

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Невизначені інтеграли

Методичні вказівки
до виконання типової розрахункової роботи
з математичного аналізу
для студентів першого курсу
фізико математичного факультету

*Рекомендовано Методичною радою фізико-математичного
факультету «КПІ імені Ігоря Сікорського»*

Київ
«КПІ імені Ігоря Сікорського»
2017

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Методичні вказівки містять теоретичні питання до колоквіуму і завдання типової розрахункової роботи на тему “**Невизначені інтеграли**” для студентів I курсу фізико-математичного факультету.

Робота виконується у другому семестрі. Кожен студент готує і здає усно теоретичний матеріал на колоквіумі і у письмовій формі завдання типової роботи, які вказує викладач. Зошит з розв’язаними задачами необхідно здати на перевірку викладачеві, який проводить практичні заняття, до написання контрольної роботи.

Студент, який не здав колоквіум і типову роботу, не допускається до екзамену як такий, що не виконав навчальний графік.

1. Теоретичні питання

1. Первісна: означення та властивості.
2. Достатні умови існування первісної. Приклад розривної функції, для якої не існує первісна.
3. Означення невизначеного інтеграла. Основні елементарні властивості невизначеного інтеграла (довести лінійність).
4. Означення невизначеного інтеграла. Таблиця основних інтегралів.
5. Інтегрування частинами в невизначеному інтегралі. Класи функцій, що інтегруються частинами.
6. Заміна змінної в невизначеному інтегралі. Приклади функцій, невизначений інтеграл від яких не є елементарною функцією.
7. Інтегрування елементарних дробів перших трьох типів.
8. Інтегрування елементарного дроби четвертого типу. Рекурентна формула.
9. Теорема про розклад многочлена на множники.
10. Теорема про розклад многочлена з дійсними коефіцієнтами на множники.
11. Теорема про представлення правильного раціонального дроби у вигляді суми елементарних дробів.

12. Означення раціонального дробу. Теорема про інтегрування раціонального дробу.

13. Означення раціональної функції двох змінних. Інтегрування раціональної функції від $\sin x$, $\cos x$ за допомогою універсальної підстановки. Частинні випадки.

14. Інтегрування деяких раціональних функцій, що містять $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ ($a, b, c, x \in \mathbb{R}$). Метод Остроградського і підстановки Euler'а.

15. Диференціальний біном, його інтегрування. Підстановки Чебишова.

16. Визначений інтеграл Newton'а. Формула Newton'а – Leibniz'а.

17. Теорема про заміну змінної і інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

2. Основні означення. Таблиці похідних і основних невизначених інтегралів

Означення 1. Позначимо X – проміжок в \mathbb{R} і розглянемо дві функції такі, що

1. $f(x), F(x): X \rightarrow \mathbb{R}$;

2. $\exists F'(x)$ для $\forall x \in X$ така, що $F'(x) = f(x)$.

Тоді $F(x)$ називають *первісною функції* $f(x)$ на X .

Якщо $F(x)$ – первісна $f(x)$ на X , тоді $F(x) + C$, де C – довільна стала, теж первісна $f(x)$ на X . Інакше – якщо $F_1(x), F_2(x)$ дві первісні $f(x)$ на X , тоді вони відрізняються на сталу. Якщо $f(x) \in \mathcal{C}(X)$, тоді існує первісна $f(x)$ на X .

Означення 2. Множину усіх первісних $f(x)$ на X : $\{F(x) + C\}$ називають *невизначеним інтегралом* від функції $f(x)$ на X і позначають

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

де C – довільна стала.

Вкажемо основні властивості невизначеного інтеграла.

1. $(\int f(x)dx)' = f(x)$.
2. $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$.
3. $\int dF(x) = F(x) + C$.
4. $\int f'(x)dx = f(x) + C$ $\int (\sum_{k=1}^n A_k f_k(x))dx = \sum_{k=1}^n A_k (\int f_k(x)dx)$, де $A_k \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.

5. Таблиці похідних та невизначених інтегралів

$\frac{d}{dx}$	$\int f(x)dx$
1. $(const)'=0$	1. $\int 0dx = const$
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$	2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1,$ $\int dx = x + C$
3. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	3. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C \quad (x \neq 0)$
4. $(a^x)' = a^x \ln a$	4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (a > 0, a \neq 1)$
5. $(e^x)' = e^x$	5. $\int e^x dx = e^x + C, \quad (\forall x)$
6. $(\sin x)' = \cos x$	6. $\int \cos x dx = \sin x + C, \quad (\forall x)$
7. $(\cos x)' = -\sin x$	7. $\int \sin x dx = -\cos x + C, \quad (\forall x)$
8. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$ (у точках неперервності $f(x)$)

9. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$ (у точках непрерывности $f(x)$)
10. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$	10. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C,$ $(\forall x, \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2})$
11. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$	11. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C,$ $(\forall x, \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2})$
12. $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	12. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C, (\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x})$
13. $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	13. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C,$ $(x \neq 0, \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x})$
14. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	14. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C =$ $= -\operatorname{arcctg} x + C, \forall x$
15. $(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$	15. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C =$ $= -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C, \forall x$
16. $(\operatorname{arcsin} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	16. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x + C =$ $= -\operatorname{arccos} x + C, x < 1$
17. $(\operatorname{arccos} x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	17. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C =$ $= -\operatorname{arccos} \frac{x}{a} + C, x < a$

$(uv)' = u'v + v'u$	18. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C, x \neq a$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$	19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln x + \sqrt{x^2 \pm a^2} + C,$ $ x > a$
20. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right + C,$ (у точках неперервності $f(x)$)	
21. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C,$ (у точках неперервності $f(x)$)	
22. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \ln x + \sqrt{x^2 \pm a^2} + C$	

Завдання 1

Знайти невизначений інтеграл безпосереднім зведенням до табличного.

1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x}}.$

2. $\int \frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{x}} dx.$

3. $\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}} dx.$

4. $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2 dx.$

5. $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx.$

6. $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx.$

7. $\int \frac{\sqrt{x} - x^3 e^x + x^2}{x^3} dx.$

8. $\int \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} dx.$

9. $\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}} dx.$

10. $\int \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt[3]{x}} dx.$

11. $\int (3 \cdot 2^x + 2 \cdot 3^x) dx.$

12. $\int 2^x \cdot 3^{2x} \cdot 5^{3x} dx.$

13. $\int (e^{3x} \cdot 3^x) dx.$

14. $\int \frac{3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x}{2^x} dx.$

15. $\int \frac{32^x - 2^x}{4^x} dx.$

16. $\int \sqrt{x} \sqrt{x} \sqrt{x} dx.$

17. $\int \frac{2 - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

18. $\int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx.$

19. $\int \frac{8x^2 - 2}{1-2x} dx.$

20. $\int \frac{1-x}{1+\sqrt{x}} dx.$

21. $\int \frac{x^2 + 3}{x^2 - 1} dx.$

22. $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx.$

23. $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} dx.$

24. $\int \frac{1-\sqrt{4+x^2}}{4+x^2} dx.$

25. $\int \frac{\sqrt{3+x^2} - \sqrt{3-x^2}}{\sqrt{9-x^4}} dx.$

26. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}.$

27. $\int \frac{x-9}{\sqrt{x+3}} dx.$

28. $\int \frac{2+3x^2}{x^2(1+x^2)} dx.$

29. $\int \frac{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx.$

30. $\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx.$

Завдання 2

Знайти невизначений інтеграл безпосереднім зведенням до табличного.

1. $\int \frac{x^3 + 8}{x^2 - 2x + 4} dx$

2. $\int \frac{27 - \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x} + 3\sqrt[6]{x} + 9} dx$

3. $\int \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 6}{9 + x^2} dx$

4. $\int \frac{4 - x^2}{16 - x^4} dx$

5. $\int \operatorname{tg}^2 x dx$

6. $\int (2 \operatorname{tg} x + 3 \operatorname{ctg} x)^2 dx$

7. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} dx$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + \cos 2x}$

9. $\int \frac{\cos 9x + \cos 7x}{\cos 8x} dx$

10. $\int \frac{\cos 4x - \cos 6x}{\sin 5x} dx$

11. $\int 3 \cos^2 \frac{x}{2} dx$

12. $\int \frac{125 - x}{\sqrt[3]{x} - 5} dx$

13. $\int \frac{x^2 - 7}{9 - x^2} dx$

14. $\int \frac{1 + x^2}{x^4 - 1} dx$

15. $\int \sqrt{\frac{3 + x^2}{x^4 - 9}} dx$

16. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$

17. $\int \frac{3 - 2 \operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x} dx$

18. $\int \frac{1 - \cos 2x}{6 \sin x} dx$

19. $\int \frac{1 - 4 \operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x} dx$

20. $\int \frac{\sin 3x - \sin 5x}{\cos 4x} dx$

21. $\int \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x} dx$

22. $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$

23. $\int \operatorname{cth}^2 x dx$

24. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x}$

25. $\int (6 \operatorname{tg} x + 7 \operatorname{ctg} x)^2 dx$

26. $\int (2 \operatorname{th} x + 3 \operatorname{cth} x)^2 dx$

27. $\int (4 \operatorname{tg} x + 5 \operatorname{ctg} x)^2 dx$

28. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x} dx$

29. $\int \frac{1 + \cos 2x}{6 \cos x} dx$

30. $\int \frac{1 + 7 \sin^2 x}{1 - \cos 2x} dx$

3. Заміна змінної в невизначеному інтегралі

Теорема. Нехай $f(x)$ неперервна функція на X і $F(x)$ її первісна на X . Функція $x = \varphi(t) : X_1 \rightarrow X$ і є неперервно диференційовною на X_1 , тоді

$$\int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) dt = F[\varphi(t)] + C \quad \text{для } \forall t \in X_1.$$

Цю формулу застосовують для обчислення інтеграла $\int f(x) dx$, підбираючи функцію $x = \varphi(t)$ таким чином, щоб $\int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) dt$ був простіший у знаходженні ніж початковий. Причому після інтегрування повертаються до старої змінної.

Приклад 1. Знайти $I = \int x \sqrt{x-3} dx$.

■ Зробимо заміну $t = \sqrt{x-3}$, тоді $t^2 = x-3$, $x = t^2 + 3$, $2t dt = dx$.

$$\begin{aligned} I &= \int x \sqrt{x-3} dx = \int (t^2 + 3)t 2t dt = 2 \int (t^4 + 3t^2) dt = \\ &= 2 \left(\frac{t^5}{5} + 3 \frac{t^3}{3} \right) + C = \frac{2}{5} t^5 + 2t^3 + C. \end{aligned}$$

Повертаючись до старої змінної, отримуємо

$$I = \frac{2}{5} (x-3)^{5/2} + 2(x-3)^{3/2} + C \quad \blacksquare$$

Приклад 2. Знайти $I = \int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4} dx$.

■ Зробимо заміну $x = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{dt}{t^2}$, тоді

$$I = \int -\frac{\sqrt{4 - \frac{1}{t^2}}}{\frac{1}{t^4} t^2} dt =$$

$= -\int t\sqrt{4t^2 - 1} dt$. Ще раз замінемо $z = \sqrt{4t^2 - 1}$, тоді

$$dz = \frac{4tdt}{\sqrt{4t^2 - 1}} \text{ і } I = -\frac{1}{4} \int z^2 dz = -\frac{z^3}{12} + C.$$

Повертаючись до змінної t , а потім до x , отримуємо

$$I = -\frac{1}{12x^3} (4 - x^2)^{3/2} + C \blacksquare.$$

Завдання 3

Застосувавши формулу $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$, де

$\int f(x)dx = F(x) + C$, $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, знайти невизначені інтеграли.

1. $\int (x+1)^{15} dx$.

2. $\int \frac{dx}{(2x-3)^5}$.

3. $\int \sqrt[5]{(8-3x)^6} dx$.

4. $\int \sqrt{8-2x} dx$.

5. $\int \cos(3x+\pi) dx$.

6. $\int \sin(2x-3) dx$.

7. $\int \cos(1-2x) dx$.

8. $\int [\cos(3x-\pi)]^{-2} dx$.

9. $\int \frac{dx}{2x-3}$.

10. $\int 2\sin^{-2}(3x-5) dx$.

11. $\int e^{-x} dx$.

12. $\int e^{-3x+1} dx$.

13. $\int (e^{3x} + 2^{3x}) dx.$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}.$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}.$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}.$

21. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}}.$

23. $\int \frac{dx}{x^2+3x-10}.$

25. $\int \frac{dx}{(x-1)^2+4}.$

27. $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}.$

29. $\int \operatorname{sh}(3x-2) dx.$

31. $\int \frac{dx}{\sin(2x+3)}.$

33. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2(3x+2)}.$

35. $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+9x^2}}.$

16. $\int \frac{dx}{2x^2+9}.$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x+3)^2}}.$

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}}.$

22. $\int \frac{dx}{x^2-7x+10}.$

24. $\int \frac{dx}{2-3x^2}.$

26. $\int \frac{dx}{x^2+2x+3}.$

28. $\int 3^{2x+4} dx.$

30. $\int \operatorname{ch}(3-2x) dx.$

32. $\int \frac{dx}{\cos(3x-2)}.$

34. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2(3-2x)}.$

36. $\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2-5x-6}}.$

Завдання 4

Застосувавши формулу $\int f(\varphi(x))d\varphi(x) = F(\varphi(x)) + C$, де $\int f(t)dt = F(t) + C$, знайти невизначені інтеграли.

1. $\int \sin x \cos x dx$.

2. $\int \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x} dx$.

3. $\int \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

4. $\int 2x\sqrt{1+x^2} dx$.

5. $\int x\sqrt{1-x^2} dx$.

6. $\int x^2\sqrt[5]{x^3+2} dx$.

7. $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

8. $\int \frac{x^4}{\sqrt{4+x^2}} dx$.

9. $\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{1+x^4}} dx$.

10. $\int \frac{6x-5}{2\sqrt{3x^2-5x+6}} dx$.

11. $\int \sin^3 x \cos x dx$.

12. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$.

13. $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} dx$.

14. $\int \cos^3 x \sin 2x dx$.

15. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$.

16. $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{1+x^2} dx$.

17. $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^3 \sqrt{1-x^2}}$.

18. $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{1+\operatorname{tg} x}}$.

19. $\int \frac{dx}{x \cos^2(1+\ln x)}$.

20. $\int e^x (\sin e^x) dx$.

21. $\int \frac{x}{1+x^2} dx$.

22. $\int \frac{x^2 dx}{1+x^3}$.

- | | |
|--|---|
| 23. $\int \frac{e^x dx}{e^x + 1}$. | 24. $\int \frac{e^{2x} dx}{e^{2x} + 4}$. |
| 25. $\int \operatorname{tg} x dx$. | 26. $\int \operatorname{ctg} x dx$. |
| 27. $\int \operatorname{ctg}(2x+1) dx$. | 28. $\int \frac{dx}{x \ln x}$. |
| 29. $\int e^{\sin x} \cos x dx$. | 30. $\int x e^{-x^2} dx$. |
| 31. $\int x^2 e^{-x^3} dx$. | 32. $\int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 4}$. |
| 33. $\int \frac{2^x dx}{\sqrt{1-4^x}}$. | 34. $\int \frac{3x-1}{x^2+9} dx$. |
| 35. $\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} dx$. | 36. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$. |
| 37. $\int \frac{1+x-x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx$. | 38. $\int \frac{x(1-x^2) dx}{1+x^4}$. |
| 39. $\int \frac{x + (\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}} dx$. | |

Завдання 5

Знайти невизначені інтеграли.

- | | |
|---|--|
| 1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$; | 2. $\int \frac{dx}{\sin x}$; |
| 3. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$; | 4. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; |
| 5. $\int \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{sh}^4 x + \operatorname{ch}^4 x}} dx$; | 6. $\int \frac{1}{1-x^2} \ln \frac{1+x}{1-x} dx$; |

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$;
8. $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$;
9. $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx$;
10. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}} dx$;
11. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos 2x}}$;
12. $\int \frac{\operatorname{sh} x dx}{\sqrt{\operatorname{ch} 2x}}$;
13. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt{\operatorname{ctg} x}}$;
14. $\int \frac{dx}{\cos x}$;
15. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x \sqrt[3]{\operatorname{th} x}}$;
16. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x}$;
17. $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}}$;
18. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x}$;
19. $\int \frac{x^{n/2} dx}{\sqrt{1+x^{n+2}}}$;
20. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2 + \sqrt{(1+x^2)^3}}}$;
21. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2+\cos 2x}}$;
22. $\int \frac{\sin x \cos x dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$;
23. $\int \frac{3^x 2^x}{9^x - 4^x} dx$;
24. $\int x \sqrt{2-5x^2} dx$;
25. $\int \sqrt{\frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{1+x^2}} dx$;
26. $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{1-3x^2}}$;
27. $\int x^3 \cdot \sqrt[3]{x^2+1} dx$;
28. $\int \frac{x^4 dx}{(x^5+1)^4}$;
29. $\int \frac{x^2 dx}{(8x^3+27)^{2/3}}$;
30. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x}$.

Завдання 6

Знайти невизначені інтеграли.

1. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$.

2. $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$.

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

4. $\int \frac{\ln^3 x dx}{x}$.

5. $\int x\sqrt{1+x^2} dx$.

6. $\int \frac{(\arccos 3x)^2 dx}{\sqrt{1-9x^2}}$.

7. $\int \frac{x^3 dx}{x^8 - 2}$.

8. $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}$.

9. $\int \frac{dx}{e^x + 1}$.

10. $\int \cos^3 x dx$.

11. $\int e^x \sin e^x dx$.

12. $\int \frac{xdx}{x^4 + 4}$.

13. $\int \operatorname{tg}^3 x \sec^2 x dx$.

14. $\int \frac{dx}{\arcsin \sqrt{1-x^2}}$.

15. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$.

16. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{x^4 + 1}}$.

17. $\int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 16}$.

18. $\int \operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh} x dx$.

19. $\int e^{\sin x} \cos x dx$.

20. $\int \frac{dx}{x \cos^2(1 + \ln x)}$.

21. $\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x dx}{1+x^2}$.

22. $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{5x^5 + 1}}$.

23. $\int e^{-x^3} x^2 dx$.

24. $\int \frac{\operatorname{ch} x dx}{4 + \operatorname{sh}^2 x}$.

25. $\int x^2 \sqrt{x^3 + 2} dx$.

26. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt{1 + \operatorname{ctg} x}}$.

27. $\int \frac{\operatorname{tg}^6 x dx}{\operatorname{ch}^2 x}$.

28. $\int \frac{\ln^3(x+3)}{x+3} dx$.

29. $\int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{ctg}^4 x}}{\operatorname{sh}^2 x} dx$.

30. $\int \sqrt{\frac{\arccos 2x}{1-4x^2}} dx$.

Завдання 7

Знайти невизначені інтеграли.

1. $\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)} dx$.

2. $\int \frac{1+\ln x}{x} dx$.

3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

4. $\int \frac{x^2 + \ln x^2}{x} dx$.

5. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$.

6. $\int \frac{(\arccos x)^3 - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

7. $\int \operatorname{tg} x \ln \cos x dx$.

8. $\int \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)} dx$.

9. $\int \frac{x^3}{(x^2+1)^2} dx$.

10. $\int \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2} dx$.

11. $\int \frac{\sin x - \cos x}{(\cos x + \sin x)^5} dx$.

12. $\int \frac{x \cos x + \sin x}{(x \sin x)^2} dx$.

13. $\int \frac{x^3+x}{x^4+1} dx$.

14. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4-x^2-1}}$.

15. $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x-1}}$.

16. $\int \frac{1+\ln(x-1)}{x-1} dx$.

17. $\int \frac{(x^2+1)dx}{(x^3+3x+1)^5}$.

18. $\int \frac{4 \operatorname{arctg} x - x}{1+x^2} dx$.

19. $\int \frac{x^3}{x^2+4} dx$.

20. $\int \frac{x + \cos x}{x^2 + 2 \sin x} dx$.

21. $\int \frac{2 \cos x + 3 \sin x}{(2 \sin x - 3 \cos x)^3} dx$.

22. $\int \frac{8x - \operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2} dx$.

23. $\int \frac{1/(2\sqrt{x})+1}{(\sqrt{x}+x)^2} dx$.

24. $\int \frac{x}{x^4+1} dx$.

25. $\int \frac{x+1/x}{\sqrt{x^2+1}} dx$.

26. $\int \frac{x-1/x}{\sqrt{x^2+1}} dx$.

27. $\int \frac{\operatorname{arctg} x + x}{1+x^2} dx$.

28. $\int \frac{x - (\operatorname{arctg} x)^4}{1+x^2} dx$.

29. $\int \frac{x^3}{x^2+1} dx$.

30. $\int \frac{(\arcsin x)^2 + 1}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

4. Інтегрування частинами в невизначеному інтегралі

Для функцій $u(x), v(x) \in \mathbb{C}^1(X)$ справедлива формула

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x),$$

яку називають *формулою інтегрування частинами*.

Класи функцій, що інтегруються частинами

I. $\int e^{ax} \cos bxdx$, $\int e^{ax} \sin bxdx$, де $a, b \in \mathbb{R}_1$. Покладемо

$$u(x) = e^{ax}.$$

II. $\int P_n(x)e^{ax} dx$, $\int P_n(x)\cos bxdx$, $\int P_n(x)\sin bxdx$, де $a, b \in \mathbb{R}_1$, $P_n(x)$ – многочлен степеня n . Покладемо $u(x) = P_n(x)$.

III. $\int P_n(x)(\arcsin bx)^m dx$, $\int P_n(x)(\arccos bx)^m dx$,
 $\int P_n(x)(\operatorname{arctg} bx)^m dx$, $\int P_n(x)(\ln x)^m dx$, де $m \in \mathbb{N}$, $P_n(x)$ – многочлен степеня n . Покладемо $u(x) = \varphi(x)$, де через $\varphi(x)$ позначено функцію, що множиться на многочлен $P_n(x)$.

Формулу інтегрування частинами застосовують і в інших не типових до I–III випадках.

Приклад 1. Знайти $I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx$.

■ Покладемо $u(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$, $dv = dx$, тоді

$$du = \frac{-2xdx}{2\sqrt{a^2 - x^2}}, v = x. \text{ Отримуємо, інтегруючи частинами,}$$

$$\begin{aligned} I &= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{-x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{(a^2 - x^2) - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \\ &= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2} dx + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = x\sqrt{a^2 - x^2} - I + \\ &+ a^2 \arcsin \frac{x}{a} + C_1. \end{aligned}$$

Отже, $2I = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} + C_1$, або

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C. \quad \blacksquare$$

Подібно знаходять інтеграли $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx$. При знаходженні інтегралів $\int e^{ax} \cos bxdx$, $\int e^{ax} \sin bxdx$ формулу інтегрування частинами застосовують два рази (кругове інтегрування) і знаходять значення інтеграла так, як це було

зроблено у прикладі 1. Вкажемо ще один спосіб обчислення цих інтегралів.

Приклад 2. Знайти $\int e^{ax} \cos bx dx = I_1$, $\int e^{ax} \sin bx dx = I_2$.

■ Запишемо формулу Euler'а:

$$e^{(a+bi)x} = e^{ax} (\cos bx + i \sin bx),$$

де i – уявна одиниця ($i^2 = -1$). Знайдемо $I = \int e^{(a+bi)x} dx$, вважаючи $(a + bi)$ сталою, тоді

$$I = \frac{1}{a + bi} e^{(a+bi)x} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} e^{(a+bi)x}.$$

З іншої сторони

$$I = \int e^{(a+bi)x} dx = \int e^{ax} (\cos bx + i \sin bx) dx = I_1 + iI_2.$$

Запишемо комплексне число, що є значенням I в алгебраїчній формі

$$\begin{aligned} I &= \frac{a - bi}{a^2 + b^2} e^{(a+bi)x} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} e^{ax} (\cos bx + i \sin bx) = \\ &= \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} [(a \cos bx + b \sin bx) + i(a \sin bx - b \cos bx)] \end{aligned}$$

і зрівняємо зі значенням $I = I_1 + iI_2$ (два комплексні числа рівні, якщо рівні відповідно їх дійсні та уявні частини). Отримуємо

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + C,$$

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + C. \blacksquare$$

Завдання 8

Знайти

1. $\int x^5 e^{x^3} dx$.

2. $\int (\arcsin x)^2 dx$;

3. $\int x(\operatorname{arctg} x)^2 dx.$
4. $\int x^2 \ln \frac{1-x}{1+x} dx.$
5. $\int \frac{x \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx.$
6. $\int x \sin^2 x dx;$
7. $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{3/2}} dx;$
8. $\int \sin(\ln x) dx.$
9. $\int \cos(\ln x) dx.$
10. $\int e^{2x} \sin^2 x dx;$
11. $\int (e^x - \cos x)^2 dx.$
12. $\int \frac{\ln \sin x}{\sin^2 x} dx.$
13. $\int \frac{x dx}{\cos^2 x};$
14. $\int \sqrt{a^2 + x^2} dx;$
15. $\int x^3 e^{2x} dx;$
16. $\int (x^2 - 2x + 2)e^{-x} dx;$
17. $\int x^2 \sin 5x dx;$
18. $\int (1+x^2)^2 \cos x dx;$
19. $\int e^x \cos^2 2x dx;$
20. $\int e^x \sin^2 2x dx;$
21. $\int (x - \sin x)^3 dx;$
22. $\int x e^x \sin x dx;$
23. $\int x^2 e^{\sqrt{x}} dx;$
24. $\int \cos^2 \sqrt{x} dx;$
25. $\int \sqrt{x} \ln x dx;$
26. $\int \sin \sqrt{x} dx;$
27. $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx;$
28. $\int x \operatorname{arctg} x dx.$
29. $\int \ln^2 x dx;$
30. $\int \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} dx$

Завдання 9

Знайти

1. $\int (4-3x)e^{-3x} dx.$
2. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{4x-1} dx.$

- | | | | |
|-----|-------------------------------------|-----|------------------------------|
| 3. | $\int (3x+4)e^{3x} dx.$ | 4. | $\int (4x-2)\cos 2x dx.$ |
| 5. | $\int (4-16x)\sin 4x dx.$ | 6. | $\int (5x-2)e^{3x} dx.$ |
| 7. | $\int (1-6x)e^{2x} dx.$ | 8. | $\int \ln(x^2+4) dx.$ |
| 9. | $\int \ln(4x^2+1) dx.$ | 10. | $\int (2-4x)\sin 2x dx.$ |
| 11. | $\int \arctg\sqrt{6x-1} dx.$ | 12. | $\int e^{-2x}(4x-3) dx.$ |
| 13. | $\int e^{-3x}(2-9x) dx.$ | 14. | $\int \arctg\sqrt{2x-1} dx.$ |
| 15. | $\int \arctg\sqrt{3x-1} dx.$ | 16. | $\int \arctg\sqrt{5x-1} dx.$ |
| 17. | $\int (5x+6)\cos 2x dx.$ | 18. | $\int (3x-2)\cos 5x dx.$ |
| 19. | $\int (x\sqrt{2}-3)\cos 2x dx.$ | 20. | $\int (4x+7)\cos 3x dx.$ |
| 21. | $\int (2x-5)\cos 4x dx.$ | 22. | $\int (8-3x)\cos 5x dx.$ |
| 23. | $\int (x+5)\sin 3x dx.$ | 24. | $\int (2-3x)\sin 2x dx.$ |
| 25. | $\int (4x+3)\sin 5x dx.$ | 26. | $\int (7x-10)\sin 4x dx.$ |
| 27. | $\int (\sqrt{2}-8x)\sin 3x dx.$ | 28. | $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}.$ |
| 29. | $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}.$ | 30. | $\int x\sin^2 x dx.$ |
| 31. | $\int \frac{x\cos x dx}{\sin^3 x}.$ | | |

Завдання 10

1. $\int x \sin 3x dx .$

3. $\int x \operatorname{arctg} x dx .$

5. $\int x \operatorname{tg}^2 x dx .$

7. $\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x^5}} dx .$

9. $\int x \sin^2 x dx .$

11. $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$

13. $\int \frac{xdx}{\cos^2 x} .$

15. $\int \frac{x \cos x dx}{\sin^3 x} .$

17. $\int (x^2 - 2x + 5)e^{-2x} dx .$

19. $\int \frac{\ln \cos x}{\cos^2 x} dx .$

21. $\int x^2 \operatorname{ch} x dx .$

23. $\int \frac{xdx}{\operatorname{sh}^2 x} .$

25. $\int x^2 \operatorname{sh} x dx .$

27. $\int x \operatorname{th}^2 x dx .$

29. $\int x^2 \ln x dx$

2. $\int x^2 e^x dx .$

4. $\int \ln(x^2 + 1) dx .$

6. $\int x^2 \ln(1+x) dx .$

8. $\int x \cos^2 x dx .$

10. $\int x \operatorname{ctg}^2 x dx$

12. $\int \frac{xdx}{\sin^2 x} .$

14. $\int x \operatorname{arctg}^2 x dx .$

16. $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx .$

18. $\int x \ln \frac{1-x}{1+x} dx$

20. $\int \frac{\ln \sin x}{\sin^2 x} dx .$

22. $\int \ln^2 x dx .$

24. $\int \frac{xdx}{\operatorname{ch}^2 x} .$

26. $\int x \operatorname{arctg} x dx .$

28. $\int x^2 \operatorname{arctg} x dx$

30. $\int (x^2 + 1)e^{-x} dx .$

Завдання 11

Застосувавши узагальнену формулу інтегрування частинами: $u(x), v(x) \in \mathbb{C}^{(n)}(X)$

$$\int u(x)v(x)dx = u(x)v_1(x) - u'(x)v_2(x) + u''(x)v_3(x) + \dots + (-1)^{n-1}u^{(n-1)}(x)v_n(x) - (-1)^{n-1}\int u^{(n)}(x)v_n(x)dx,$$

де $v_1(x) = \int v(x)dx$, $v_2(x) = \int v_1(x)dx$, ..., $v_n(x) = \int v_{n-1}(x)dx$ знайти наступні інтеграли:

1. $\int (x^3 + 3x^2 + 2x + 4)e^{2x} dx$;
2. $\int (x^3 + 3x^2 + 2x + 4)\sin 2x dx$;
3. $\int (x^3 + 3x^2 + 2x + 4)\cos 2x dx$;
4. $\int (x^3 + 3x^2 + 2x + 4)\sin^2 x dx$;
5. $\int (x^3 + 3x^2 + 2x + 4)\cos^2 x dx$;
6. $\int (x^3 + 3x^2 + 2x + 4)\operatorname{sh}(2x + 1) dx$;
7. $\int (x^3 + 3x^2 + 2x + 4)\operatorname{ch}(2x + 1) dx$;
8. $\int (x^4 + 3x + 2)e^{2x+3} dx$;
9. $\int (x^4 + 3x + 2)\sin(2x + 3) dx$;
10. $\int (x^4 + 3x + 2)\cos(2x + 3) dx$;
11. $\int (x^4 + 3x + 2)\operatorname{sh}(3x + 1) dx$;
12. $\int (x^4 + 3x + 2)\operatorname{ch}(3x + 1) dx$;
13. $\int (x^3 + 1)\sin^2(2x) dx$;
14. $\int (x^3 + 1)\cos^2(2x) dx$;
15. $\int (x^3 + 1)\sin^2(3x + 1) dx$;
16. $\int (x^3 + 1)\cos^2(3x + 1) dx$;
17. $\int (x^3 - 2x^2 + 3x - 1)\sqrt{2x + 3} dx$;

18. $\int (x^3 + 2x + 6)\sqrt{3x + 2} dx;$
19. $\int (x^3 + 2x^2 - 3x + 2)3^x dx;$
20. $\int (x^3 + 2x^2 - 3x + 2)5^x dx;$
21. $\int (x^3 + 3x + 2)\sqrt{3x + 1} dx;$
22. $\int (x^3 + 3x + 1)\sqrt[3]{2x + 1} dx;$
23. $\int (x^2 - 2x + 1)\sqrt[3]{2x + 3} dx;$
24. $\int (x^2 - 2x + 1)\sqrt[5]{3x + 1} dx;$
25. $\int \frac{x^2 - 7x + 1}{\sqrt[3]{2x + 1}} dx;$
26. $\int \frac{x^2 + 4x - 1}{\sqrt[3]{x + 3}} dx;$
27. $\int \frac{x^3 - 1}{\sqrt[3]{3x + 2}} dx;$
28. $\int \frac{x^2 + 4x + 1}{\sqrt[3]{2x - 1}} dx;$
29. $\int \frac{x^3 + 3}{\sqrt[3]{3x + 2}} dx;$
30. $\int \frac{x^2 + 4x + 1}{\sqrt[3]{5x + 1}} dx.$

Рекурентні формули

Рекурентні формули дають можливість звести інтеграл, який залежить від індекса $n > 0$, до інтеграла такого ж типу тільки з меншим індексом.

Завдання 12

За допомогою інтегрування частинами вивести наступні рекурентні формули:

$$1. \quad I_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \left(\frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + (2n-1)I_n \right),$$

$$\text{де } I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}, \quad n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}, \quad (u = \frac{1}{(x^2 + a^2)^n}, dv = dx).$$

$$2. \quad I_{n,-m} = \frac{\sin^{n-1} x}{(m-1)\cos^{m-1} x} - \frac{n-1}{m-1} I_{n-2,2-m},$$

$$\text{де } I_{n,-m} = \int \frac{\sin^n x}{\cos^m x} dx, \quad n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

$$3. \quad I_n = \frac{x(a^2 - x^2)^n}{2n+1} + \frac{2na^2}{2n+1} I_{n-1}, \quad \text{де } I_n = \int (a^2 - x^2)^n dx,$$

$$n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}_1 \quad (u = (x^2 - a^2)^n, dv = dx).$$

$$4. \quad I_n = \int (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n - nI_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$5. \quad I_n = \int x^\alpha (\ln x)^n dx = \frac{1}{\alpha+1} (x^{\alpha+1} (\ln x)^n - nI_{n-1}),$$

$$n \in \mathbb{N}, \alpha \neq -1.$$

$$6. \quad I_n = \int x^n e^x dx = x^n e^x - nI_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$7. \quad I_n = \int e^{\alpha x} \sin^n x dx = \frac{1}{\alpha^2 + n^2} [e^{\alpha x} \sin^{n-1} x (\alpha \sin x - n \cos x) +$$

$$+ n(n-1)I_{n-2}], \quad \text{де } n = 2, 3, \dots, \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$8. \quad I_n = \int \frac{dx}{(\sin x)^n} = \frac{1}{n-1} \left[(n-2)I_{n-2} - \frac{\cos x}{(\sin x)^{n-1}} \right], \quad n = 2, 3, \dots,$$

$$9. \quad I_n = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1}{n} [x^{n-1} \sqrt{x^2 + a^2} - (n-1)aI_{n-2}], \quad n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R},$$

$$I_1 = \sqrt{x^2 + a^2} + C, \quad I_0 = \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C.$$

$$10. I_n = \int (\operatorname{tg} x)^n dx = \frac{1}{n-1} \operatorname{tg}^{n-1} x - I_{n-2}, \quad n = 2, 3, \dots,$$

$$I_1 = -\ln |\cos x| + C, \quad I_0 = x + C.$$

$$11. I_n = \int (\operatorname{ctg} x)^n dx = \frac{1}{n-1} \operatorname{ctg}^{n-1} x - I_{n-2}, \quad n = 2, 3, \dots,$$

$$I_1 = \ln |\sin x| + C, \quad I_0 = x + C.$$

$$12. I_n = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1}{n} [x^{n-1} \sqrt{x^2 + a^2} - (n-1)aI_{n-2}],$$

$$n = 2, 3, \dots, a \in \mathbb{R}, I_1 = \sqrt{x^2 + a^2} + C, \quad I_0 = \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C.$$

$$13. S_n = \int x^n \sin x dx, \quad C_n = \int x^n \cos x dx, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$C_n = x^n \sin x - nS_{n-1}, \quad C_0 = C + \sin x.$$

$$14. S_n = \int x^n \sin x dx, \quad C_n = \int x^n \cos x dx, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$S_0 = C - \cos x, \quad S_n = -x^n \cos x + nC_{n-1}.$$

$$15. I_{2n+1} = \int \frac{dx}{(\cos x)^{2n+1}} = \frac{\sin x}{2n \cos^{2n} x} + \left(1 - \frac{1}{2n}\right) I_{2n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Використовуючи одну з рекурентних формул (1)–(15), знайти наступні інтеграли

$$16. \int \frac{\sin^2 x}{\cos^5 x} dx;$$

$$17. \int \frac{\sin^3 x}{\cos^7 x} dx;$$

$$18. \int (4 - x^2)^8 dx;$$

$$19. \int (\ln x)^7 dx;$$

$$20. \int x^2 (\ln x)^3 dx;$$

$$21. \int x^3 (\ln x)^4 dx;$$

$$22. \int e^{2x} \sin^2 x dx;$$

$$23. \int e^{3x} \sin^3 x dx;$$

$$24. \int \frac{dx}{\sin^7 x};$$

$$25. \int x^7 \cos x dx.$$

$$26. \int \operatorname{tg}^5 x dx;$$

27. $\int \operatorname{ctg}^5 x dx;$

28. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2 + 3}};$

29. $\int \frac{dx}{\cos^5 x};$

30. $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{x^2 + 1}};$

5. Інтегрування раціональних дробів

Елементарними дробами, відповідно першого, другого, третього і четвертого типів, називають

$$\text{I. } \frac{A}{x-a}. \quad \text{II. } \frac{A}{(x-a)^k}. \quad \text{III. } \frac{Mx+N}{x^2+px+q}. \quad \text{IV. } \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}, \text{ де}$$

$A, M, N, p, q, a \in \mathbb{R}; k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $x^2 + px + q$ – незвідний квадратний тричлен, тобто $p^2 - 4q < 0$.

Знайдемо

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln |x-a| + C, \quad \int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C,$$

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx = \left| \begin{array}{l} d(x^2+px+q) \\ = (2x+p)dx \end{array} \right| = \frac{M}{2} \int \frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q} +$$

$$+(N - \frac{Mp}{2}) \int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{M}{2} \ln(x^2+px+q) + (N - \frac{Mp}{2}) I_1,$$

$$\text{де } I_1 = \int \frac{dx}{x^2+px+q}.$$

$$x^2+px+q = x^2 + 2\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = (x - \frac{p}{2})^2 + (q - \frac{p^2}{4}) =$$

$$= (x - \frac{p}{2})^2 + (\frac{4q - p^2}{4}).$$

Позначимо $\frac{4q - p^2}{4} = a^2$, тоді, застосувавши

табличний

інтеграл $\int \frac{dz}{z^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{z}{a} + C$, отримуємо

$$I_1 = \frac{2}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2(x + p/2)}{\sqrt{4q - p^2}} + C.$$

Отже

$$\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx = \frac{M}{2} \ln(x^2 + px + q) + \\ + \frac{2N - Mp}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C.$$

При інтегруванні елементарного дробу четвертого типу застосовують рекурентну формулу (див. завд. 7 формула

$$(1)) I_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \left[\frac{z}{(z^2 + a^2)^n} + (2n-1)I_n \right], \quad I_n = \int \frac{dz}{(z^2 + a^2)^n}, \text{ де}$$

$a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, або метод Остроградського:

$$I_k = \frac{P_{2k-3}(x)}{(x^2 + px + q)^{k-1}} + \lambda \int \frac{dx}{x^2 + px + q}, \quad \text{де } I_k = \int \frac{(Mx + N)dx}{(x^2 + px + q)^k},$$

$P_{2k-3}(x)$ – многочлен степеня $2k-3$ з невідомими коефіцієнтами, λ – невідома стала. Для знаходження невідомих коефіцієнтів $P_{2k-3}(x)$ і λ диференціюють ліву і праву частини рівності і зрівнюють тотожно многочлени в чисельнику дробів.

Приклад 1. Знайти $\int \frac{5x + 6}{(x^2 + 3)^2} dx = I_2$.

■ Застосуємо метод Остроградського: $k = 2; 2k - 3 = 1$; отже

$P_{2k-3}(x) = P_1(x) = Ax + B$. Запишемо рівність

$$I_2 = \int \frac{5x+6}{(x^2+3)^2} dx = \frac{Ax+B}{x^2+3} + \lambda \int \frac{dx}{x^2+3}$$

і продиференціюємо її

$$\frac{5x+6}{(x^2+3)^2} = \frac{A(x^2+3) - 2x(Ax+B)}{(x^2+3)^2} + \lambda \frac{1}{x^2+3}$$

Тотожно зрівняємо чисельники:

$$5x+6 \equiv A(x^2+3) - 2x(Ax+B) + \lambda(x^2+3)$$

і знайдемо коефіцієнти:

$$\begin{array}{l|l} x^2 & 0 = A - 2A + \lambda \\ x^1 & 5 = -2B \\ x^0 & 6 = 3A + 3\lambda, \end{array}$$

$$A = \lambda, B = -5/2, A = 1.$$

$$\text{Отже } I_2 = \int \frac{5x+6}{(x^2+3)^2} dx = \frac{2x-5}{2(x^2+3)} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{x}{\sqrt{3}} + C. \quad \blacksquare$$

Зробимо висновок, що інтеграли від елементарних дробів є елементарними функціями. Сформулюємо теорему про інтегрування раціонального дробу – відношення двох

много-членів з дійсними коефіцієнтами: $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$, який

називають *правильним*, якщо $m < n$ і *неправильним* у випадку $m \geq n$. Кожен неправильний раціональний дріб можна записати у вигляді суми його цілої частини (многочлена) і правильного раціонального дробу.

Теорема. Якщо $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ правильний раціональний дріб

такий, що

$$P_n(x) \equiv a_n(x-x_1)^{l_1} \cdots (x-x_k)^{l_k} (x^2+p_1x+q_1)^{s_1} \cdots (x^2+p_lx+q_l)^{s_l},$$

де x_i – дійсні нулі, l_i – їх кратності ($i = \overline{1, k}$), $(x^2+p_jx+q_j)^{s_j}$ –

незвідні квадратні тричлени, яким відповідає пара комплексних нулів кратності s_j ($j = \overline{1, l}$), тоді

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^{r_j} \frac{A_{ji}}{(x-x_j)^i} \right) + \sum_{j=1}^l \left(\sum_{i=1}^{s_j} \frac{M_{ji}x + N_{ji}}{(x^2 + p_jx + q_j)^i} \right), \text{ де всі сталі}$$

A_{ji}, M_{ji}, N_{ji} визначаються однозначно.

Зробимо висновок, що елементарні дробки є тим класом елементарних функцій, який невизначений інтеграл переводить в елементарні функції.

Приклад 2. Знайти $I = \int \frac{4x^3 - 5x^2 + 5x - 2}{x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x} dx$.

■ Зауважимо, що треба знайти інтеграл від правильного раціонального дробу: $m = 3 < 4 = n$. Запишемо $P_n(x) \equiv x(x-2)(x^2+1)$, тоді згідно з теоремою про розклад правильного дробу,

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{Mx+N}{x^2+1}.$$

Зведемо в правій частині дробки до спільного знаменника і зрівняємо тотожно його чисельник з $Q_m(x)$:

$$4x^3 - 5x^2 + 5x - 2 \equiv A(x-2)(x^2+1) + Bx(x^2+1) + (Mx+N)x(x-2).$$

Покладемо $x = 0$, тоді $-2 = -2A \Rightarrow A = 1$. Покладемо $x = 2$, тоді $B = 2$. Для знаходження M і N зрівняємо коефіцієнти відповідно при x^3 та x :

$$x^3 : 4 = A + B + M \Rightarrow M = 1. \quad x : 5 = A + B - 2N \Rightarrow N = -1.$$

Таким чином

$$I = \int \frac{dx}{x} + 2 \int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{x-1}{x^2+1} dx = \ln|x| + 2 \ln|x-2| + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - \arctg x + C = \ln|x| \sqrt{x^2+1} (x-2)^2 - \arctg x + C. \blacksquare$$

Завдання 13

Знайти інтеграли

1. $\int \frac{x^3+1}{x^2-x} dx.$

2. $\int \frac{3x^3+1}{x^2-1} dx.$

3. $\int \frac{x^3-17}{x^2-4x+3} dx.$

4. $\int \frac{2x^3+5}{x^2-x-2} dx.$

5. $\int \frac{2x^3-1}{x^2+x-6} dx.$

6. $\int \frac{3x^3+25}{x^2+3x+2} dx.$

7. $\int \frac{x^3+2x^2+3}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx.$

8. $\int \frac{3x^3+2x^2+1}{(x+2)(x-2)(x-1)} dx.$

9. $\int \frac{x^3}{(x-1)(x+1)(x+2)} dx.$

10. $\int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-3)(x-2)} dx.$

11. $\int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-3)x} dx.$

12. $\int \frac{4x^3+x^2+2}{x(x-1)(x-2)} dx.$

13. $\int \frac{3x^3-2}{x^3-x} dx.$

14. $\int \frac{x^3-3x^2-12}{(x-4)(x-2)x} dx.$

15. $\int \frac{x^5-x^3+1}{x^2-x} dx.$

16. $\int \frac{x^5+3x^3-1}{x^2+x} dx.$

17. $\int \frac{2x^5-8x^3+3}{x^2-2x} dx.$

18. $\int \frac{3x^5-12x^3-7}{x^2+2x} dx.$

19. $\int \frac{-x^5+9x^3+4}{x^2+3x} dx.$

20. $\int \frac{-x^5+25x^3+1}{x^2+5x} dx.$

21. $\int \frac{x^3-5x^2+5x+23}{(x-1)(x+1)(x-5)} dx.$

22. $\int \frac{x^5+2x^4-2x^3+5x^2-7x+9}{(x+3)(x-1)x} dx.$

23. $\int \frac{2x^4-5x^2-8x-8}{x(x-2)(x+2)} dx.$

24. $\int \frac{4x^4+2x^2-x-3}{x(x-1)(x+1)} dx.$

25.
$$\int \frac{3x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 2}{x(x-1)(x+2)} dx.$$

27.

$$\int \frac{x^5 - x^4 - 6x^3 + 13x + 6}{x(x-3)(x+2)} dx.$$

29.

$$\int \frac{2x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x - 9}{x(x-1)(x+3)} dx.$$

31.
$$\int \frac{2x^3 - 40x - 8}{x(x+4)(x-2)} dx.$$

26.
$$\int \frac{2x^4 + 2x^3 - 41x^2 + 20}{x(x-4)(x+5)} dx.$$

28.
$$\int \frac{3x^3 - x^2 - 12x - 2}{x(x+1)(x-2)} dx.$$

30.
$$\int \frac{2x^3 - x^2 - 7x - 12}{x(x-3)(x+1)} dx.$$

Завдання 14

1.
$$\int \frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 9}{(x+1)(x+2)^3} dx.$$

2.
$$\int \frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 8}{x(x+2)^3} dx.$$

3.
$$\int \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 6}{(x+2)(x-2)^3} dx.$$

4.
$$\int \frac{x^3 + 6x^2 + 14x + 10}{(x+1)(x+2)^3} dx.$$

5.
$$\int \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 10}{(x+2)(x-2)^3} dx.$$

6.
$$\int \frac{x^3 + 6x^2 + 11x + 7}{(x+1)(x+2)^3} dx.$$

7.
$$\int \frac{2x^3 + 6x^2 + 7x + 1}{(x-1)(x+1)^3} dx.$$

8.
$$\int \frac{x^3 + 6x^2 + 10x + 10}{(x-1)(x+2)^3} dx.$$

9.
$$\int \frac{2x^3 + 6x^2 + 7x + 2}{x(x+1)^3} dx.$$

10.
$$\int \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 8}{x(x-2)^3} dx.$$

11.
$$\int \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 7}{(x+1)(x-2)^3} dx.$$

12.
$$\int \frac{x^3 - 6x^2 + 14x - 6}{(x+1)(x-2)^3} dx.$$

13.
$$\int \frac{x^3 - 6x^2 + 10x - 10}{(x+1)(x-2)^3} dx.$$

14.
$$\int \frac{x^3 + x + 2}{(x+2)x^3} dx.$$

15.
$$\int \frac{3x^3 + 9x^2 + 10x + 2}{(x-1)(x+1)^3} dx.$$

16.
$$\int \frac{2x^3 + x + 1}{(x+1)x^3} dx.$$

17.
$$\int \frac{2x^3 + 6x^2 + 7x + 4}{(x+2)(x+1)^3} dx.$$

18.
$$\int \frac{2x^3 + 6x^2 + 5x}{(x+2)(x+1)^3} dx.$$

19.
$$\int \frac{2x^3 + 6x^2 + 7x}{(x-2)(x+1)^3} dx.$$

20.
$$\int \frac{2x^3 + 6x^2 + 5x + 4}{(x-2)(x+1)^3} dx.$$

21.
$$\int \frac{x^3 + 6x^2 + 4x + 24}{(x-2)(x+2)^3} dx.$$

22.
$$\int \frac{x^3 + 6x^2 + 14x + 4}{(x-2)(x+2)^3} dx.$$

23.
$$\int \frac{x^3 + 6x^2 + 18x - 4}{(x-2)(x+2)^3} dx.$$

24.
$$\int \frac{x^3 + 6x^2 + 10x + 12}{(x-2)(x+2)^3} dx.$$

25.
$$\int \frac{x^3 - 6x^2 + 14x - 4}{(x+2)(x-2)^3} dx.$$

26.
$$\int \frac{x^3 + 6x^2 + 15x + 2}{(x-2)(x+2)^3} dx.$$

27.
$$\int \frac{2x^3 - 6x^2 + 7x - 4}{(x-2)(x-1)^3} dx.$$

28.
$$\int \frac{2x^3 - 6x^2 + 7x}{(x+2)(x-1)^3} dx.$$

29.
$$\int \frac{x^3 + 6x^2 - 10x + 52}{(x-2)(x+2)^3} dx.$$

30.
$$\int \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 6}{(x+2)(x-2)^3} dx.$$

31.
$$\int \frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 6}{(x-2)(x+2)^3} dx.$$

Завдання 15

Знайти інтеграли

$$1. \int \frac{x^3 + 4x^2 + 4x + 2}{(x+1)^2(x^2 + x + 1)} dx.$$

$$2. \int \frac{x^3 + 4x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2(x^2 + 1)} dx.$$

$$3. \int \frac{2x^3 + 7x^2 + 7x - 1}{(x+2)^2(x^2 + x + 1)} dx.$$

$$4. \int \frac{2x^3 + 4x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2(x^2 + 2x + 2)} dx.$$

$$5. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 9x + 6}{(x+1)^2(x^2 + 2x + 2)} dx.$$

$$6. \int \frac{2x^3 + 11x^2 + 16x + 10}{(x+2)^2(x^2 + 2x + 3)} dx.$$

$$7. \int \frac{3x^3 + 6x^2 + 5x - 1}{(x+1)^2(x^2 + 2)} dx.$$

$$8. \int \frac{x^3 + 9x^2 + 21x + 21}{(x+3)^2(x^2 + 3)} dx.$$

$$9. \int \frac{x^3 + 6x^2 + 8x + 8}{(x+2)^2(x^2 + 4)} dx.$$

$$10. \int \frac{x^3 + 5x^2 + 12x + 4}{(x+2)^2(x^2 + 4)} dx.$$

$$11. \int \frac{2x^3 - 4x^2 - 16x - 12}{(x-1)^2(x^2 + 4x + 5)} dx.$$

$$12. \int \frac{-3x^3 + 13x^2 - 13x + 1}{(x-2)^2(x^2 - x + 1)} dx.$$

$$13. \int \frac{x^3 + 2x^2 + 10x}{(x+1)^2(x^2 - x + 1)} dx.$$

$$14. \int \frac{3x^3 + x + 46}{(x-1)^2(x^2 + 9)} dx.$$

$$15. \int \frac{4x^3 + 24x^2 + 20x - 28}{(x+3)^2(x^2 + 2x + 2)} dx.$$

$$16. \int \frac{2x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)} dx.$$

$$17. \int \frac{x^3 + x + 1}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)} dx.$$

$$18. \int \frac{x^2 + x + 3}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)} dx.$$

19. $\int \frac{2x^3 + 4x^2 + 2x + 2}{(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2)} dx.$
20. $\int \frac{2x^3 + 7x^2 + 7x + 9}{(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2)} dx.$
21. $\int \frac{4x^2 + 3x + 4}{(x^2 + 1)(x^2 + x + 1)} dx.$
22. $\int \frac{3x^3 + 4x^2 + 6x}{(x^2 + 2)(x^2 + 2x + 2)} dx.$
23. $\int \frac{2x^2 - x + 1}{(x^2 - x + 1)(x^2 + 1)} dx.$
24. $\int \frac{x^3 + x^2 + 1}{(x^2 - x + 1)(x^2 + 1)} dx.$
25. $\int \frac{x^3 + x + 1}{(x^2 - x + 1)(x^2 + 1)} dx.$
26. $\int \frac{2x^3 + 2x + 1}{(x^2 - x + 1)(x^2 + 1)} dx.$
27. $\int \frac{x^3 + 2x^2 + x + 1}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)} dx.$
28. $\int \frac{x + 4}{(x^2 + x + 2)(x^2 + 2)} dx.$
29. $\int \frac{2x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)} dx.$
30. $\int \frac{3x^3 + 7x^2 + 12x + 6}{(x^2 + x + 3)(x^2 + 2x + 3)} dx.$
31. $\int \frac{2x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)} dx.$

Завдання 16

1. $\int \frac{9x + 27}{x^3 + 3x^2 + 9x - 13} dx$
2. $\int \frac{3x^2 + 5}{x^3 - x^2 + 3x + 5} dx$
3. $\int \frac{3x^2 + x + 15}{x^3 + 13x + 34} dx$
4. $\int \frac{5x + 26}{20 - 6x - x^3} dx$

5.
$$\int \frac{3x^2 + x + 2}{x^3 - x^2 - 7x + 15} dx$$

7.
$$\int \frac{12x^2 - 3x + 9}{4x^3 + 6x - 10} dx$$

9.
$$\int \frac{9x + 18}{x^3 + 6x - 20} dx$$

11.
$$\int \frac{x^2 + 7x - 15}{x^3 + 13x + 34} dx$$

13.
$$\int \frac{8 - 6x}{x^3 - x^2 - 7x + 15} dx$$

15.
$$\int \frac{x^2 + 16x - 19}{x^3 - 5x^2 + 4x + 10} dx$$

17.
$$\int \frac{x^2 + 3x - 6}{x^3 - x^2 + 3x + 5} dx$$

19.
$$\int \frac{8x - 2}{x^3 - x^2 - 7x + 15} dx$$

21.
$$\int \frac{11 - 6x}{x^3 - 5x^2 + 4x + 10} dx$$

23.
$$\int \frac{5x + 26}{20 - 6x - x^3} dx$$

24.
$$\int \frac{12x + 26}{20 - 9x - 3x^2 - x^3} dx$$

25.
$$\int \frac{6x - 9 - x^2}{x^3 - x^2 + 3x + 5} dx$$

27.
$$\int \frac{17x + 23}{30 + 8x - 3x^2 - x^3} dx$$

29.
$$\int \frac{6x^2 - 8x + 12}{4x^3 + x + 5} dx$$

6.
$$\int \frac{8 - 5x}{4x^3 + x + 5} dx$$

8.
$$\int \frac{x^2 + 7x - 11}{x^3 - 5x^2 + 4x + 10} dx$$

10.
$$\int \frac{3x^2 + 15}{x^3 + 3x^2 + 9x - 13} dx$$

12.
$$\int \frac{13 + 11x - x^2}{x^3 + 3x^2 - 8x - 30} dx$$

14.
$$\int \frac{7x + 11}{10 - 6x - 4x^3} dx$$

16.
$$\int \frac{x^2 + 7x + 8}{x^3 + x - 10} dx$$

18.
$$\int \frac{19x + 17}{x^3 + 3x^2 - 8x - 30} dx$$

20.
$$\int \frac{9x - 4}{4x^3 + x + 5} dx$$

22.
$$\int \frac{9x + 8}{x^3 + x - 10} dx$$

26.
$$\int \frac{7x - 36}{x^3 + 13x + 34} dx$$

28.
$$\int \frac{5x + 3}{10 - x - x^3} dx$$

30.
$$\int \frac{9x + 9}{4x^3 + 6x - 10} dx$$

Завдання 17

Знайти інтеграли

$$1. \int \frac{8x+13}{30+8x-3x^2-x^3} dx.$$

$$3. \int \frac{x^2+7x+8}{x^3+x-10} dx;$$

$$5. \int \frac{8-6x}{x^3-x^2-7x+15} dx;$$

$$7. \int \frac{3x^2+5}{x^3-x^2+3x-5} dx;$$

$$9. \int \frac{x^2-3x+40}{x^3+13x+34} dx;$$

$$11. \int \frac{x+8}{x^3-3x^2+12x-10} dx;$$

$$13. \int \frac{3x^2+x+2}{15-7x-x^2+x^3} dx;$$

$$15. \int \frac{5x+3}{10-x-x^3} dx;$$

$$17. \int \frac{3x^2+5}{x^3-3x^2-6x+8} dx;$$

$$19. \int \frac{6x^2+x-2}{2x^3-x-1} dx;$$

$$21. \int \frac{x^2+1}{x^3+6x^2+11x+6} dx;$$

$$23. \int \frac{x^2-x+1}{x^3-x^2+x-1} dx;$$

$$25. \int \frac{xdx}{x^3-3x+2};$$

$$2. \int \frac{13+11x-x^2}{x^3+3x^2-8x-30} dx;$$

$$4. \int \frac{9x+18}{x^3+6x-20} dx;$$

$$6. \int \frac{17x+23}{x^3+1} dx;$$

$$8. \int \frac{x^2+3x+6}{5+3x-x^2+x^3} dx;$$

$$10. \int \frac{x^2+16x-19}{x^3+5x^2+4x+20} dx;$$

$$12. \int \frac{8x-2}{x^3+x^2-7x+5} dx;$$

$$14. \int \frac{6x-9-x^2}{x^3-2x^2-7x+8} dx;$$

$$16. \int \frac{2+5x-6x^2}{4x^3+x+5} dx;$$

$$18. \int \frac{5x+26}{20-2x-x^3} dx;$$

$$20. \int \frac{8x-2}{x^3+x^2-2x} dx;$$

$$22. \int \frac{2x^2-1}{x^3-1} dx;$$

$$24. \int \frac{xdx}{x^3+6x^2+11x+6};$$

$$26. \int \frac{x^2+1}{x^3-x^2-x-1} dx;$$

27. $\int \frac{dx}{x^3 + x^2 + x + 1};$

28. $\int \frac{x dx}{x^3 - 1};$

29. $\int \frac{dx}{x^4 - 1};$

30. $\int \frac{dx}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}.$

Завдання 18

Застосувавши рекурентну формулу, знайти

1. $\int \frac{dx}{(x^2 + 4)^4};$

2. $\int \frac{dx}{(x^2 + 9)^4};$

3. $\int \frac{dx}{(x^2 + 16)^4};$

4. $\int \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^3};$

5. $\int \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^4};$

6. $\int \frac{dx}{(x^2 - 4x + 5)^3};$

7. $\int \frac{dx}{(x^2 + 4x + 5)^3};$

8. $\int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 2)^3};$

9. $\int \frac{dx}{(x^2 - 2x + 2)^3};$

10. $\int \frac{dx}{(x^2 + 4x + 13)^3};$

11. $\int \frac{dx}{(x^2 - 4x + 13)^3};$

12. $\int \frac{dx}{(x^2 - 2x + 2)^4};$

13. $\int \frac{dx}{(x^2 + 6x + 10)^3};$

14. $\int \frac{dx}{(x^2 + 6x + 10)^4};$

15. $\int \frac{dx}{(x^2 - 6x + 10)^3};$

16. $\int \frac{dx}{(x^2 + 4x + 8)^3};$

17. $\int \frac{dx}{(x^2 - 4x + 8)^3};$

18. $\int \frac{dx}{(x^2 - 4x + 8)^4};$

19. $\int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 3)^3};$

20. $\int \frac{dx}{(x^2 - 2x + 3)^3};$

- | | | | |
|-----|--------------------------------------|-----|--------------------------------------|
| 21. | $\int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 3)^4};$ | 22. | $\int \frac{dx}{(x^2 - 2x + 3)^4};$ |
| 23. | $\int \frac{dx}{(x^2 + 3x + 10)^3};$ | 24. | $\int \frac{dx}{(x^2 - 3x + 10)^3};$ |
| 25. | $\int \frac{dx}{(x^2 + 3x + 10)^4};$ | 26. | $\int \frac{dx}{(x^2 - 3x + 10)^4};$ |
| 27. | $\int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 10)^3};$ | 28. | $\int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 10)^4};$ |
| 29. | $\int \frac{dx}{(x^2 - 2x + 10)^3};$ | 30. | $\int \frac{dx}{(x^2 - 2x + 10)^4};$ |

Завдання 19

Застосувавши метод Остроградського, знайти

- | | | | |
|-----|---------------------------------------|-----|---------------------------------------|
| 1. | $\int \frac{2x-3}{(x^2-4x+5)^2} dx;$ | 2. | $\int \frac{3x-2}{(x^2-4x+5)^2} dx;$ |
| 3. | $\int \frac{x-5}{(x^2+4x+8)^2} dx;$ | 4. | $\int \frac{2x+5}{(x^2+4x+8)^2} dx;$ |
| 5. | $\int \frac{3x+4}{(x^2+2x+2)^2} dx;$ | 6. | $\int \frac{x-8}{(x^2+2x+2)^2} dx;$ |
| 7. | $\int \frac{2x+3}{(x^2+x+1)^2} dx;$ | 8. | $\int \frac{5x+4}{(x^2+x+1)^2} dx;$ |
| 9. | $\int \frac{3x-5}{(x^2+4x+13)^2} dx;$ | 10. | $\int \frac{x-8}{(x^2+4x+13)^2} dx;$ |
| 11. | $\int \frac{x+9}{(x^2-6x+10)^2} dx;$ | 12. | $\int \frac{3x-7}{(x^2-6x+10)^2} dx;$ |

13. $\int \frac{2x+7}{(x^2+6x+10)^2} dx;$

14. $\int \frac{2x-5}{(x^2+6x+10)^2} dx;$

15. $\int \frac{4x-3}{(x^2-4x+8)^2} dx;$

16. $\int \frac{3x-4}{(x^2-4x+8)^2} dx;$

17. $\int \frac{3x+5}{(x^2-2x+3)^2} dx;$

18. $\int \frac{3x-7}{(x^2+2x+3)^2} dx;$

19. $\int \frac{2x+5}{(x^2+3x+10)^2} dx;$

20. $\int \frac{3x+5}{(x^2+3x+10)^2} dx;$

21. $\int \frac{2x-7}{(x^2+2x+10)^2} dx;$

22. $\int \frac{3x+7}{(x^2+2x+10)^2} dx;$

23. $\int \frac{x-8}{(x^2+4x+13)^2} dx;$

24. $\int \frac{x+7}{(x^2-4x+13)^2} dx;$

25. $\int \frac{3x-7}{(x^2+2x+3)^2} dx;$

26. $\int \frac{x+8}{(x^2+2x+3)^2} dx;$

27. $\int \frac{x+3}{(x^2+2x+10)^2} dx;$

28. $\int \frac{3x-2}{(x^2-2x+10)^2} dx;$

29. $\int \frac{3x+5}{(x^2+4x+20)^2} dx;$

30. $\int \frac{3x-7}{(x^2-4x+20)^2} dx.$

Завдання 20

Записавши раціональний дріб у вигляді суми елементарних раціональних дробів III і IV типів, знайти

1. $\int \frac{x^3-1}{(x^2-4x+5)^2} dx;$

2. $\int \frac{x^3-x}{(x^2+4x+5)^2} dx;$

3. $\int \frac{x^3+1}{(x^2-4x+5)^2} dx;$

4. $\int \frac{x^3+x^2}{(x^2+4x+8)^2} dx;$

5. $\int \frac{x^3 - 2}{(x^2 - 4x + 8)^2} dx;$
6. $\int \frac{x^3 + 2x}{(x^2 + 4x + 8)^2} dx;$
7. $\int \frac{x^3 + x^2}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx;$
8. $\int \frac{x - x^3}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx;$
9. $\int \frac{1 - x^3}{(x^2 - 2x + 2)^2} dx;$
10. $\int \frac{x^2 + 2x}{(x^2 + x + 1)^2} dx;$
11. $\int \frac{x - x^3}{(x^2 + x + 1)^2} dx;$
12. $\int \frac{2x - x^3}{(x^2 - x + 1)^2} dx;$
13. $\int \frac{2x^3 + 1}{(x^2 + 4x + 13)^2} dx;$
14. $\int \frac{x^3 + 2}{(x^2 + 4x + 13)^2} dx;$
15. $\int \frac{1 - x^3}{(x^2 - 4x + 13)^2} dx;$
16. $\int \frac{x - x^3}{(x^2 - 6x + 10)^2} dx;$
17. $\int \frac{2 - x^3 + x}{(x^2 - 6x + 10)^2} dx;$
18. $\int \frac{x - 2x^3}{(x^2 + 6x + 10)^2} dx;$
19. $\int \frac{2x^3 - 1}{(x^2 - 4x + 8)^2} dx;$
20. $\int \frac{x^3 - 2}{(x^2 - 4x + 8)^2} dx;$
21. $\int \frac{3 - x^3}{(x^2 + 4x + 8)^2} dx;$
22. $\int \frac{2x^3 + x}{(x^2 - 2x + 3)^2} dx;$
23. $\int \frac{x - x^3}{(x^2 - 2x + 3)^2} dx;$
24. $\int \frac{1 - 2x^3}{(x^2 + 2x + 3)^2} dx;$
25. $\int \frac{x^3 + 2x + 4}{(x^2 + 3x + 10)^2} dx;$
26. $\int \frac{3x^3 - 1}{(x^2 + 3x + 10)^2} dx;$
27. $\int \frac{x^3 + x^2}{(x^2 - 3x + 10)^2} dx;$
28. $\int \frac{3x^3 - 2}{(x^2 + 2x + 3)^2} dx;$
29. $\int \frac{x^3 + 2x}{(x^2 + 2x + 3)^2} dx;$
30. $\int \frac{3x^3 - 1}{(x^2 - 2x + 3)^2} dx.$

6. Інтегрування тригонометричних функцій

Якщо невизначений інтеграл за допомогою заміни змінної можна звести до невизначеного інтеграла від раціонального дробу, тоді говорять, що початковий інтеграл раціоналізується.

Многочленом від двох змінних $u, v \in \mathbb{R}$ називають вираз

$$P(u, v) = a_{00} + a_{10}u + a_{01}v + a_{20}u^2 + a_{11}uv + a_{02}v^2 + \dots + a_{0n}v^n,$$

де $a_{ij} \in \mathbb{R}; i, j = \overline{1, n}$. раціональною функцією $R(u, v)$ від двох змінних u, v називають відношення двох многочленів від цих змінних.

Теорема (універсальна підстановка). Нехай $R(u, v)$ раціональна функція від двох змінних $u = \sin x, v = \cos x$. Тоді $\int R(\sin x, \cos x) dx$ раціоналізується за допомогою підстановки $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Зауважимо, що тоді

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

У деяких випадках приходять до простішого раціонального дробу замінами:

1) $R(\sin x, \cos x)$ – парна відносно $\sin x$ і $\cos x$, тоді $t = \operatorname{tg} x$,

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}.$$

2) $R(\sin x, \cos x)$ – непарна відносно $\sin x$, тоді $t = \cos x$.

3) $R(\sin x, \cos x)$ – непарна відносно $\cos x$, тоді $t = \sin x$.

Приклад 1. Знайти $I = \int \frac{dx}{3 - 2 \sin x + \cos x}$.

■ Застосуємо універсальну підстановку $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, тоді

$$I = \int \frac{2dt}{1+t^2} \cdot \frac{1}{3 - 2 \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t^2 - 2t + 2} = \int \frac{dt}{(t-1)^2 + 1} =$$

$$= \operatorname{arctg}(t-1) + C = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1\right) + C. \quad \blacksquare$$

Завдання 21

Знайти

1. $\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x};$
2. $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x};$
3. $\int \frac{dx}{3 \cos x + 2};$
4. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x};$
5. $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 2 \sin 2x + 5 \cos^2 x};$
6. $\int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5};$
7. $\int \frac{dx}{(2 + \cos x) \sin x};$
8. $\int \frac{\sin^2 x}{\sin x + 2 \cos x} dx;$
9. $\int \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x} dx;$
10. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx;$
11. $\int \frac{\sin x}{\sin^3 x + \cos^3 x} dx;$
12. $\int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^4 x + 4 \sin^2 x \cos^2 x + 4 \cos^4 x};$
13. $\int \frac{dx}{(\sin^2 x + 2 \cos^2 x)^2};$
14. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x - 3} dx;$
15. $\int \frac{dx}{5 + 4 \sin x};$
16. $\int \frac{dx}{3 \sin x - 4 \cos x};$

- | | |
|--|--|
| 17. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx;$ | 18. $\int \frac{\cos^3 x}{4\sin^2 x - 1} dx;$ |
| 19. $\int \frac{dx}{1 + \sin x};$ | 20. $\int \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} dx;$ |
| 21. $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2 \cos x} dx;$ | 22. $\int \frac{\cos x}{5 \sin x + 3 \cos x} dx;$ |
| 23. $\int \frac{\sin x}{\sin x - 3 \cos x} dx;$ | 24. $\int \frac{\sin x + 2 \cos x}{\sin x - 2 \cos x} dx;$ |
| 25. $\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx;$ | 26. $\int \frac{2 \sin x + \cos x}{3 \sin x + 4 \cos x} dx;$ |
| 27. $\int \frac{dx}{\sin^3 x};$ | 28. $\int \frac{dx}{\cos^3 x};$ |
| 29. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx;$ | 30. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx.$ |

Завдання 22

- | | |
|---|--|
| 1. $\int \cos^2 x \sin^2 x dx.$ | 2. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx.$ |
| 3. $\int \frac{dx}{8 - 4 \sin x + 7 \cos x}.$ | 4. $\int \operatorname{tg}^4(x+5) dx.$ |
| 5. $\int \frac{dx}{2 - 3 \cos x + \sin x}.$ | 6. $\int \cos^2 x \sin^{4x} dx.$ |
| 7. $\int \cos^4 x dx$ | 8. $\int \frac{\sin 2x}{2 + \sin^2 x} dx.$ |
| 9. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx.$ | 10. $\int \cos^3 x \sin 2x dx.$ |
| 11. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos^3 x}}.$ | 12. $\int \frac{3 \operatorname{tg} x - 1}{\sin^2 x + 4 \cos^4 x} dx.$ |

13.
$$\int \frac{dx}{3+5 \sin x+3 \cos x}$$

15.
$$\int \sin^4 x \cos^5 x dx$$

17.
$$\int \frac{dx}{4-4 \sin x+3 \cos x}$$

19.
$$\int \frac{dx}{\cos^4 x}$$

21.
$$\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$$

23.
$$\int \sin^3 \cos^3 x dx$$

25.
$$\int \operatorname{ctg}^3 x dx$$

27.
$$\int \sqrt{1+\sin x} dx.$$

29.
$$\int \frac{dx}{1+2 \sin^2 x}.$$

14.
$$\int \frac{\sin^2 x dx}{3 \sin x-\cos x}$$

16.
$$\int \sin^4 x dx$$

18.
$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} dx$$

20.
$$\int \frac{dx}{\sin^4 x}$$

22.
$$\int \frac{\cos x dx}{1+\cos x}$$

24.
$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx$$

26.
$$\int \sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right) dx.$$

28.
$$\int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x} dx.$$

30.
$$\int \frac{dx}{5-4 \sin x+3 \cos x}.$$

Завдання 23

1.
$$\int \frac{\cos 4x dx}{\sin^3 4x}$$

2.
$$\int \operatorname{tg}^3 x dx$$

3.
$$\int \frac{dx}{4 \sin x-6 \cos x}$$

4.
$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$$

5. $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$
7. $\int \frac{3\sin x - 2\cos x}{1 + \cos x} dx$
9. $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$
11. $\int \sin^3 2x \cos 2x dx$
13. $\int \frac{\cos 3x dx}{\sqrt{2 - \sin 3x}}$
15. $\int \frac{dx}{4 - 4\sin x + 3\cos x}$
17. $\int \sin 4x \cos 2x dx$
19. $\int \operatorname{tg}^2 x dx$
21. $\int \sin 2x \cdot \cos x dx$
23. $\int \frac{dx}{3 + \cos x + \sin x}$
25. $\int \frac{dx}{7\cos^2 x + 16\sin^2 x}$
27. $\int \frac{dx}{1 + 3\cos^2 x}$
6. $\int \sin^4 8x \cos 8x dx$
8. $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1 + \cos^2 x}}$
10. $\int \sin 4x \sqrt{\cos 4x} dx.$
12. $\int \frac{2\operatorname{tg} x + 3}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} dx$
14. $\int \frac{dx}{7\sin x - 3\cos x}$
16. $\int \frac{dx}{6 - 3\cos^2 x}$
18. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\cos^2 x}$
20. $\int \frac{dx}{3\sin x - \cos x}$
22. $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$
24. $\int \cos^3 6x dx$
26. $\int \frac{dx}{1 + 2\sin^2 x}$
28. $\int \frac{dx}{7\cos^2 x + 2\sin^2 x}$

29. $\int \sin^3 x dx$

30. $\int \frac{dx}{5-4\sin x+2\cos x}$

Завдання 24

1. $\int \frac{dx}{\sin^2 x(1-\cos x)}$

2. $\int \frac{\cos x dx}{2+\cos x}$

3. $\int \frac{dx}{\sin^2 x(1+\cos x)}$

4. $\int \frac{\cos x dx}{(1-\cos x)^3}$

5. $\int \frac{\cos x - \sin x}{(1+\sin x)^2} dx$

6. $\int \frac{dx}{\cos x(1-\cos x)}$

7. $\int \frac{dx}{\sin x(1-\sin x)}$

8. $\int \frac{dx}{(1+\sin x - \cos x)^2}$

9. $\int \frac{\cos x dx}{5+4\cos x}$

10. $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x + \sin x} dx$

11. $\int \frac{\cos x dx}{1+\sin x - \cos x}$

12. $\int \frac{(1+\cos x) dx}{1+\sin x + \cos x}$

13. $\int \frac{\sin dx}{1+\sin x + \cos x}$

14. $\int \frac{1+\sin x}{(1-\sin x)^2} dx$

15. $\int \frac{\cos x dx}{1+\sin x + \cos x}$

16. $\int \frac{\cos x dx}{(1-\sin x)(1+\cos x)}$

17. $\int \frac{\cos x dx}{1 + \cos x - \sin x}$.

18. $\int \frac{\cos x dx}{(1 + \cos x - \sin x)^2}$.

19. $\int \frac{\cos x dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2}$.

20. $\int \frac{(1 - \sin x) dx}{\cos x (1 + \cos x)}$.

21. $\int \frac{\sin x dx}{(1 + \sin x)^2}$.

22. $\int \frac{\sin x dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2}$.

23. $\int \frac{\sin x dx}{(1 + \cos x - \sin x)^2}$.

24. $\int \frac{\cos^2 x dx}{(1 + \cos x - \sin x)^2}$.

25. $\int \frac{\sin^2 x dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2}$.

26. $\int \frac{\cos^2 x dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2}$.

27. $\int \frac{dx}{\sin x (1 + \sin x)}$.

28. $\int \frac{dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2}$.

29. $\int \frac{\sin x dx}{2 + \sin x}$.

30. $\int \frac{dx}{\cos x (1 + \cos x)}$.

31. $\int \frac{\sin x dx}{5 + 3 \sin x}$.

Завдання 25

1. $\int \frac{dx}{(3 \operatorname{tg} x + 5) \sin 2x}$.

2. $\int \frac{2 \operatorname{ctg} x + 1}{(2 \sin x + \cos x)^2} dx$.

3.
$$\int \frac{3+2\operatorname{tg} x}{2\sin^2 x+3\cos^2 x-1} dx.$$

4.
$$\int \frac{4\operatorname{tg} x-5}{1-\sin 2x+4\cos^2 x} dx.$$

5.
$$\int \frac{(8+\operatorname{tg} x)}{18\sin^2 x+2\cos^2 x} dx.$$

6.
$$\int \frac{\operatorname{tg} x+2}{\sin^2 x+2\cos^2 x-3} dx.$$

7.
$$\int \frac{6\operatorname{tg} x dx}{3\sin 2x+5\cos^2 x}.$$

8.
$$\int \frac{2\operatorname{tg}^2 x-11\operatorname{tg} x-22}{4-\operatorname{tg} x} dx.$$

9.
$$\int \frac{3\operatorname{tg} x+1}{2\sin 2x-5\cos 2x+1} dx.$$

10.
$$\int \frac{1+\operatorname{ctg} x}{(\sin x+2\cos x)^2} dx.$$

11.
$$\int \frac{\operatorname{tg} x}{\sin^2 x-5\cos^2 x+4} dx.$$

12.
$$\int \frac{6\sin^2 x}{3\cos 2x-4} dx.$$

13.
$$\int \frac{4+\operatorname{tg} x}{2\sin^2 x+18\cos^2 x} dx.$$

14.
$$\int \frac{12+\operatorname{tg} x}{3\sin^2 x+12\cos^2 x} dx.$$

15.
$$\int \frac{6+\operatorname{tg} x}{9\sin^2 x+4\cos^2 x} dx.$$

16.
$$\int \frac{\operatorname{tg}^2 x dx}{3\sin^2 x+4\cos^2 x-7}.$$

17.
$$\int \frac{7+3\operatorname{tg} x}{(\sin x+2\cos x)^2} dx.$$

18.
$$\int \frac{2\operatorname{tg} x+5}{(5-\operatorname{tg} x)\sin 2x} dx.$$

19.
$$\int \frac{3\operatorname{tg}^2 x-50}{2\operatorname{tg} x+7} dx.$$

20.
$$\int \frac{5\operatorname{tg} x+2}{2\sin 2x+5} dx.$$

21.
$$\int \frac{4\operatorname{tg} x-5}{4\cos^2 x-\sin 2x+1} dx.$$

22.
$$\int \frac{6\sin^2 x}{4+3\cos 2x} dx.$$

23.
$$\int \frac{11-3\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x+3} dx.$$

24.
$$\int \frac{2\operatorname{tg} x-5}{(4\cos x-\sin x)^2} dx.$$

$$25. \int \frac{dx}{(6 - \operatorname{tg} x) \sin 2x}.$$

$$26. \int \frac{4 - 7 \operatorname{tg} x}{2 + 3 \operatorname{tg} x} dx.$$

$$27. \int \frac{2 - \operatorname{tg} x}{(\sin x + 3 \cos x)^2} dx.$$

$$28. \int \frac{8 \operatorname{tg} x dx}{3 \cos^2 x + 8 \sin 2x - 7}.$$

$$29. \int \frac{12 dx}{(6 + 5 \operatorname{tg} x) \sin 2x}.$$

$$30. \int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{4 + 3 \cos 2x} dx.$$

$$31. \int \frac{3 \operatorname{tg}^2 x - 1}{\operatorname{tg}^2 x + 5}.$$

7. Інтегрування деяких ірраціональних функцій

$R(x)$ називають *раціональною функцією однієї змінної* x , якщо $R(x)$ є раціональний дріб. Тоді раціональна функція змінних t_1, \dots, t_n , де $t_k = \overline{R_k(x)}$ – раціональна функція однієї змінної x ($k = \overline{1, n}$), а саме $R(R_1(x), \dots, R_n(x))$ є раціональною функцією однієї змінної x . Позначимо її $R(\cdot)$. Тоді

$$I. \int R(x, x^\alpha, x^\beta, \dots, x^\gamma) dx, \text{ де } \alpha = \frac{m_1}{n_1}, \beta = \frac{m_2}{n_2}, \dots, \gamma = \frac{m_k}{n_k}$$

$(\frac{m_i}{n_i} \in \mathbb{Q}, i = \overline{1, k})$ раціоналізується заміною $x = t^N$, де N – спільний знаменник чисел $\alpha, \beta, \dots, \gamma$.

$$II. \text{ Дробово-лінійна ірраціональність } \int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx, \text{ де}$$

$n \in \mathbb{N}; a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc \neq 0$, раціоналізується заміною $\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$.

III. Подібно до II

$\int R(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^\alpha, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^\beta, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^\gamma) dx$ раціоналізується

заміною $\frac{ax+b}{cx+d} = t^N$, де N – спільний знаменник чисел $\alpha, \beta, \dots, \gamma$.

IV. Квадратична ірраціональність:

$R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) = R(x, y)$, при цьому вважають, що квадратний тричлен не має рівних коренів.

$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$, де $a, b, c \in \mathbb{R}$, раціоналізується за допомогою підстановок Euler'а:

перша підстановка: $a > 0$, заміна $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm x\sqrt{a}$.

друга підстановка: $c > 0$, заміна $\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx \pm \sqrt{c}$, причому знаки “ \pm ” вибирають довільним чином.

третья підстановка: квадратний тричлен має дійсні корені – $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, заміна $\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - x_1)t$.

При знаходженні $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ можна застосувати інший спосіб: виділити повний квадрат під коренем і отримати один з інтегралів

1) $\int R(z, \sqrt{1+z^2}) dz$, заміна $z = \operatorname{tg} t$, або $z = \operatorname{sh} t$, або

$$\sqrt{1+z^2} = zt \pm 1, \text{ або } \sqrt{1+z^2} = z - t.$$

2) $\int R(z, \sqrt{1-z^2}) dz$, заміна $z = \sin t$, або $z = \cos t$, або

$$\sqrt{1-z^2} = t(1 \pm z), \text{ або } \sqrt{1-z^2} = zt \pm 1.$$

3) $\int R(z, \sqrt{z^2-1}) dz$, заміна $z = \operatorname{sect} t$, або $z = \operatorname{cht} t$, або

$$\sqrt{z^2-1} = t(z \pm 1), \text{ або } \sqrt{z^2-1} = z - t.$$

Вкажемо ще два частинних випадки.

Перший: $I = \int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$, де $P_n(x)$ – многочлен

степеня n , можна знайти методом Остроградського

$$I = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

Невідомі коефіцієнти многочлена $Q_{n-1}(x)$ і сталу λ знаходять диференціюванням лівої та правої частин рівності і використовуючи властивості тотожної рівності многочленів.

Другий: $\int \frac{dx}{(x - \alpha)^m \sqrt{ax^2 + bx + c}}$, $m \in \mathbb{N}$; $a, b, c, \alpha \in \mathbb{R}$;

заміна $t = \frac{1}{x - \alpha}$ зводить цей інтеграл до попереднього.

Приклад 1. Знайти $I = \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \frac{dx}{x+1}$.

■ Заміна $t^3 = \frac{x+1}{x-1}$, тоді $x = \frac{1+t^3}{t^3-1}$; $x-1 = \frac{2}{t^3-1}$; $x+1 = \frac{2t^3}{t^3-1}$;

$$dx = -\frac{6t^2 dt}{(t^3-2)^2} \text{ і}$$

$$I = \int t \frac{-6t^2}{(t^3-1)^2} \frac{t^3-1}{2t^3} dt = -3 \int \frac{dt}{t^3-1} = -3 \int \frac{dt}{3(t-1)} + \frac{1}{3} \int \frac{t+2}{t^2+t+1} dt =$$

$$= -\ln|t-1| + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \ln(t^2+t+1) + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} \right) + C =$$

$$= -\frac{1}{2} \ln \frac{(1-t)^2}{t^2+t+1} + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C, \text{ де } t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \quad \blacksquare$$

Приклад 2. Знайти $I = \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}}$.

■ Оскільки $a = 1 > 0$, застосуємо першу підстановку Euler'а:

$$\sqrt{x^2 + 2x + 2} = t - x\sqrt{a} = t - x, \text{ тоді } x = \frac{t^2 - 2}{2t + 2};$$

$$dx = \frac{t^2 + 2t + 2}{2(t+1)^2} dt \text{ і } I = \int \frac{t^2 + 2t + 2}{(t+1)(t+2)^2} dt. \text{ Запишемо}$$

$$\frac{t^2 + 2t + 2}{(t+1)(t+2)^2} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+2} + \frac{C}{(t+2)^2}. \text{ Тотожньо зрівняємо}$$

$$t^2 + 2t + 2 \equiv A(t+2)^2 + B(t+1)(t+2) + C(t+1), \text{ тоді } A = 1, \\ B = 0, C = -2.$$

$$\text{Отже } I = \ln|t+1| - 2 \int \frac{dt}{(t+2)^2} = \ln|t+1| + \frac{2}{t+2} + C,$$

$$\text{де } t = \sqrt{x^2 + 2x + 2} + x \quad \blacksquare$$

$$\text{Приклад 3. Знайти } I = \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}.$$

■ Оскільки $c = 1 > 0$, застосуємо другу підстановку Euler'а:

$$\sqrt{x^2 - x + 1} = tx - \sqrt{c} = tx - 1,$$

$$\text{тоді } x = \frac{1-2t}{1-t^2}, dx = \frac{2(t-t^2-1)}{(1-t^2)^2} dt, x + \sqrt{x^2 - x + 1} = x + tx - 1 =$$

$$= -\frac{t(1+t)}{1-t^2} \text{ і}$$

$$I = \int \frac{2(t-t^2-1)dt}{t(1+t)^2(t-1)} = 2 \ln|t| - \frac{1}{2} \ln|1-t| + \frac{3}{2} \ln|1+t| + \frac{3}{1+t} + C,$$

$$\text{де } t = \frac{1 + \sqrt{x^2 - x + 1}}{x} \quad \blacksquare$$

$$\text{Приклад 4. Знайти } I = \int \frac{xdx}{(\sqrt{7x-10-x^2})^3}.$$

■ Оскільки $a < 0, c < 0$ і $7x - 10 - x^2 = (x - 2)(5 - x)$, застосуємо третю підстановку Euler'а: $\sqrt{7x - 10 - x^2} = t(x - 2)$, тоді

$$x = \frac{2t^2 + 5}{1 + t^2}, \quad dx = \frac{-6tdt}{(1 + t^2)^2}, \quad (x - 2)t = \frac{3t}{1 + t^2} \quad \text{і}$$

$$I = \int \frac{2t^2 + 5}{1 + t^2} \frac{-6t}{(1 + t^2)^2} \frac{(1 + t^2)^3}{(3t)^3} dt = -\frac{2}{9} \int \frac{2t^2 + 5}{t^2} dt = \frac{10}{9t} - \frac{4t}{9} + C,$$

$$\text{де } t = \frac{\sqrt{7x - 10 - x^2}}{x - 2} = \sqrt{\frac{5 - x}{x - 2}} \quad \blacksquare$$

Приклад 5. Знайти $I = \int \frac{dx}{(x - 1)^3 \sqrt{x^2 + 3x + 1}}$.

■ Застосуємо заміну $t = \frac{1}{x - 1}$, тоді $dx = -\frac{dt}{t^2}$, $x - 1 = \frac{1}{t}$,

$$x^2 + 3x + 1 = \frac{1}{t^2}(5t^2 + 5t + 1) \quad \text{і} \quad I = -\int \frac{1}{t^2} \frac{t^3 dt}{\sqrt{5t^2 + 5t + 1}} =$$

$$= -\int \frac{t^2 dt}{\sqrt{5t^2 + 5t + 1}}. \quad \text{До останнього інтеграла застосуємо метод}$$

Остроградського:

$$\int \frac{t^2 dt}{\sqrt{5t^2 + 5t + 1}} = (At + B)\sqrt{5t^2 + 5t + 1} + \lambda \int \frac{dt}{\sqrt{5t^2 + 5t + 1}}.$$

Продиференціювавши, отримуємо

$$\frac{t^2}{\sqrt{5t^2 + 5t + 1}} = A\sqrt{5t^2 + 5t + 1} + \frac{(At + B)(10t + 5)}{2\sqrt{5t^2 + 5t + 1}} + \frac{\lambda}{\sqrt{5t^2 + 5t + 1}},$$

$$2t^2 \equiv 2A(5t^2 + 5t + 1) + (At + B)(10t + 5) + 2\lambda. \quad \text{Звідси}$$

$$A = \frac{1}{10}, \quad B = -\frac{3}{20}, \quad \lambda = \frac{11}{40} \quad \text{і}$$

$$I = -\left(\frac{t}{10} - \frac{3}{20}\right)\sqrt{5t^2 + 5t + 1} - \frac{11}{40} \int \frac{dt}{\sqrt{5t^2 + 5t + 1}} =$$

$$= \left(\frac{3}{20} - \frac{t}{10}\right)\sqrt{5t^2 + 5t + 1} - \frac{11}{40\sqrt{5}} \ln \left| \left(\sqrt{5t} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right) + \sqrt{5t^2 + 5t + 1} \right| + C,$$

де $t = \frac{1}{x-1}$ ■

Приклад 6. Знайти $I = \int \frac{(x+4)dx}{(x-1)(x+2)^2\sqrt{x^2+x+1}}$.

■ Зауважимо, що $\int \frac{(x+4)dx}{(x-1)(x+2)^2\sqrt{x^2+x+1}} =$

$$= \int \left(\frac{5}{9(x-1)} - \frac{2}{3(x+2)^2} - \frac{5}{9(x+2)} \right) \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

можна записати як суму трьох інтегралів, кожен з яких інтегрується вказаними вище способами. ■

Завдання 26

Знайти інтеграли

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}};$

3. $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{2x-3}};$

4. $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx;$

5. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[4]{x+1}};$

6. $\int \frac{1}{(1-x)^2} \sqrt{\frac{1-x}{x+1}} dx;$

7. $\int \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{1-x}{x+1}} dx;$

8. $\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})};$

9. $\int \frac{x\sqrt[3]{x+2}}{x + \sqrt[3]{x+2}} dx;$

10. $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}} dx;$

11. $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})^3 \sqrt{x}};$

$$12. \int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} dx;$$

$$14. \int \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^3(1-x)}};$$

$$16. \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt[5]{(x-1)(x-3)^4}};$$

$$18. \int \frac{\sqrt{x+1} + 2}{(x+1)^2 - \sqrt{x+1}} dx;$$

$$20. \int \frac{dx}{x(\sqrt{x} + \sqrt[5]{x^2})};$$

$$22. \int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}};$$

$$24. \int \frac{1 + \sqrt[3]{5x-1}}{\sqrt[6]{5x-1} + \sqrt{5x-1}} dx;$$

$$26. \int \frac{\sqrt{x+1}}{(x+1)^2 \sqrt{x}} dx;$$

$$28. \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x+1)^5(x-1)^3}};$$

$$30. \int \frac{x-1}{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}} dx;$$

$$13. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}};$$

$$15. \int \frac{1}{(1+x)^2(1-x)} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx;$$

$$17. \int \frac{1}{(1+x)(1-x)^2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx;$$

$$19. \int \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x+1}} dx;$$

$$21. \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + 2\sqrt[4]{x}};$$

$$23. \int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}};$$

$$25. \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt[6]{(x-1)(x+1)^5}};$$

$$27. \int \frac{xdx}{2 + \sqrt{2x+1}};$$

$$29. \int \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{x}{x+2}} dx;$$

$$31. \int \frac{x^2 + \sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}} dx.$$

Завдання 27

$$1. \int \frac{(2x+1)dx}{\sqrt{-2x^2-8x-6}}$$

$$2. \int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{3x^2-6x-9}}$$

- | | | | |
|-----|---|-----|--|
| 3. | $\int \frac{(x+5)dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$ | 4. | $\int \frac{(2x+2)dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}$ |
| 5. | $\int \frac{(3x+1)dx}{\sqrt{x^2 + 6x + 90}}$ | 6. | $\int \frac{(4x-1)dx}{\sqrt{3+4x-4x^2}}$ |
| 7. | $\int \frac{(3x+2)dx}{\sqrt{x^2 + 8x + 15}}$ | 8. | $\int \frac{(2x+3)dx}{\sqrt{2x^2 + 8x + 6}}$ |
| 9. | $\int \frac{(7x+5)dx}{\sqrt{x^2 + 10x + 24}}$ | 10. | $\int \frac{3xdx}{\sqrt{9+6x-x^2}}$ |
| 11. | $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$ | 12. | $\int \frac{(3x+2)dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 5}}$ |
| 13. | $\int \frac{(2x-3)dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 8}}$ | 14. | $\int \frac{(3x+1)dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$ |
| 15. | $\int \frac{(5x+1)dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 29}}$ | 16. | $\int \frac{(3x+2)dx}{\sqrt{9-4x^2-16x}}$ |
| 17. | $\int \frac{xdx}{\sqrt{4x^2 + 16x - 9}}$ | 18. | $\int \frac{2xdx}{\sqrt{10-6x-x^2}}$ |
| 19. | $\int \frac{(3x+1)dx}{\sqrt{-x^2 - 4x - 3}}$ | 20. | $\int \frac{(2x+1)dx}{\sqrt{2x^2 - 8x + 6}}$ |
| 21. | $\int \frac{(3x-1)dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 17}}$ | 22. | $\int \frac{(4x+3)dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 13}}$ |
| 23. | $\int \frac{(5x+2)dx}{\sqrt{-x^2 - 8x - 15}}$ | 24. | $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 - 2x + 10}}$ |
| 25. | $\int \frac{(3x+4)dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}$ | 26. | $\int \frac{(5x+4)dx}{\sqrt{5x^2 - 10x + 25}}$ |
| 27. | $\int \frac{5xdx}{\sqrt{x^2 + 8x + 15}}$ | 28. | $\int \frac{3xdx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$ |

$$29. \int \frac{5x dx}{\sqrt{4x^2 + 4x - 3}}$$

$$30. \int \frac{(4x+3)dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}$$

Завдання 28

$$1. \int x^2 \sqrt{1-x^2} dx.$$

$$2. \int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} dx.$$

$$3. \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{2-x-x^2}}.$$

$$4. \int \frac{dx}{(25+x^2)\sqrt{25+x^2}}.$$

$$5. \int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2} dx.$$

$$6. \int \frac{dx}{x\sqrt{1-3x-2x^2}}.$$

$$7. \int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x^4} dx.$$

$$8. \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}.$$

$$9. \int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx.$$

$$10. \int \frac{dx}{\sqrt{(9+x^2)^3}}.$$

$$11. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}.$$

$$12. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

$$13. \int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2} dx.$$

$$14. \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x-2}}.$$

$$15. \int \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^4} dx.$$

$$16. \int \frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}.$$

$$17. \int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4} dx.$$

$$18. \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)^3}}.$$

$$19. \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x-x^2}}.$$

$$20. \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}.$$

$$21. \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}. \quad 22. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$$

$$23. \int \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}. \quad 24. \int \frac{x^4 dx}{(2-x^2)^{3/2}}.$$

$$25. \int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+2x}}. \quad 26. \int \frac{dx}{(16+x^2)^{3/2}}.$$

$$27. \int x^2 \sqrt{16-x^2} dx. \quad 28. \int \frac{dx}{\sqrt{(64-x^2)^3}}.$$

$$29. \int \frac{x^4 dx}{(16-x^2)\sqrt{16-x^2}}. \quad 30. \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(8-x^2)^3}}.$$

Завдання 29

Застосувавши першу підстановку Euler'а, знайти

$$1. \int \frac{dx}{1-\sqrt{x^2+2x+2}}; \quad 2. \int \frac{dx}{-1+\sqrt{x^2+2x+2}};$$

$$3. \int \frac{dx}{2+\sqrt{x^2+2x+2}}; \quad 4. \int \frac{dx}{2-\sqrt{x^2+2x+2}};$$

$$5. \int \frac{dx}{3+2\sqrt{x^2+2x+3}}; \quad 6. \int \frac{dx}{3-2\sqrt{x^2+2x+3}};$$

$$7. \int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+3}}; \quad 8. \int \frac{dx}{2-\sqrt{x^2+2x+3}};$$

$$9. \int \frac{dx}{3+\sqrt{x^2+2x+3}}; \quad 10. \int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+5}};$$

$$11. \int \frac{dx}{3 - \sqrt{x^2 + 2x + 6}};$$

$$12. \int \frac{dx}{2 + \sqrt{x^2 + 2x + 5}};$$

$$13. \int \frac{dx}{2 - \sqrt{x^2 + 2x + 5}};$$

$$14. \int \frac{dx}{1 + \sqrt{4x^2 + x + 3}};$$

$$15. \int \frac{dx}{1 - \sqrt{4x^2 + x + 3}};$$

$$16. \int \frac{dx}{1 + \sqrt{4x^2 + x + 2}};$$

$$17. \int \frac{dx}{1 - \sqrt{4x^2 + x + 2}};$$

$$18. \int \frac{dx}{-4 + \sqrt{4x^2 - x + 2}};$$

$$19. \int \frac{dx}{2 - \sqrt{4x^2 - x + 2}};$$

$$20. \int \frac{dx}{1 - \sqrt{4x^2 - x + 2}};$$

$$21. \int \frac{dx}{1 + \sqrt{4x^2 - x + 2}};$$

$$22. \int \frac{dx}{1 + \sqrt{9x^2 + x + 2}};$$

$$23. \int \frac{dx}{1 - \sqrt{9x^2 + x + 2}};$$

$$24. \int \frac{dx}{2 + \sqrt{9x^2 + x + 2}};$$

$$25. \int \frac{dx}{2 + \sqrt{9x^2 - x + 2}};$$

$$26. \int \frac{dx}{2 + \sqrt{9x^2 - x + 2}};$$

$$27. \int \frac{dx}{1 - \sqrt{9x^2 - x + 2}};$$

$$28. \int \frac{dx}{1 + \sqrt{4x^2 + 2x + 3}};$$

$$29. \int \frac{dx}{1 - \sqrt{4x^2 + 2x + 3}};$$

$$30. \int \frac{dx}{1 + \sqrt{4x^2 - 2x + 3}}.$$

Завдання 30

Застосувавши другу підстановку Euler'а, знайти

$$1. \int \frac{dx}{2x + 2\sqrt{1 + 3x} - 3x^2};$$

$$2. \int \frac{dx}{-3x + \sqrt{1 + x} - 3x^2};$$

3. $\int \frac{dx}{x + \sqrt{1 - x - 2x^2}};$

5. $\int \frac{dx}{x + \sqrt{1 + x - 2x^2}};$

7. $\int \frac{dx}{x - \sqrt{1 + 2x + 2x^2}};$

9. $\int \frac{dx}{x + \sqrt{1 - x + 3x^2}};$

11. $\int \frac{dx}{x + \sqrt{2x^2 + x + 1}};$

13. $\int \frac{dx}{2x + \sqrt{2x^2 - x + 1}};$

15. $\int \frac{dx}{2x + \sqrt{2x^2 + x + 1}};$

17. $\int \frac{dx}{x + \sqrt{3x^2 + 4x + 1}};$

19. $\int \frac{dx}{x + \sqrt{3x^2 - 4x + 4}};$

21. $\int \frac{dx}{2x + \sqrt{3x^2 + 4x + 4}};$

23. $\int \frac{dx}{2x + \sqrt{3x^2 - 4x + 4}};$

25. $\int \frac{dx}{x + \sqrt{3x^2 + 2x + 1}};$

27. $\int \frac{dx}{x + \sqrt{3x^2 - 2x + 1}};$

4. $\int \frac{dx}{x - \sqrt{1 - x - 2x^2}};$

6. $\int \frac{dx}{x - \sqrt{1 + x - 2x^2}};$

8. $\int \frac{dx}{x + \sqrt{1 + x + 3x^2}};$

10. $\int \frac{dx}{x - \sqrt{2x^2 - x + 1}};$

12. $\int \frac{dx}{x - \sqrt{2x^2 + x + 1}};$

14. $\int \frac{dx}{2x - \sqrt{2x^2 - x + 1}};$

16. $\int \frac{dx}{2x - \sqrt{2x^2 + x + 1}};$

18. $\int \frac{dx}{x - \sqrt{3x^2 + 4x + 1}};$

20. $\int \frac{dx}{x - \sqrt{3x^2 - 4x + 4}};$

22. $\int \frac{dx}{2x - \sqrt{3x^2 + 4x + 4}};$

24. $\int \frac{dx}{2x - \sqrt{3x^2 - 4x + 4}};$

26. $\int \frac{dx}{x - \sqrt{3x^2 + 2x + 1}};$

28. $\int \frac{dx}{x - \sqrt{3x^2 - 2x + 1}};$

$$29. \int \frac{dx}{2x + \sqrt{3x^2 + 2x + 1}};$$

$$30. \int \frac{dx}{2x - \sqrt{3x^2 + 2x + 1}}.$$

Завдання 31

Застосувавши третю підстановку Euler'а, знайти

$$1. \int \frac{xdx}{(3x - 2 - x^2)^{3/2}};$$

$$2. \int \frac{x^2 dx}{(3x - 2 - x^2)^{5/2}};$$

$$3. \int \frac{xdx}{(6x - 8 - x^2)^{3/2}};$$

$$4. \int \frac{x^2 dx}{(6x - 8 - x^2)^{5/2}};$$

$$5. \int \frac{xdx}{(2x - 3 - x^2)^{3/2}};$$

$$6. \int \frac{x^2 dx}{(2x - 3 - x^2)^{5/2}};$$

$$7. \int \frac{xdx}{(5x - 4 - x^2)^{3/2}};$$

$$8. \int \frac{x^2 dx}{(5x - 4 - x^2)^{5/2}};$$

$$9. \int \frac{xdx}{(6x - 5 - x^2)^{3/2}};$$

$$10. \int \frac{x^2 dx}{(6x - 5 - x^2)^{5/2}};$$

$$11. \int \frac{xdx}{(5x - 6 - x^2)^{3/2}};$$

$$12. \int \frac{x^2 dx}{(5x - 6 - x^2)^{5/2}};$$

$$13. \int \frac{xdx}{(7x - x^2 - 10)^{3/2}};$$

$$14. \int \frac{x^2 dx}{(7x - x^2 - 10)^{5/2}};$$

$$15. \int \frac{xdx}{(7x - 6 - x^2)^{3/2}};$$

$$16. \int \frac{x^2 dx}{(7x - 6 - x^2)^{5/2}};$$

$$17. \int \frac{xdx}{(8x - 12 - x^2)^{3/2}};$$

$$18. \int \frac{x^2 dx}{(8x - 12 - x^2)^{5/2}};$$

$$19. \int \frac{xdx}{(4x - 3 - x^2)^{3/2}};$$

$$20. \int \frac{x^2 dx}{(4x - 3 - x^2)^{5/2}};$$

21. $\int \frac{x^3 dx}{(5x - 6 - x^2)^{3/2}};$

22. $\int \frac{x^4 dx}{(5x - 6 - x^2)^{5/2}};$

23. $\int \frac{xdx}{(7x - 12 - x^2)^{3/2}};$

24. $\int \frac{x^2 dx}{(7x - 12 - x^2)^{5/2}};$

25. $\int \frac{xdx}{(8x - 15 - x^2)^{3/2}};$

26. $\int \frac{x^2 dx}{(8x - 15 - x^2)^{5/2}};$

27. $\int \frac{xdx}{(9x - 18 - x^2)^{3/2}};$

28. $\int \frac{x^2 dx}{(9x - 18 - x^2)^{5/2}};$

29. $\int \frac{xdx}{(8x - 7 - x^2)^{3/2}};$

30. $\int \frac{x^2 dx}{(8x - 7 - x^2)^{5/2}}$

Завдання 32

Застосувавши метод Остроградського, знайти

1. $\int \frac{x^2 + 2x + 3}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx;$

2. $\int \frac{x^2 - x + 2}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx;$

3. $\int \frac{x^3 + 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} dx;$

4. $\int \frac{x^3 - 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} dx;$

5. $\int \frac{x^2 + x}{\sqrt{x^2 + 4x + 10}} dx;$

6. $\int \frac{x^3 + 3}{\sqrt{x^2 - 4x + 10}} dx;$

7. $\int \frac{x^3 + 2x + 1}{\sqrt{x^2 + 4x + 8}} dx;$

8. $\int \frac{x^3 - 2x - 1}{\sqrt{x^2 + 4x + 10}} dx;$

9. $\int \frac{2x^3 + 1}{\sqrt{3x^2 - 6x + 13}} dx;$

10. $\int \frac{x^3 + 2x - 1}{\sqrt{1 + 2x - x^2}} dx;$

11. $\int \frac{x^3 + 4x - 1}{\sqrt{4 - 2x - x^2}} dx;$

12. $\int \frac{2x^3 + 3x}{\sqrt{6 - 2x - x^2}} dx;$

13. $\int \frac{3x^3 + 2}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx;$

14. $\int \frac{3x^2 + 4x - 1}{\sqrt{x^2 + 3x - 10}} dx;$

15. $\int \frac{3x^2 + x - 1}{\sqrt{x^2 - 7x + 10}} dx;$

16. $\int \frac{x^3 + 2x - 1}{\sqrt{x^2 + 7x + 10}} dx;$

17. $\int \frac{3x - 2x^3}{\sqrt{4x^2 + 4x + 5}} dx;$

18. $\int \frac{2 - 3x^3}{\sqrt{4x^2 + 4x + 5}} dx;$

19. $\int \frac{3x - 5x^3}{\sqrt{8 + 6x - 9x^2}} dx;$

20. $\int \frac{x^2 - 3x^3}{\sqrt{8 + 6x - 9x^2}} dx;$

21. $\int \frac{3 - 2x^3}{\sqrt{2 - 6x - 9x^2}} dx;$

22. $\int \frac{5 - x^3}{\sqrt{2 - 6x - 9x^2}} dx;$

23. $\int \frac{3 - 2x^3}{\sqrt{4x^2 + 4x + 5}} dx;$

24. $\int \frac{1 - 3x^3}{\sqrt{4x^2 + 4x + 5}} dx;$

25. $\int \frac{2 - x^3}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}} dx;$

26. $\int \frac{3x - 2x^2 + x^3}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}} dx;$

27. $\int \frac{x^3 + 2}{\sqrt{x^2 - 7x + 10}} dx;$

28. $\int \frac{x^3 - 2x + 1}{\sqrt{x^2 + 7x + 10}} dx;$

29. $\int \frac{x^3 + 2x + 1}{\sqrt{4x^2 + 9x + 1}} dx;$

30. $\int \frac{3x - 2x^3}{\sqrt{4x^2 - 9x + 1}} dx .$

Завдання 33

Знайти інтеграли

1. $\int \frac{(x-3)dx}{(x-1)^2(x+2)\sqrt{x^2+2x+4}};$

2. $\int \frac{(x+4)dx}{(x-1)^3(x+2)\sqrt{x^2+2x+4}};$

3. $\int \frac{(2x+1)dx}{(x+1)^2(x-2)\sqrt{x^2+2x+4}};$
4. $\int \frac{(x+2)dx}{(x+1)^2(x-2)\sqrt{x^2+2x+2}};$
5. $\int \frac{(3x+1)dx}{(x+1)^3(x-2)\sqrt{x^2+2x+2}};$
6. $\int \frac{(x+4)dx}{(x-1)^3(x+2)\sqrt{x^2+2x+2}};$
7. $\int \frac{(3x-1)dx}{(x-1)^2(x+2)\sqrt{x^2+2x+2}};$
8. $\int \frac{(2x+1)dx}{(x+1)^2(x+2)\sqrt{x^2+2x+3}};$
9. $\int \frac{(3x+2)dx}{(x+1)^3(x-2)\sqrt{x^2+2x+3}};$
10. $\int \frac{(2x-1)dx}{(x-1)^2(x+2)\sqrt{x^2+2x+3}};$
11. $\int \frac{xdx}{(x-1)^3(x+2)\sqrt{x^2+2x+3}};$
12. $\int \frac{(3x+1)dx}{(x+1)^2(x+2)\sqrt{4x^2+x+3}};$
13. $\int \frac{(2x+3)dx}{(x+1)^3(x-2)\sqrt{4x^2+x+3}};$
14. $\int \frac{(3x+4)dx}{(x-1)^2(x+2)\sqrt{4x^2+x+3}};$
15. $\int \frac{(x+3)dx}{(x-1)^3(x+2)\sqrt{4x^2+x+3}};$

16. $\int \frac{(2x+1)dx}{(x+2)^2(x-1)\sqrt{x^2+x+1}};$
17. $\int \frac{(2x-1)dx}{(x+2)^3(x+1)\sqrt{x^2+x+1}};$
18. $\int \frac{(3x+1)dx}{(x-2)^2(x+1)\sqrt{x^2+x+1}};$
19. $\int \frac{(2x-3)dx}{(x-2)^3(x+1)\sqrt{x^2+x+1}};$
20. $\int \frac{(2x+1)dx}{(x+2)^2(x-1)\sqrt{3x^2+x+1}};$
21. $\int \frac{(3x-1)dx}{(x+2)^2(x-1)\sqrt{3x^2+x+1}};$
22. $\int \frac{(2x+3)dx}{(x-2)^2(x+1)\sqrt{3x^2+x+1}};$
23. $\int \frac{(x-3)dx}{(x-2)^3(x+1)\sqrt{3x^2+x+1}};$
24. $\int \frac{(2x-3)dx}{(x+2)^2(x+1)\sqrt{2x^2-x+1}};$
25. $\int \frac{(3x+2)dx}{(x+2)^3(x+1)\sqrt{2x^2-x+1}};$
26. $\int \frac{(x+3)dx}{(x-2)^2(x+1)\sqrt{2x^2-x+1}};$
27. $\int \frac{(x-3)dx}{(x-2)^3(x+1)\sqrt{2x^2-x+1}};$
28. $\int \frac{(3x+2)dx}{(x+2)^2(x-1)\sqrt{3x-2-x^2}};$

$$29. \int \frac{(2x-3)dx}{(x+2)^3(x-1)\sqrt{3x-2-x^2}};$$

$$30. \int \frac{(2x+3)dx}{(x-2)^2(x+1)\sqrt{3x-2-x^2}}.$$

8. Інтегрування диференціальних біномів

Вираз $x^m(a+bx^n)^p dx$, де $a, b \in \mathbb{R}; m, n, p \in \mathbb{Q}$ називають *диференціальним біномом*.

Теорема. Інтеграл від диференціального бінома раціоналізується у наступних випадках:

1) $p \in \mathbb{Z}$ підстановкою $x = t^s$, де s – найменше спільне кратне знаменників дробів m і n .

2) $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ підстановкою $a+bx^n = t^l$, де l – знаменник p .

3) $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$ підстановкою $\frac{a+bx^n}{x^n} = t^l$, де l – знаменник p .

У інших випадках інтеграл не виражається в елементарних функціях.

Приклад 1. Знайти $\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$.

■ Зауважимо, що вираз $x^{-11}(1+x^4)^{-1/2} dx$ є диференціальним біномом ($m = -11, n = 4, p = -\frac{1}{2}$). Перевіримо умови 1)–3) те-

орему: $p = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, $\frac{m+1}{n} = \frac{-11+1}{4} \notin \mathbb{Z}$, $\frac{m+1}{n} + p = \frac{-5}{2} - \frac{1}{2} = -3 \in \mathbb{Z}$. Маємо випадок 3).

Заміна $\frac{1+x^4}{x^4} = t^2$, $x = \frac{1}{(t^2-1)^{1/4}}$, $dx = -\frac{tdt}{2(t^2-1)^{5/4}}$. Тоді

$$I = -\int \frac{(t^2-1)^2}{2} dt = -\frac{t^5}{10} + \frac{t^3}{3} - \frac{t}{2} + C, \text{ де } t = \frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2} \quad \blacksquare$$

Приклад 2. Знайти $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{1+x^4}}$.

Вираз $(1+x^4)^{-1/5} dx$ є диференціальним біномом, де $p = -\frac{1}{5} \notin \mathbb{Z}$, $\frac{m+1}{n} = \frac{0+1}{4} = \frac{1}{4} \notin \mathbb{Z}$, $\frac{m+1}{n} + p = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \notin \mathbb{Z}$. Отже інтеграл не виражається в елементарних функціях. \blacksquare

Завдання 34

Знайти інтеграли

1. $\int \sqrt{x^3 + x^4} dx;$

2. $\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2} dx;$

3. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}};$

4. $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}};$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}};$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}};$

7. $\int \frac{dx}{x^6 \sqrt{1+x^6}};$

8. $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}};$

9. $\int \sqrt[3]{3x-x^3} dx;$

10. $\int x^{-1} (1+x^{1/3})^{-3} dx;$

11. $\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^3}};$

12. $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt[3]{2-x^3}};$

13. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{(1+x^2)^3}};$

14. $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{1+x^2}};$

15. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx;$

16. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^5}};$

17. $\int \frac{dx}{x^2(2+x^3)^{5/3}};$

18. $\int \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}} dx;$

19. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{1-x^5}};$

20. $\int \sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^4 dx;$

21. $\int x^5(1+x^3)^{2/3} dx;$

22. $\int \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5} dx;$

23. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x} dx;$

24. $\int x^{-2}\sqrt[3]{1+x^3} dx;$

25. $\int \sqrt[3]{x(1-x^2)} dx;$

26. $\int x^3(1+2x^2)^{-3/2} dx;$

27. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}};$

28. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx;$

29. $\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}};$

30. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{1+x^5}}.$

Завдання 35

Знайти інтеграли

1. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x^4\sqrt{x^3}} dx.$

2. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x^3\sqrt{x^2}} dx.$

3. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt{x}} dx.$

4. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}{x^9\sqrt{x^4}} dx.$

5. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x^9\sqrt{x^8}} dx.$

6. $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x})^2}}{x^9\sqrt{x^5}} dx.$

- | | | | |
|-----|--|-----|--|
| 7. | $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x^2})^2}}{x^2\sqrt[9]{x}} dx.$ | 8. | $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^2}}{x^6\sqrt{x^5}} dx.$ |
| 9. | $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x^2} dx.$ | 10. | $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x^2\sqrt{x}} dx.$ |
| 11. | $\int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt{x})^3}}{x^8\sqrt{x^7}} dx.$ | 12. | $\int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt[3]{x})^3}}{x^{12}\sqrt{x^7}} dx.$ |
| 13. | $\int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt[3]{x^2})^3}}{x^2\sqrt[6]{x}} dx.$ | 14. | $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^2\sqrt{x}} dx.$ |
| 15. | $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^2} dx.$ | 16. | $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x^3})^2}}{x^2\sqrt[4]{x}} dx.$ |
| 17. | $\int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt{x})^4}}{x^{10}\sqrt{x^9}} dx.$ | 18. | $\int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt[3]{x})^4}}{x^5\sqrt{x^3}} dx.$ |
| 19. | $\int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt[3]{x^2})^4}}{x^2\sqrt[5]{x}} dx.$ | 20. | $\int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt[4]{x^3})^4}}{x^{220}\sqrt{x^7}} dx.$ |
| 21. | $\int \frac{\sqrt[5]{1+\sqrt[5]{x^4}}}{x^{225}\sqrt[5]{x^{11}}} dx.$ | 22. | $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[5]{x^4}}}{x^2\sqrt[5]{x}} dx.$ |
| 23. | $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[5]{x^4}}}{x^{215}\sqrt{x}} dx.$ | 24. | $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[5]{x^4})^2}}{x^2\sqrt[3]{x}} dx.$ |

$$25. \int \frac{\sqrt[4]{(1 + \sqrt[5]{x^4})^3}}{x^2 \sqrt[5]{x^2}} dx.$$

$$26. \int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}}}{x^3 \sqrt{x}} dx.$$

$$27. \int \frac{\sqrt[3]{(1 + \sqrt[4]{x})^2}}{x^{12} \sqrt{x^5}} dx.$$

$$28. \int \frac{\sqrt[4]{1 + \sqrt[3]{x}}}{x^{12} \sqrt{x^5}} dx.$$

$$29. \int \frac{\sqrt[4]{1 + \sqrt[3]{x^2}}}{x^6 \sqrt{x^5}} dx.$$

$$30. \int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[5]{x}}}{x^{15} \sqrt{x^4}} dx.$$

$$31. \int \frac{\sqrt[5]{1 + \sqrt[3]{x}}}{x^5 \sqrt{x^2}} dx.$$

9. Інтегрування гіперболічних функцій

Гіперболічні функції інтегруються таким же чином, що й тригонометричні. При цьому варто використовувати формули, які пов'язують між собою гіперболічні функції.

Завдання 36

Знайти інтеграли

$$1. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^4 x + \operatorname{ch}^4 x}.$$

$$2. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^3 x \operatorname{ch}^5 x};$$

$$3. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^4 x \operatorname{ch}^2 x};$$

$$4. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x - 2 \operatorname{sh} 2x + 5 \operatorname{ch}^2 x};$$

$$5. \int \frac{\operatorname{sh}^2 x}{1 + \operatorname{sh}^2 x} dx;$$

$$6. \int \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh}^3 x + \operatorname{ch}^3 x} dx;$$

$$7. \int \frac{\operatorname{ch}^2 x dx}{\operatorname{sh}^4 x + 4 \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x + 4 \operatorname{ch}^4 x};$$

$$8. \int \frac{dx}{(\operatorname{sh}^2 x + 2 \operatorname{ch}^2 x)^2};$$

9. $\int \frac{\operatorname{ch}^3 x}{\operatorname{sh}^4 x} dx;$
10. $\int \frac{\operatorname{ch}^3 x}{4\operatorname{sh}^2 x - 1} dx;$
11. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^3 x};$
12. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^3 x};$
13. $\int \frac{\operatorname{sh}^3 x}{\operatorname{ch}^4 x} dx;$
14. $\int \frac{\operatorname{ch}^4 x}{\operatorname{sh}^3 x} dx.$
15. $\int \operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^3 x dx.$
16. $\int \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^6 x} dx.$
17. $\int \operatorname{th}^4(x+5) dx.$
18. $\int \operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^4 x dx.$
19. $\int \operatorname{ch}^4 x dx.$
20. $\int \frac{\operatorname{sh} 2x}{2 + \operatorname{sh}^2 x} dx.$
21. $\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^4 x dx.$
22. $\int \operatorname{ch}^3 x \operatorname{sh} 2x dx.$
23. $\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{sh} x \operatorname{ch}^3 x}}.$
24. $\int \frac{3 \operatorname{th} x - 1}{\operatorname{sh}^2 x + 4 \operatorname{ch}^2 x} dx.$
25. $\int \frac{\operatorname{sh}^2 x}{3 \operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x} dx.$
26. $\int \operatorname{sh}^4 x \operatorname{ch}^5 x dx.$
27. $\int \operatorname{sh}^4 x dx.$
28. $\int \frac{\operatorname{sh}^4 x}{\operatorname{ch}^6 x} dx.$
29. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^4 x}.$
30. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^4 x}.$

10. Задачі на різні методи інтегрування

Завдання 37

Знайти інтеграли

1. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}} dx;$

2. $\int \frac{x^{10}}{\sqrt{1+x^2}} dx;$
3. $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}} dx;$
4. $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 + 1}};$
5. $\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2 - 1}};$
6. $\int \frac{dx}{(x-1)^3 \sqrt{x^2 + 3x + 1}};$
7. $\int \frac{dx}{(x+1)^5 \sqrt{x^2 + 2x}};$
8. $\int \frac{xdx}{(x-1)^2 \sqrt{1 + 2x - x^2}};$
9. $\int \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{(x+1)^2} dx;$
10. $\int \frac{x^3 dx}{(x+1)\sqrt{1 + 2x - x^2}};$
11. $\int \frac{xdx}{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x^2 - 4x + 3}};$
12. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}};$
13. $\int \frac{dx}{(1-x^4)\sqrt{1+x^2}};$
14. $\int \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{x^2 + 1} dx;$

15. $\int \frac{dx}{(x^2 + x + 1)\sqrt{x^2 + x - 1}}$;
16. $\int \frac{x^2 dx}{(x^2 - 2x + 4)\sqrt{2 + 2x - x^2}}$;
17. $\int \frac{(x + 1)dx}{(x^2 + x + 1)\sqrt{x^2 + x + 1}}$;
18. $\int \frac{dx}{(x^2 - x + 1)\sqrt{x^2 + x + 1}}$;
19. $\int \frac{dx}{(x^2 + 2)\sqrt{2x^2 - 2x + 5}}$;
20. $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}$;
21. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}}$;
22. $\int x\sqrt{x^2 - 2x + 2}dx$;
23. $\int \frac{x - \sqrt{x^2 + 3x + 2}}{x + \sqrt{x^2 + 3x + 2}} dx$;
24. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$;
25. $\int \frac{dx}{(x + 1)\sqrt{x^2 + x + 1}}$;
26. $\int \frac{dx}{(1 - x)^2 \sqrt{1 - x^2}}$;
27. $\int \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}{x} dx$;

$$28. \int \frac{xdx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}};$$

$$29. \int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}} dx;$$

$$30. \int \frac{xdx}{(x^2-1)\sqrt{x^2-x-1}}.$$

Завдання 38

Знайти інтеграли

$$1. \int \ln^n x dx;$$

$$2. \int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{3/2}};$$

$$3. \int \frac{\arccos x}{(1-x^2)^{3/2}} dx;$$

$$4. \int x \operatorname{arctg} x \ln(1+x^2) dx;$$

$$5. \int \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^{3/2}} dx;$$

$$6. \int \operatorname{sh} ax \sin bxdx;$$

$$7. \int \operatorname{sh} ax \cos bxdx;$$

$$8. \int \frac{dx}{1+x^4+x^8};$$

$$9. \int \frac{\arcsin x}{x^2} \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$10. \int \frac{x \ln(1 + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx;$$

$$11. \int x \sqrt{1+x^2} \ln \sqrt{x^2-1} dx;$$

$$12. \int \frac{\sin 4xdx}{\sin^8 x + \cos^8 x};$$

$$13. \int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$14. \int \frac{\operatorname{arctg} e^{x/2}}{e^{x/2}(1+e^x)} dx;$$

$$15. \int \frac{x \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{(1-x^2)^2} dx;$$

$$16. \int \sqrt{\operatorname{th}^2 x + 1} dx;$$

$$17. \int \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} e^x dx;$$

$$18. \int \frac{dx}{(e^{x+1} + 1)^2 - (e^{x-1} + 1)^2};$$

19. $\int \left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 e^x dx;$

20. $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx;$

21. $\int xe^x \sin^2 x dx;$

22. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{2 + \sin 2x}};$

23. $\int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)};$

24. $\int \frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)};$

25. $\int \frac{dx}{\cos(x+a)\cos(x+b)};$

26. $\int \frac{dx}{\sin x - \sin a};$

27. $\int \frac{dx}{\cos x + \cos a};$

28. $\int \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x+a) dx;$

29. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x} + \sqrt{x+1}};$

30. $\int \frac{\operatorname{arctg} e^x}{e^x} dx.$

Список літератури

1. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз, Ч. 1. К., Либідь, 1994.
2. Зорич В.А. Математический анализ, Ч.1, М., Наука, 1984.
3. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа, Т.1, М., Наука, 1981.
4. Никольский С.М. Курс математического анализа, Т.1, М., Наука, 1983.
5. Рудин У. Основы математического анализа, М., Мир, 1966.

6. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа, М., Наука, 1988.
7. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, Т.1, М., Наука, 1969.
8. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу, М., Физматгиз, 1962.
9. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа, М., Наука, 1971.
10. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу, М., Высшая школа, 2000.
11. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу, Интегралы. Ряды. М., Наука, 1986.
12. Дороговцев А.Я. Сборник задач по математическому анализу, К., Вища школа, 1991.
13. Невизначений і визначений інтеграли: методи інтегрування. Методичні вказівки до типової розрахункової роботи з математичного аналізу.

КПІ. 2008.

14. Інтеграл Рімана. Методичні вказівки до типової розрахункової роботи з математичного аналізу. КПІ. 2014.

15. Функції обмеженої варіації. Інтеграл Рімана-Стільтєса. Методичні вказівки до типової розрахункової роботи з математичного аналізу. КПІ. 2010.

Зміст

Загальні положення.....	3
1. Теоретичні питання.....	3
2. Основні означення. Таблиці похідних і основних невизначених інтегралів.....	4
Завдання 1.....	7
Завдання 2.....	8
3. Заміна змінної в невизначеному інтегралі.....	10
Завдання 3.....	11
Завдання 4.....	13
Завдання 5.....	14
Завдання 6.....	16
Завдання 7.....	17
4. Інтегрування частинами в невизначеному інтегралі.....	18
Завдання 8.....	20
Завдання 9.....	21
Завдання 10.....	23
Завдання 11.....	24
Завдання 12.....	26
5. Інтегрування раціональних дробів.....	28
Завдання 13.....	32
Завдання 14.....	33
Завдання 15.....	35
Завдання 16.....	36
Завдання 17.....	38
Завдання 18.....	39
Завдання 19.....	40
Завдання 20.....	41
6. Інтегрування тригонометричних функцій.....	43
Завдання 21.....	44
Завдання 22.....	45
Завдання 23.....	46
Завдання 24.....	48
Завдання 25.....	49
7. Інтегрування деяких ірраціональних функцій.....	51
Завдання 26.....	56
Завдання 27.....	57

Завдання 28.....	59
Завдання 29.....	60
Завдання 30.....	61
Завдання 31.....	63
Завдання 32.....	64
Завдання 33.....	65
8. Інтегрування диференціальних біномів.....	68
Завдання 34.....	69
Завдання 35.....	70
9. Інтегрування гіперболічних функцій.....	72
Завдання 36.....	72
10. Задачі на різні методи інтегрування.....	73
Завдання 37.....	73
Завдання 38.....	76
Список літератури.....	77
Зміст.....	80