте вигляд усіх поверхонь другого порядку, але не пам'ятаєте їх рівняння (або в умові задачі рівняння не є канонічним), вам допоможе так званий метод перетинів.

Приклад 4. Намалювати поверхню $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

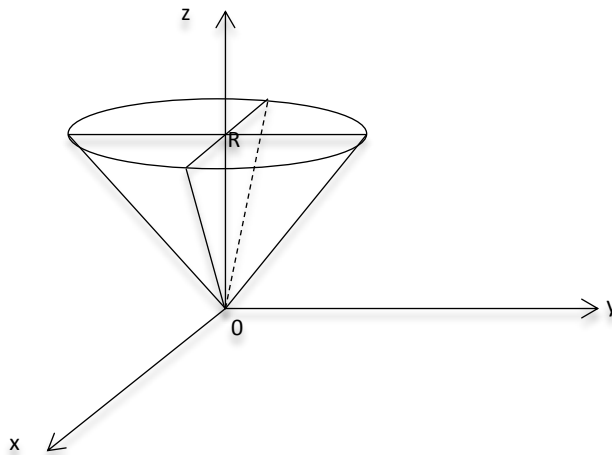
Розв'язування. Перетнемо нашу поверхню площинами $x = 0$, $y = 0$, $z = R$, де $R > 0$. Одержимо:

а) в площині $x = 0$ криву $z = |y|$;

б) в площині $y = 0$ криву $z = |x|$;

в) в площині $z = R$ криву $x^2 + y^2 = R^2$.

Намалюємо їх в просторі:



Очевидно, що це половина конічної поверхні (див. §3).

Приклад 5. Намалювати поверхню $z = xy$.

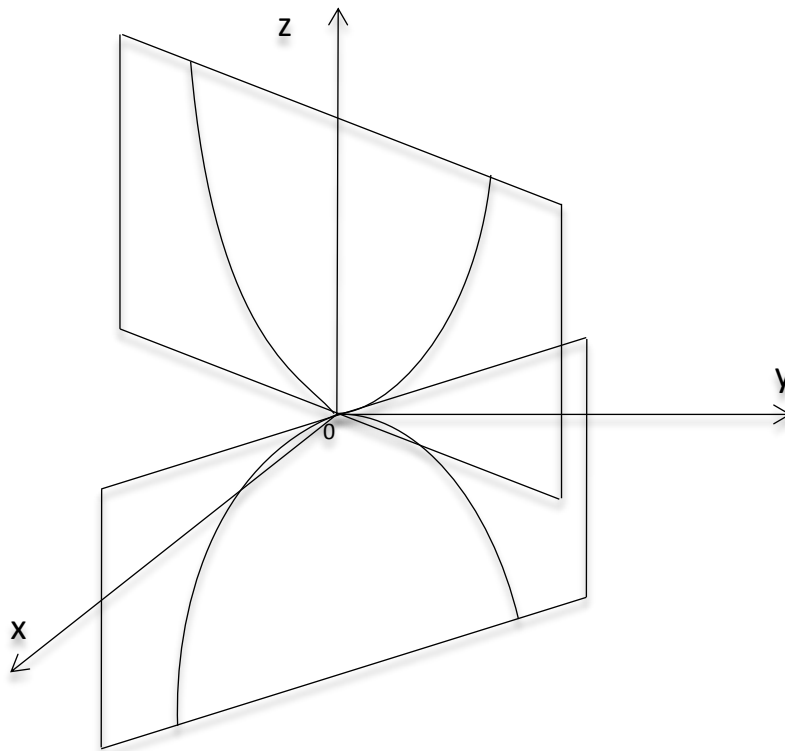
Розв'язання. Очевидно, що координатні площини поверхня перетинає по осях Ох та Оу. Перетнемо її площинами $y = x$, $y = -x$, $z = K$. Одержимо:

а) в площині $y = x$ криву $z = x^2$;

б) в площині $y = -x$ криву $z = -x^2$;

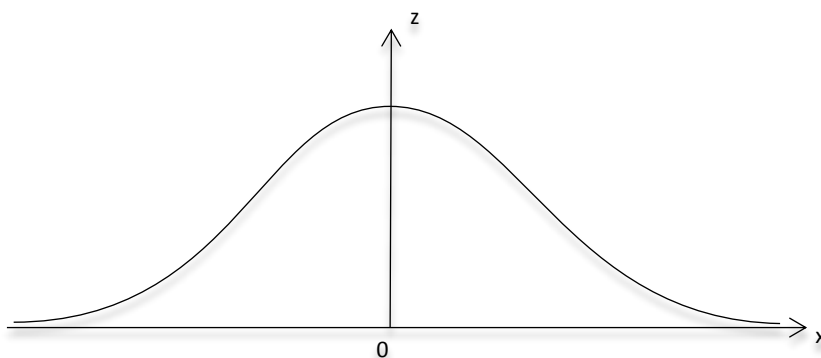
в) в площині $z = K$ криву $xy = K$.

Намалюємо дві параболы в просторі:



Малювати гіперболи $xy = K$ ($K > 0$, $K < 0$) немає сенсу, тому що вже ясно, що серед усіх поверхонь другого порядку це може бути тільки гіперболічний параболоїд. Можна довести, що він одержується з поверхні $z = x^2 - y^2$ (див. §3) шляхом повороту на 45° навколо осі Oz .

4) Нагадаємо, що рівняння $z = \varphi(x^2 + y^2)$ задає поверхню обертання (навколо осі Oz). Наприклад, поверхня $z = a \cdot e^{-(x^2+y^2)}$ утворюється шляхом обертання навколо осі Oz кривої $z = a \cdot e^{-x^2}$, яку неважко намалювати з допомогою диференціального числення (функція має один екстремум – точку максимуму $(0; a)$; функція парна, отже крива симетрична відносно осі Oz ; вісь Ox є її горизонтальною асимптотою; нарешті точки перегину неважко знайти):



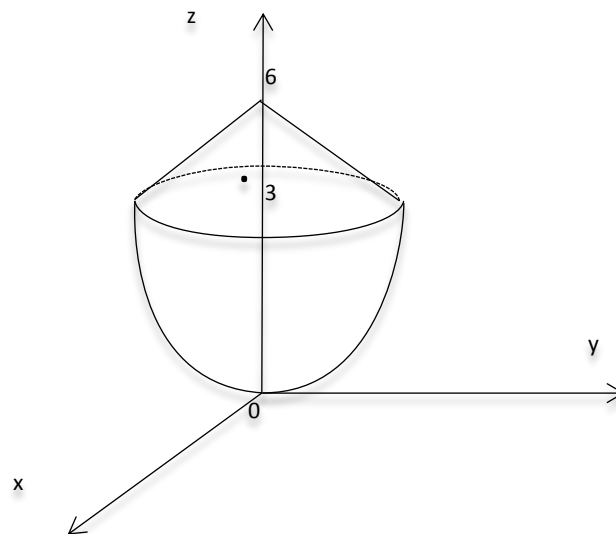
Намалювати саму поверхню пропонуємо читачеві. Зауважимо, що більшість поверхонь другого порядку в частинному випадку можуть бути поверхнями обертання. Наприклад, параболоїд обертання $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2}$, гіперболоїд обертання $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ тощо. Якщо осі обертання у таких поверхонь співпадають, то лінією їх перетину буде коло.

Приклад 6. Намалювати лінію перетину поверхонь $x^2 + y^2 + z^2 = 6z$ та $z = 6 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

Розв'язування. Сфера утворена обертанням кола $x^2 + z^2 = 6z$ навколо осі Oz. Конічна поверхня утворена обертанням прямої $z = 6 - x$ теж навколо осі Oz. Знайдемо точки перетину кола та прямої:

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 6z \\ z = 6 - x \end{cases} \Rightarrow (6 - z)^2 + z^2 - 6z = 0 \Rightarrow z^2 - 9z + 18 = 0 \Rightarrow z_1 = 3, z_2 = 6.$$

Значенню $z = 6$ відповідає одна спільна точка цих поверхонь. Значенню $z = 3$ відповідає коло $x^2 + y^2 = 6$, яке лежить в горизонтальній площині. Таким чином лінія перетину має вигляд:

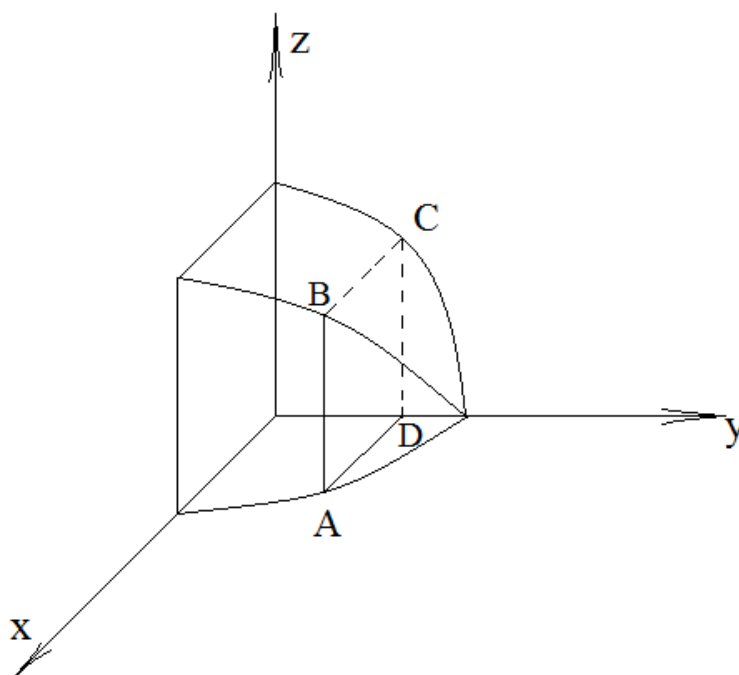


Приклад 7. Осі двох циліндрів з радіусами основи, рівними a , перетинаються під прямим кутом. Зобразити спільну частину цих циліндрів.

Розв'язування. Нехай осі циліндрів співпадають з осями Ox та Oz декартової системи координат. Розглянемо восьму частину тіла, яка знаходиться в першому октанті (усі інші сім частин тіла, які знаходяться в інших октантах, будуть симетричні їй відносно тієї чи іншої координатної площини).

Вертикальний циліндр перетинає площину xOy по колу з центром в точці O та

радіусом a та має твірні, що паралельні прямій AB . Одна з цих твірних є лінією перетину циліндра з площиною xOz . Горизонтальний циліндр перетинає площину zOy по колу з центром в точці O та радіусом a та має твірну, що паралельна прямій BC . Одна з цих твірних є лінією перетину циліндра з площиною xOz . Обидва циліндри перетинаються по кривій, частина якої знаходиться в першому октанті та проходить через точку B :



Тіла у просторі

Зміст цього розділу є електронним варіантом роботи «Применение технических средств обучения в курсе высшей математики по теории поверхностей, кратных интегралов и в курсе инженерной графики по теории графических алгоритмов и их постановка на ЭВМ» (укладачі: Андрієвська М.Г., Антонюк В.А., Дундученко Л.О., Дундученко Л.О., Скуратовський М.В., Новикова Н.М., Щербина В.В., відповідальний редактор: Яремчук Ф.П., рік видання: 1980). На малюнках зображені тіла, що обмежені заданими поверхнями (чотиризначне число означає номер завдання в задачнику Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М. 1985).

3560

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$$

$$x=0,$$

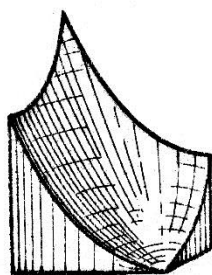
$$x=a,$$

$$y=0,$$

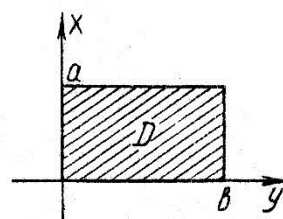
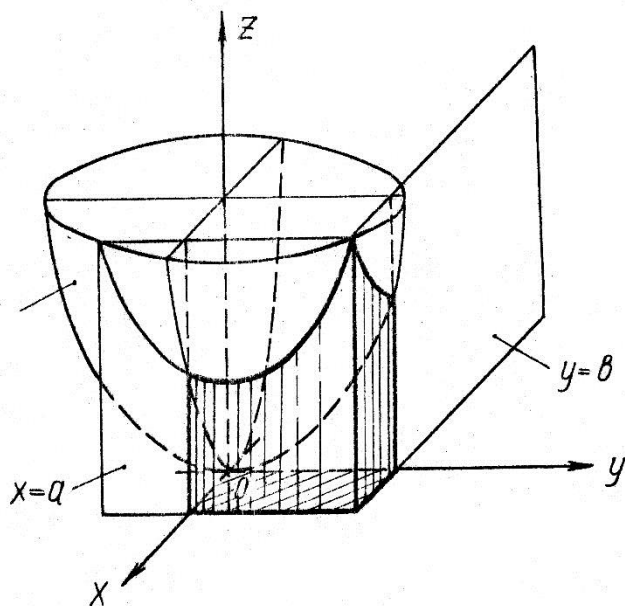
$$y=b,$$

$$z=0$$

$$V=?$$

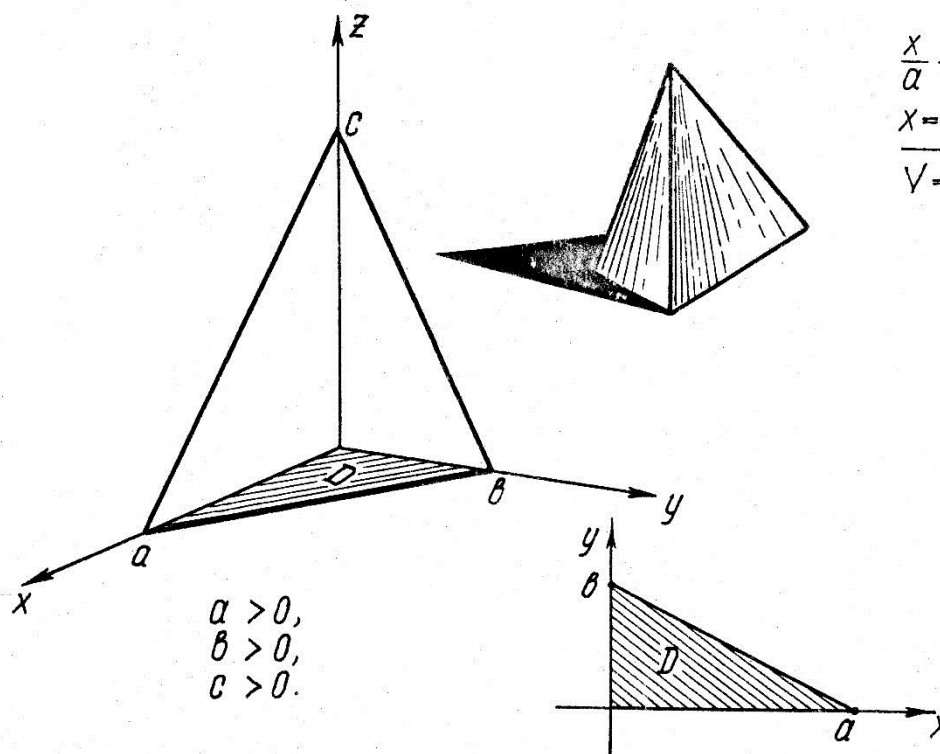


$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$$



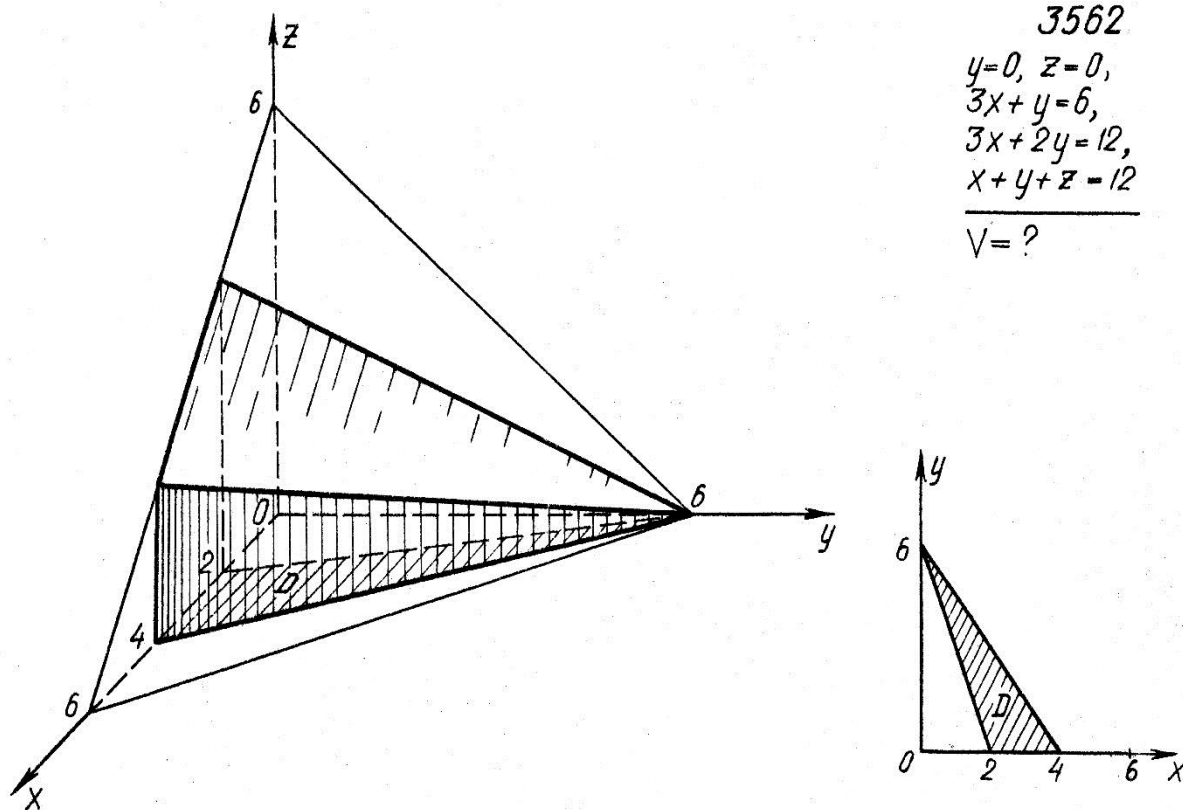
3561

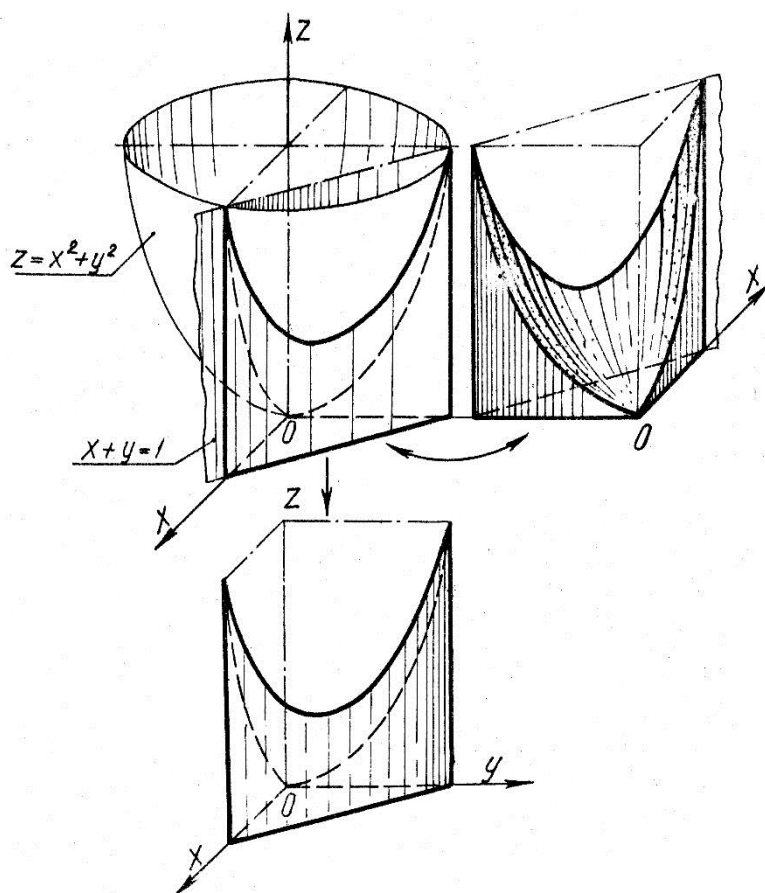
$$\begin{array}{l} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \\ x=0, y=0, z=0 \\ \hline V = ? \end{array}$$



3562

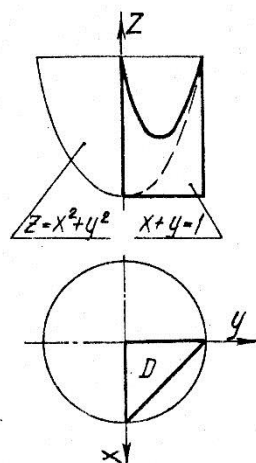
$$\begin{array}{l} y=0, z=0, \\ 3x+y=6, \\ 3x+2y=12, \\ x+y+z=12 \\ \hline V = ? \end{array}$$

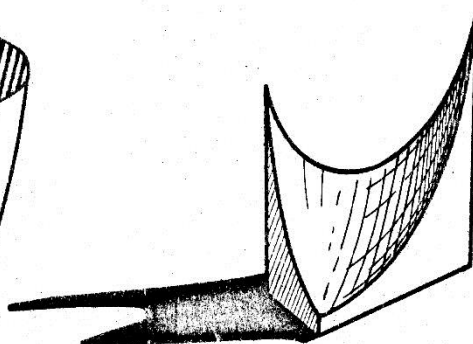
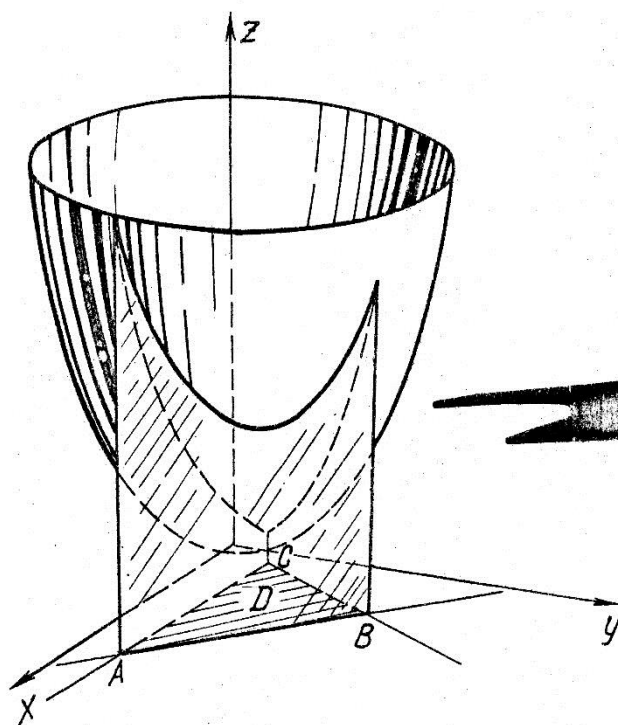




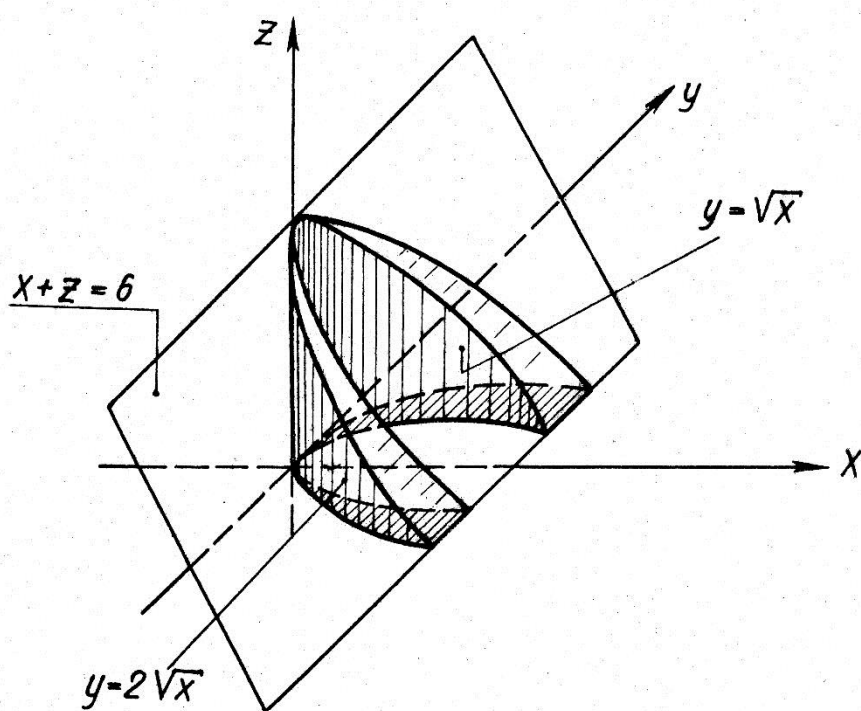
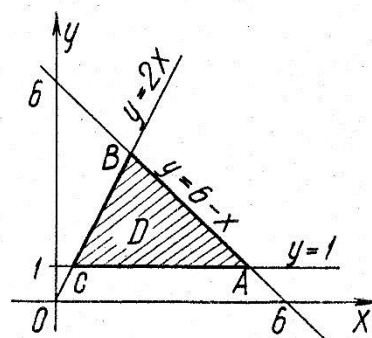
$$\begin{aligned}
 &3563 \\
 &z = x^2 + y^2 \\
 &x + y = 1 \\
 &x = 0, y = 0, z = 0
 \end{aligned}$$

$V = ?$

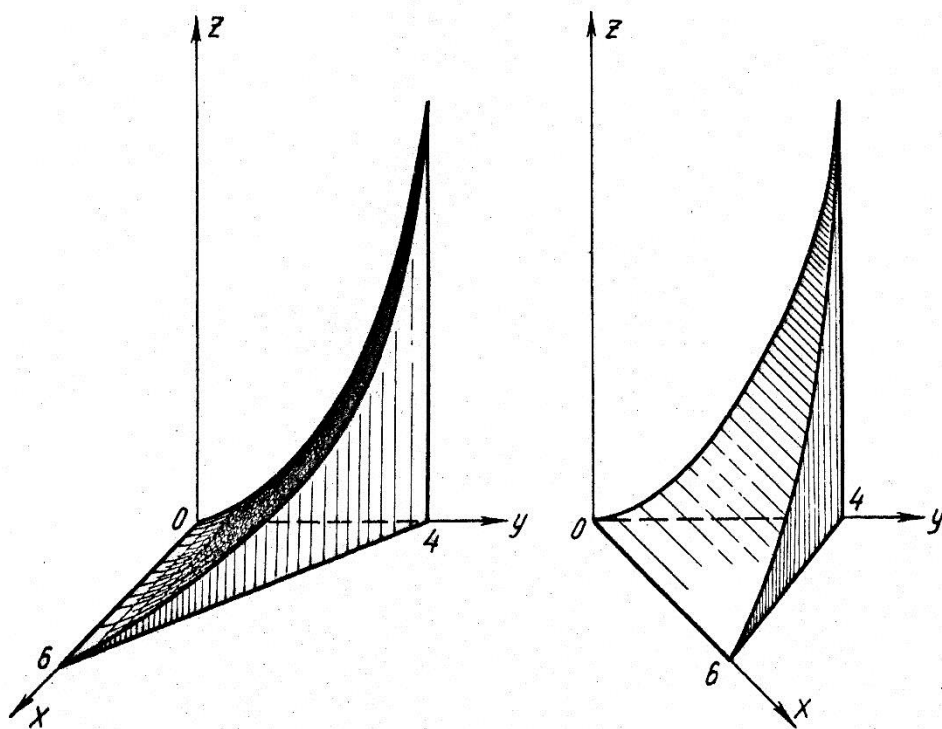




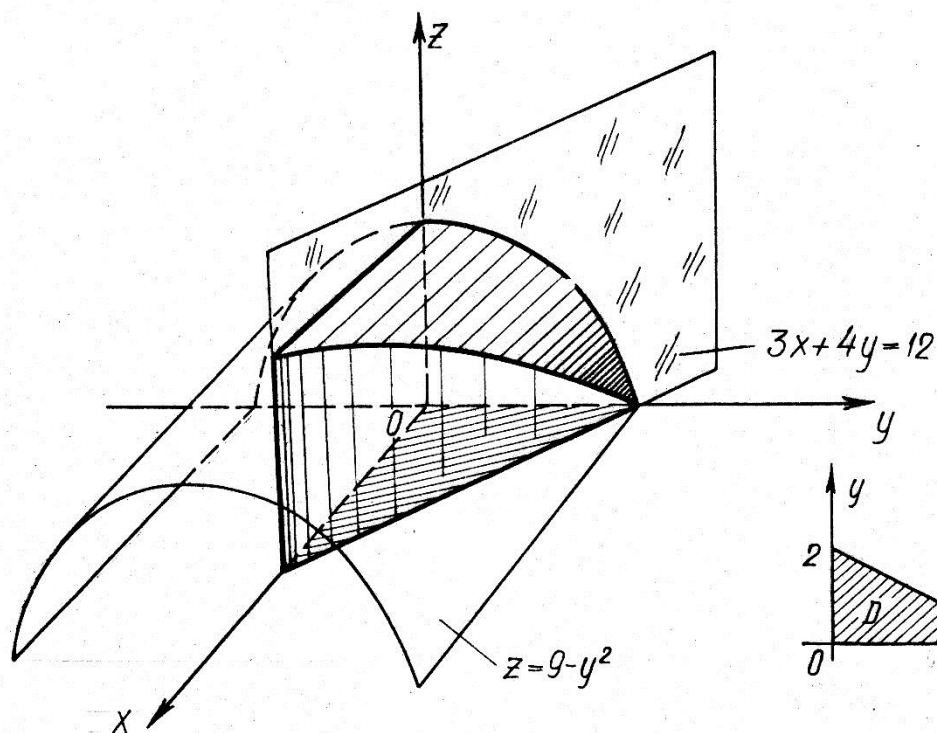
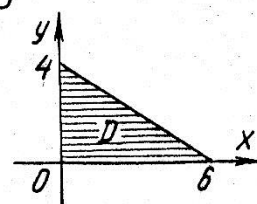
$$\begin{array}{r}
 3564 \\
 z = x^2 + y^2 \\
 z = 0, \quad y = 1 \\
 y = 2x, \\
 y = 6 - x \\
 \hline
 V = ?
 \end{array}$$



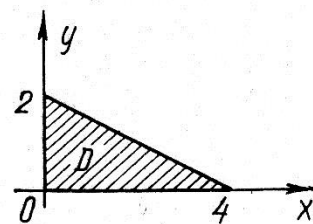
$$\begin{array}{r}
 3565 \\
 x + z = 6 \\
 y = 2\sqrt{x} \\
 y = \sqrt{x} \\
 z = 0 \\
 \hline
 V = ?
 \end{array}$$



$$\begin{array}{l}
 3566 \\
 z = -\frac{y^2}{2}, \\
 2x + 3y - 12 = 0, \\
 z = 0 \\
 \hline
 V = ?
 \end{array}$$



$$\begin{array}{l}
 3567 \\
 z = 9 - y^2 \\
 3x + 4y = 12 \quad (y \geq 0) \\
 x = 0 \\
 y = 0 \\
 z = 0 \\
 \hline
 V = ?
 \end{array}$$



3568

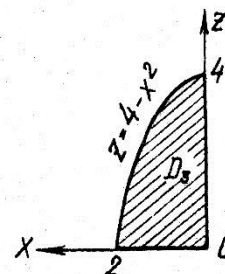
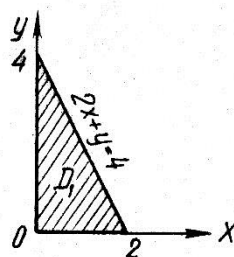
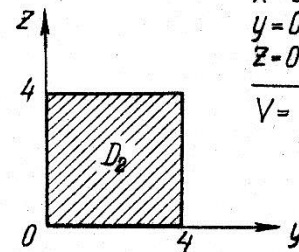
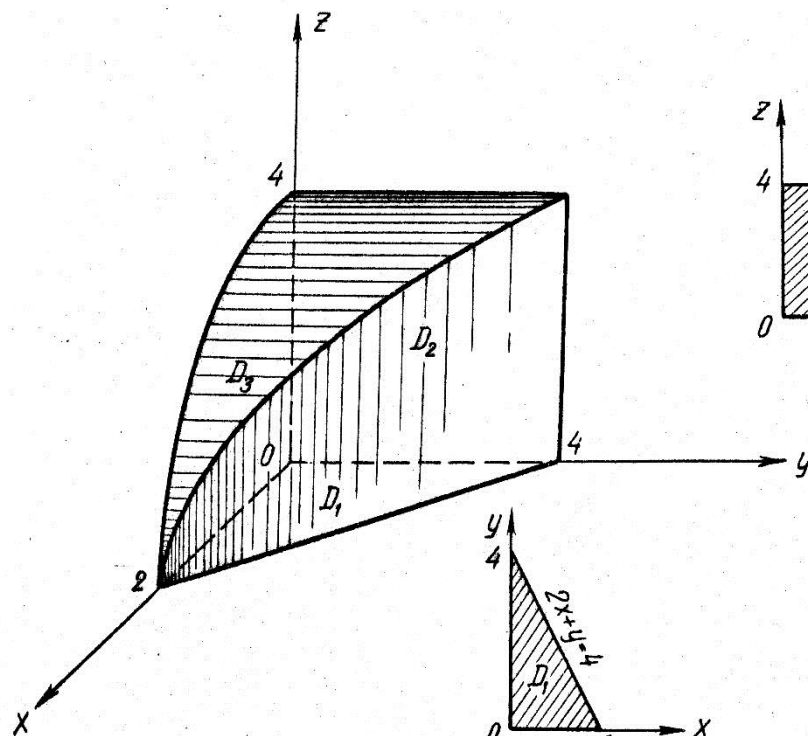
$$z = 4 - x^2, \quad 2x + y = 4,$$

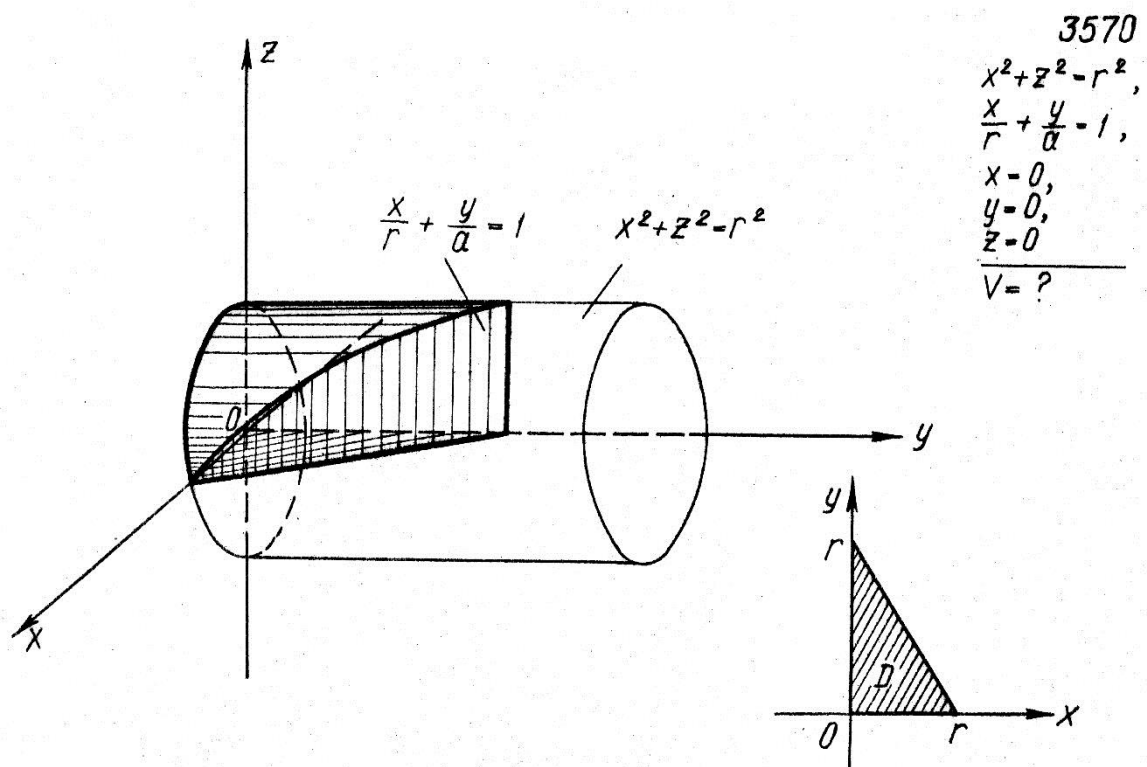
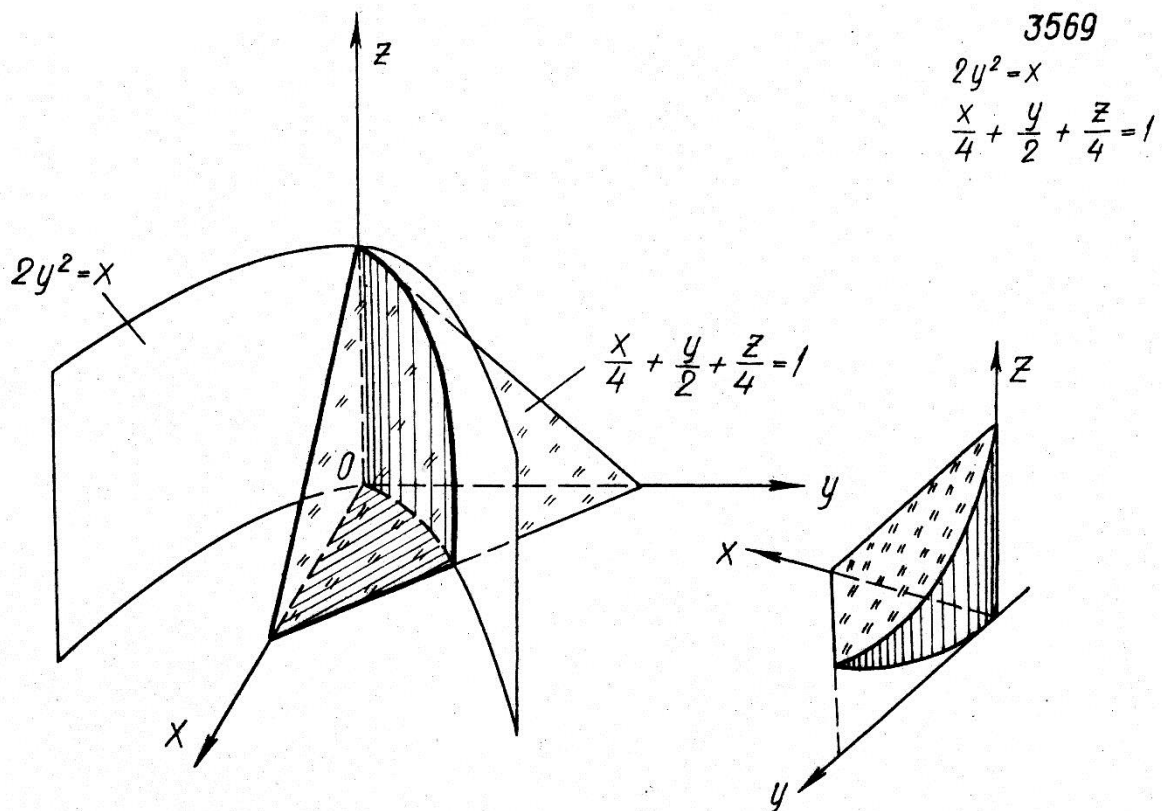
$$x = 0,$$

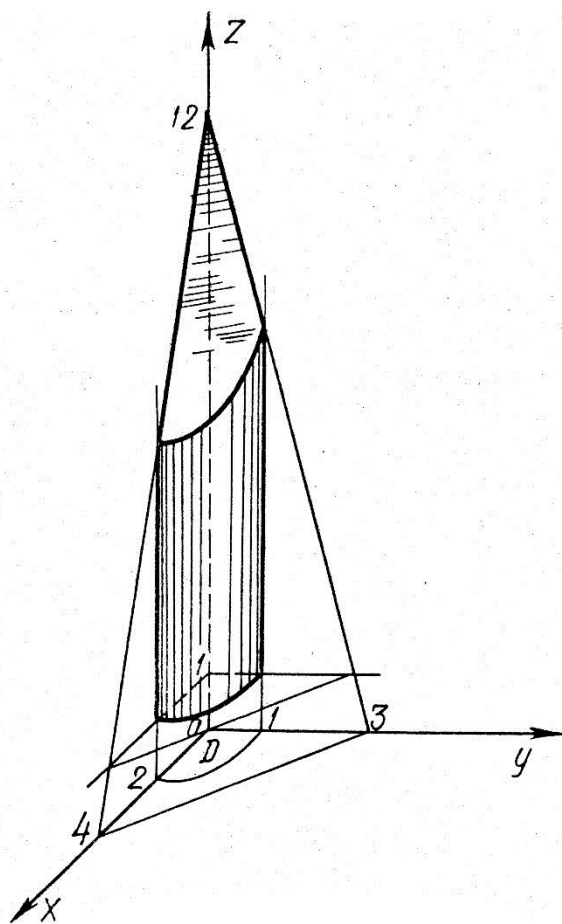
$$y = 0,$$

$$z = 0.$$

$$V = ?$$







3571

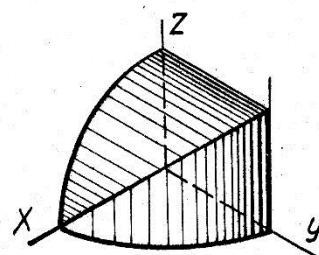
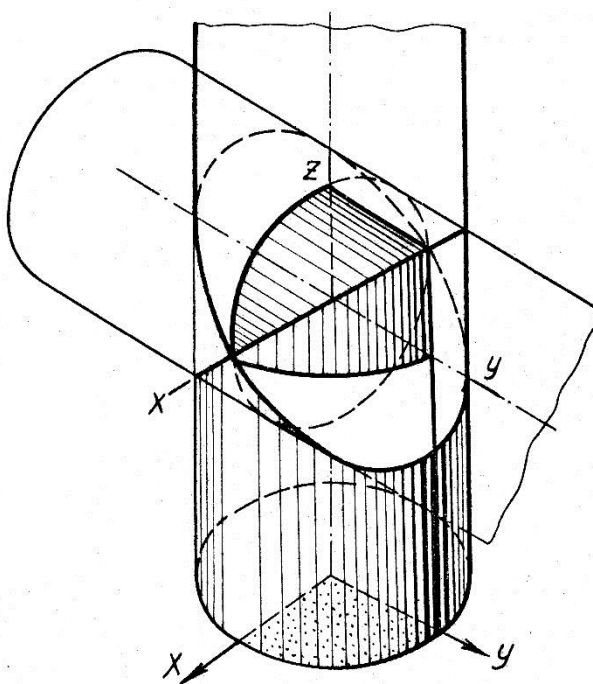
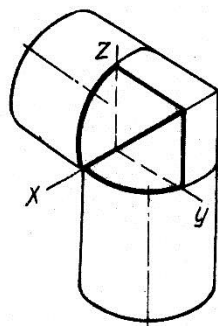
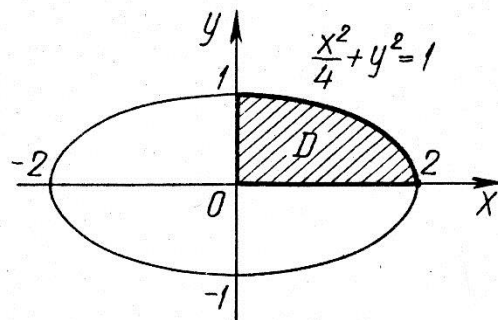
$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1,$$

$$z = 12 - 3x - 4y;$$

$$z = 1$$

$$(x \geq 0, y \geq 0)$$

$V = ?$



3572

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$x^2 + z^2 = R^2$$

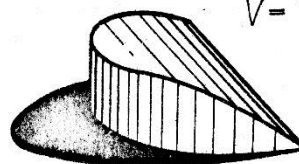
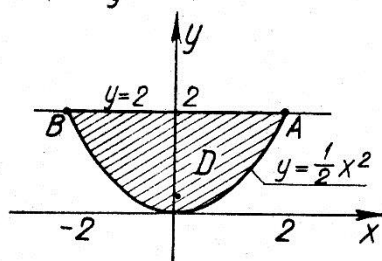
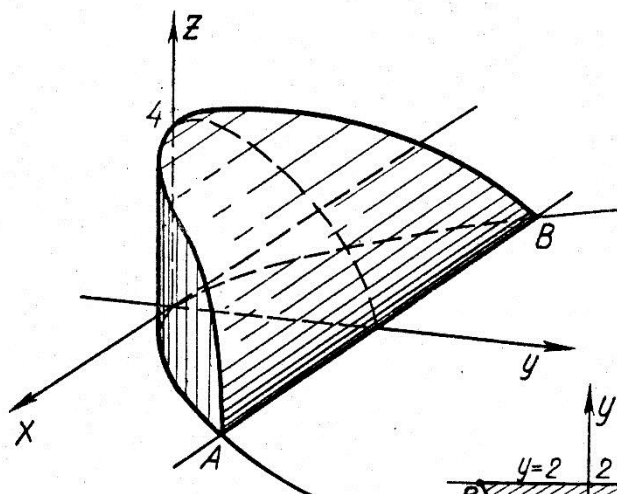
$V = ?$

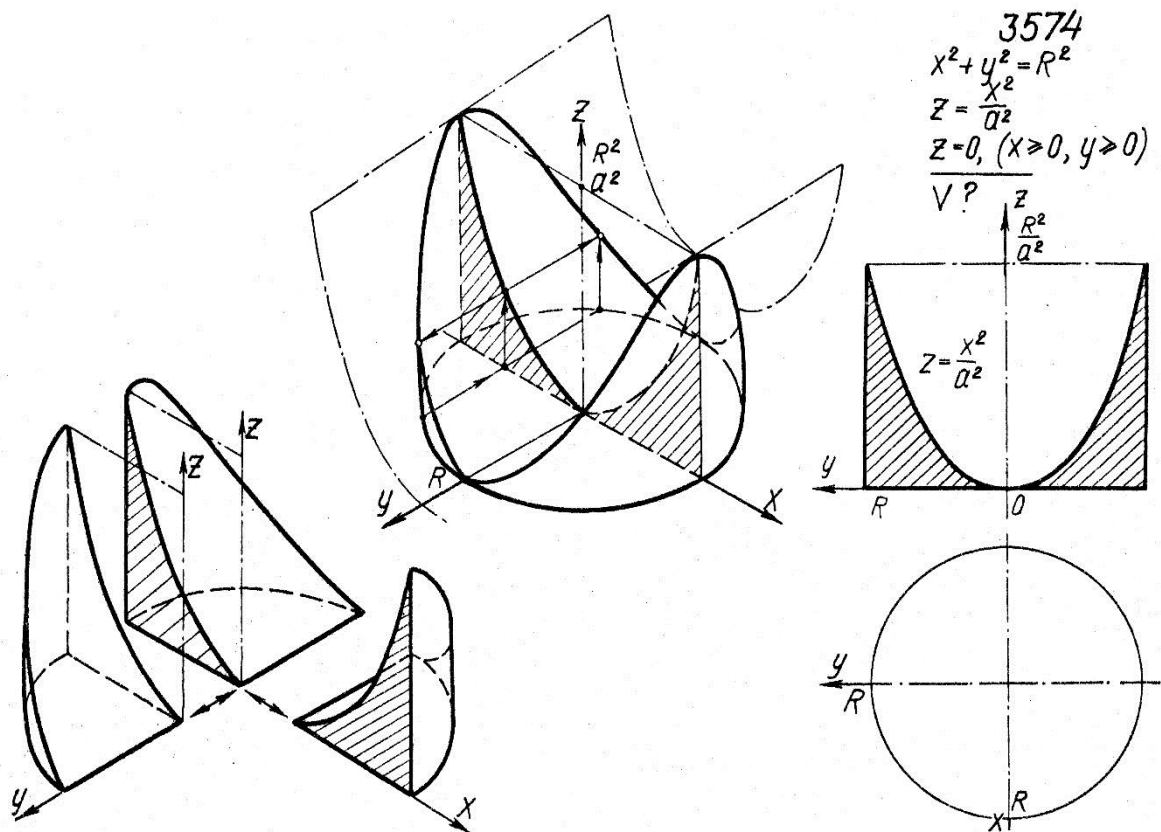
3573

$$z = 4 - y^2,$$

$$y = \frac{x^2}{2}, z = 0$$

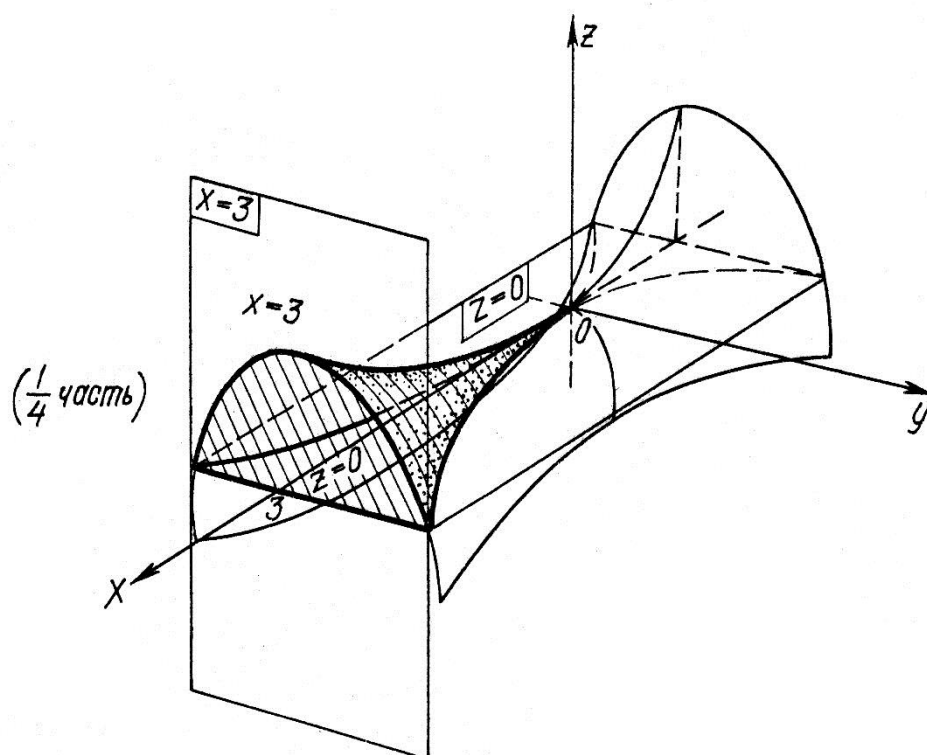
$$V = ?$$





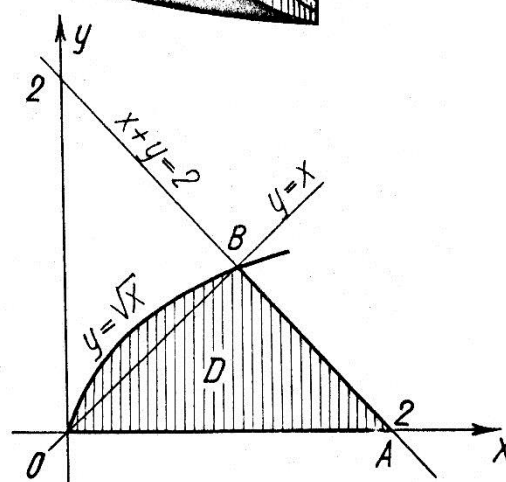
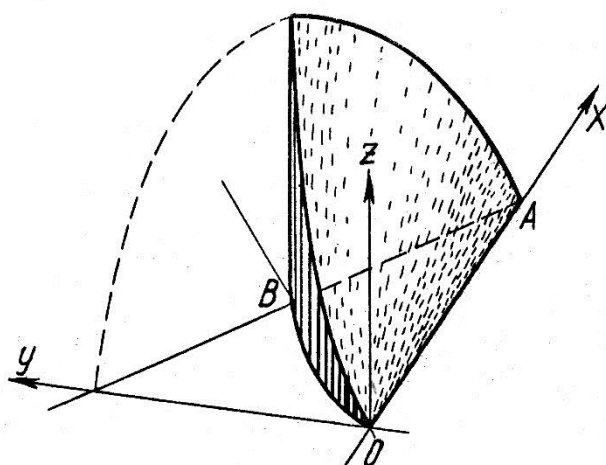
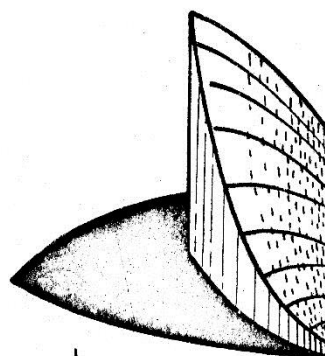
N° 3575

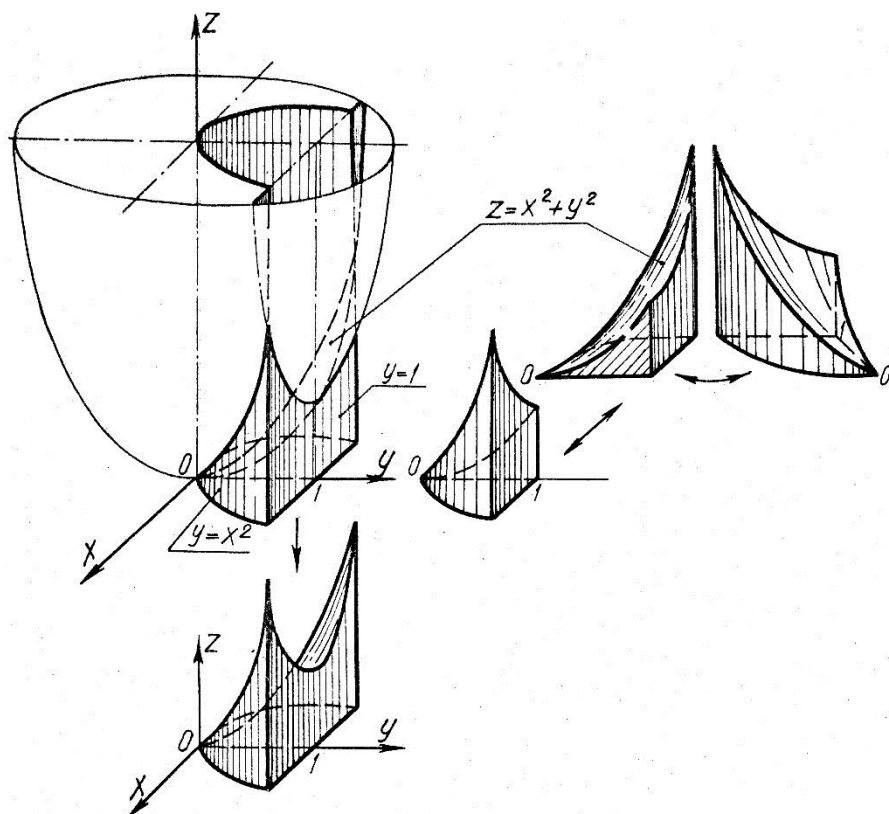
$$\begin{array}{l} z = x^2 - y^2, \\ z = 0, \\ x = 3. \\ \hline V = ? \end{array}$$



3576

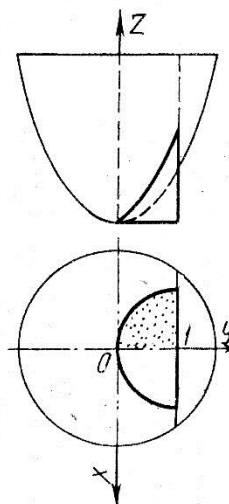
$$\begin{array}{l} z = xy, \\ y = \sqrt{x}, \\ x + y = 2, \\ y = 0, \quad z = 0. \\ \hline V = ? \end{array}$$

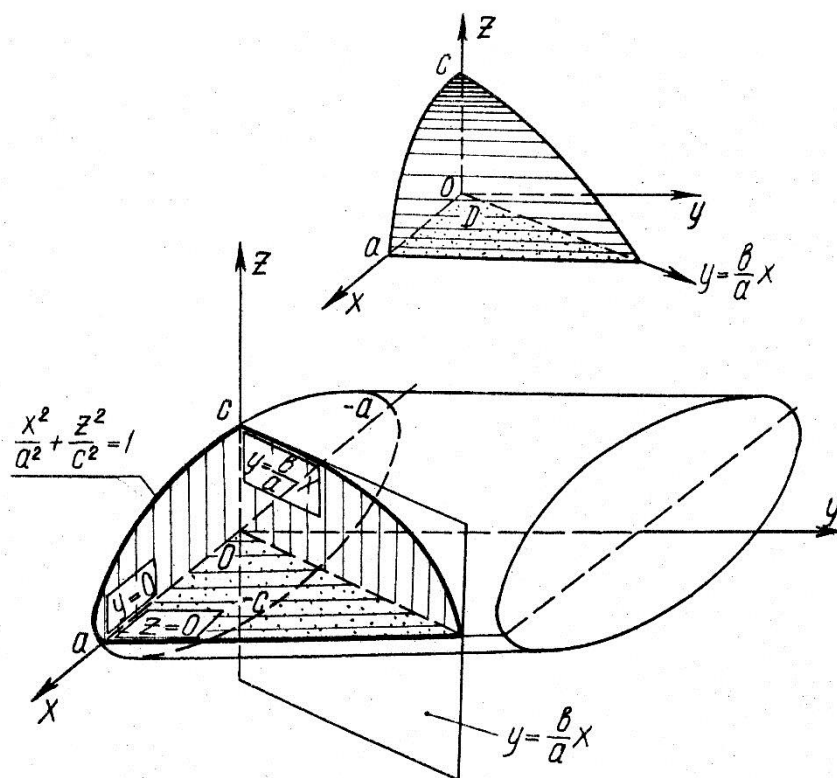




3577

$$\begin{array}{l} z = x^2 + y^2 \\ y = x^2 \\ y = 1 \\ z = 0 \\ \hline V = ? \end{array}$$





3578

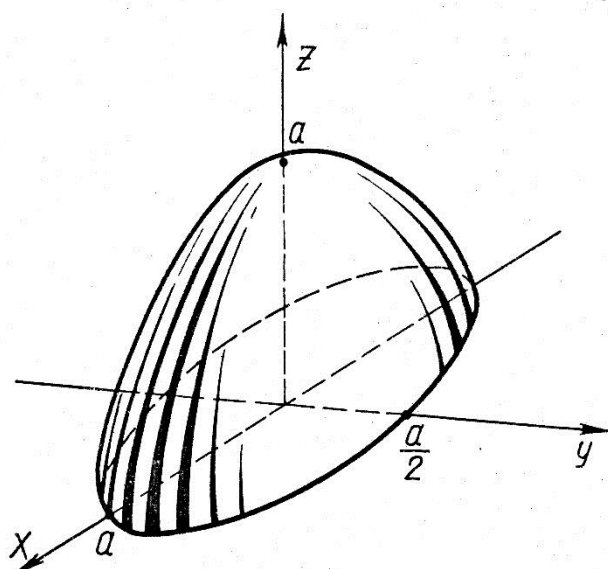
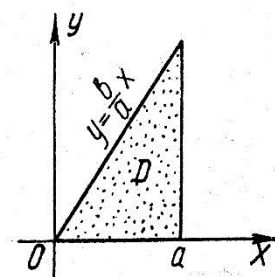
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$y = \frac{b}{a}x,$$

$$y = 0$$

$$z = 0$$

$$x \geq 0$$

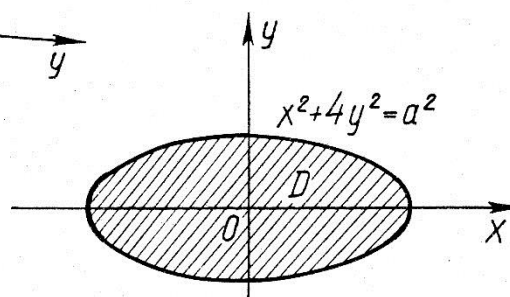
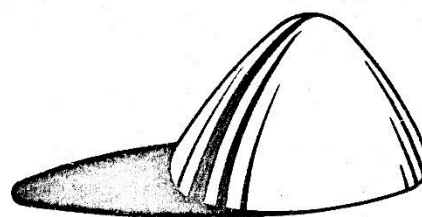


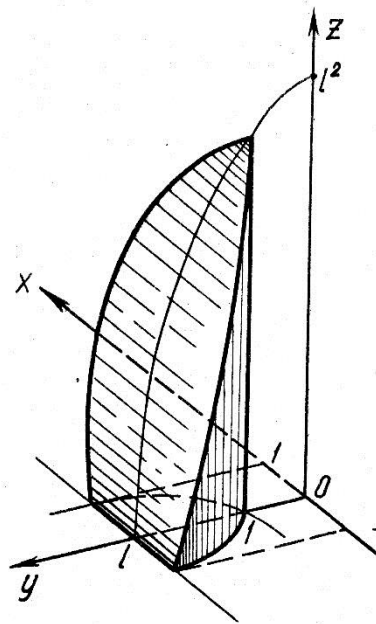
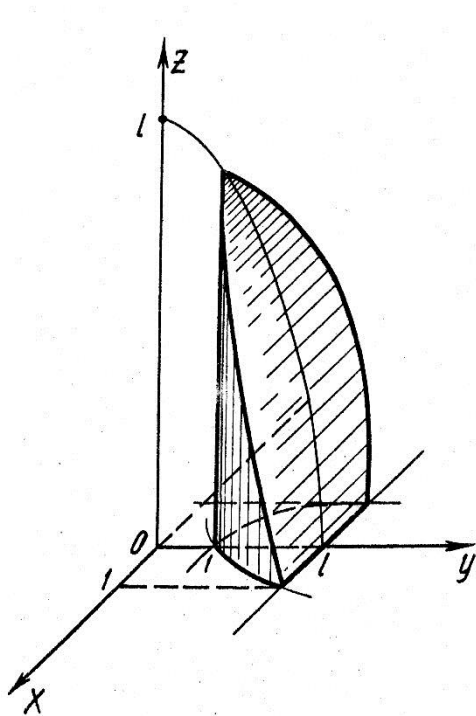
3579

$$z = \frac{a^2 - x^2 - 4y^2}{a}$$

$$z = 0$$

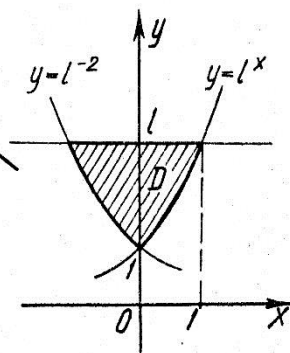
$$V = ?$$

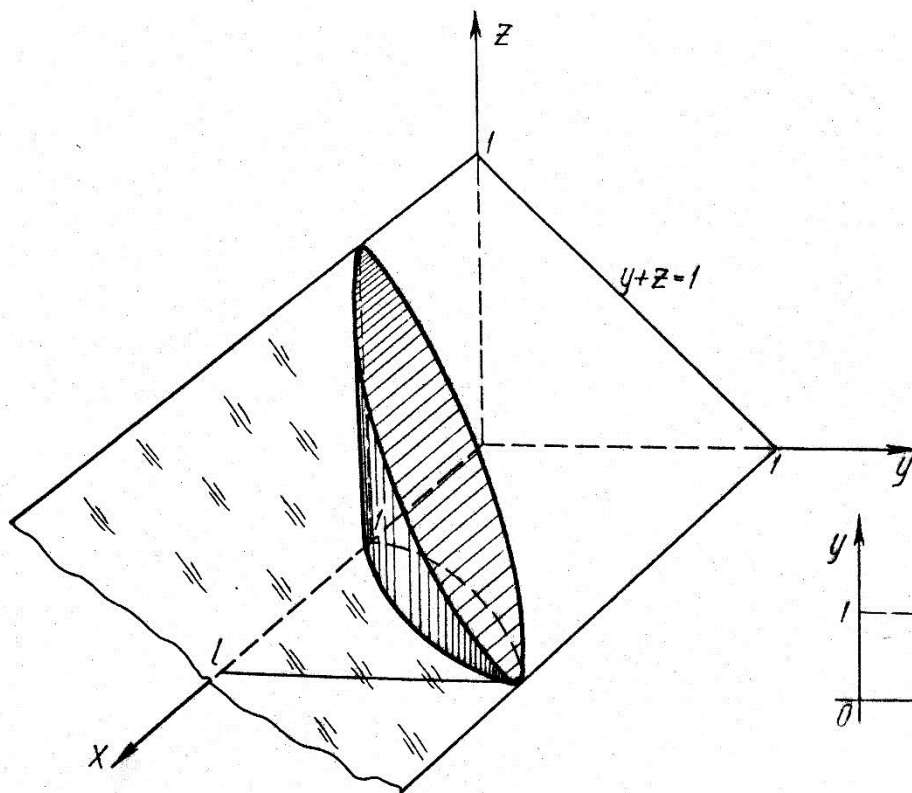




3580
 $y = l^x, \quad y = l^{-x},$
 $z = l^2 - y^2,$
 $z = 0$

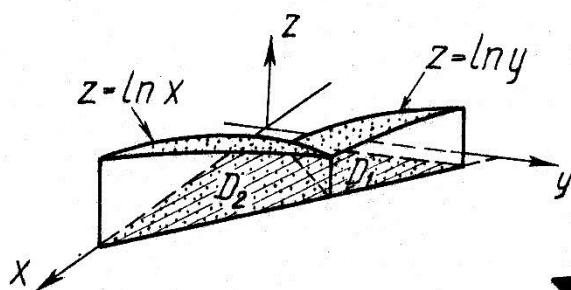
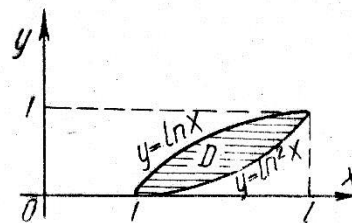
 $V = ?$





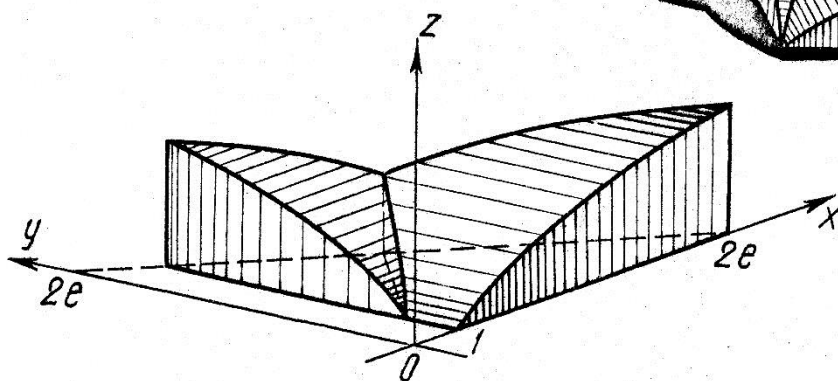
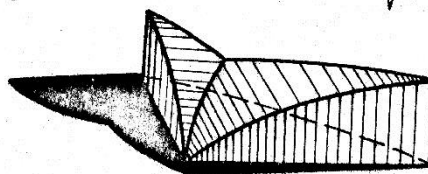
3581
 $y = \ln x$
 $y = \ln^2 x$
 $z = 0$
 $y + z = 1$

 $V = ?$

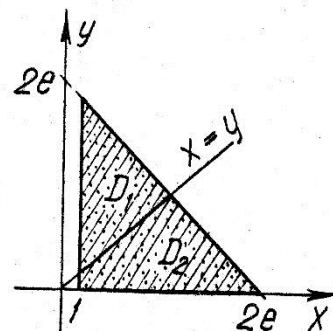


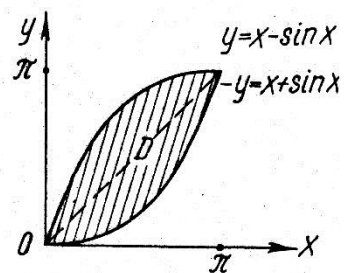
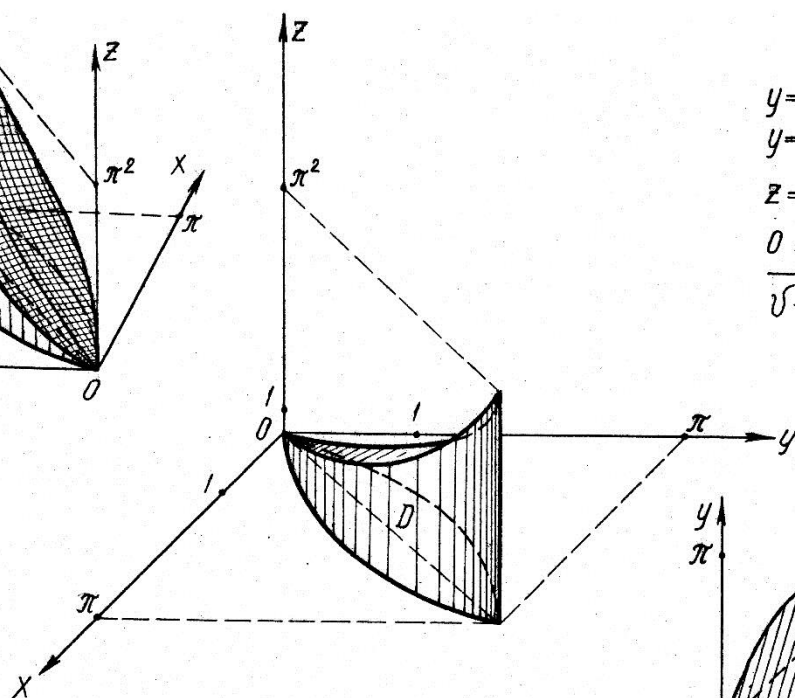
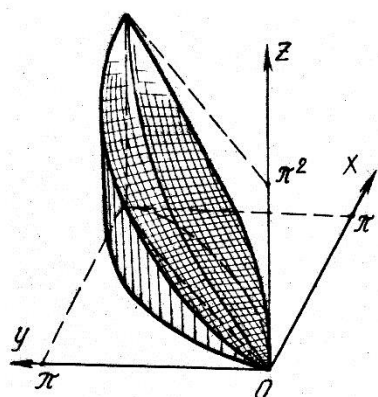
3582
 $z = \ln x, z = \ln y,$
 $z = 0, x + y = 2l$
 $(x \geq 1)$

 $V = ?$



$D = D_1 \cup D_2$





3583

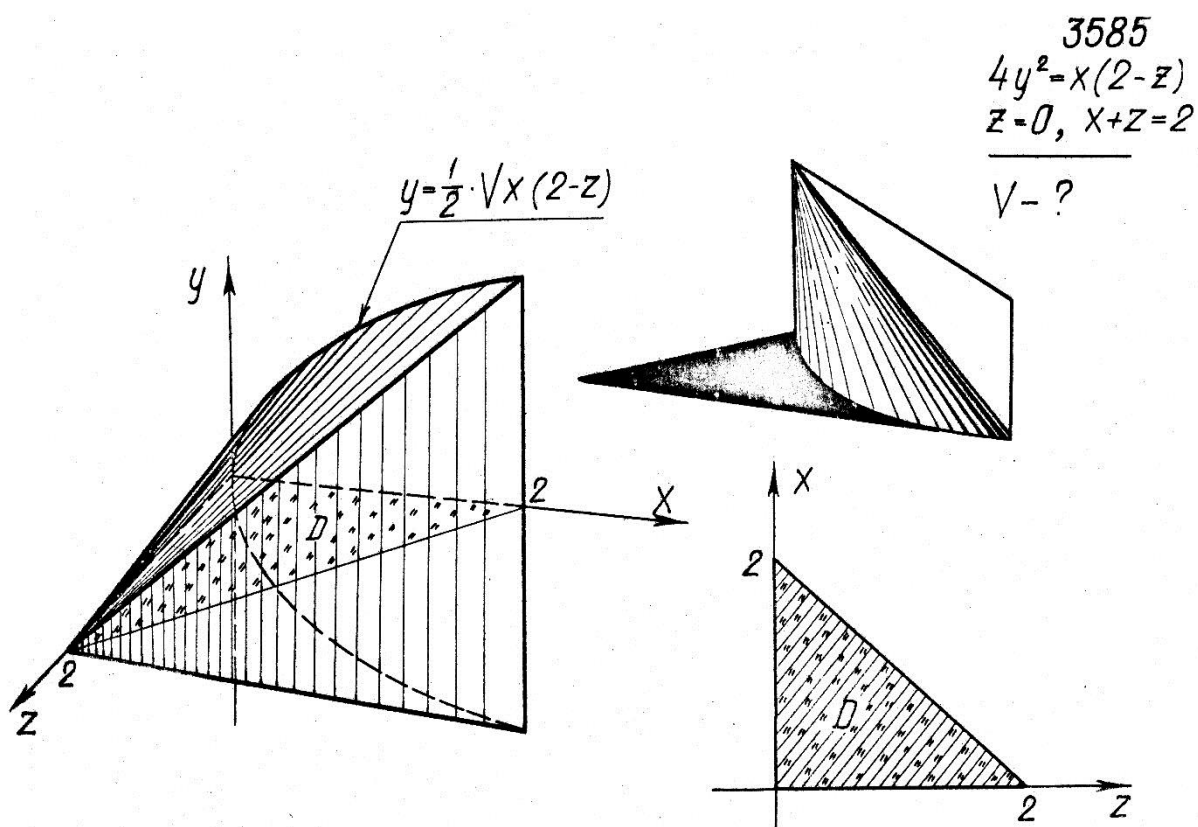
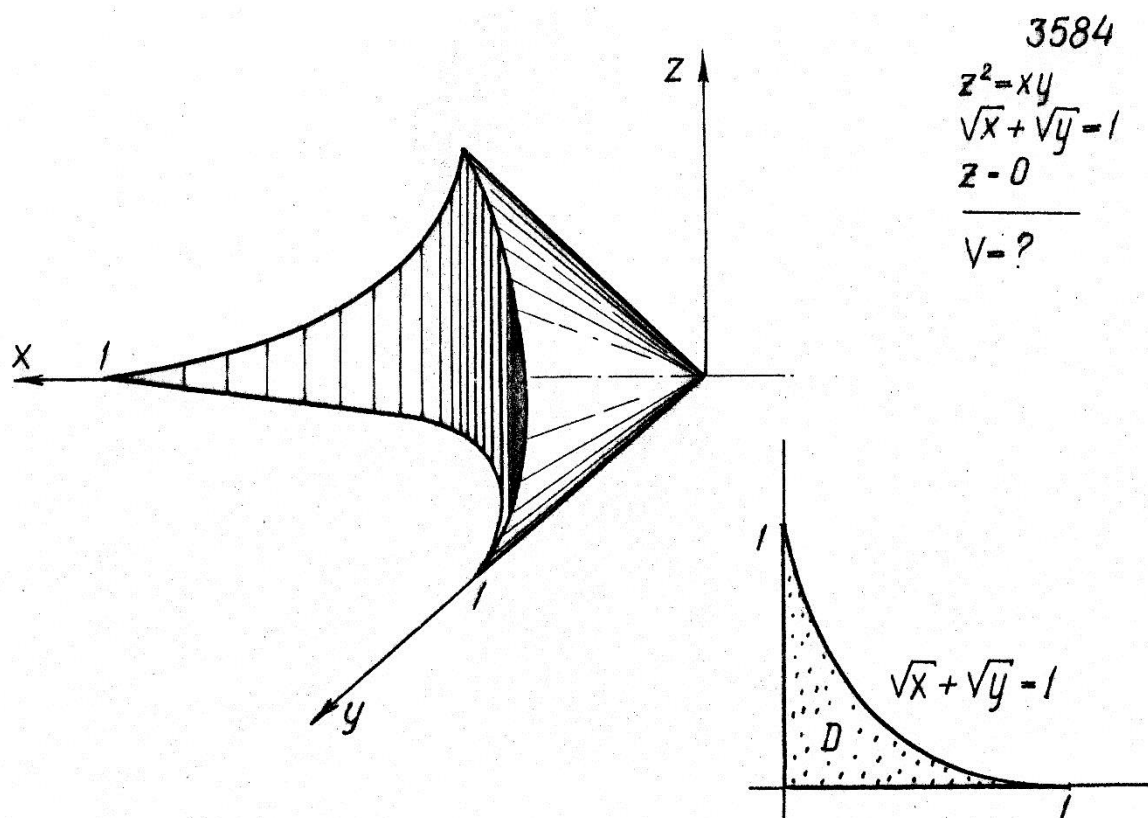
$$y = x + \sin x$$

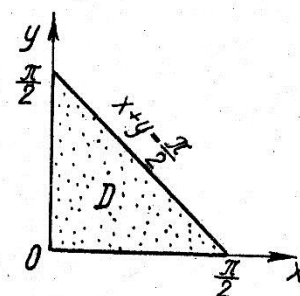
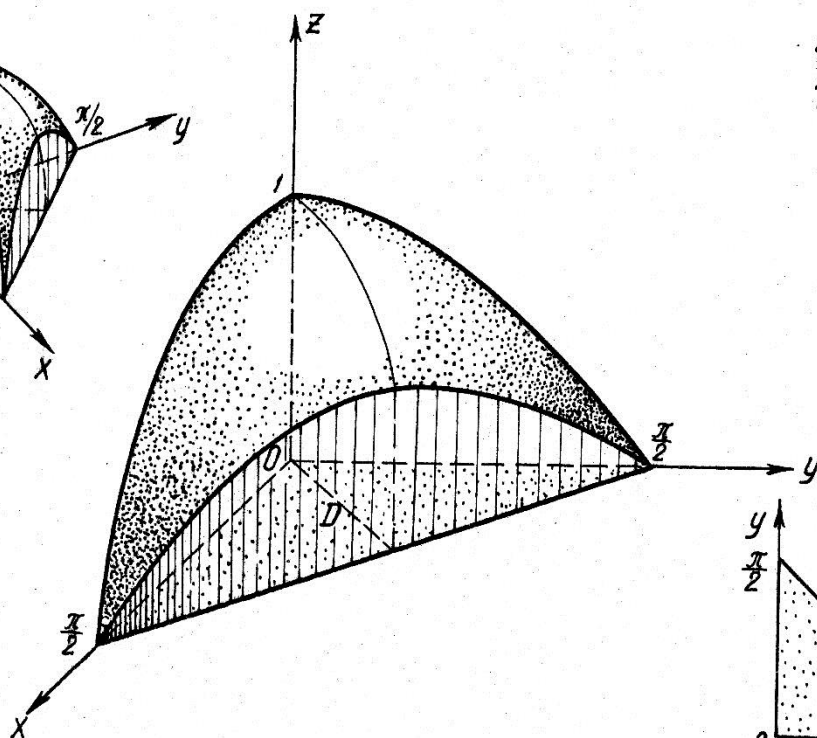
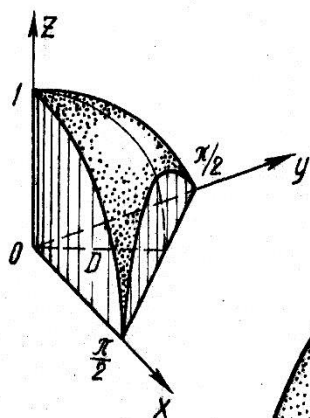
$$y = x - \sin x$$

$$z = \frac{(x+y)^2}{4}, y \geq 0, z = 0$$

$$0 \leq x \leq \pi$$

$$\int - ?$$



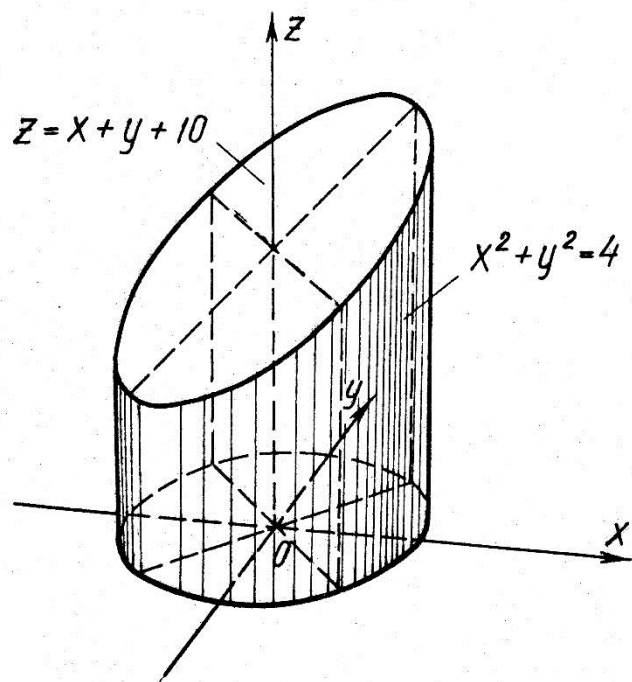


3586

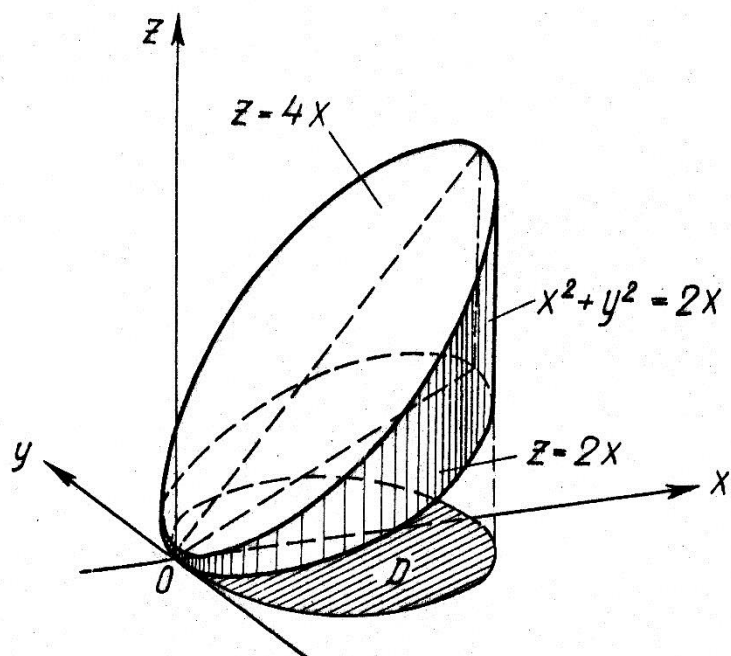
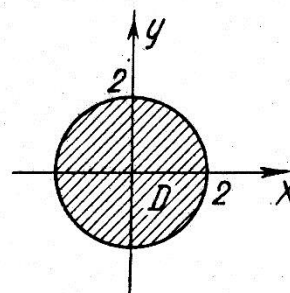
$$z = \cos x \cdot \cos y,$$

$$x+y = \frac{\pi}{2}, \quad x-y-z=0,$$

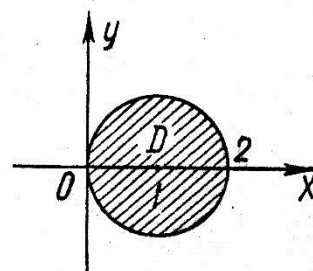
$V = ?$

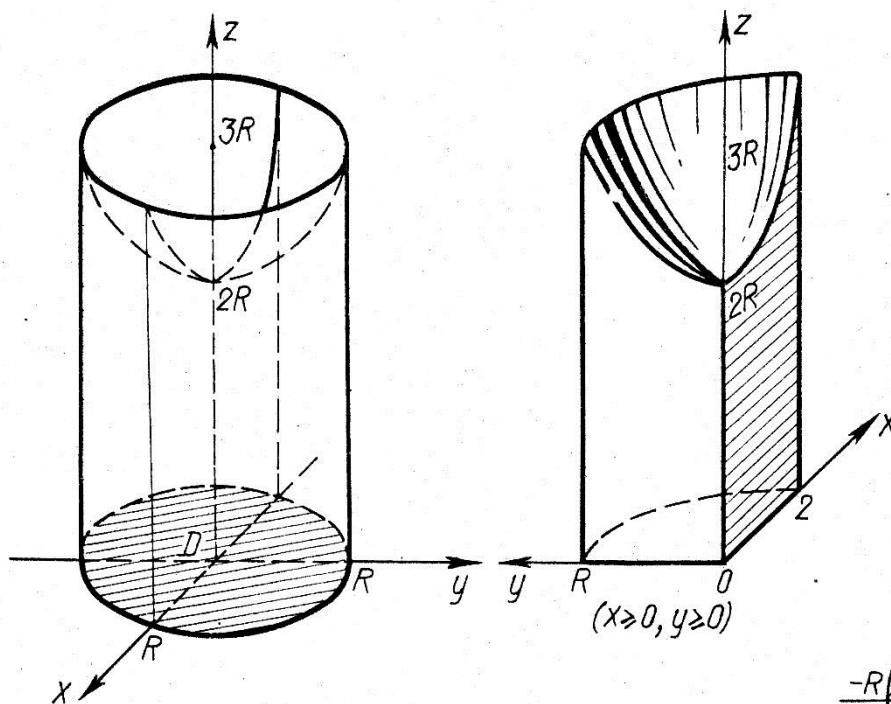


$$\begin{array}{r}
 3587 \\
 x^2 + y^2 = 4 \\
 z = 0 \\
 z = x + y + 10 \\
 \hline
 V = ?
 \end{array}$$



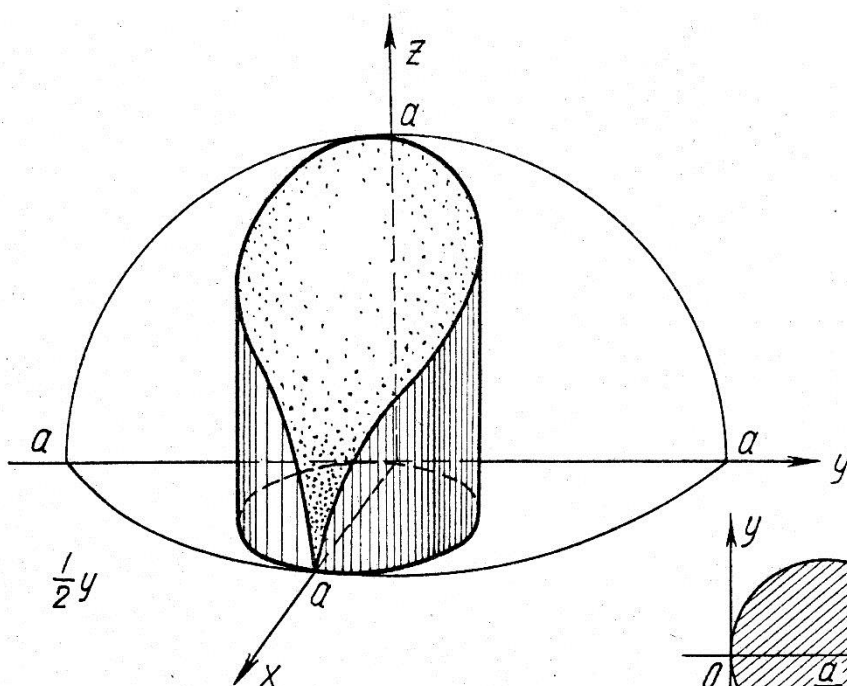
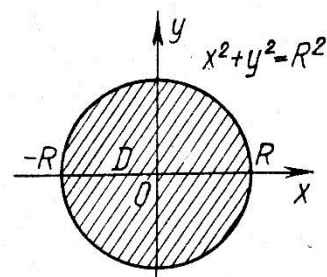
$$\begin{array}{r}
 3588 \\
 x^2 + y^2 = 2x, \\
 2x - z = 0, \\
 4x - z = 0 \\
 \hline
 V = ?
 \end{array}$$





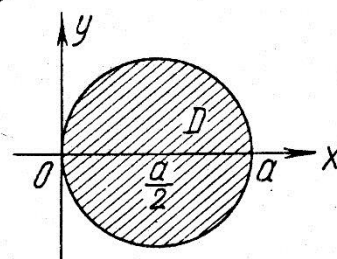
3589
 $x^2 + y^2 = R^2$,
 $Rz = 2R^2 + x^2 + y^2$,
 $z = 0$.

 $V = ?$



3591
 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$,
 $x^2 + y^2 = a - z$,
 $(z \geq 0)$.

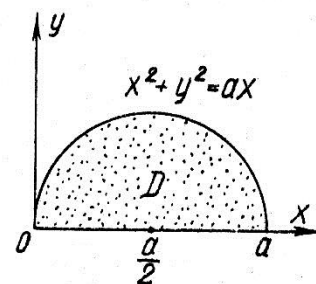
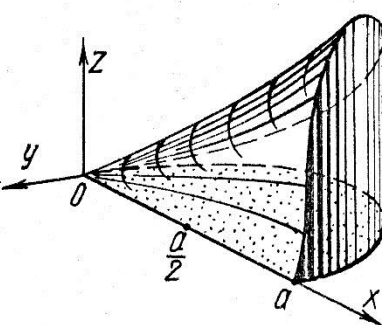
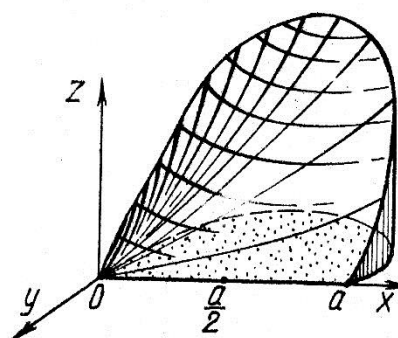
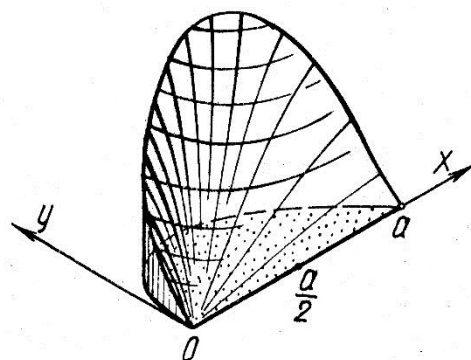
 $V = ?$ и $p = ?$

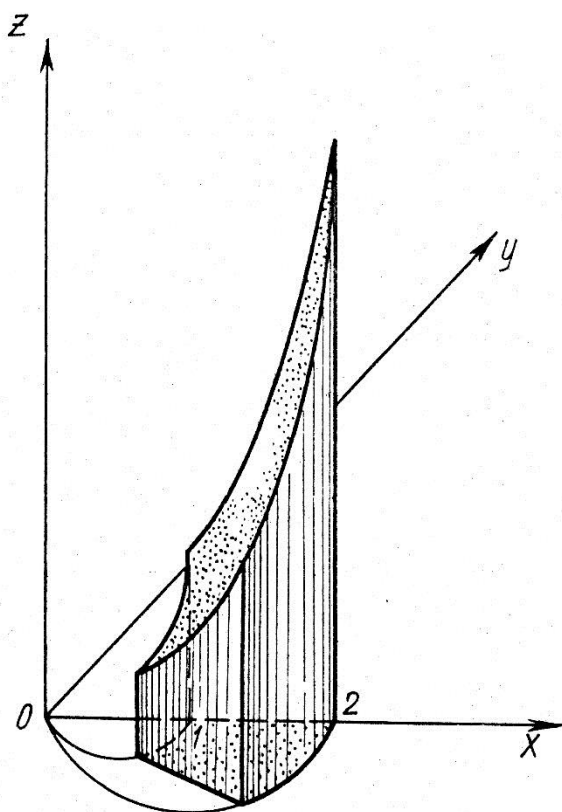


3592

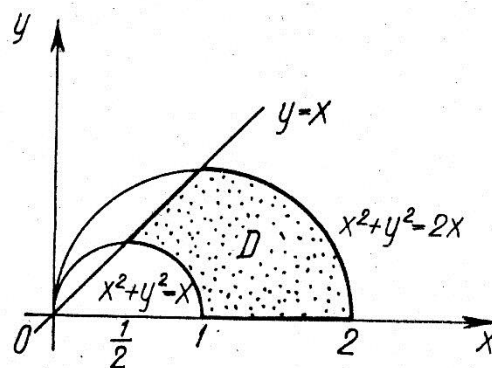
$$\begin{aligned} z &= \frac{xy}{a} \\ x^2 + y^2 &= ax \\ z &= 0 \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{aligned}$$

$V = ?$





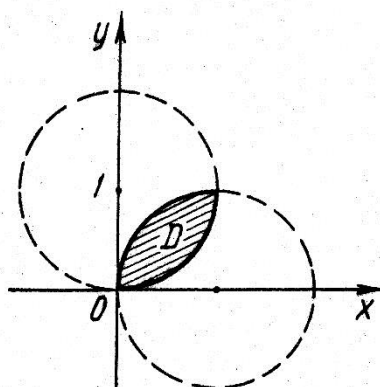
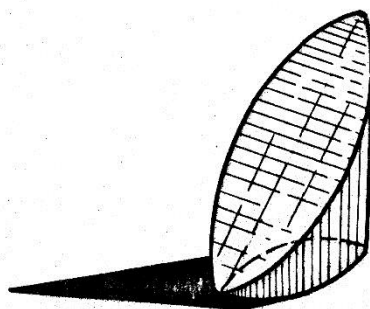
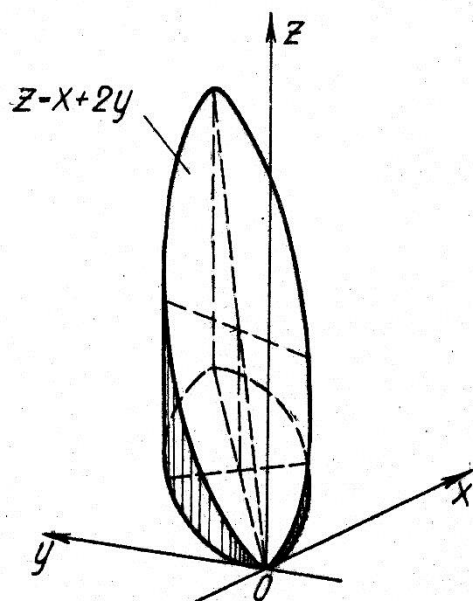
$$\begin{array}{l}
 3593 \\
 x^2 + y^2 = x, \\
 x^2 + y^2 = 2x, \\
 z = x^2 + y^2, \\
 x + y = 0, \\
 z = 0 \\
 \hline
 \frac{1}{2} V
 \end{array}$$



3594

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2x, \\ x^2 + y^2 &= 2y, \\ z &= x + 2y, \\ z &= 0 \end{aligned}$$

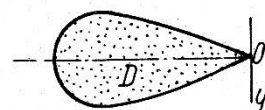
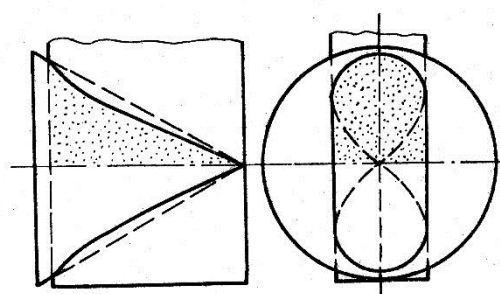
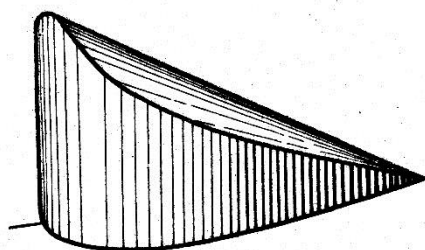
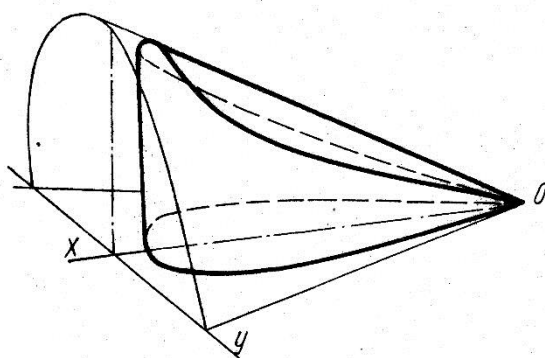
$$V = ?$$



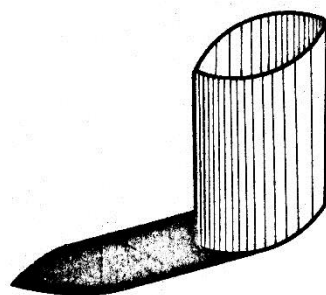
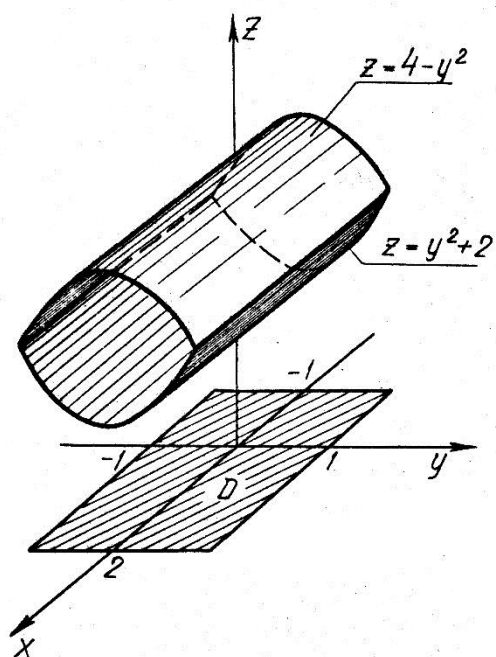
3595 u 3617

$$\begin{aligned} z^2 &= xy \\ (x^2 + y^2)^2 &= 2xy \\ (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0) \end{aligned}$$

$$V = ?$$

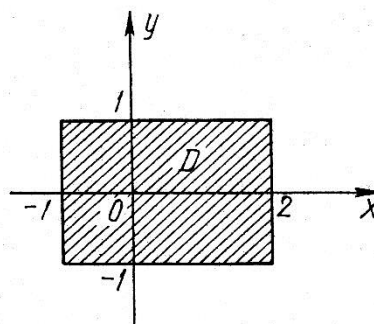


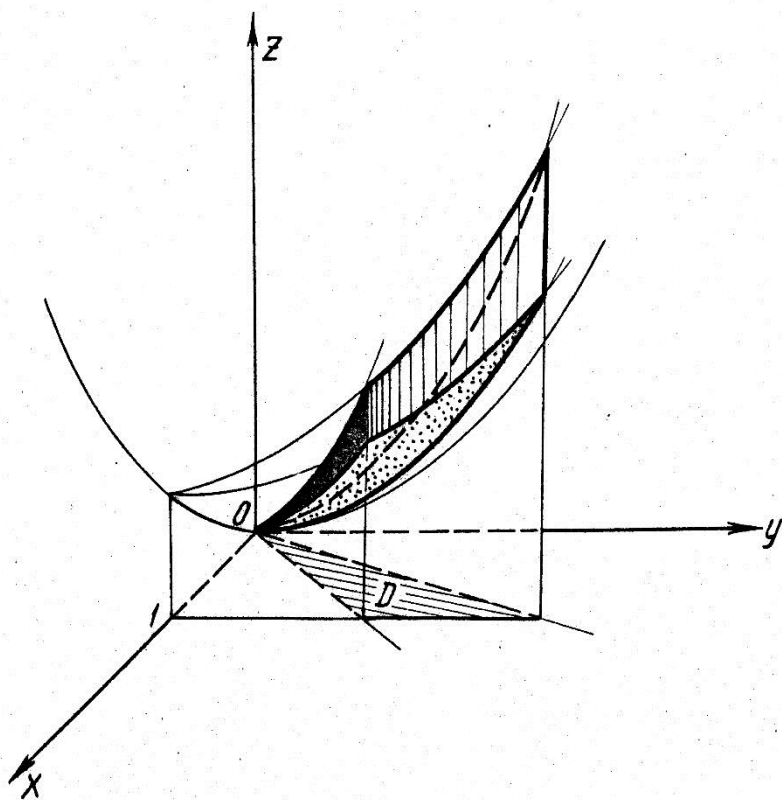
$$\rho = \sqrt{\sin 2\varphi}$$



3609

$$\begin{array}{l} z = 4 - y^2, \\ z = y^2 + 2, \\ x = -1, x = 2 \\ \hline V = ? \end{array}$$





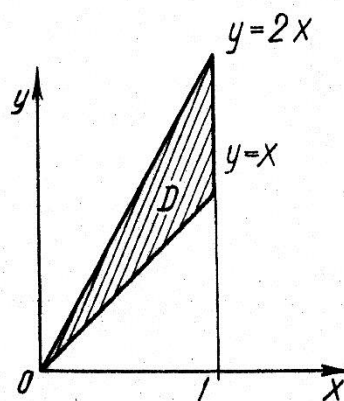
3610

$$z = x^2 + 2y^2,$$

$$z = x^2 + y^2,$$

$$y = x, y = 2x, x = 1$$

$$V = ?$$



3611

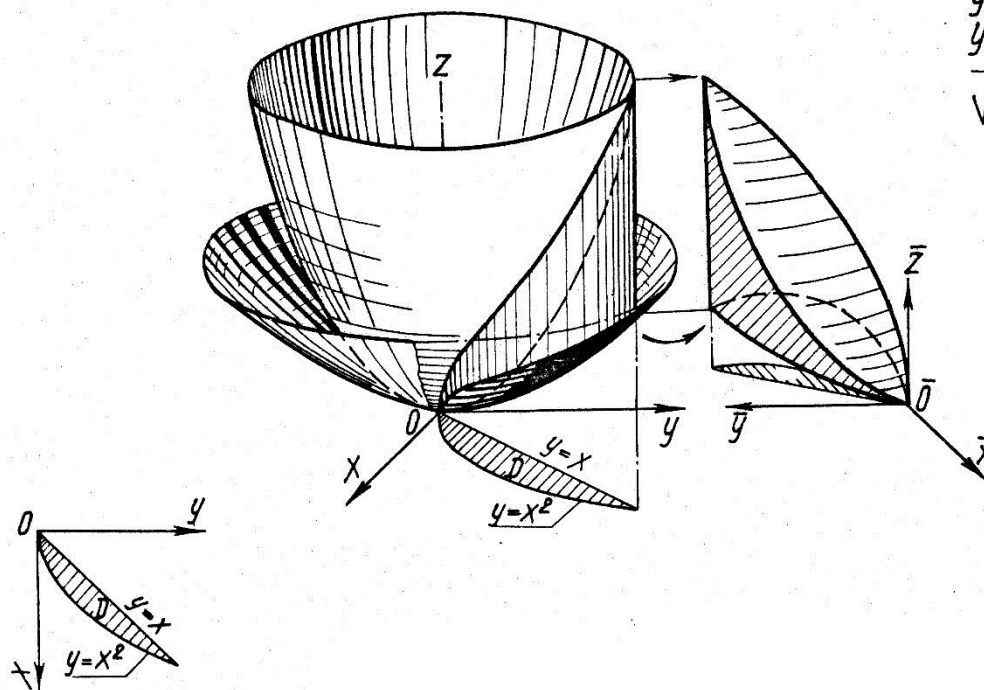
$$z = x^2 + y^2$$

$$z + 2x^2 + 2y^2$$

$$y = x^2$$

$$y = x$$

$$V = ?$$



3612

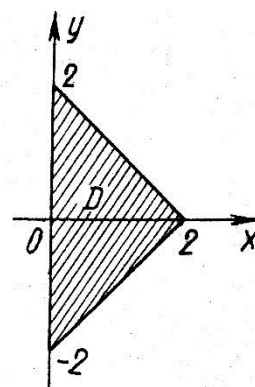
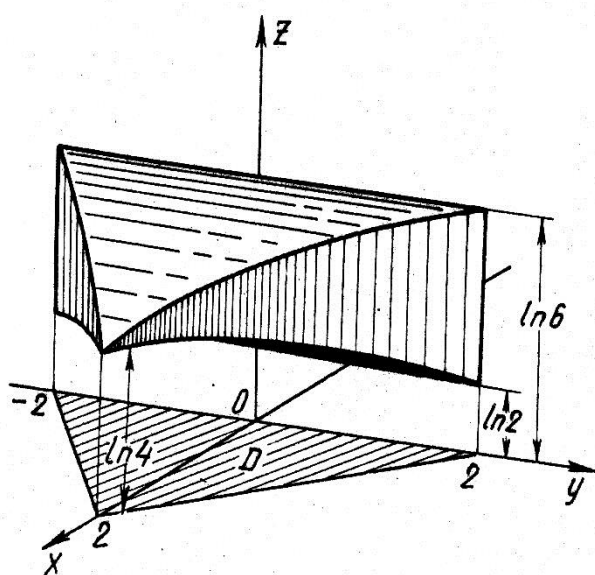
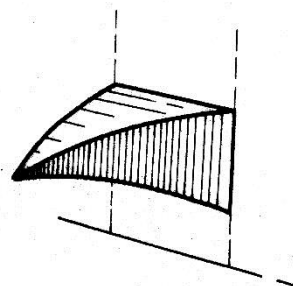
$$z = \ln(x+2),$$

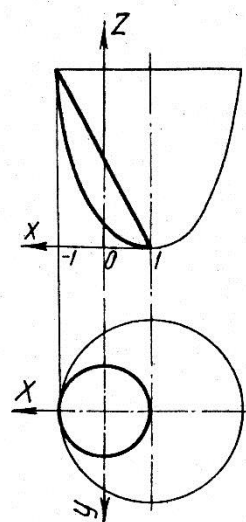
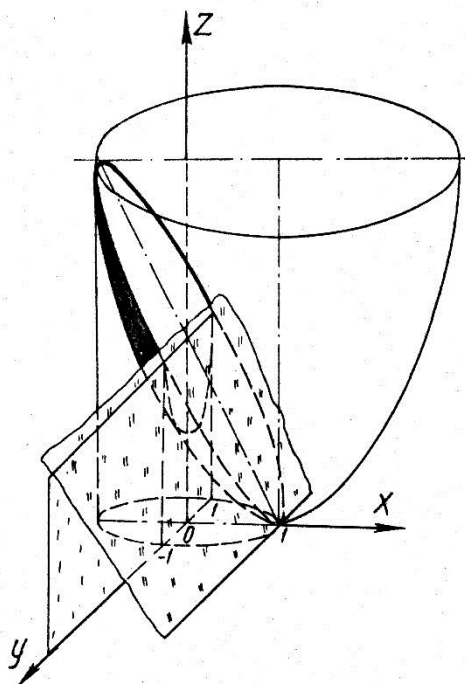
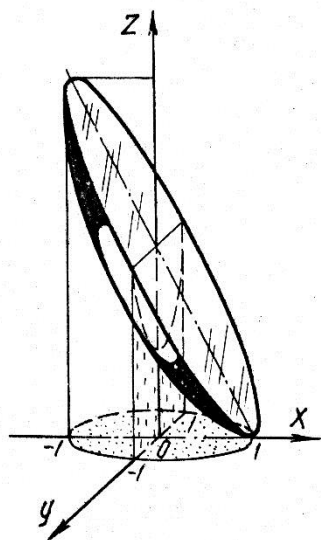
$$z = \ln(6-x),$$

$$x=0, x+y=2$$

$$x-y=2$$

$$V = ?$$





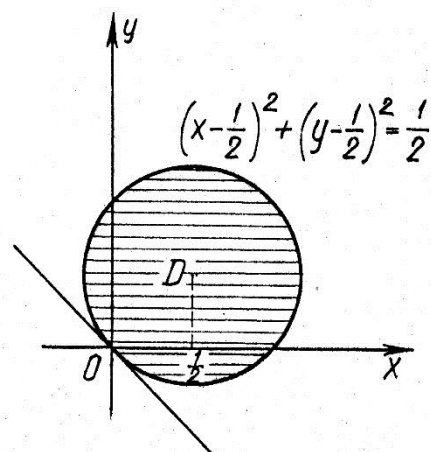
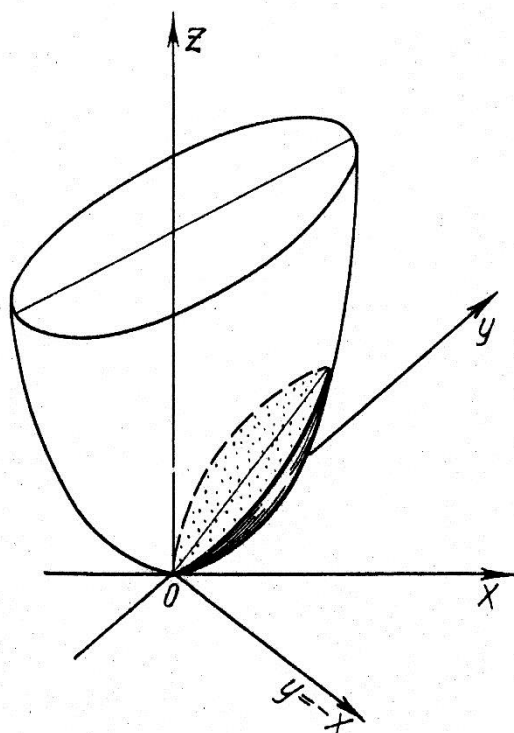
$$\begin{array}{r}
 36/3 \\
 (X-1)^2 + y^2 = Z \\
 2X + Z = 2 \\
 \hline
 V = ?
 \end{array}$$

3614

$$z = x^2 + y^2$$

$$z = x + y$$

$$V = ?$$

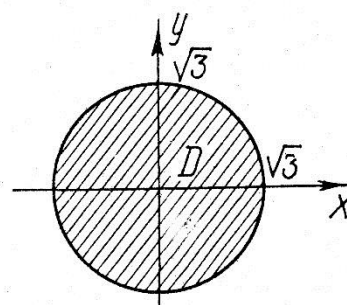
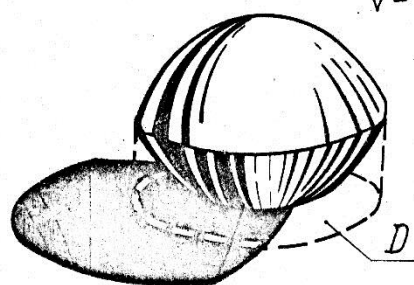
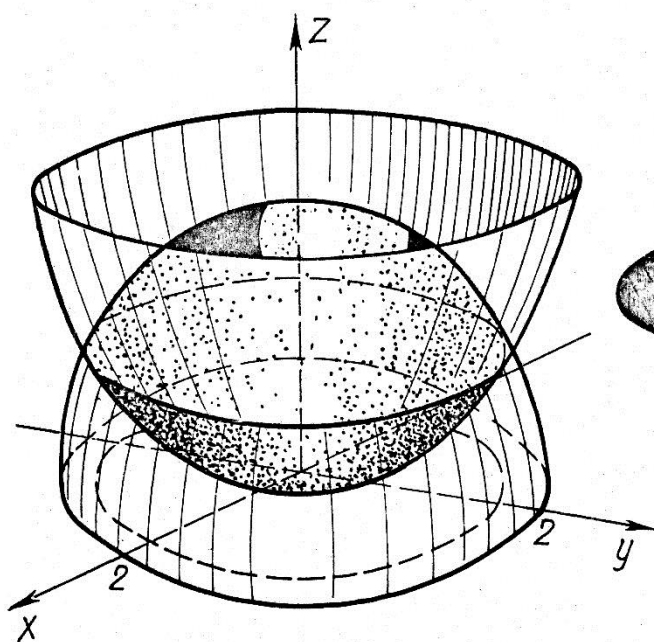


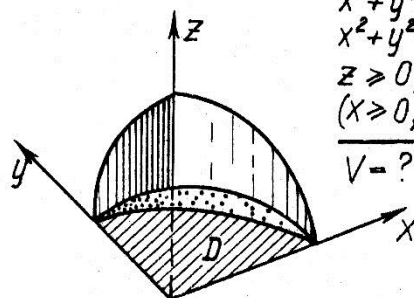
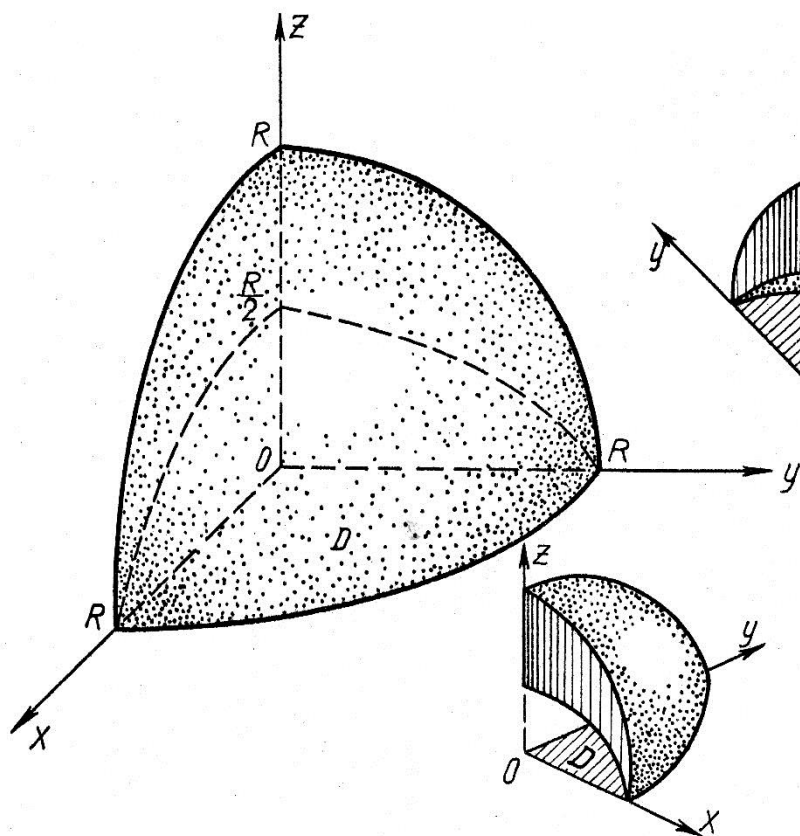
3615

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4,$$

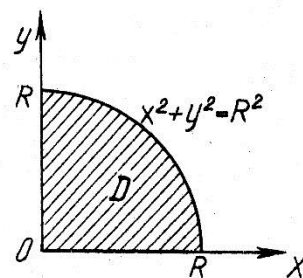
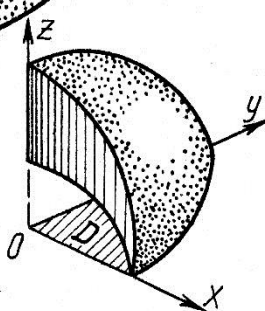
$$x^2 + y^2 = 3z$$

$$V = ?$$

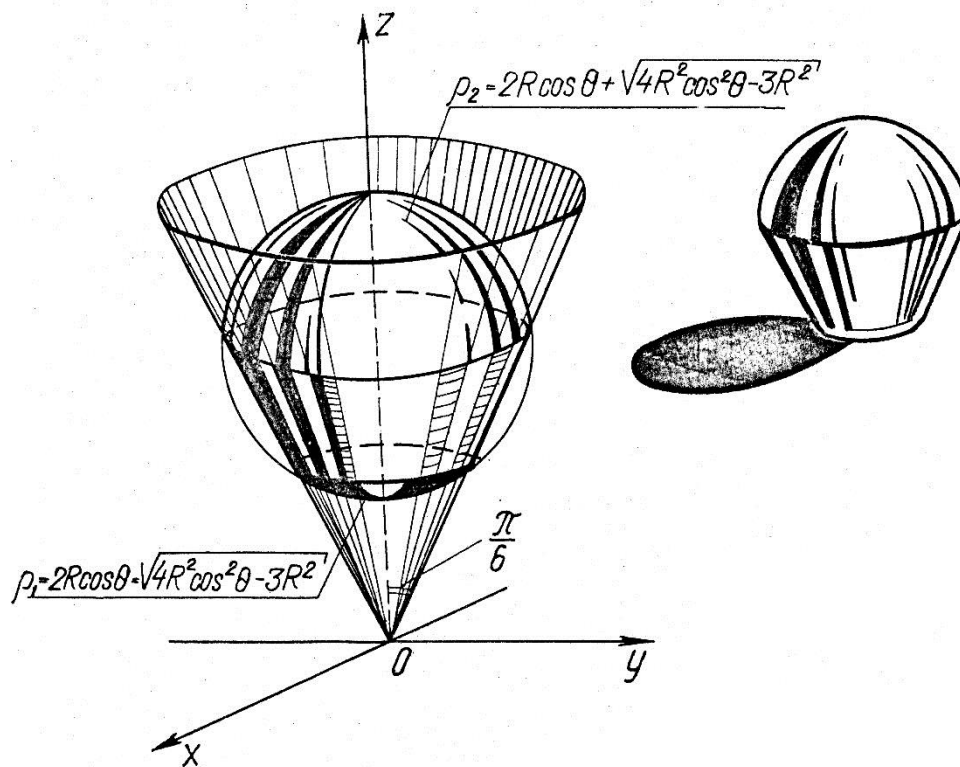




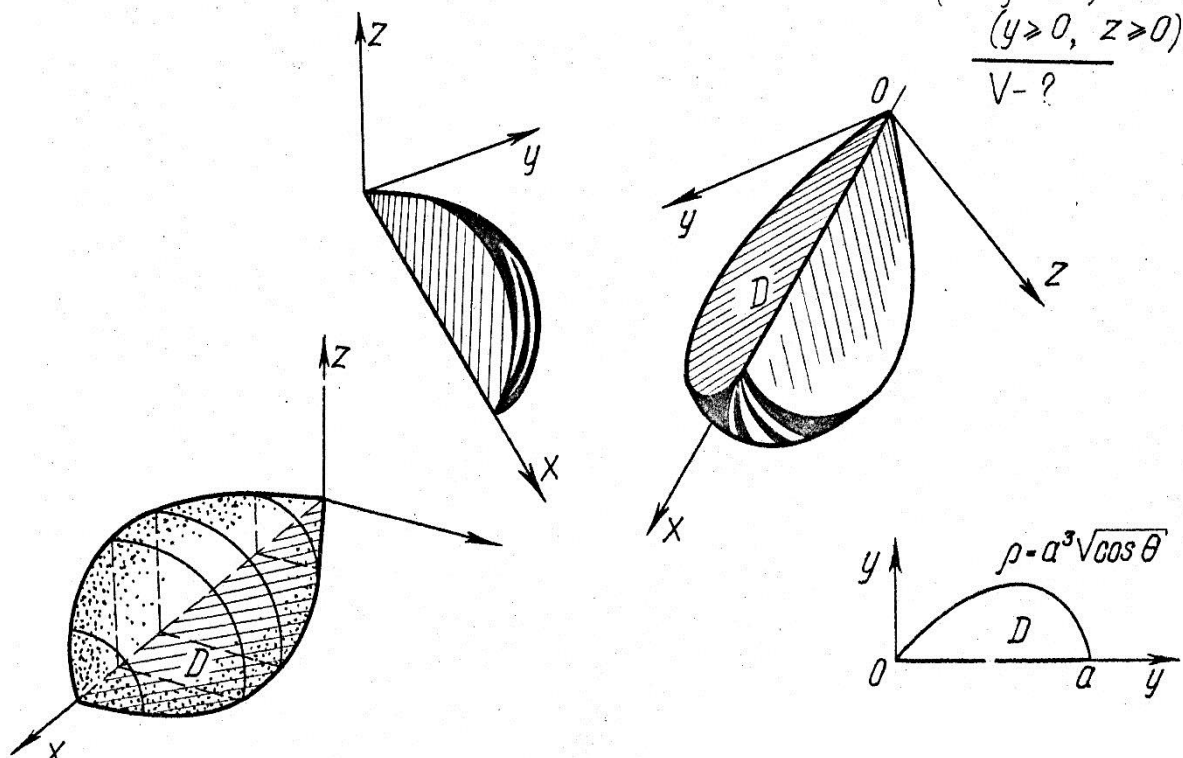
36/6
 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$,
 $x^2 + y^2 = R(R - 2z)$
 $z \geq 0$,
 $(x \geq 0, y \geq 0)$.
 $V = ?$

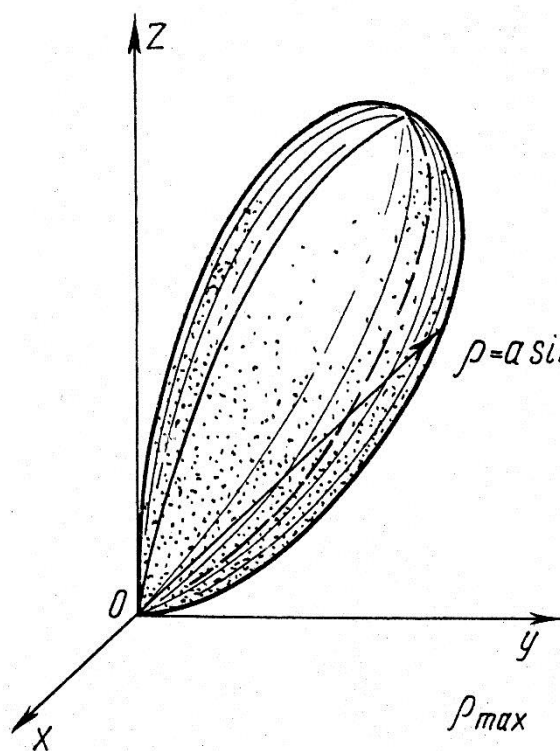


$$\begin{array}{l}
 3618 \\
 x^2 + y^2 + z^2 = 4Rz - 3R^2 \\
 z^2 = 4(x^2 + y^2) \\
 \hline
 V = ?
 \end{array}$$



$$\begin{array}{l}
 3619 \\
 (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 x \\
 (y \geq 0, z \geq 0) \\
 \hline
 V = ?
 \end{array}$$





$$\rho = a \sin^2 \theta \cos \theta \sin \phi \cos \phi$$

$\rho_{\max}$

при

$$\phi = \frac{\pi}{4}$$

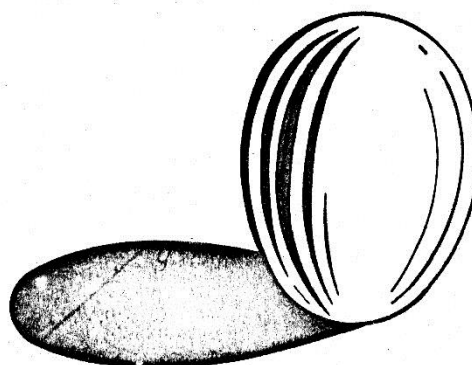
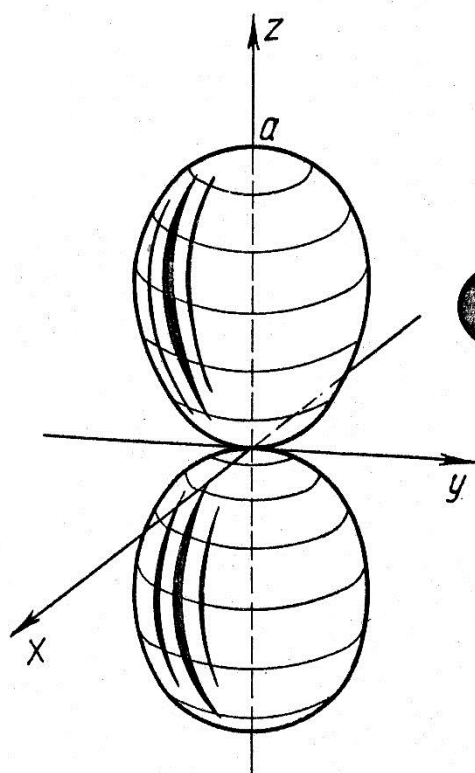
$$\theta = \arctg \sqrt{2}$$

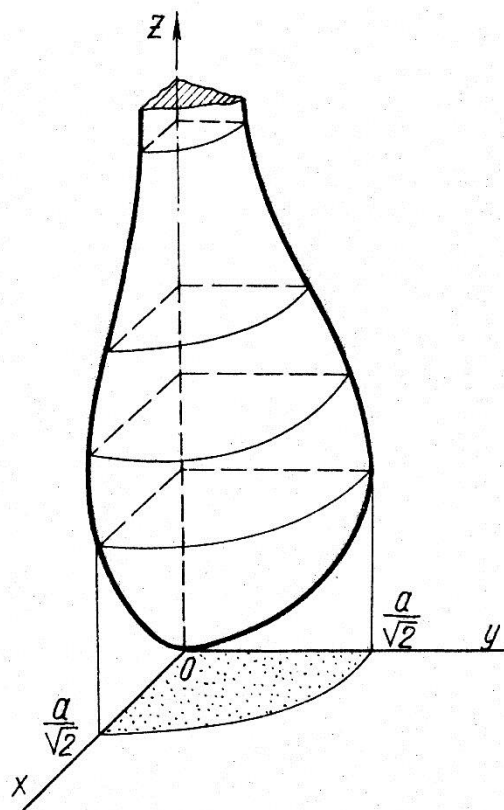
$$\frac{3620}{(x^2 + y^2 + z^2)^2 - a^2 xyz}$$

$$\frac{1}{4} V - ?$$

3621

$$(x^2 + y^2 + z^2) = a^2 z^4$$





3622

$$(x^2 + y^2 + z^2)^3 = \frac{a^6 z^2}{x^2 + y^2}$$

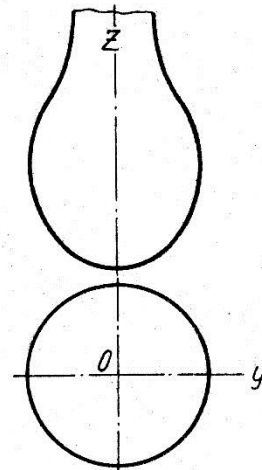
$$(\rho = a^3 \sqrt{\cot \theta}; \quad z \geq 0)$$

$$V = ?$$

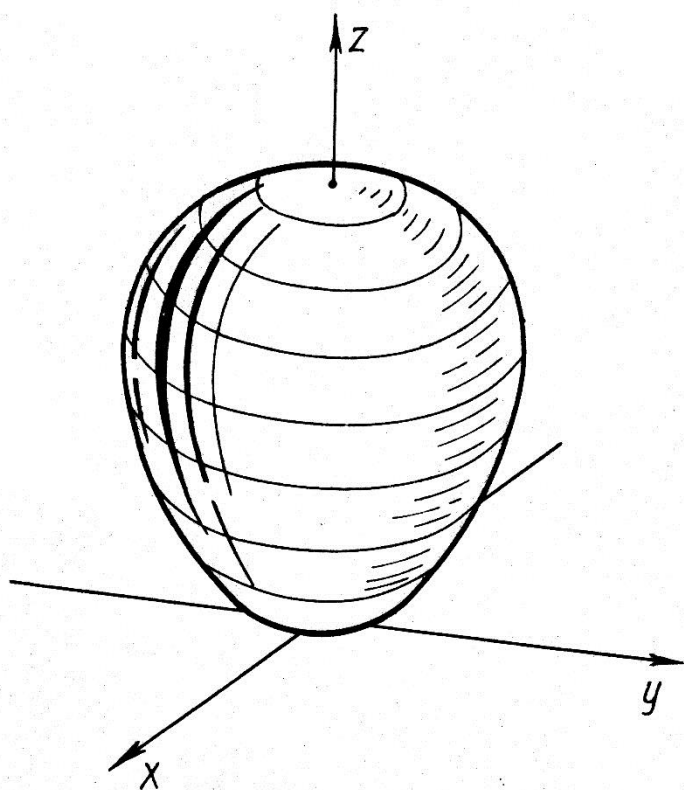
$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

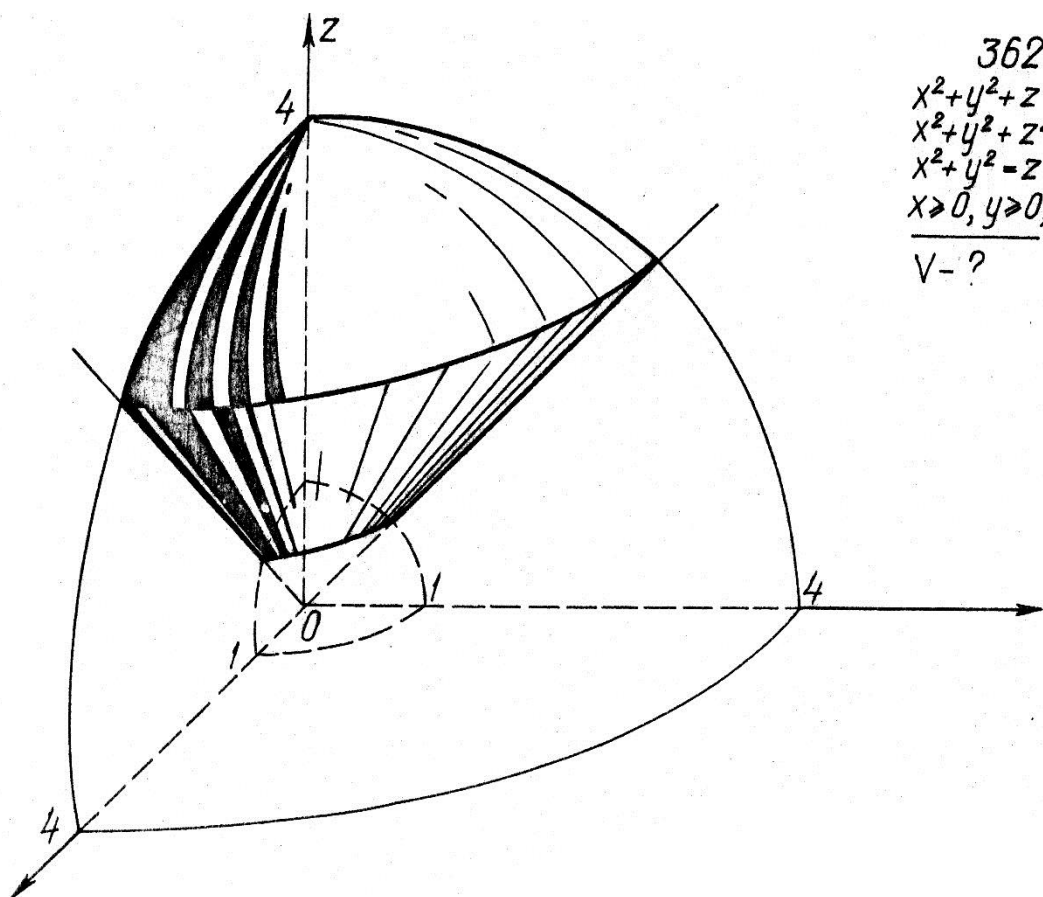
$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq \rho \leq \frac{a^3}{2} \sqrt{\cot \theta}$$

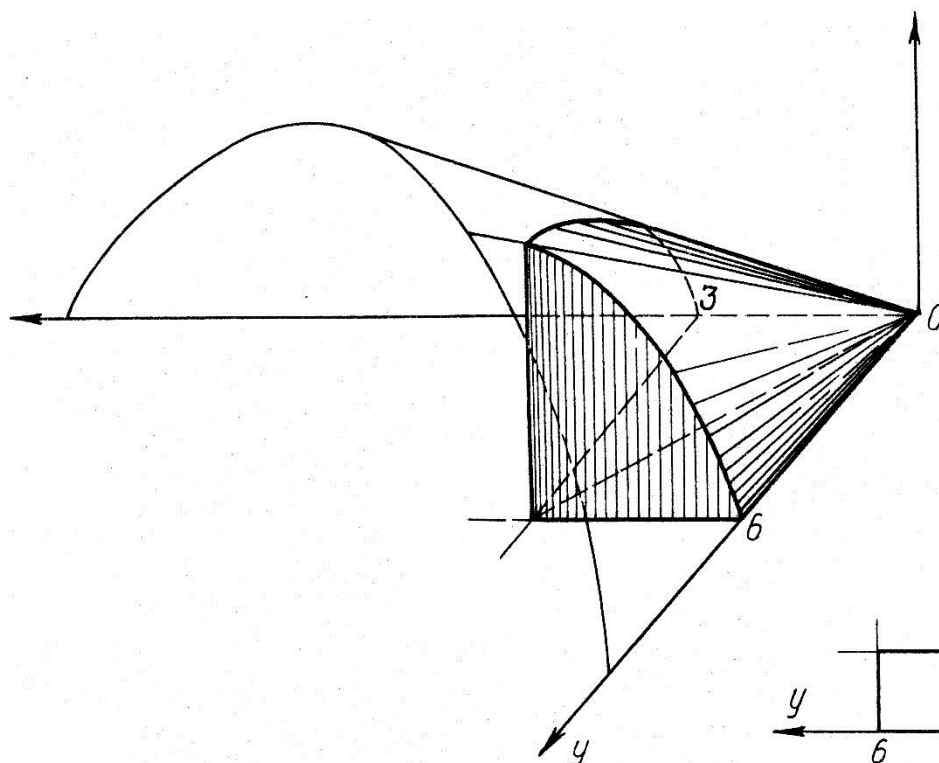


3624
 $(x^2+y^2)^2+z^4=a^3z$



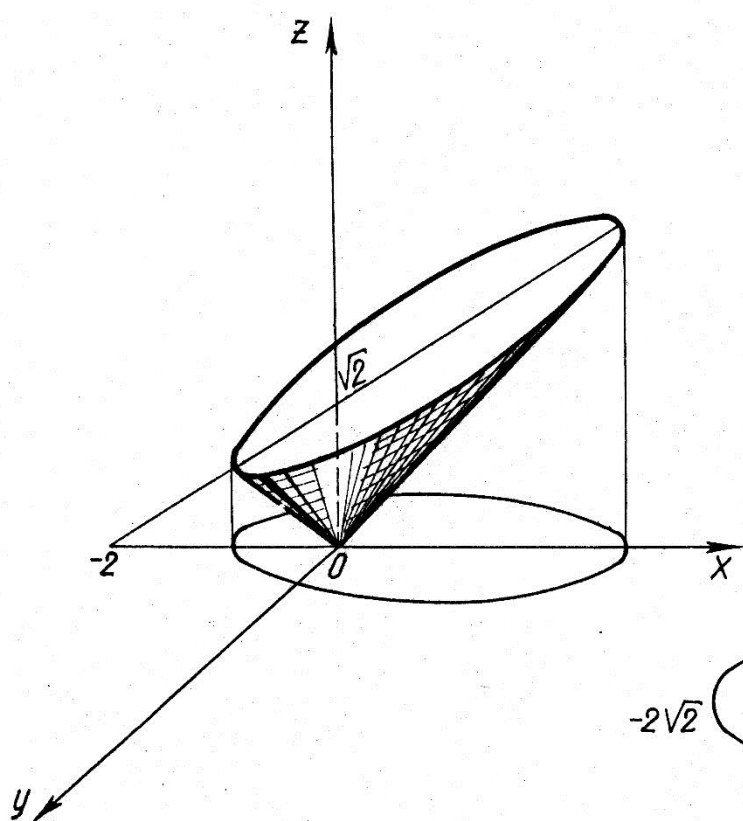
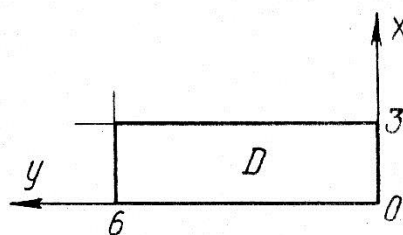


3625
 $x^2 + y^2 + z^2 = 16,$
 $x^2 + y^2 + z^2 = 1,$
 $x^2 + y^2 = z^2,$
 $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$
 $V = ?$



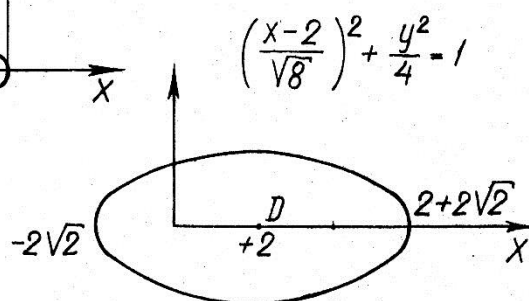
3627
 $z^2 = 2xy, x=3,$
 $y=6, x=0,$
 $y=0, z=0$

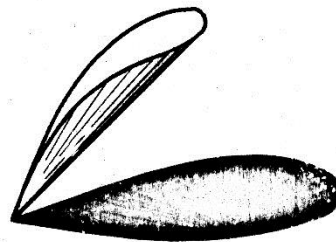
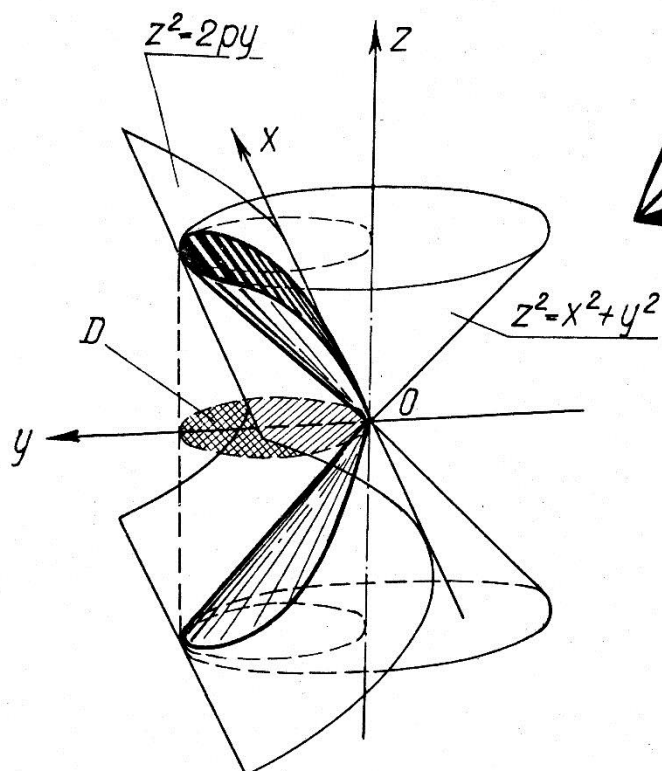
 $P = ?$



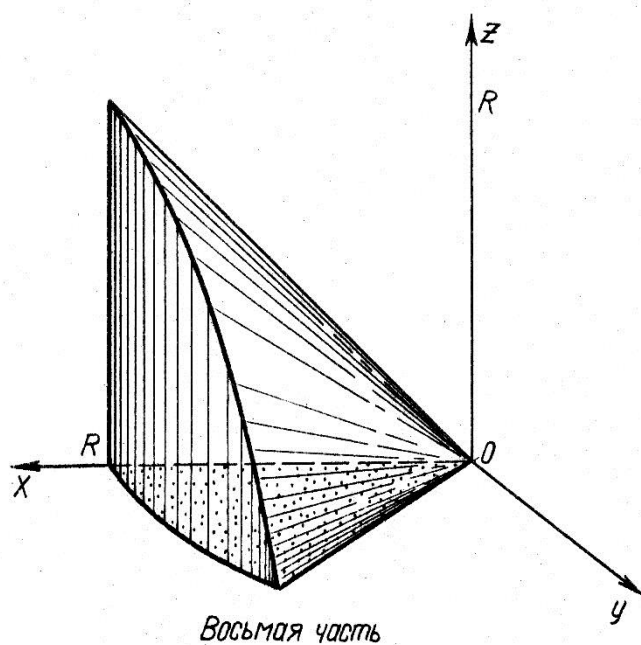
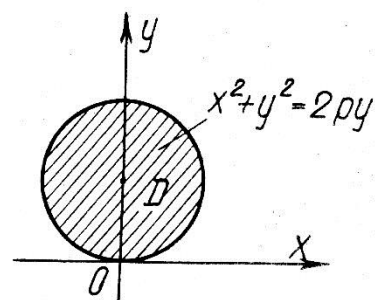
3628
 $z^2 = x^2 + y^2$
 $z = \sqrt{2} \left(\frac{x}{2} + 1 \right)$

Найти P

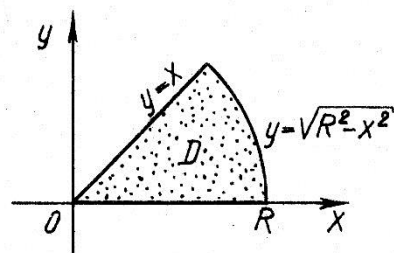


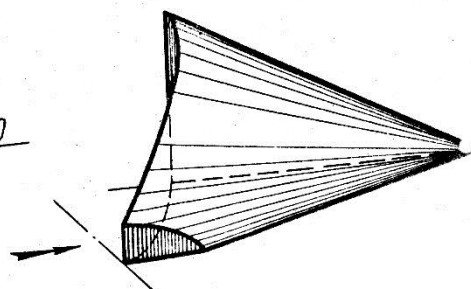
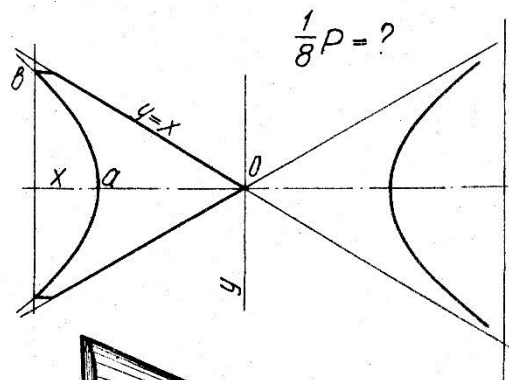
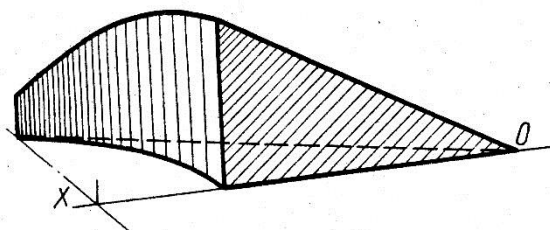
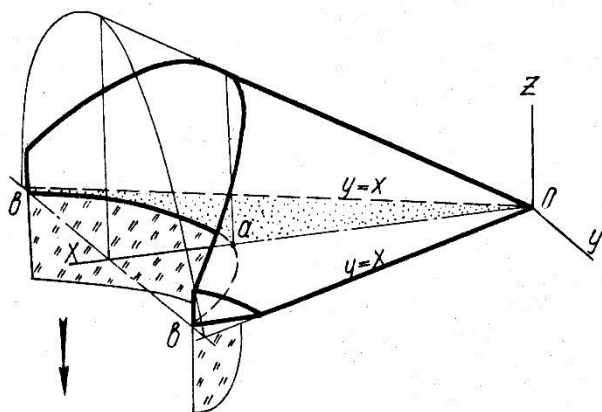


3629
 $z^2 = x^2 + y^2,$
 $z^2 = 2py$
 $P = ?$



3630
 $y^2 + z^2 = x^2,$
 $x^2 + y^2 = R^2,$
 $(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$
 $P = ?$





3631

$$x^2 + y^2 + z^2$$

$$x^2 - y^2 = a^2$$

$$y = b, y = -b$$

$$\frac{1}{8}P = ?$$

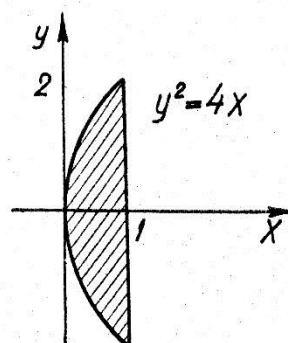
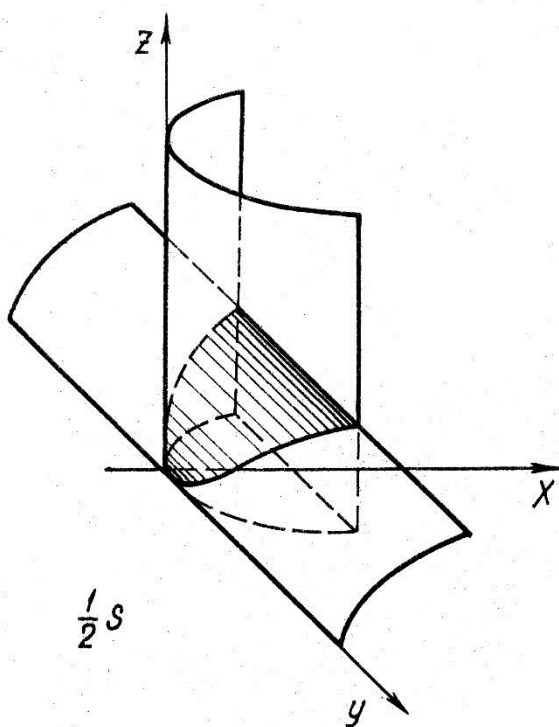
3632

$$z^2 = 4x$$

$$y^2 = 4x$$

$$x = 1$$

$$S = ?$$



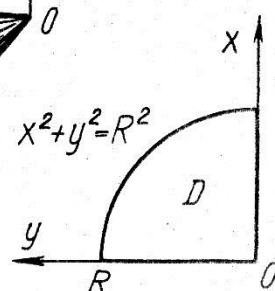
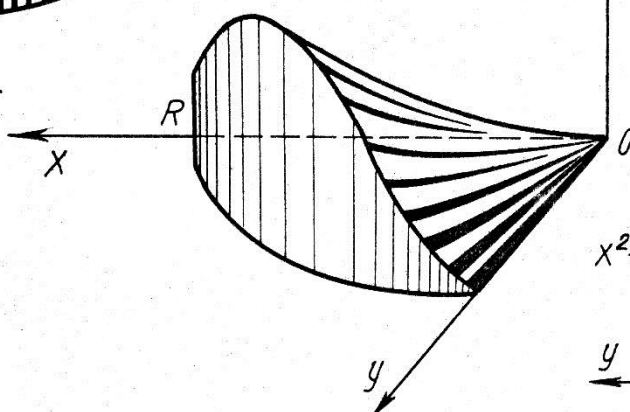
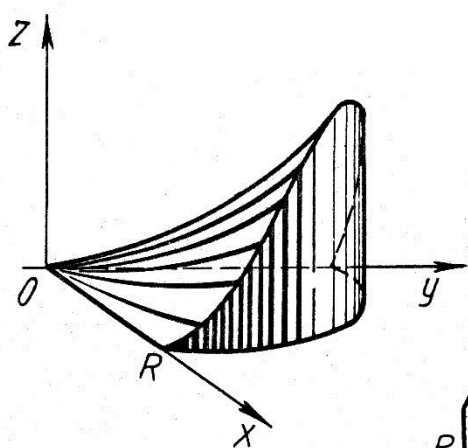
3633

$$z = xy,$$

$$x^2 + y^2 = R^2$$

$$(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$$

$P = ?$

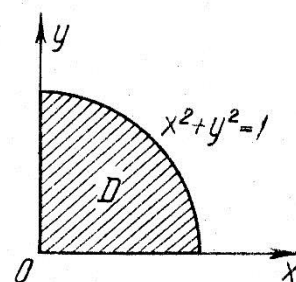
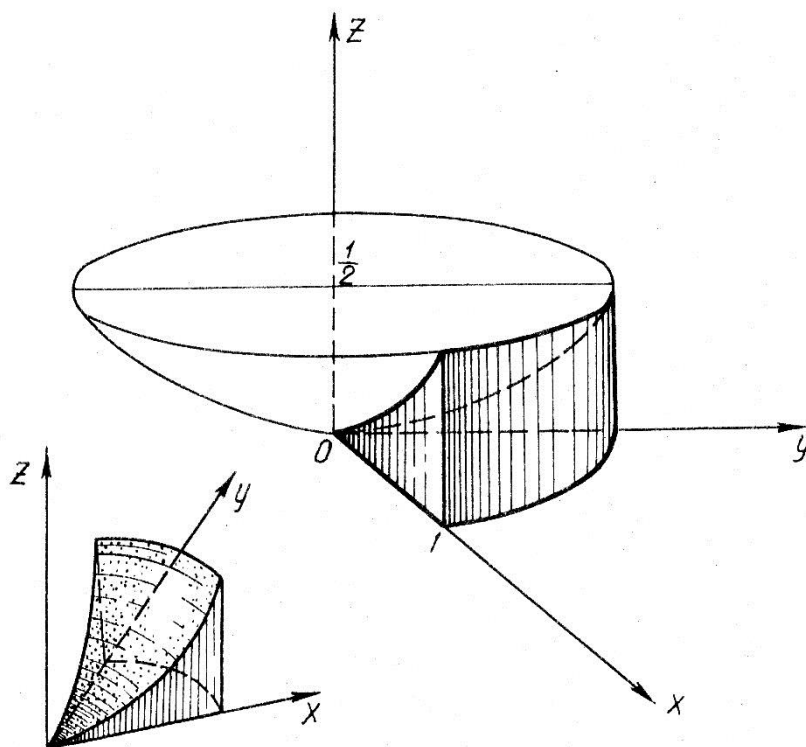


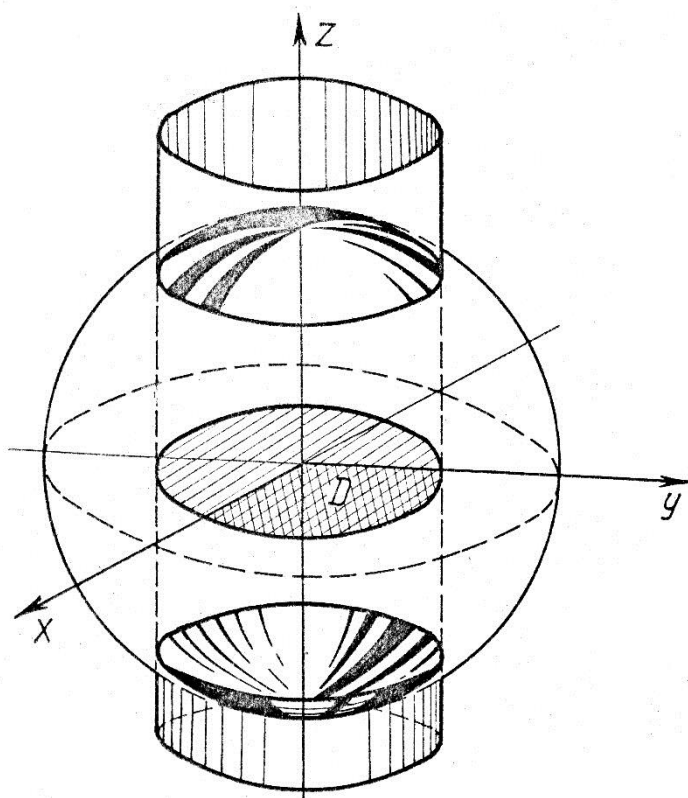
3634

$$2z = x^2 + y^2$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

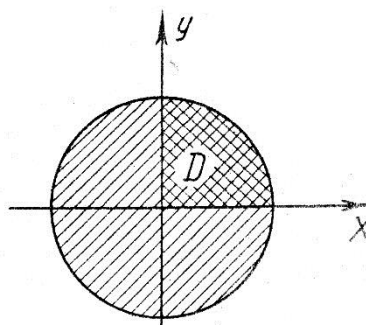
$\frac{1}{4}P$

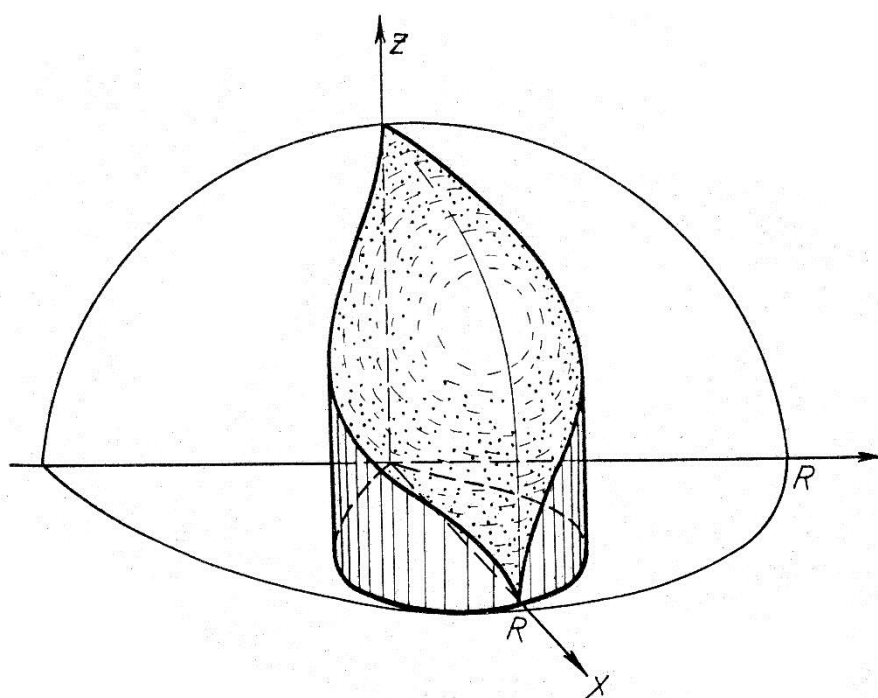
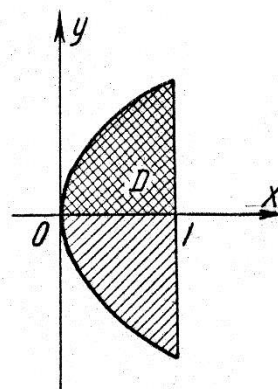
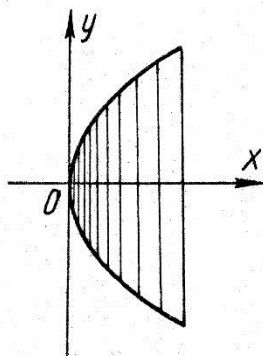
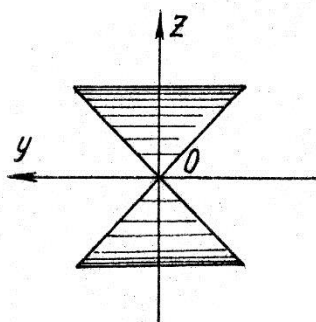
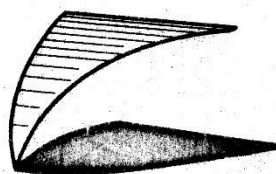
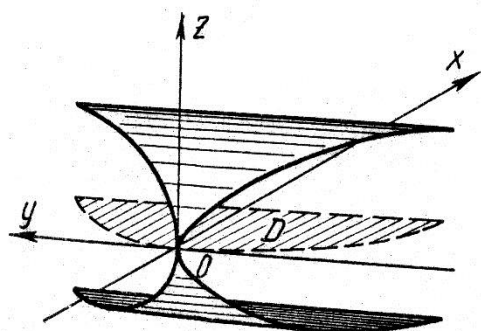




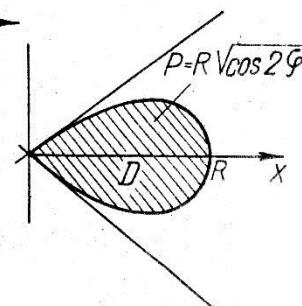
3635
 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$
 $x^2 + y^2 = R^2$
 $(R \leq a)$

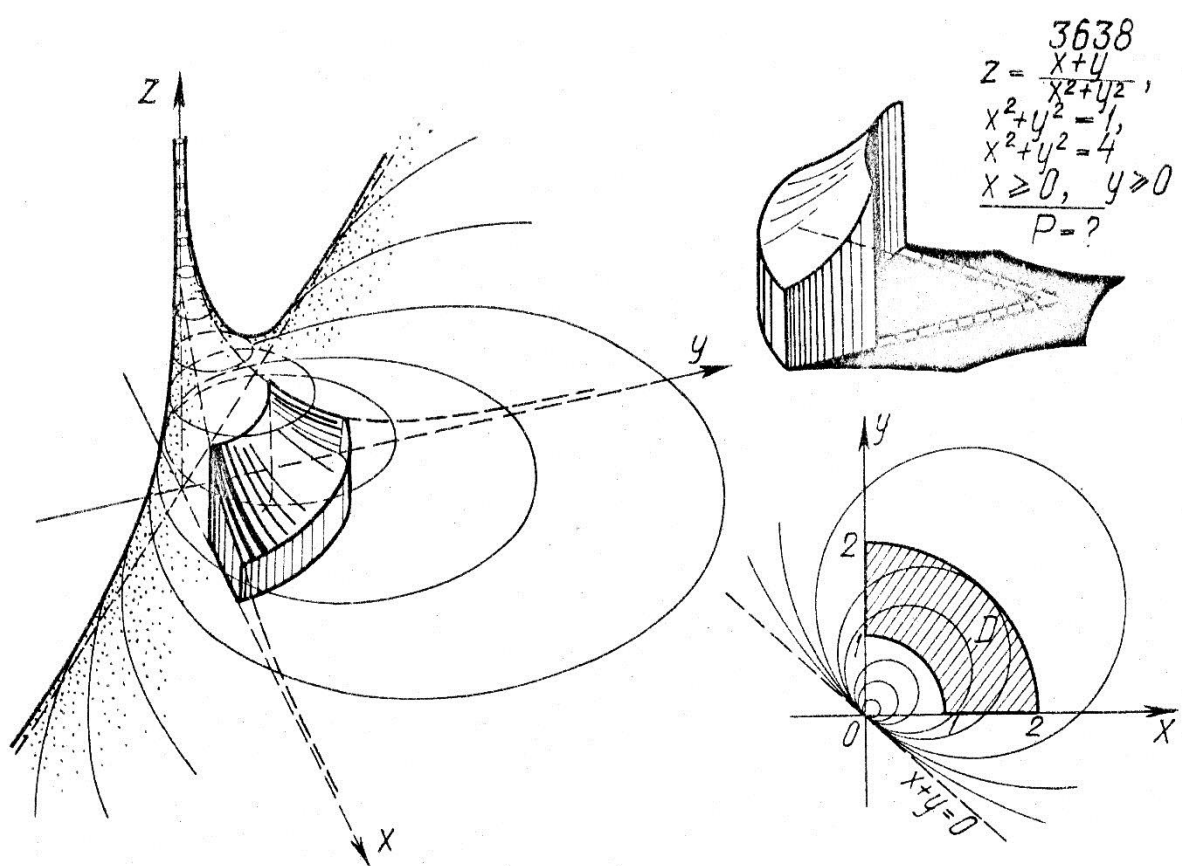
 $P = ?$





3637
 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$
 $(x^2 + y^2)^2 = R^2(x^2 - y^2)$
 $\frac{1}{4} P = ?$



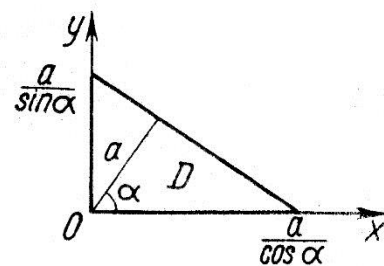
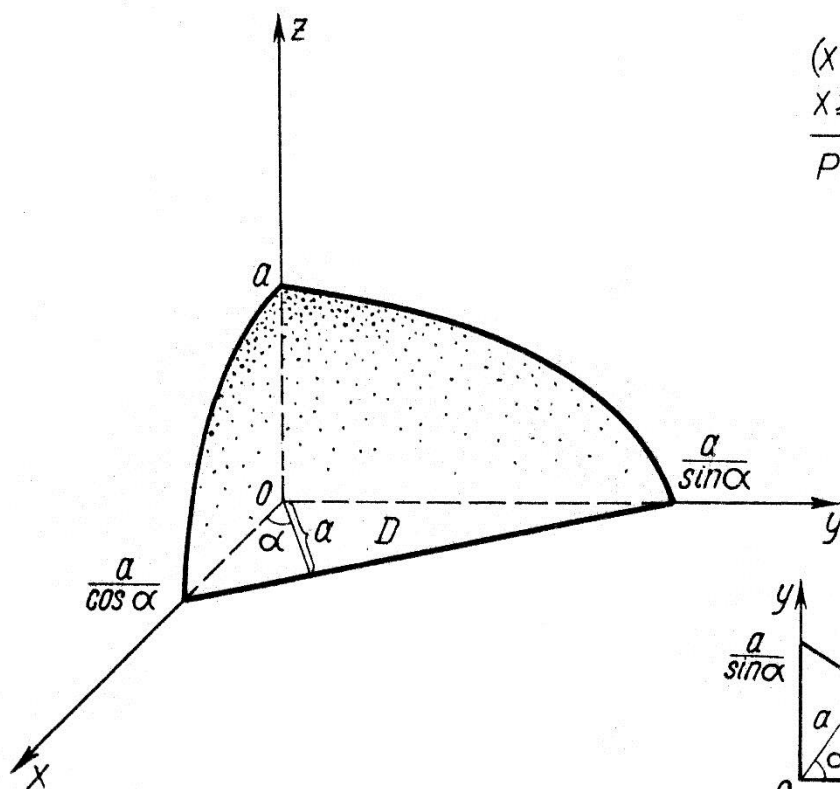


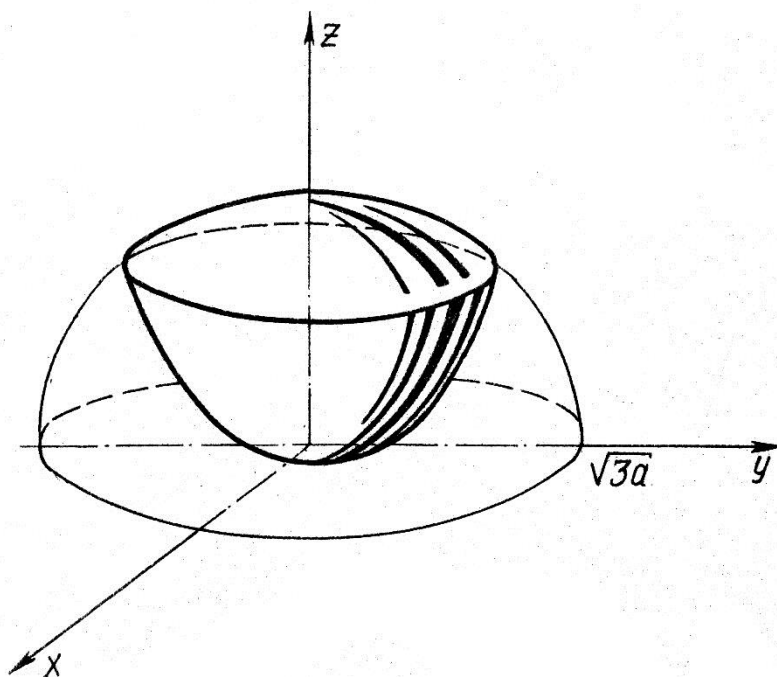
Nº 3639

$$(x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 + z^2 = a^2;$$

$$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \alpha < \frac{\pi}{2}$$

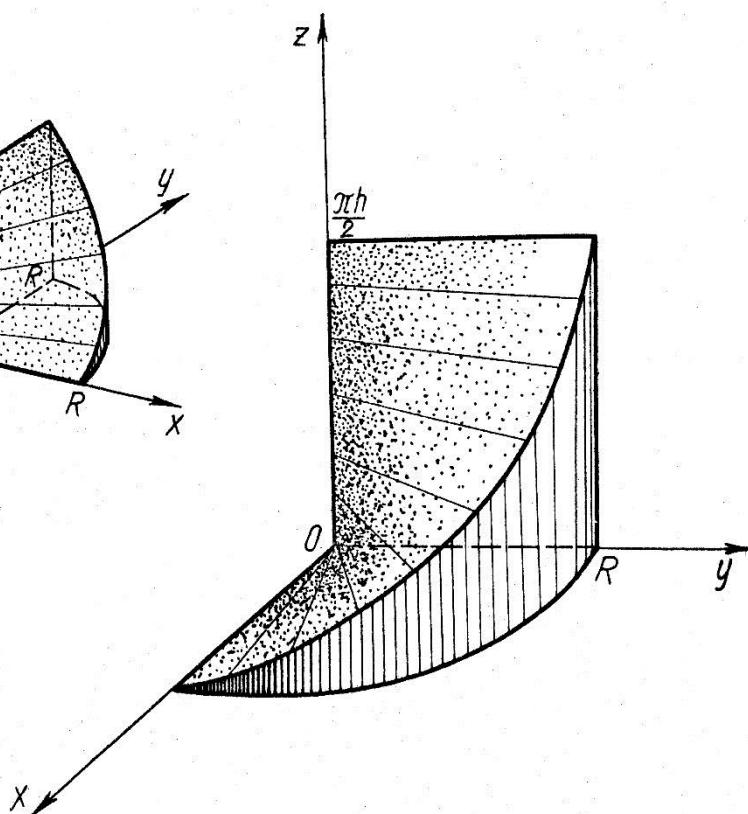
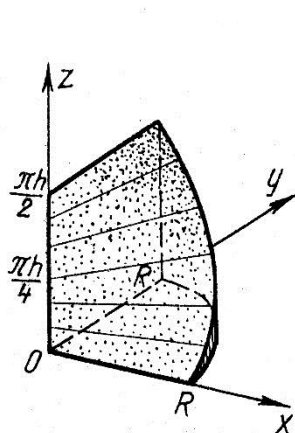
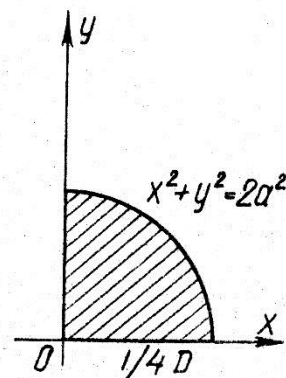
$$P = ?$$





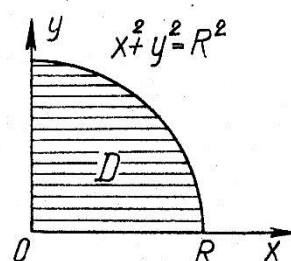
3641
 $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$
 $2az = x^2 + y^2,$
 $z \geq 0$

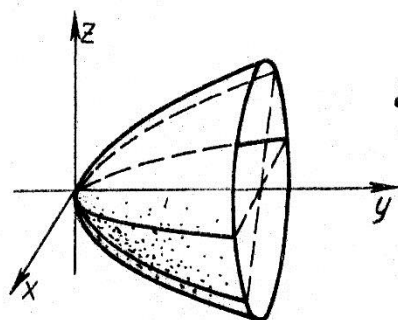
 $\rho = ?$



3596
 $z = h \cdot \arctg \frac{y}{x}$
 $x^2 + y^2 = R^2$
 $x=0, z=0, (x \geq 0, y \geq 0)$

 $\text{Найти } V.$

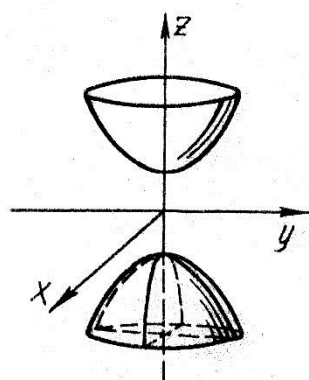
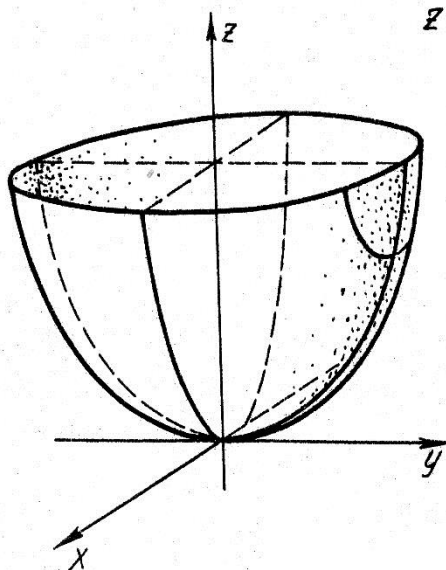




$$y' = \frac{x^2}{2p} + \frac{z^2}{2q}$$

Эллиптический параболоид

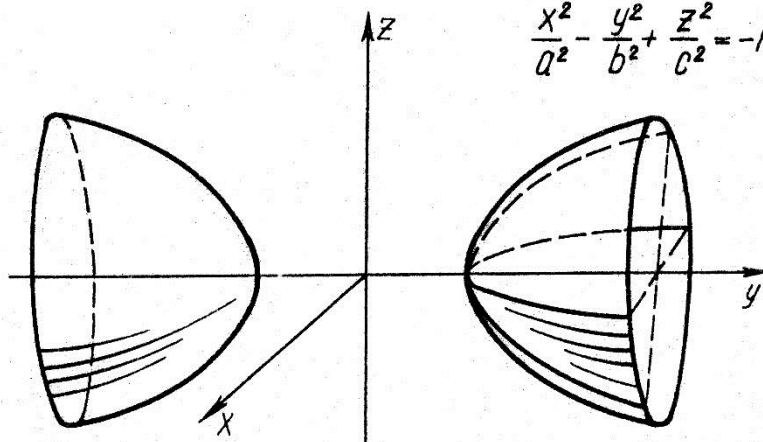
$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$$



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

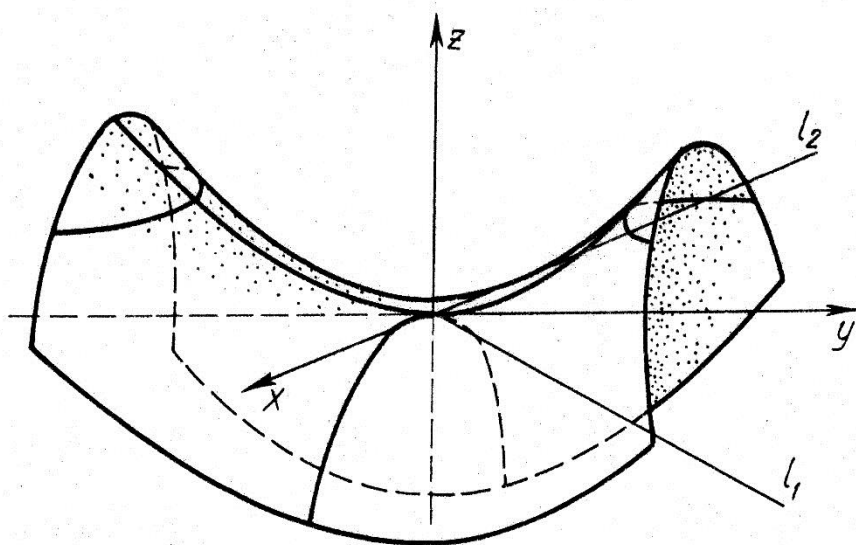
Двухполостный гиперboloид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$$



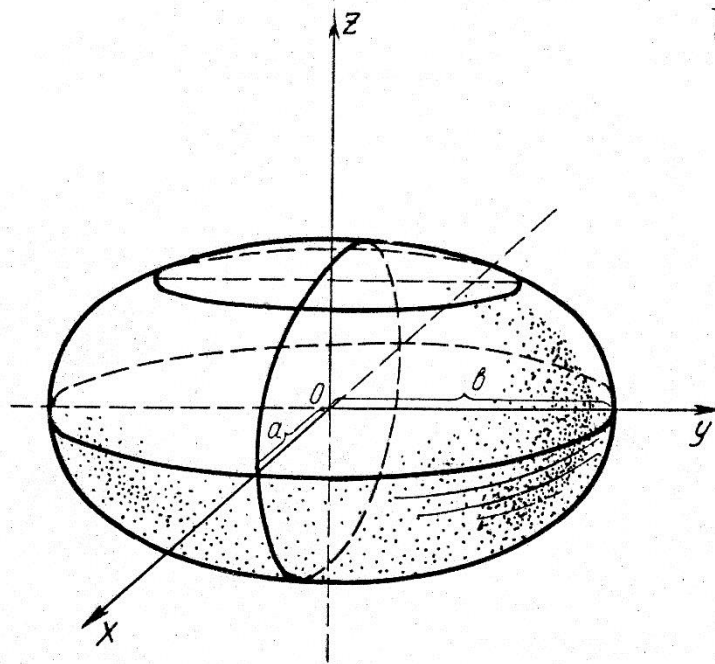
Гиперболический параболоид

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$



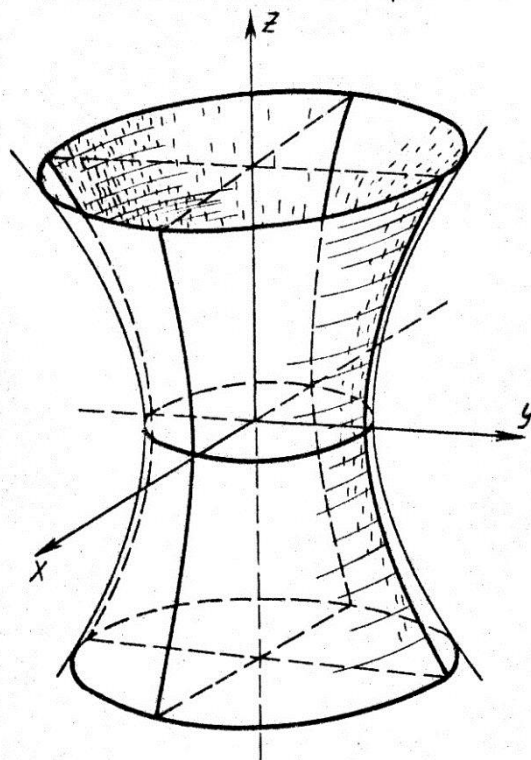
Эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Література

1. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз, Ч. 2. К., Либідь, 1994.
2. Зорич В.А. Математический анализ, Ч.2, М., Наука, 1984.
3. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа, Т.2, М., Наука, 1981.
4. Никольский С.М. Курс математического анализа, Т.2, М., Наука, 1983.
5. Рудин У. Основы математического анализа, М., Мир, 1966.
6. Тер-Криков А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа, М., Наука, 1988.
7. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, Т, 2,3, М., Наука, 1969.
8. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу, М., Физматгиз, 1962.
9. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа, М., Наука, 1971.
10. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу, М., Высшая школа, 2000.
11. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу, М., Наука, 1984.
12. Дороговцев А.Я. Сборник задач по математическому анализу, К., Вища школа, 1991.

Зміст

Деякі відомі криві	3
Як будувати криві	19
Поверхні другого порядку	31
Як будувати перетин поверхонь	36
ЗТіла у просторі	43
Література	91
Зміст	91