Міністерство освіти і науки України

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Функції комплексної змінної

Практикум

з комплексного аналізу

для студентів третього курсу

фізико-математичного факультету

Рекомендовано Методичною радою фізико-математичного факультету НТУУ «КПІ імені Ігоря Сікорського»

Київ

НТУУ «КПІ імені Ігоря Сікорського»

2017

Функції комплексної змінної: Практикум з компл. аналізу для студ. 3 курсу фіз..-мат. ф-ту/ Уклад.: В.В.Дрозд. – К.: НТУУ «КПІ імені Ігоря Сікорського», 2017

Гриф надано Методичною радою фізико-математичного факультету НТУУ «КПІ імені Ігоря Сікорського» (Протокол № від 2017 р.)

Навчальне видання

Функції комплексної змінної

Практикум

з комплексного аналізу

для студентів другого курсу

фізико-математичного факультету

Укладачі: Дрозд Вячеслав Володимирович

Віповідальний редактор: Диховичний Олекснדр Олекснדрович

Рецензент: Каніовська Ірина Юріївна

§1. Комплексні числа

Комплексним числом називається упорядкована пара дійсних чисел $(x; y)$, $x\epsilon\mathbb{R}, y\epsilon\mathbb{R}$. Числа x та y називаються відповідно дійсною та уявною частинами комплексного числа z і позначаються $x = Rez, y = Imz$.

Алгебраїчні дії на множині комплексних чисел вводяться за формулами:

1. $(x_1; y_1) + (x_2; y_2) = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$
2. $(x_1; y_1) - (x_2; y_2) = (x_1 - x_2; y_1 - y_2)$
3. $(x_1; y_1) \cdot (x_2; y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2; x_1y_2 + x_2y_1)$

Якщо число (0;1) позначити через i , то довільне комплексне число $z = (x; y)$ можна представити у вигляді $z = x + iy$, який називається алгебраїчною формою комплексного числа z, де число i називається уявною одиницею, причому $i^2 = -1$.

Тоді, щоб знайти дійсну та уявну частини частки двох комплексних чисел

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} , x_2^2 + y_2^2 \neq 0,$$

треба чисельник та знаменник помножити на число $\bar{z} = x_2 - iy_2$, спряжене до знаменника:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} i;$$

Кожному комплексному числу $z = x + iy$ відповідає одна і тільки одна точка $M(x; y)$ на площині *xOy* , або вектору $\overrightarrow{OM}$, де $O(0; 0)$ - початок координат.

Довжина ρ вектора $\overrightarrow{OM}$ називається модулем комплексного числа і позначається через $|z|$ таким чином ,$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Величина кута φ, який утворює вектор $\overrightarrow{OM}$ з додатнім напрямом вісі *Ox* називається аргументом комплексного числа z і позначається через φ=*Argz* . Значення аргументу, яке належить множині $[-\pi; \pi]$, називається головним значенням і позначається *argz*. Таким чином $Argz= argz+2\pi k$, $k\epsilon\mathbb{Z}$.

Довільне комплексне число можна записати в тригонометричній формі

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

де $\rho = |z|$, $\varphi = argz$, або в показниковій формі

$$z = \rho e^{i\varphi} = \rho\exp(i\varphi),$$

де $\exp(i\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

Дії над комплексними числами, заданими в тригонометричній або показниковій формі, виконуються за формулами:

1. $\rho_1\exp(i\varphi_1)\cdot\rho_2\exp(i\varphi_2) = \rho_1\rho_2\exp i(\varphi_1+\varphi_2)$;
2. $\rho_1\exp(i\varphi_1) : (\rho_2\exp(i\varphi_2)) = \frac{\rho_1}{\rho_2}\exp i(\varphi_1-\varphi_2)$;
3. $(\rho\exp(i\varphi))^n = \rho^n\exp(i\varphi n)\,, n\epsilon\mathbb{N}$;
4. $\sqrt[n]{\rho\exp(i\varphi)} = \sqrt[n]{\rho}\exp\left(\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), n\epsilon\mathbb{N}, k = 0,1,\dots,n-1$.

В частинному випадку $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$.

Приклад 1. Представити комплексне число $z = (\frac{1+i^5}{(1-i)^5})^{12}$ в алгебраїчній формі.

Розв'язання: Запишемо число 1-i в показниковій формі, а саме $1-i = \sqrt{2}\exp(-\frac{\pi}{4}i)$. Оскільки $i^5 = i\cdot i^4$, то $1+i^5 = 1+i = \sqrt{2}\exp(\frac{\pi}{4}i)$. Тепер зробимо операції піднесення до степеня та ділення

$$\frac{\sqrt{2}exp(\frac{\pi}{4}i)}{\left(\sqrt{2}\right)^5 exp(-\frac{5\pi}{4}i)} = \frac{1}{4}exp\left(\frac{3\pi}{2}i\right) = -\frac{i}{4}$$

Піднесемо одержане число до степені

$$z = (-\frac{i}{4})^{12} = (\frac{1}{4})^{12}\, i^{12} = (\frac{1}{4})^{12}\,(i^4)^3 = (\frac{1}{4})^{12} = (\frac{1}{2})^{24}$$

Відповідь: $z = (\frac{1}{2})^{24}$.

Приклад 2. Знайти всі значення $\sqrt[4]{\sqrt{3}-i}$ та побудувати їх на комплексній площині.

Розв'язання: Представимо число $\sqrt{3}-i$ в тригонометричній формі. Для цього знайдемо його модуль $\rho = \sqrt{3+1} = 2$, та аргумент $arg\left(\sqrt{3}-i\right) = arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$. Отже, $\sqrt{3}-i = 2\left(cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + isi\,n\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$. За наведенною вище формулою значення кореня дорівнюють

$$\sqrt[4]{\sqrt{3}-i} = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\frac{k\pi}{24}\right) + i\sin\left(-\frac{k\pi}{24}\right)\right);\ \ k = 0, 1, 2, 3.$$

Підставляючи замість k наведені значення, одержимо чотири різні значення нашого кореня.

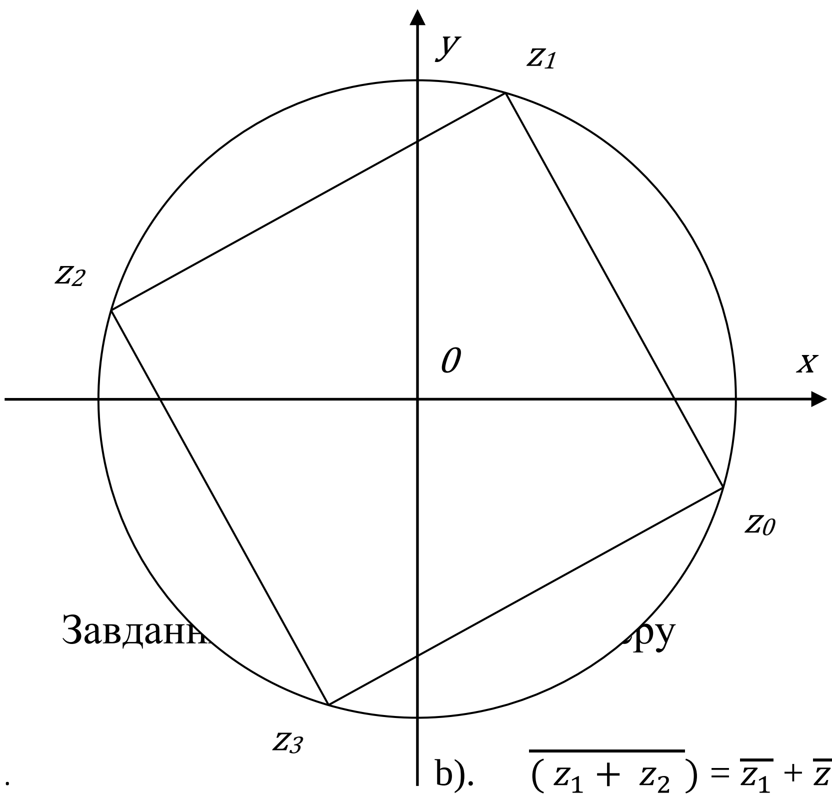
При $k = 0$; $z_0 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{24}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{24}\right)\right)$;

При $k = 1$; $z_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{2}\right)\right)$;

При $k = 2$; $z_2 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{24}+\pi\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{24}+\pi\right)\right)$;

При $k = 3$; $z_3 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{24}+\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{24}+\frac{3\pi}{2}\right)\right)$.

Побудуємо їх. Оскільки усі ці числа мають однаковий модуль $|z_k| = \sqrt[4]{2}$, $k = 0, 1, 2, 3$, то вони лежать на колі з центром в початку координат радіуса $\sqrt[4]{2}$. Аргументи чисел z_1, z_2, z_3 відрізняються від аргументу числа z_0 відповідно на $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$, отже, усі вони лежать у вершинах квадрату, вписаного у вказане коло.



Завданн ору

Довести рівності:

a). $z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}z$.

b). $\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

c). $\overline{\left(z^n\right)} = \left(\overline{z}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$

d). $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$

e). $\overline{(z_1 \cdot z_2)} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$. f). $\overline{(\overline{z_1} + \overline{z_2})} = z_1 + z_2$.

Довести нерівності:

g). $\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 + z_2|$. h). $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$.

i). Нехай *P(z)* – алгебраїчний многочлен з дійсними коефіцієнтами. Довести, що $P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$.

j). Нехай *P(z)* – алгебраїчний многочлен. Якими повинні бути його коефіцієнти, щоб мала місце рівність $P(\overline{z}) = -\overline{P(z)}$?

k). Знайти всі комплексні числа z≠0, які задовольняють рівність $z^{n-1} = \overline{z}$.

Завдання для аудиторної та самостійної роботи

Знайти усі значення кореня та намалювати їх на комплексній площині:

1. $\sqrt[4]{-1}$. 2. $\sqrt{2 - 2\sqrt{3}i}$.

3*. $\sqrt{1 - e^{i\varphi}}, \quad -\pi < \varphi < \pi$.

Записати число в тригонометричній формі:

4. $1 - \sin\alpha + i\,\cos\alpha \quad (0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$.

5. $\frac{1+\cos\alpha + i\sin\alpha}{1+\cos\alpha + i\sin\alpha} \ \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$. 6. $1 + i\,tg(\alpha) \quad (\frac{\pi}{2} < \alpha \le \frac{3\pi}{2})$.

Обчислити:

7. $\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$. 8. $\left(\frac{i^5+2}{i^{19+1}}\right)^2$.

9. $\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$. 10. $(1+i)^8\left(1 - i\sqrt{3}\right)^{-6}$.

11. $\sqrt[4]{-128 + i128\sqrt{3}}$. 12. $\sqrt[4]{-1 - i\sqrt{3}}$.

13. $\sqrt[4]{i\sqrt{3} - 1}$. 14. $\sqrt[4]{-8 + i8\sqrt{3}}$.

15. $\sqrt[4]{-1 + i}$ 16. $\sqrt[4]{-1}$.

Знайти суми:

17. $\sin x + \sin 3x + \cdots + \sin(2n-1)x$.

18. $\cos x + \cos 3x + \cdots + \cos(2n-1)x$.

19. $\sum_{k=0}^{n} a^k \cos k\varphi$.

Розв’язати рівняння:

20. $z^2 - 8z - 3i\,z + 13 + 13i$=0.

21. $z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 8z - 3i\,z + 13 + 13i$=0.

22. $(1 + iy)x + (y + 2i) = 4 + 5i$

23. $(x + i)^n - (x - i)^n = 0, x \in R$

24. $\overline{z} = z^3$.

25. $|z| - z = 1 + 2i.$

26. $z|z| + 2z + i = 0.$

27. Знайти многочлен найменшої степені з дійсними коефіцієнтами, який має корені $z_1 = z_2 = i,\ z_3 = -1 - i.$

28. Показати, що число $z_1 = 1 + i$ є коренем многочлена $3z^4 - 5z^3 + 3z^2 + 4z - 2$, та знайти інші його корені.

Спростити:

29. $\frac{\sqrt{1+x^2}+ix}{x-i\sqrt{1+x^2}}$

30. $\frac{z^2-iz-1}{2iz},\ z = e^{i\varphi}$

Завдання для індивідуальної роботи

(робити завдання № 30+*к*, 60+*к*, де *к* – номер варіанта)

Обчислити (№ 31-90)

31. $\left(1 + cos\frac{\Pi}{8} + isin\frac{\Pi}{8}\right)^{20}$

32. $\left(cos\frac{\Pi}{12} - isin\frac{\Pi}{12}\right)^{62}$

33. $\left(sin\frac{\Pi}{14} + icos\frac{\Pi}{14}\right)^{49}$

34. $\left(-cos\frac{\Pi}{7} + isin\frac{\Pi}{7}\right)^{21}$

35. $\left(sin\frac{\Pi}{11} - i - icos\frac{\Pi}{11}\right)^{55}$

36. $\left(1 - sin\frac{\Pi}{18} - icos\frac{\Pi}{18}\right)^{81}$

37. $\left(1 - cos\frac{\Pi}{5} + isin\frac{\Pi}{5}\right)^{35}$

38. $\left(-sin\frac{\Pi}{17}+icos\frac{\Pi}{17}\right)^{85}$

39. $\left(-cos\frac{\Pi}{13}-isin\frac{\Pi}{13}\right)^{13}$

40. $\left(-cos\frac{\Pi}{9}+isin\frac{\Pi}{9}\right)^{30}$

41. $\left(sin\frac{\Pi}{5}-i+icos\frac{\Pi}{5}\right)^{65}$

42. $\left(cos\frac{\Pi}{12}+i+isin\frac{\Pi}{12}\right)^{48}$

43. $\left(1+cos\frac{\Pi}{10}-isin\frac{\Pi}{10}\right)^{55}$

44. $\left(sin\frac{\Pi}{7}+icos\frac{\Pi}{7}\right)^{56}$

45. $\left(-cos\frac{\Pi}{7}+isin\frac{\Pi}{7}\right)^{42}$

46. $\left(sin\frac{\Pi}{18}+icos\frac{\Pi}{18}\right)^{33}$

47. $\left(1+sin\frac{\Pi}{8}+icos\frac{\Pi}{8}\right)^{52}$

48. $\left(cos\frac{\Pi}{8}+i-isin\frac{\Pi}{8}\right)^{92}$

49. $\left(1-cos\frac{\Pi}{13}-isin\frac{\Pi}{13}\right)^{65}$

50. $\left(-sin\frac{\Pi}{10}+icos\frac{\Pi}{10}\right)^{65}$

51. $\left(sin\frac{\Pi}{13}-icos\frac{\Pi}{13}\right)^{39}$

52. $\left(sin\frac{\Pi}{5}-icos\frac{\Pi}{5}\right)^{55}$

53. $\left(1-sin\frac{\Pi}{11}+icos\frac{\Pi}{11}\right)^{77}$

54. $\left(cos\frac{\Pi}{5}-i-isin\frac{\Pi}{5}\right)^{225}$

55. $\left(sin\frac{\Pi}{12}+i+icos\frac{\Pi}{12}\right)^{52}$

56. $\left(sin\frac{\Pi}{8}-icos\frac{\Pi}{8}\right)^{32}$

57. $\left(-sin\frac{\Pi}{12}+icos\frac{\Pi}{12}\right)^{74}$

58. $\left(sin\frac{\Pi}{8}+i-icos\frac{\Pi}{8}\right)^{48}$

59. $\left(1+sin\frac{\Pi}{9}-icos\frac{\Pi}{9}\right)^{30}$

60. $\left(cos\frac{\Pi}{8}-i+isin\frac{\Pi}{8}\right)^{84}$

61.

$$\left(\frac{i\sqrt{3}-1}{i-\sqrt{3}}\right)^{8}$$

62.

$$\left(\frac{2+2i}{i-\sqrt{3}}\right)^{14}$$

63.

$$\left(\frac{2+2\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{16}$$

64.

$$\left(\frac{4+4i}{1-i\sqrt{3}}\right)^{6}$$

65.

$$\left(\frac{-\sqrt{3}-i}{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}\right)^{15}$$

66.

$$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}\right)^{5}$$

67.

$$\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{i-1}\right)^{5}$$

68.

$$\left(\frac{i\sqrt{2}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+i}\right)^{6}$$

69.

$$\left(\frac{i-1}{i+\sqrt{3}}\right)^{12}$$

70.

$$\left(\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{1+i}\right)^{12}$$

71.

$$\left(\frac{i-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}\right)^{10}$$

72.

$$\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}\right)^{6}$$

73.

$$\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{1-i}\right)^{10}$$

74.

$$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i\sqrt{3}}\right)^{10}$$

75.

$$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}\right)^{10}$$

76.

$$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{i+1}\right)^{16}$$

77.

$$\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{15}$$

78.

$$\left(1+\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{8}$$

79.

$$\left(1-\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{40}$$

80.

$$\left[\sin\frac{\pi}{4}+i\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)\right]^{40}$$

81.

$$\left(1+\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{8}$$

82.

$$\left(\frac{2+2\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{12}$$

83.

$$\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{8}$$

84.

$$\left(\frac{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{1+i}\right)^{10}$$

85.

$$\left(\frac{-2-2i}{i+\sqrt{3}}\right)^{8}$$

86.

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{i-1}\right)^{8}$$

87.

$$\left(\cos\frac{\pi}{7}-i\sin\frac{\pi}{7}\right)^{49}$$

88.

$$\left(-\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}\right)^{18}$$

89.

$$\left(\sin\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)^{44}$$

90.

$$\left(\cos\frac{\pi}{5}-i\sin\frac{\pi}{5}\right)^{55}$$

§2 Множини на комплексній площині

Комплекснозначна функція z=z(t)=x(t)+iy(t) дійсного змінного t задає криву на комплексній площині. Остання рівність рівносильна системі параметричних рівнянь

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},$$

виключаючи з яких параметр t, одержимо рівняння кривої в неявному вигляді $F(x;y) = 0$.

Приклад 1. Знайти на комплексній площині множину точок, які задовольняють умові $z = t^2 - 2t + 3 + i(t^2 - 2t + 1), t \in R$.

Розв'язання: Маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} x = t^2 - 2t + 3 \\ y = t^2 - 2t + 1 \end{cases},$$

з якої випливає, що $y = x - 2$. Оскільки $y = (t-1)^2$, то ясно, що y приймає тільки невід'ємні значення для всіх дійсних t.

Відповідь: Частина прямої $y = x - 2, де\ y \geq 0$.

Приклад 2. Знайти на комплексній площині множину точок, які задовольняють умові

$$-\frac{\pi}{4} < \arg(z - 1 + i) < \frac{3\pi}{4}.$$

Розв'язання: Комплексне число $z - 1 + i = z - (1 - i)$ можна зобразити вектором, початком якого є точка $(1 - i)$, а кінцем – точка z. Дійне число $\arg(z - 1 + i)$ є кут між цим вектором та віссю Ox. Оскільки за умовою він змінюється від $-\frac{\pi}{4}$ до $\frac{3\pi}{3}$, то точка z повинна знаходитись всередині кута, що утворюють промені, які виходять з точки $(1 - i)$ і утворюють з віссю Ox кути $-\frac{\pi}{4}$ та $\frac{3\pi}{4}$, тобто точка z лежить над прямою y=-x.

Відповідь: y>-x.

Приклад 3. Знайти на комплексній площині множину точок, які задовольняють умові $|z - 1| > 2|z - i|$

Розв'язання: Нехай z=x+iy. Тоді $|x - 1 + iy| > 2|x + i(y - 1)|$, або

$(x - 1)^2 + y^2 > 4(x^2 + (y - 1)^2)$.

Зробивши спрощення ми одержуємо $\ldots\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 < \frac{8}{9}$.

Відповідь: Внутрішні точки кола $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$

Завдання теоретичного характеру

a). Записати в комплексній формі рівняння прямої

$$Ax + By + C = 0.$$

b). Записати в комплексній формі рівняння кола

$$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C=0.$$

c). Нехай $z_1, z_2, \ldots, z_n$ – корені рівняння $z^n - 1 = 0$ $(n>1)$. Довести, що

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n = 0.$$

d). Нехай один трикутник має вершини в точках z_1, z_2, z_3, а другий – у токах z_4, z_5, z_6. Довести, що трикутники подібні, якщо

$$(z_3 - z_1):(z_2 - z_1) =(z_6 - z_4):(z_5 - z_4).$$

e). Чи є остання рівність необхідною умовою подібності вказаних трикутників?

f). Довести, що при будь-якому додатному $k \neq 1$ рівняння

$$\left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right| = k$$

Задає коло. Знайти центр та радіус цього кола.

g). Довести, що точки z, z_1, z_2 лежать на одній прямій тоді й тільки тоді, коли число

$$\frac{z - z_1}{z - z_2}$$

є дійсним.

h). Довести, що точка z лежить на відрізку, що з'єднує точки z_1 та z_2 тоді й тільки тоді, коли існує таке дійсне число α, $0 \le \alpha \le 1$, що $z = \alpha \cdot z_1 + (1 - \alpha) \cdot z_2$.

i). Нехай точки z_1, z_2, z_3 лежать на колі з центром $z = 0$. Довести, що трикутник з вершинами у цих точках буде рівностороннім тоді й тільки тоді, коли $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

j). Нехай точки z_1, z_2, z_3, z_4 лежать на колі у вказаному порядку, якщо обходити це коло. Довести, що вони є вершинами прмокутника тоді й тільки тоді, коли

$$z_1 + z_3 = z_4 + z_2.$$

Довести, що точки z_1, z_2, z_3, z_4 лежать на колі або на одній прямій тоді й тільки тоді, коли число

$$(z_3 - z_1):(z_2 - z_1) = (z_3 - z_4):(z_2 - z_4)$$

є дійсним.

Завдання для аудиторної та самостійної роботи:

Зобразити на комплексній площині множину точок, які задовольняють умові:

91. $|z + i| < 1, \left|z + \frac{1}{2}i\right| > \frac{1}{2}$.

92. $|z| < 1, |z + 1| < 1$.

93. $|z - 1| < 1, \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2}$.

94. $Re\left(\frac{1}{z}\right) < 2$.

95. $Re\left(\frac{1}{z} - 1\right) > 0$.

96. $|z| = Rez$.

97. $|z| + Rez = 1$.

98. $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| < 1$.

99. $|z| > |z-2|$.

100. $|z-1-i| = |z+1+i|$.

101. $Im(z^2-\bar{z}) = 2 - Imz$.

102. $z^2 + \overline{z^2} = 1$.

103. $2z\bar{z} + (2+i)z + (2-i)\bar{z} = 2$.

104. $|z-2| = |1-2\bar{z}|$.

105. $Re(z^2-\bar{z}) = 0$.

106. $Re(1+z) = |z|$.

107. $|z-a| < |1-\bar{a}z|$.

108. $|z| > |1+z^2|$.

109. $a|z| + \bar{b}z + b\bar{z} + c = 0, a > 0, c \in R, ac < |b|^2$.

110. $0 < arg\frac{i-z}{z+i} < \frac{\pi}{2}$.

111. $Re\big(z(1-i)\big) < \sqrt{2}$.

112. $Rez^4 > Imz^4$.

113. $\big||z-z_1| - |z-z_2|\big| = 2a$.

Написати у комплексній формі рівняння слідуючих ліній:

114. $y = kx + b$.

115. $x^2 - y^2 = a^2$.

116. $x^2 + y^2 + 2x = 0$.

117. $x^2 + y^2 = 2y + 2$.

Зобразити на комплексній площині множину точок, які задовольняють умові:

118. $z = t^2 - 12t + 36 + i(t^2 - 12t + 41), t \in R$.

119. $z = 2sin2t + 2icos2t, t \in R$.

120. $z = t + 1 - \frac{t+2}{t}i, t \in R, t \neq 0$.

Завдання для індивідуальної роботи

(робити завдання № 120+*к*, де *к* – номер варіанта)

Зобразити на комплексній площині множину точок, які задовольняють умові (№ 121-150):

121. $|z+i| > |z-i|$

122. $1 \leq |z+1| \leq 2; \frac{\pi}{2} < argz < \pi$

123. $|z+2i| = |z|$

124. $|z+2| > |z|$

125. $3 \leq |z+2i| < 4$

126. $|1+z| = |z+i|$

127. $|z-1+i| \leq 2$

128. $|z| > 2 + Imz$

129. $|z+i| = |z-i|$

130. $|z| > |z+1|$

131. $-Rez + |z| \leq 0$

132. $\frac{\pi}{4} \leq \arg(z+1-i) \leq \frac{3\pi}{4}$

133. $1 \leq |z+2+i| \leq 2$

134. $\frac{\pi}{3} < \arg(z-i) \leq \frac{\pi}{2}$

135. $|z-i| + |z+i| = 4$

136. $Im\left(\frac{1}{z}\right) < -\frac{1}{2}$

137. $Im\frac{z-1+i}{z-3i} = 0$

138. $|z-1|^2 + |z+1|^2 = 5$

139. $Imz^2 > 2$

140. $Re\frac{z-i}{z-1} = 0$

141. $Im\frac{z-i}{z-1} = 0$

142. $Imz - 1 = |z|$

143. $Im\frac{z+i}{z+1} = 0$

144. $|z+1| + |z-1| \leq 3$

145. $\left|\frac{z-3}{z-2}\right| \geq 1$

146. $0 < Re\, iz < 1;\ |z+1| \geq 1$

147. $Rez+. Imz < 1;\ |z-1| < 1$

148. $|2z-3| \leq 1$

149. $|z-i| - |z+i| > 2$

150. $arg\frac{z-1}{z+1}=0$

151. $|z-1|<|z-i|$

§3. Основні елементарні функції комплексної змінної.

Функція $w = Az + B$, де $A\neq 0$, називається лінійною. Функція вигляду

$$w=\frac{Az+B}{Cz+D},\ \text{де } AD-BC\neq 0,$$

називається дробово-лінійною.

Для кожного комплексного z значення функцій e^z, $\sin z$, $\cos z$ є суми степеневих рядів :

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots,$$

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\cdots.$$

Мають місце формули Ейлера :

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z,$$

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},$$

$$\sin z=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{iz}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{iz}}}{2\mathrm{i}},$$

причому функції $\sin z$, $\cos z$ періодичні з основним періодом 2π, а функція e^z періодична з основним періодом $2\pi i$.

Функції tg z та ctg z визначаються рівностями:

$$tg\ z=\frac{\sin z}{\cos z}\ ,\ ctgz=\frac{\cos z}{\sin z}.$$

Гіперболічні функції визначаються рівностями :

$$\mathrm{sh\ z}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{z}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{z}}}{2},\qquad ch\ z=\frac{e^z+e^{-z}}{2},$$

$$th\ z=\frac{sh\ z}{ch\ z},\qquad cth\ z=\frac{ch\ z}{sh\ z}.$$

Мають місце співвідношення:

$$sh\, z = -i\sin iz,\ ch\, z = \cos iz.$$

Логарифмічна функція $Ln\, z, z \neq 0$, визначається рівністю:

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\mathrm{Arg}\, z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k)\, , k\epsilon Z.$$

Значення цієї функції при k=0 називається головним значенням та позначається через:

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z.$$

Обернені тригонометричні функції $Arcsin\, z, Arccos\, z, Arctg\, z, Arcctg\, z$ визначаються через логарифмічну:

$$Arcsin\, z = -iLn(iz \pm \sqrt{1 - z^2}),$$

$$Arccos\, z = -iLn(z \pm \sqrt{z^2 - 1}),$$

$$Arctg\, z = -\frac{i}{2} Ln \frac{1 + iz}{1 - iz},$$

$$Arcctg\, z = \frac{i}{2} Ln \frac{z - i}{z + i}.$$

Загальна степенева функція $w = z^a$, де $a = \alpha + i\beta$, $\alpha \in R, \beta \in R$, визначається співвідношенням:

$z^a = e^{aLn\, z}\, , z \neq 0.$

Завдання теоретичного характеру

a). Довести, що дробово-лінійна функція взаємно-однозначно відображує розширену комплексну площину z на розширену комплексну площину w.

b). Довести, що композиція лінійних функцій є лінійна функція.

c). Довести, що композиція дробово-лінійних функцій є дробово-лінійна функція.

d). Довести, що лінійна функція відображує пряму на пряму, а коло – в коло.

e). Довести, що дробово-лінійне відображення переводить коло на сфері Рімана в коло на сфері Рімана.

f). Довести, що дробово-лінійна функція відображує коло або пряму в коло або пряму.

g). Нехай $w = w(z)$ є лінійна функція, $w_k = w(z_k)$. Довести, що

$$\frac{w_3 - w_1}{w_2 - w_1} = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}.$$

h). Нехай $w = w(z)$ є дробово-лінійна функція, $w_k = w(z_k)$. Довести, що

$$\frac{w_4 - w_1}{w_4 - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}.$$

i). Довести, що

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin(z)}{z} = 1.$$

j). Довести, що при будь-якому $b \neq 0$ рівняння

$$\exp\left(\frac{1}{z - a}\right) = b$$

в околі точки $z = a$ має нескінченну кількість розв'язків.

k). Довести, що при $a > 0$, $z = x + iy$ має місце рівність:

$$a^z = a^x(\cos(y)\ln(a) + i\sin(y)\ln(a)).$$

l). Нехай $|z| \leq R$. Довести нерівності :

$$|\mathrm{ch} z| \leq \mathrm{ch} R; \ |\mathrm{sh} z| \leq \mathrm{sh} R; \ |\cos(z)| \leq \mathrm{ch} R; \ |\sin(z)| \leq \mathrm{sh} R.$$

m). Нехай m та n натуральні. Довести, що

$$z^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{z}^{\,m}.$$

n). Довести, що для будь-якого значення $Arccos(z)$ можна знайти таке значення $Arcsin(z)$, що сума цих значень буде дорівнювати $\frac{\pi}{2}$.

o). Для яких значень z функція $Arsh(z)$ приймає тільки чисто уявні значення?

Завдання для аудиторної та самостійної роботи

Представити в алгебраїчній формі:

151. $\sin(\frac{\pi}{2} + i)$.

152. $\cos i$.

153. $\cos(\pi + 2i)$.

154. $\sin \pi$.

155. $\mathrm{ch}(1 - \mathrm{i})$.

156. $\mathrm{cth}(\mathrm{i}\frac{\pi}{4})$.

157. $th(\ln 3 - \frac{5i}{6})$.

158. $th(\ln 5 - \frac{\pi i}{4})$.

159. $ch(5i - 1)$.

160. $Ln\, i$.

161. $\ln(1 - \mathrm{i})$.

162. $Ln(\mathrm{i}\sqrt{3} - 1)$.

163. $\mathrm{Ln}(1 + \mathrm{i})$.

164. $-i^{i}$.

165. i^{i}.

166. $(1 + i)^{i}$.

167. $(1 + i\sqrt{3})^{-i}$.

168. $Arcsin\, 1$.

169. $Arcsin\, i$.

170. $Arccos\, \frac{1}{\sqrt{2}}$.

171. $Arctg(1 + i)$.

172. $Arcctg(1 - i)$.

Знайти всі розв'язки рівняння:

173. $\sin z = 2$.

174. $\cos z = \frac{5}{3}$.

175. $tg\, z = 10 + i$.

Довести,що:

176. $sh(z + \frac{\pi i}{2})=ich\, z$

177. $ch^2 z - sh^2 z = 1$

178. $ch(z+\pi i/2)=ishz$

179. $ch(z+ik\pi)=(-1)^k chz,\ k\epsilon Z$

180. $ch(z_1 + z_2) = chz_1 chz_2 + shz_1 shz_2$

Завдання для індивідуальної роботи

(робити завдання № 180+*к*, де *к* – номер варіанта)

Представити в алгебраїчній формі .

181 Arcsin3;

182 Arcsin3i;

183 Arccos2i;

184 Arcsin2i;

185 Arctg i;

186 Arctg2i;

187 Arcsin i;

188 Arcsin(2-i);

189 Arcsin$(i - 1)^4$;

190 Arccos$(i-1)$;

191 Arctg(i+1);

192 Arctg(i-1);

193 Arcsin (i^2+i-1);

194 Arccos5i;

195 Arccos(2+2i);

196 Arctg(1-2i);

197 Arctg(i^4-i);

198 Arcsin(5i-3);

199 Arccos(-i);

200 Arctg(-i);

201 Arcsin(-i);

202 Arcsin(-3i);

203 Arccos(-3i);

204 Arctg(i+2);

205 Arctg(i+3);

206 Arcsin $\frac{2}{i}$;

207 Arccos $\frac{1-i}{1+i}$;

208 Arctg $\frac{i}{i+1}$;

209 Arctg $\frac{1}{i}$;

210 Arcsin $\frac{2+i}{i}$;

§4. Аналітичні функції

Функція комплексної змінної $w=f(z)=u(x;y)+iv(x;y)$ називається аналітичною в точці z, якщо вона диференційовна як в самій точці z, так і в деякому її околі.

Функція $f(z)$ аналітична в області D, якщо вона диференційовна в кожній точці цієї області.

Функція $f(z)$ диференційовна в точці z, якщо в цій точці функції $u(x;y)$ та $v(x;y)$ є диференційовні як функції двох змінних та задовольняють умовам Коші-Рімана:

$$\frac{du}{dx}=\frac{dv}{dy}; \quad \frac{du}{dy}=-\frac{dv}{dx}.$$

Якщо функція $f(z)$ диференційовна в точці z, то в цій точці її похідна знаходиться за однією з формул:

$$f^{'}(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Якщо функція $w=f(z)$ налітична в точці z_0 і $f'(z_0)$ не дорівнює нулеві, то відображення, яке задає ця функція, розтягує площину з коефіцієнтом $r=|f'(z_0)|$, тобто усі відстані $|\Delta w|$ в точці $f(z_0)$ будуть в r раз більше, ніж відповідні відстані $|\Delta z|$ у точці z_0 не залежно від напряму. В той же час усі криві, що проходять через точку z_0, повертаються на кут, що дорівнює $\varphi=\arg f'(z_0)$.

Приклад 1. Знайти аналітичну функцію, якщо $Re\, f(z)=u(x;y)=ch\, x\cos y$, $f(0)=i$.

Розв'язування: Для того, щоб знайти аналітичну функцію $f(z)$, обчислимо її уявну частину $v(x;y)=Im\, f(z)$, для чого використаємо умови Коші-Рімана, з яких випливає, що

$$\frac{\partial v}{\partial y}=sh\, x\cos y, \quad \frac{\partial v}{\partial x}=ch\, x\sin y.$$

Отже, $dv=ch\, x\sin y\, dx+sh\, x\cos y\, dy$.

Щоб знайти функцію $v(x;y)$, проінтегруємо цей вираз вздовж довільного шляху, який з'єднує точки $(0;0)$ та $(x;y)$. Оскільки інтеграл не залежить від шляху інтегрування, будемо інтегрувати вздовж ламаної OAB, де $O(0;0)$, $A(x;0)$, $B(x;y)$, а саме:

$v=\int_{(0;0)}^{(x;y)} ch\, x\sin y\, dx+sh\, x\cos y\, dy+C=\int_0^x 0\, dx+\int_0^y sh\, x\cos y\, dy+c=$ $sh\, x\sin y+C$.

Таким чином, $f(z)=ch\, x\cos y+i(sh\, x\sin y+C)$.

Використаємо умову $f(0)=i$. Для цього підставимо у функцію $x=0$, $y=0$:
$i=1+Ci$,
звідки одержимо $\mathrm{C}=1+i$.

Відповідь: $f(z) = ch\, x \cos y + i\, sh\, x \sin y + i - 1$.

Приклад 2. Знайти область, в якій функція $f(z) = x^2 + y + ixy^3$ є аналітичною.

Розв'язування. Перевіримо, чи задовольняють функції $u = x^2 + y$, $v = xy^3$ умови Коші-Рімана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 3xy^2.$$

Бачимо, що $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ тільки вздовж ліній $x = 0$ або $y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. Отже, нема точок, в яких функція $f(z)$ була б аналітичною.

Відповідь: $\emptyset$.

Завдання теоретичного характеру

a). Нехай дві аналітичні функції задовольняють умові $f'(z) = \varphi'(z)$. Довести, що $f(z) = \varphi(z) + const$.

b). Записати умови Коші – Рімана в полярній системі координат.

c). Довести, що аналітична функція, яка в деякій області приймає дійсні значення, є постійною.

d). Довести, що для аналітичної функції $f(z) = U + iV$ виконується рівність:

$$\frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{\partial V}{\partial y} = 0.$$

e). Нехай функція $f(z) = U + iV$ аналітична в області D. Довести, що лінії $U(x;y) = const$ та $V(x;y) = const$ є взаємно-ортогональними в області D.

f). Нехай функція $U = U(x;y)$ – гармонійна в області D. Знайти всі значення функції f, для яких $f(U)$ буде гармонійною в області D.

g). Нехай функція $f(z) = U + iV = \rho e^{i\varphi}$ є аналітичною. Нехай хоча б одна з функцій $U(x;y)$, $V(x;y)$, $\rho(x;y)$, $\varphi(x;y)$ є постійною. Довести, що $f(z)$ є теж постійною.

h). Нехай функція $f(z)$ аналітична. Чи будуть гармонійними функції $|f(z)|$, $arg\big(f(z)\big)$, $ln|f(z)|$?

i). Нехай $U(x;y)$ та $V(x;y)$ – пара спряжених гармонійних функцій в області D, причому $U^2 + V^2 \neq 0$ в жодній точці D. Довести, що функція

$$ln(U^2(x;y) + V^2(x;y))$$

є гармонійна в області D.

j). Нехай $(U;V_1)$ та $(U;V_2)$ – дві пари спряжених гармонійних функцій в області D. Довести, що в області D: $V_1(x;y) - V_2(x;y) \equiv const$.

Знайти усі гармонійні функції вигляду:

k). $f(ax+by)$;

l). $f(xy)$;

m). $f\left(\frac{x}{y}\right)$;

n). $f(x^2 - y^2)$;

o). $f(x^2 + y^2)$;

p). $f\left(\frac{x^2+y^2}{y}\right)$;

q). $f(x + \sqrt{x^2+y^2})$;

Завдання для аудиторної та самостійної роботи

Перевірити, чи є функція аналітичною хоча б в одній точці. Якщо так, знайти її похідну:

211. $w = z^2\bar{z}$;

212. $w = ze^{\bar{z}}$;

213. $w = |z|\bar{z}$;

214. $w = \exp(z^z)$;

215. $w = |z|Re\bar{z}$;

216. $w = \sin 3z - i$;

Знайти аналітичну функцію $f(z) = u(x;y) + iv(x;y)$, якщо:

217. $u(x;y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, $f(\pi) = \frac{1}{\pi}$;

218. $u = x^2 - y^2 + 2x$, $f(1) = 2x - 1$;

219. $v = 2(ch\, x \sin y - xy)$, $f(0) = 0$;

220. $u = 2 \sin x\, ch\, y - x$, $f(1) = 0$;

221. $v = 2(2\, sh\, x \sin y + xy$, $f(0) = 3$;

222. $v = -2 \sin 2x\, sh\, 2y + y$, $f(0) = 2$;

223. $v = 2 \cos x\, ch\, y - x^2 + y^2$, $f(0) = 2$;

224. $v = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$, $f(0) = 0$;

225. $v = x^4 - 8x^3y - 6x^2y^2 + 8xy^3 + y^4$, $f(0) = 0$.

Чи існують аналітичні функції, для яких:

227. $u = x^2 - y$;

228. $v = x^2 - y^2$;

229. $u = \frac{y}{x^2+y^2}$;

230. $v = \frac{x}{y^2}$;

231. $u = \ln(x^2 + y^2)$;

Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту в точці z_0 при відображенні комплексної площини, що задається функцією:

232 $\frac{z+1}{z-1}$; $z_0 = 2i$. ;

233 $\frac{2z+3}{z+4}$; $z_0 = 1$.

234 $\frac{z}{z+2i}$; $z_0 = -i$.

235 $sh(z)$; $z_0 = \frac{\pi}{2} i + 2$.

Яка частина комплексної площини розтягується при відображенні:

236 $w = e^z$;

237 $w = \ln z$;

238 $w = \frac{1}{z}$;

239 $w = z^3$;

240 Нехай в області D функція f(z) є аналітичною і Re(f)=Im(f). Знайти $f'(z)$.

Завдання для індивідуальної роботи

(робити завдання № 240+*к*, 270+*к*, де *к* – номер варіанта)

Перевірити, чи є функція $f(z)$ аналітичною. Якщо так, знайти її похідну(№ 241-270):

241. $f(z) = (x^2 - y^2) + 2xyi$;

242. $f(z) = (x^2 + y^2) - 2xyi$;

243. $f(z) = e^{-y} cosx + ie^{-y} sinx$;

244. $f(z) = e^x cosy + ie^x siny$;

245. $f(z) = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2 - y^3)$;

246. $f(z) = x(x^2 + y^2) + iy(x^2 + y^2)$;

247. $(z) = (x^2 - y^2 - 2x) + i2y(x - 1)$;

248. $f(z) = (x^2 - y^2 + 2x) + i(4xy + 2y)$;

249. $f(z) = (4xy - y) - i(2x^2 - x - 2y^2)$;

250. $f(z) = (3x^2 y + 2x) + i(4xy^2 + 2y)$;

251. $f(z) = (x^2 - y^2 - y) + i(2xy + x)$;

$$252. f(z) = (4x\, siny + cosx) + i(cosx - 4cosy);$$

$$253. f(z) = sinx\, chy + i\, cosx\, she;$$

$$254. f(z) = \sin(x - iy)\,;$$
$$255. f(z) = -2cosx\, chy - i\, 2\, shy\, sinx;$$

$$256. f(z) = \cos(x - iy)\,;$$

$$257. f(z) = \cos(3x + y)\, ch(3y - x) + i \sin(3x + y)\, sh(3y - x);$$

$$258.\ f(z) = chx\, chy - i\, shx\, shy;$$
$$259.\ f(z) = shx\, cosy + i\, siny\, chx;$$
$$260. f(z) = e^{x^2+y^2} cos2xy - ie^{x^2+y^2} sin2xy;$$

$$261. f(z) = e^{x^2-y^2} cos2xy + ie^{x^2-y^2} sin2xy;$$

$$262. f(z) = \ (2x^3 - 3y^2x) + i(6x^2y - y^3);$$

$$263. f(z) = \ (2x^2 - 2y^2 - 3x) + i(4xy + 3y);$$

$$264. f(z) = z^2 - ReZ;$$

$$265. f(z) = \ chz;$$

$$266. f(z) = \ z - 3\check{z} + 1;$$

$$267. f(z) = \ shz;$$

$$268. f(z) = \ z\, \check{z} + Re(i\check{z});$$

$$269. f(z) = sinz;$$

$$270. f(z) = \ 2z + i\, Im;$$

Знайти аналітичну функцію $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, якщо задана її дійсна $Re\ f(z) = u(x, y)$ або уявна частина $Im\ f(z) = v(x, y)$ (№ 271-300):

271. $u(x, y) = e^x cosy$;
272. $v(x, y) = e^{-y} sinx$;
273. $u(x, y)$ =3x+2y+1;
274. $v(x, y) = 2x - y + 4$;
275. $u(x, y) = e^y cosx$;
276. $v(x, y) = e^{-x} cosy$;
277. $u(x, y) = shx\, cosy$;
278. $v(x, y) = -shx\, siny$;
279. $u(x, y) = cosx\, chy$;
280. $v(x, y) = sinx\, shy$;

281. $u(x,y) = 2^{-x}\cos(yln2)$;
282. $v(x,y) = x^2 - 6xy - y^2)$;
283. $u(x,y) = -x^2 + 4xy + y^2)$;
284. $v(x,y) = 2x^3 - 6xy^2$;
285. $u(x,y) = x^3 + x^2y - 3xy^2 - y^3$;
286. $v(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 2y$;
287. $u(x,y) = 6x^2y - 2y^3$;
288. $v(x,y) = y^3 - 3x^2y + 6xy^2 - 2x^3$;
289. $u(x,y) = 3x^2y - y^3 + 4x$;
290. $v(x,y) = x^2 - y^2 + 3y$;
291. $u(x,y) = x^2 - y^2 + 5x$;
292. $v(x,y) = 2^y\cos(xln2)$;
293. $u(x,y) = 3^x\sin(yln3)$;
294. $v(x,y) = 2^y\sin(xln2)$;
295. $u(x,y) = 2y^2 - 2x^2 + x$;
296. $v(x,y) = 3^{-y}\cos(xln3)$;
297. $u(x,y) = y^2 - x^2 + 2xy - y$;
298. $v(x,y) = -sh2y\sin(2x+1)$;
299. $u(x,y) = y^2 - x^2$;
300. $v(x,y) = arctg\frac{y}{x}$;

§5. Інтеграл від функції комплексної змінної. Інтегральна формула Коші

Якщо однозначна функція *f(z)=u(x;y)+iv(x;y)* визначена та неперервна в області *D*, а *L* – кусково-гладка крива, яка належить *D,* то інтеграл функції *f(z)* вздовж кривої *L* обчислюється за формулою:

$$\int_L f(z)dz = \int_L udx - vdy + i\int_L vdx + udy.$$

Якщо *f(z)* - аналітична функція в однозв’язній області *D*, то інтеграл не залежить від шляху інтегрування. При цьому має місце формула Ньютона-Лейбніца:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)dz = F(z_1) - F(z_2) = F(z)\Big|_{z_0}^{z_1},$$

де $F(z)$ – деяка первісна для функції *f(z)*, тобто $F'(z) = f(z)$ в області *D*, $z_0 \in D$, $z_1 \in D$.

Це є наслідком такої теореми.

Теорема Коші. Якщо L_o є проста замкнена гладка чи кусково-гладка крива, що знаходиться в однозв'язній області, а $f(z)$ є однозначна аналітична функція в цій області , то $\int_{L_o} f(z)dz = 0$, в якому б напрямку не відбувався обхід кривої L_o.

Якщо межа області D складається з декількох простих зімкнених гладких чи кусково-гладких кривих L_k, де $k = 0,1,2,\dots,n$, розміщених таким чином, що крива $L=L_0$ містить всередині себе всі інші, які при цьому попарно не перетинаються і не лежать одна всередині другої, то для такої області, в припущенні, що $f(z)$ аналітична всередині D і на її межі , має місце формула

$$\int_L f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{L_k} f(z)dz\ ,$$

де всі криві обходяться в одному і тому ж напрямку, тобто проти годинникової стрілки. Такий обхід вважається обходом в додатному напрямку.

В тих же умовах має місце формула

$$f(z_o) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)}{z-z_o}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{L_k} \frac{f(z)}{z-z_o}dz \quad ,$$

де z_0 є довільною точкою області D, а обхід усіх кривих проводиться в додатному напрямку.

Якщо внутрішні криві L_k відсутні, то

$$f(z_o) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(z)}{z-z_o}dz$$

Це інтегральна формула Коші . Формула Коші для похідної має вигляд

$$f^{(n)}(z_o) = \frac{n!}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)}{(z-z_o)^{n+1}}dz\ , \text{n=0,1,2,...}$$

Якщо крім цього функція $\varphi(z)$ теж аналітична функція в однозв'язній області *D*, то має місце формула інтегрування частинами:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\varphi' dz = [f(z)\varphi(z)]\Big|_{Z_0}^{Z_1} - \int_{z_0}^{z_1} \varphi(z)f'(z)dz.$$

Якщо криву *L* задано параметричними рівняннями *x=x(t), y=y(t),* де $t_0 \le t \le t_1$, або рівнянням *z=z(t),* де *z(t)=x(t)+i(t)* , то інтеграл можна обчислювати за формулою :

$$\int_L f(z)dz = \int_{t_0}^{t_1} f\big(z(t)\big)z'(t)dt.$$

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\int_C (z + Rez)dz$, де C – відрізок, що з'єднує точки $z_1=3i$, $z_2=1-i$.

Розв'язання: Рівняння прямої, що проходить через точки A(0;3) та B(1;-1) має вигляд $y=3x-4$. Отже множину точок, які належать відрізку AB, можна записати у вигляді $z=t+(3-4t)i$, $0 \le t \le 1$.Тоді $dz=(1-4i)dt$ і даний інтеграл дорівнює визначеному інтегралу від функції дійсної змінної, а саме:

$$\int_C (z + Rez)dz = \int_0^1 (t + (3-4t)i + t)(1-4i)dt = (1-4i) \times$$

$$\times \int_0^1 (2t + (3-4t)i)dt = (1-4i)(t^2 + (3t-2t^2)i)\Big|_0^1 = 5 - 5i.$$

Відповідь: $5 - 5i$.

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\int_C (z^2 + \bar{z})dz$, де C – верхня половина кола $|z| = 1$ (z=1 – початкова точка)

Розв'язання: нехай $z = e^{i\varphi}, де\ 0 \le \varphi \le \pi$.Тоді $dz = ie^{i\varphi}d\varphi, отже$

$$\int_C (z^2 + \bar{z})dz = \int_0^\pi e^{i\varphi}\big(e^{2i\varphi} + 1\big)d\varphi = i\int_0^\pi \big(e^{3i\varphi} + e^{i\varphi}\big)d\varphi =$$

$$= \left(\frac{1}{3}e^{3i\varphi} + e^{i\varphi}\right)\Big|_0^\pi = -\frac{8}{3}.$$

Відповідь: $-\dfrac{8}{3}$.

Завдання теоретичного характеру

a). Нехай γ – простий замкнений контур, який обмежує область площі S. Довести рівності:

$$\oint_\gamma x dz = iS\ ;\ \oint_\gamma y dz = -S\ ;\ \oint_\gamma \bar{z} dz = 2iS\ .$$

b). Нехай f(z) – аналітична в крузі $|z - a| < R$ та задовольняє в ньому умові :

$$|f(z)| \le M.$$

Довести, що для довільних точок z_1 та z_2 цього круга має місце нерівність :

$$\left|\int_{z_1}^{z_2} f(\xi)d\xi\right| \leq M\cdot |z_2 - z_1|.$$

c). Нехай f(z) – аналітична в крузі $|z - a| < R$ та задовольняє в ньому умові :

$$Re\ f(z) \geq M > 0.$$

Довести, що для довільних точок z_1 та z_2 цього круга має місце нерівність :

$$\left|\int_{z_1}^{z_2} f(\xi)d\xi\right| \geq M\cdot |z_2 - z_1|.$$

d). Нехай f(z) – аналітична в кільці $r < |z - a| < R$.

Довести, що інтеграл

$$\int_{|z-a|=\rho} f(\xi)d\xi$$

не залежить від числа $\rho \in (r; R)$.

e). Нехай $|a| \neq R$. Довести, що

$$\oint_{|z|=R} \frac{|dz|}{|z-a|\cdot|z+a|} < \frac{2\pi R}{|R^2-|a|^2|}.$$

f). Нехай $f(z)$ неперервна в околі початку координат. Довести рівність:

$$\lim_{r\to 0}\int_0^{2\pi} f\left(re^{i\varphi}\right)d\varphi = 2\pi\ f(0).$$

g). Нехай f(z) неперервна в околі $z = a$. Довести рівність:

$$\lim_{r\to 0}\oint_{|z-a|=r} \frac{f(z)\ dz}{z-a} = 2\pi i\ f(a).$$

h). Нехай f(z) аналітична в однозв'язній області D. Довести, що функція

$$F(x)=\int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi+const,$$

де $z_0, z \in Đ$, є первісною функції f(z) в області D (тобто $F'(z) = f(z)$).

i). Нехай f(z) аналітична в двозв'язній області D, яка обмежена двома кусково-гладкими кривими γ та C (γ лежить всередині C). Довести, що функція f(z) має в області D первісну тоді й тільки тоді, коли

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

j). Скільки різних значень може приймати інтеграл

$$\oint_\gamma \frac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)},$$

де $z_i \neq z_j$ та контур γ не проходить через жодну з точок z_i ?

k). Нехай $f(z)$ аналітична в області, яка обмежена простим замкненим контуром γ та містить в собі початок координат. Довести, що при будь-якому виборі вітки багатозначної функції Ln(z) має місце рівність :

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f'(z)\mathrm{Ln}(z)dz = f(z_0) - f(0),$$

де z_0 — початкова точка інтегрування.

Завдання для аудиторної та самостійної роботи.

301. Обчислити інтеграл $\int_c \frac{dz}{z-a}$, де c – коло |z-a|=R, яке проходиться проти годинникової стрілки.

302. Обчислити $\int_c Rez\, dz$, де c – відрізок, що з'єднує точки z_1=0, z_2=2+i.

303. Обчислити $\int_c Rez\, dz$, де c – ламана, що з'єднує точки z_1=0, z_2=2, z_3=2+i.

Обчислити інтеграл $\int_c f(z)\, dz$, якщо:

304. f(z)=|z|, c – відрізок, що з'єднує точки z_1= – 1, z_2=1.

305. f(z)=|z|, c – верхня половина кола |z|=1 (початкова точка z_1=1).

306. f(z)=|z|, c – нижня половина кола |z|=1 (початкова точка z_1= – 1).

307. f(z)=z sin(z), c – відрізок, що з'єднує точки z_1=0, z_2=i.

308. f(z)=|z|, c – частина кривої ρ=Aφ, де 0≤φ≤2П.

309. f(z)=|z|, c – ламана, що з'єднує точки z_1= – 2, z_2= – 1+i, z_3=1+i, z_4=2.

310. f(z)=$|z|^2$, c – відрізок, що з'єднує точки z_1=0, z_2=R $e^{i\frac{\Pi}{4}}$.

311. f(z)=z^2, c – ламана, що з'єднує точки z_1=0, z_2=1+i, z_3=2+i.

312. f(z)=Re z, c – ламана, наведена в №. 311.

313. f(z)=Im z, c – ламана, наведена в №. 311.

314. f(z)=|z|, с – ламана, наведена в №. 311.

315. f(z)=$(z-i)^{-1}$, с – крива, яка складається з правої половини кола |z-i|=1, та відрізка, що з'єднує точки z_1=2i, z_2=3i (початкова точка інтегрування z_0=0).

316. f(z)=|z|$\bar{z}$, с – крива яка складається з верхньої половини кола |z|=1, та відрізка, що з'єднує точки z_1= – 1, z_2=1 (Обхід проти годинникової стрілки).

317. f(z)=$|z|^2$, с – коло |z|=1.

318. f(z)=$Re\ z$, с – коло |z-1|=1.

319. f(z)=exp ($\bar{z}$), с – ламана, що з'єднує точки z_1=0, z_2=1, z_3=1+i.

320. f(z)=exp ($\bar{z}$), с – ламана, що з'єднує точки z_1=0, z_2=i, z_3=1+i.

321. f(z)=|z|, с – відрізок, що з'єднує точки z_1= – 1, z_2=1.

322. f(z)=|z|, с – верхня половина кола |z|=1 (початкова точка інтегрування z_1=1).

323. f(z)=$(z^3-z)\exp(\frac{z^2}{2})$, с – відрізок, що з'єднує точки z_1=1+i, z_2=2i.

324. f(z)=$\frac{\ln(z+1)}{z+1}$, с – частина кола |z|=1, для якої Re z≥0, Im z≥0 (початкова точка інтегрування z_1=1).

325. f(z)=$\sqrt[4]{z}$, с – нижня половина кола |z|=2 (береться та вітка функції $\sqrt[4]{z}$, яка уточці z=1набуває значення 1, початкова точка інтегрування z_1= – 2).

326. f(z)=|z-1|, с – коло |z|=1, яке обходиться проти годинникової стрілки.

327. f(z)=tg z, с – дуга параболи y=x^2, яка з'єднує точки z_1=0, z_2=1+i.

328. f(z)=exp($|z|^2$) Re z, с – відрізок, що з'єднує точки z_1=0, z_2=$\frac{1}{2}$+i$\sqrt{\frac{3}{2}}$.

329. f(z)=exp(z^2) Re z, с – відрізок, наведений в №. 328.

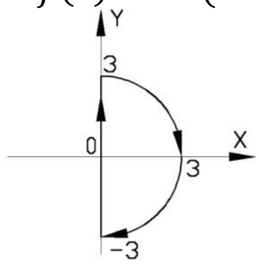
330. f(z)=$\frac{|z|}{|z|+1}$, с – відрізок, наведений в №. 328.

Завдання для індивідуальної роботи

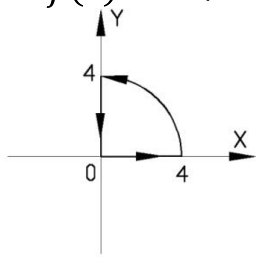
(робити завдання № 330+κ, 360+κ, де κ – номер варіанта)

Обчислити інтеграл $\oint_L f(z)dz$ вздовж кривої, заданої графічно(№ 331-360):

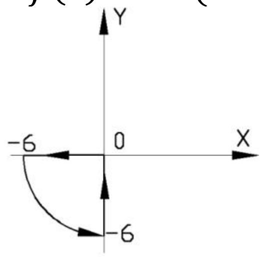
331. $f(z) = \mathrm{Im}(z^2 + \bar{z}^2)$



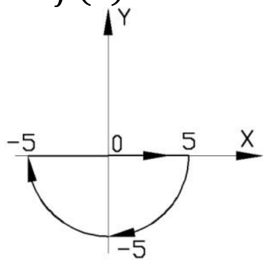
332. $f(z) = \bar{z} + \mathrm{Im}\bar{z}$



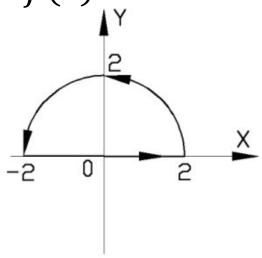
333. $f(z) = \mathrm{Im}(\mathrm{z}^2 + i)$



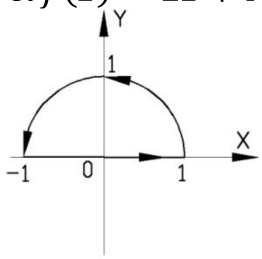
334. $f(z) = z^2 \cdot \mathrm{Im}z$



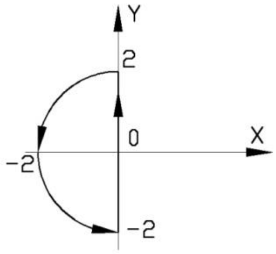
335. $f(z) = \mathrm{Rez}^3 - 10i$



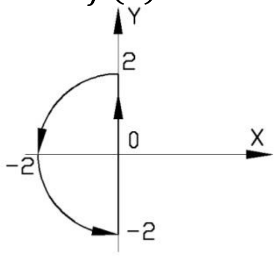
336. $f(z) = 2\bar{z} + \mathrm{Re}z$



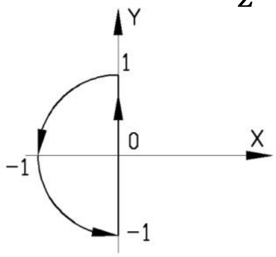
337. $f(z) = |\bar{z}|$



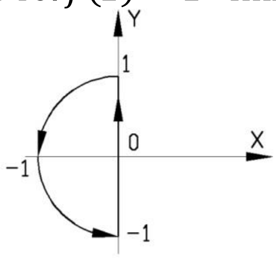
338. $f(z) = \mathrm{Re} z^2$



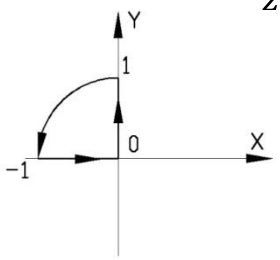
339. $f(z) = \dfrac{\bar{z}}{z}$



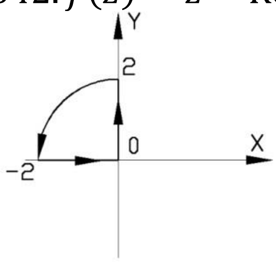
340. $f(z) = z \cdot \mathrm{Im} z^2$



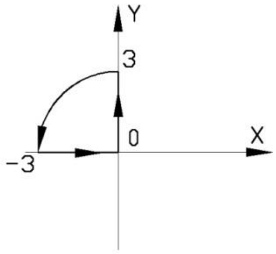
341. $f(z) = \mathrm{Im}\dfrac{\bar{z}}{z}$



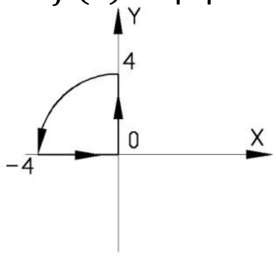
342. $f(z) = z - \mathrm{Re} z$



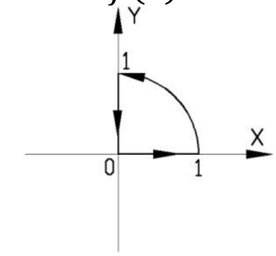
343. $f(z) = |z| \cdot z$



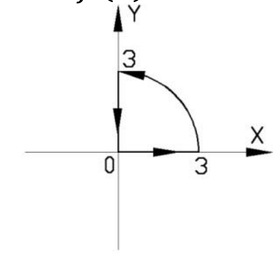
344. $f(z) = |z| \cdot \mathrm{Im} z^2$



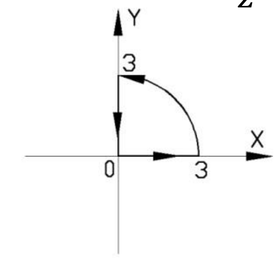
345. $f(z) = \bar{z}^2$



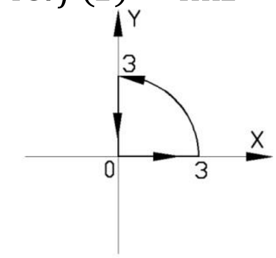
346. $f(z) = z^2 + z$



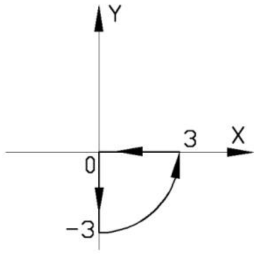
347. $f(z) = \dfrac{z}{\bar{z}}$



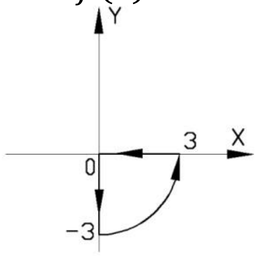
348. $f(z) = \mathrm{Im} z^2 + i$



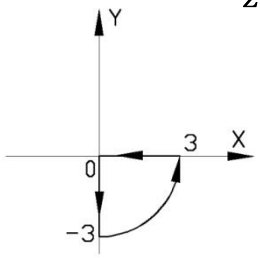
349. $f(z) = |z| \cdot \bar{z}$



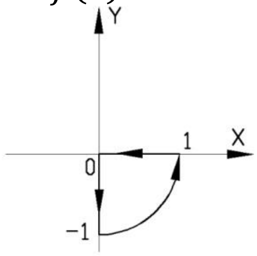
350. $f(z) = z \cdot \bar{z}$



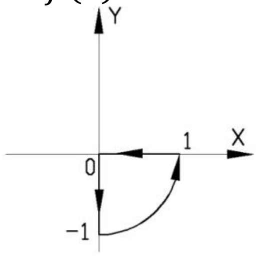
351. $f(z) = \mathrm{Re}\dfrac{\bar{z}}{z}$



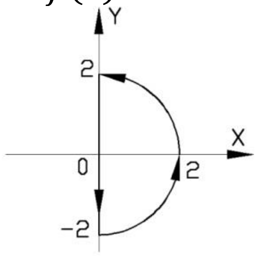
352. $f(z) = \bar{z} - \mathrm{Im}z$



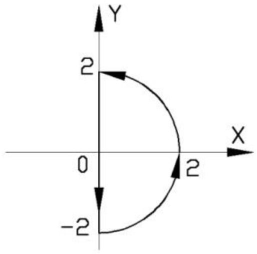
353. $f(z) = \bar{z} + \mathrm{Im}z$



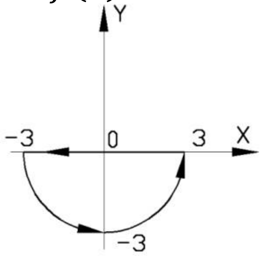
354. $f(z) = z \cdot \mathrm{Re}z^2$



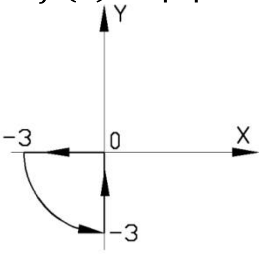
355. $f(z) = \mathrm{Im}z^2$



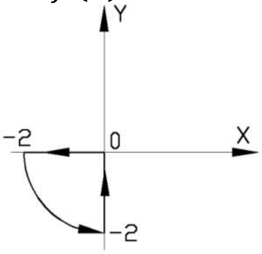
356. $f(z) = z + \mathrm{Im}z$



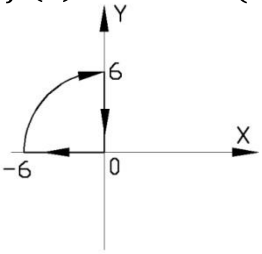
357. $f(z) = |z| \cdot \mathrm{Re}z^2$



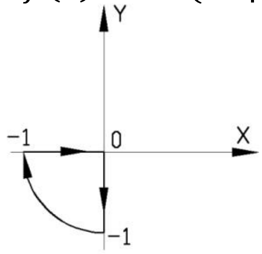
358. $f(z) = \bar{z} + \mathrm{Re}z$



359. $f(z) = z + \mathrm{Im}(z + i)$



360. $f(z) = \mathrm{Im}(z \cdot |z|^2)$



Обчислити $\oint_C f(z)dz$, де C – коло радіуса R з центром у точці z_c (№ 361-390):

361. $f(z) = \frac{\cos z}{z^2(z-i)}$, $R = 2,\ z_c = 0;$

362. $f(z) = \dfrac{\sin z}{z+i}$, $\begin{cases} R = 3, & z_c = 1; \\ R = 1, & z_c = i; \end{cases}$

363. $f(z) = \dfrac{1}{z^2+9}$, $\begin{cases} R = 2, & z_c = 2i; \\ R = 2, & z_c = -2i; \\ R = 2, & z_c = 0; \end{cases}$

364. $f(z) = \dfrac{\sin z}{(z-i)^2}$, $\begin{cases} R = 3, & z_c = 0; \\ R = \dfrac{1}{2}, & z_c = 0; \end{cases}$

365. $f(z) = \dfrac{e^z}{(z+2)^4}$, $R = 2, \ z_c = -1;$

366. $f(z) = \dfrac{e^z}{z(1-z)^2}$, $\begin{cases} R > 2, & z_c = 2; \\ R = 2, & z_c = -1; \end{cases}$

367. $f(z) = \frac{1}{(z+1)^3(z-1)}$, $\begin{cases} R = 2, & z_c = 2; \\ R = 2, & z_c = -2; \end{cases}$

368. $f(z) = \dfrac{z^2}{(z-2i)^2}$, $\begin{cases} R = 3, & z_c = 0; \\ R = 1, & z_c = 0; \end{cases}$

369. $f(z) = \dfrac{1}{z(z^2-1)}$, $\begin{cases} R < 2, & z_c = 2; \\ R > 2, & z_c = -2; \\ R < 2, & z_c = 0; \end{cases}$

370. $f(z) = \dfrac{2z-1-i}{(z-1)(z-i)}$, $\begin{cases} R = 2, & z_c = 0; \\ R = 1, & z_c = i; \end{cases}$

371. $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+y)}$, $\quad\begin{cases} R=2, & z_c=2i; \\ R=2, & z_c=0; \end{cases}$

372. $f(z)=\dfrac{z\cdot e^z}{(z-a)^2}$, $\quad R=a,\quad z_c=a;$

373. $f(z)=\dfrac{\sin z}{(z+1)^3}$, $\quad R=3,\quad z_c=-i;$

374. $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}$, $\quad\begin{cases} R=2, & z_c=0; \\ R=2, & z_c=-2i; \end{cases}$

375. $f(z)=\dfrac{e^z}{z^2-1}$, $\quad R=2,\ \ z_c=0;$

376. $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2-\pi^2}$, $\quad R=4,\quad z_c=0;$

377. $f(z)=\dfrac{1}{(1+z)(z-1)^3}$, $\quad\begin{cases} R=1, & z_c=-1; \\ R=1, & z_c=1; \end{cases}$

378. $f(z)=\frac{\cos z}{(z-i)^3}$, $\ R=1,\ z_c=i;$

379. $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)^2}$, $\quad\begin{cases} R=2, & z_c=2i; \\ R=2, & z_c=-2i; \\ R<1, & z_c=0; \end{cases}$

380. $f(z)=\dfrac{e^z}{z(1-z)^3}$, $\quad\begin{cases} R,<\dfrac{1}{2}, & z_c=0; \\ R<\dfrac{1}{2}, & z_c=1; \end{cases}$

381. $f(z) = \dfrac{z^2}{(z-i)^3}$, $R = 1,\ z_c = i;$

382. $f(z) = \dfrac{1}{z^3(z+1)}$, $\begin{cases} R < 1, & z_c = 0; \\ R < 1, & z_c = -1; \end{cases}$

383. $f(z) = \dfrac{1}{z(z^2+1)}$, $R = 3,\ \ z_c = 0;$

384. $f(z) = \dfrac{\sin z}{z(z+1)}$, $\begin{cases} R < 1, & z_c = 0; \\ R < 1, & z_c = -1; \end{cases}$

385. $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z-1)}$, $R = 2,\ \ z_c = 0;$

386. $f(z) = \dfrac{e^z}{z}$, $\begin{cases} R = 1, & z_c = 0; \\ R = 1, & z_c = 2; \end{cases}$

387. $f(z) = \dfrac{1}{z^2+16}$, $\begin{cases} R = 2, & z_c = 3i; \\ R = 2, & z_c = -3i; \end{cases}$

388. $f(z) = \dfrac{\sin z}{z+i}$, $R = 3,\ \ z_c = -i;$

389. $f(z) = \dfrac{z^2}{z-3i}$, $\begin{cases} R = 1, & z_c = 0; \\ R = 4, & z_c = 0; \end{cases}$

390. $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+16)^2}$, $\begin{cases} R = 2, & z_c = 3i; \\ R = 2, & z_c = -3i. \end{cases}$

§6 Ряди в комплексній області

Часовий ряд $\mathrm{z}_1 + \mathrm{z}_2 + \cdots + \mathrm{z}_\mathrm{n} + \cdots$, де $z_\mathrm{n} = x_n + iy_n, n \in \mathrm{N}$, збігається тоді й тільки тоді, коли одночасно збігаються ряди: $x_1 + x_2 \ldots + x_n + \cdots$ та $y_1 + y_2 + \cdots + y_n + \cdots$.

Ряд $\sum_{\mathrm{n}-1}^{\infty} \mathrm{z_n}$ збігається абсолютно , якщо збігається ряд $\sum_{\mathrm{n}-1}^{\infty} |z_n|$.

Функціональний ряд вигляду

$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots a_n(z - z_0)^n + \cdots$, де $a_n, n = 0,1,2, \ldots$, z_0 – фіксовані комплексні числа, називається степеневим.

Область збіжності цього ряду є множина $|z - z_0| < R$, де R – радіус збіжності, який знаходиться за формулами

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|},$$

або $$R = \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1},$$

якщо ці границі існують.

Узагальненням степеневого ряду є ряд вигляду $\sum_{k\in-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$,

область збіжності якого є множина $r < |z - z_0| < R$, якщо $r < R$, де $r = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|}$ і якщо ця границя існує.

Якщо функція f(z) однозначна та аналітична в крузі $|z - z_0| < R$, то в кожній точці z цього круга має місце рівність

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_n)^n,$$

$$\text{де } c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0),$$

або $c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r} f(z)(z-z_0)^{-n-1}\,dr,\ r < R.$

Цей ряд називається рядом Тейлора функції $f(z)$ в околі точки $z = z_0$.

Якщо функція $f(z)$ однозначна та аналітична в кільці $r < |z - z_0| < R,$ то в кожній точці цього кільця має місце рівність

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\,(z - z_0)^n,$$

де $c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=p} f(z)(z-z_0)^{-n-1}\,dz,\ r < p < R.$

Цей ряд називається рядом Лорана функції $f(z)$ в кільці $r < |z - z_0| < R.$

Для кожного з z мають місце розвинення

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{z!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots,$$

$$sinz = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{zn+1}}{(zn+1)!} + \cdots,$$

$$cosz = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots\ .$$

Для кожного z, що належить множині $|z| < 1$,мають місце розвинення

$$ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{z^n}{n} + \cdots,$$

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-2)\ldots(\alpha n+2)}{n!}z^n + \cdots,$$

де α – довільне дійсне число (якщо $\alpha \in N$, ряд перетворюється на скінченну суму). В частинному випадку, якщо $\alpha = -1$,маємо

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots + (-1)^n z^n + \cdots\ .$$

Приклад 1: Розвинути функцію $f(z) = \frac{2}{(z-1)(z-3)}$ в ряд Лорана в області:

а) $|z| < 1$;

б) $1 < |z| < 3$;

в) $|z| > 3$;

Розв'язування:

а) $|z| < 1$:

$$\frac{2}{(z-1)(z-3)} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{3}} + \cdot\frac{1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n =$$

$= \sum_{n=0}^{\infty}(1 - \frac{1}{3^{n+1}})\, z^n$;

б) $1 < |z| < 3$:

$$\frac{2}{(z-1)(z-3)} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{z}} - \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}};$$

в) $|z| > 3$:

$$\frac{2}{(z-1)(z-3)} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{z}} - \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n-1}{z^{n+1}}.$$

Приклад 2: Знайти область збіжності ряду: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin in}{(z+i)^n}$.

Розв'язування: Маємо $C_{-n} = \sin in = i\, sh\, n,\ \ C_{-n-1} = i\, sh\,(n+1)$. Отже,

$$r = \lim_{n\to\infty}\frac{|i\, sh\,(n+1)|}{|i\, sh\, n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{sh\,(n+1)}{sh\, n} = \lim_{n\to\infty}\frac{e^{n+1}-e^{-n-1}}{e^n - e^{-n}} =$$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{e-e^{-2n-1}}{1-e^{-2n}} = e.$

Очевидно, що $R = +\infty$.

Відповідь: область збіжності ряду є множина $|z+i| > e$.

Завдання теоретичного характеру

Нехай радіус збіжності степеневого ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

дорівнює R (0 < R < +∞). Знайти радіуси збіжності рядів:

$a).\ \sum_{n=0}^{\infty} n^k c_n\ z^n\ ; k = 1, 2, \dots;$

$b).\ \sum_{n=0}^{\infty} (2^n - 1)\ c_n\ z^n;$

$c).\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!}\ z^n\,;$

$d).\ \sum_{n=0}^{\infty} n^n\ c_n\ z^n;$

$e).\ \sum_{n=0}^{\infty}\ c_n^k\ z^n\,, k = 1,2, \dots\ ;$

$f).\ \sum_{n=0}^{\infty} (1 + z_0^n) c_n\ z^n;$

$g).\ \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{kn}, k = 1, 2, \dots;$

$h).\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{1+|c_n|} \cdot\ z^n\ .$

i). Нехай послідовність дійсних додатніх чисел $\{a_n\}$ монотонно прямує до нуля та радіус збіжності степеневого ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\ z^n$$

дорівнює одиниці. Довести, що цей ряд збігається на всьому колі |z|=1, виключаючи, можливо, точку z=1.

j) Нехай радіуси збіжності рядів

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n\,;\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, z^n;\ \sum_{n=0}^{\infty} (a_n +\ b_n) z^n;\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, b_n z^n$$

дорівнюють відповідно $R_1,\ R_2,\ R_3,\ R_4.$ Довести, що

$$R_3 \geq \min(R_1, R_2)\,;\ R_4 \geq R_1 \cdot R_2.$$

k) Нехай f(z) є сумою степеневого ряда, який збігається в деякому околі точки $z = z_0$. Нехай не всі коефіцієнти ряду дорівнюють нулю. Довести, що існує число δ таке, що на множині $0 < | z - z_0| < \delta$ функція $f(z)$ не дорівнює нулю.

l) Нехай $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ та радіус збіжності цього ряду дорівнює $R > 0$.

Довести, що в будь-якому крузі $| z |\leq r$, де $r < R$, функція $f(z)$ дорівнює нулю лише в скінченій кількості точок, або $f(z) \equiv 0$.

m) Нехай має місце нерівність

$$\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| \geq R \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right),$$

де $n > n_0,\ \alpha > 1$. Довести, що степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

збігається у всіх точках кола свого круга збіжності.

n) Нехай збігаються ряди

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n, \sum_{n=0}^{\infty} v_n.$$

Довести, що збігається ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n, \qquad \text{де } w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

Завдання для аудиторної та самостійної роботи.

Дослідити ряд на збіжність:

391. $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{\cos in}{2^n}$;

392. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n \sin in}{3^n}$;

393. $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{\cos in^2}{5^{n^2}}$;

394. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\exp(2ni)}{n\sqrt{n}}$;

395. $\sum_{n=7}^{\infty} \frac{\exp(\frac{\pi i}{n})}{\sqrt{n}}$;

396. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^{\frac{n}{2}} \cos in}$;

397. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{sh\, i\sqrt{n}}{\sin in}$;

398. $\sum_{n=8}^{\infty} \frac{\ln n}{sh\, in}$;

399. $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{ch\, \frac{\pi i}{n}}{\ln n}$;

400. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{tg\, \pi n i}$.

Знайти область збіжності ряду:

401. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{2^n(n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{(z-2i)^n}$;

402. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \cdot z^n$;

403. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1+i)^n}{3^n(n-i)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{(z+1+i)^n}$;

404. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \ln n}{(z-1)^n}$;

405. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{5^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}$;

406. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(z-1)^n}{\sqrt{(3n-2)2^n}}$.

Розвинути функцію $f(z)$ в ряд Тейлора в околі точки $z = z_0$ та знайти радіус збіжності:

407. $f(z) = \frac{1}{z+3}, \qquad z_0 = 1$;

408. $f(z) = \frac{2z-1}{z+3}, \qquad z_0 = 1$;

409. $f(z) = \ln z, \qquad z_0 = 1$;

410. $f(z) = e^{3z-2}, \qquad z_0 = 1$;

411. $f(z) = z \cos 2z, \qquad z_0 = -1$;

412. $f(z) = \sin(z+i), \qquad z_0 = i$;

413. $f(z) = z^5 - z^3 + 2z - 3, \qquad z_0 = 2$.

Розвинути функцію $f(z)$ в ряд Лорана у вказаній області:

414. $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}, \qquad 2 < |z| < 3$;

415. $f(z) = \frac{4z^2 - 2z + 3}{(z-2)(z^2+1)}, \qquad 1 < |z| < 2$;

416. $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}, \qquad 0 < |z-i| < 2$;

417. $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}, \qquad 0 < |z| < \infty$;

418. $f(z) = z^3 \cos \frac{1}{z-2}, \qquad 0 < |z-2| < \infty$;

419. $f(z) = \dfrac{e^z}{z(1-z)}, \qquad 0 < |z| < 1;$

420. $f(z) = ctg\, z, \qquad 0 < |z| < 1.$

Завдання для індивідуальної роботи

(робити завдання № 420+*к*, 450+*к*, 480+к, де *к* – номер варіанта)

Дослідити на збіжність ряди (421-450):

421) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\exp(in)}{n^2 + 2n + 3}$

422) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2-i}{3}\right)^{n^2}$

423) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1+i}{2}\right)^{n}$

424) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{n!\,(e-j)^n}$

425) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\dfrac{i(2n+i)}{4n}\right]^{n}$

426) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\exp\left(\frac{\pi i}{n}\right)}{n+3}$

427) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln(n^2+1)}{n} \times i^n$

428) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-\frac{n}{2}} \times (1+i)^n \left(lnctg\dfrac{\pi}{4n}\right)^{-2}$

429) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n} \times (2+i)^n$

430) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n-1)!}{(n!)^2} \times \dfrac{i^n}{1+i^n}$

431) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+2i+1)ln^2 n}$

432) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(i\sqrt{n})}{n^2}$

433) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n+2i}{(1+i)n+3}\right]^n$

434) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2+i)^n \times n}{2^n}$

435) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-i)\sqrt{n}}$

436) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{(3n-1)ln^2(2n+1)}$

437) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-i)^n}{n2^n}$

438) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2i)^n}$

439) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(in)^n}$

440) $\sum_{n=1}^{\infty} (2i)^n \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{-n^2}$

441) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(3i)^n}{(2n+3)!}$

442) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+2}{(3n+5)(2i)^n}$

443) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{3}\right)^n \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2}$

444) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin^2(ni)}{(n+1)\sqrt{n}}$

445) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{n}}{n^2}\exp(in)$

446) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{2n+1}$

447) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n n!}{(2n-1)!\,2^n}$

448) $\sum_{n=1}^{\infty}(2i)^n\left(1+\frac{2}{n}\right)^{-n^2}$

449) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{(3n+5)(ln^2 n+4)}$

450) $\sum_{n=1}^{\infty} i^n\left(1-\frac{i}{2n}\right)$

Знайти область збіжності ряду (№ 451-480):

451) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(1+2i)^n}{(4-3i)^n}(z-3+i)^n+\frac{n(1+i)^n}{(z-3+i)^n}\right]$

452) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n(z-2+i)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}(1+in)(z-2+i)^n$

453) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+1-i)^n}{3^n(n+1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(n+2)}{(z+1-i)^n}$

454) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{4}\right)^{2n}$

455) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(z+1-i)^n}\sum_{n=0}^{\infty}n(z+1-i)^n$

456) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+2}}$

457) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sinin}{(z-i)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{n!}$

458) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{(z+1)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{(i+n)^n}$

459) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3 z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n2^n}$

460) $\sum_{n=0}^{\infty} cosin + (z+2i)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+1}{(z+2i)^n}$

461) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1-i)^n}{n+i} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n(z+1-i)^n}{(n+1)(n+2)}$

462) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} e^n + (z-i)^n$

463) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 z^n}{(2n)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{-n}}{cosin}$

464) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n(z-2-i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-2-i)^n}{(2n+1)+4^n}$

465) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{(z+i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{exp(in+1/2)}$

466) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+4i)^n}{(z+2i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+2i}{n}\right)^n$

467) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n(z+2+i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + in\right)(z+2+i)^n$

468) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n(z-i)^n}{(n+1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} ln(1+n)(z-i)^n}$

469) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{3}-1}{n}(z+2i)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n ln^2 n (z+2i)^n}$

470) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} + z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)z^{2n}}$

471) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i+z)^n}{(n+2)ln^2(2n+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n5^n(i+z)^n}$

472) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)(z-2i)^i}{n^3 4^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)(z-2i)^n}$

473) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n(z-2i+1)^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^n}{(z-2i+1)^n}$

474) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(z+2+i)^n}{1+n^4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n(z+2+i)^n}$

475) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+4i)^{2n}}{nlnn}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)}{(2n)!\,(z+4i)^n}$

476) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,(z-i)^{2n}}{n^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2+1}{n\sqrt{n}}\left(\frac{4}{z-i}\right)^n$

477) $\sum_{n=1}^{\infty}(z+1+2i)^n sin\frac{\pi}{3^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n ln(1+n)}{(z+1+2i)^n}$

478) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+4i)}{9^n(2n+1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+2}-n}\left(\frac{3}{z+4i}\right)^n$

479) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n+1}\right)^n(z+5i)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(2n+1)}{(z+5i)^n}$

480) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-i+2)^n}{3^n+\sqrt{1+2n}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^2(z-i+2)^n}$

Розвинути в ряд Лорана функцію в заданій області (№ 481-510):

481. $z^4\cos\frac{1}{z}$ в околі точки $z=0$

482. $\frac{1+\cos z}{z^4}$ в околі точки $z=0$

483. $\frac{1}{(z+2)(1+z^2)}$ $(1<|z|<4)$

484. $\frac{1}{(z^2+2z-\gamma)}$ $(1<|z+2|<4)$

485. $\frac{z^2-z+3}{z^3-3z+2}$ $|z|<1$

486. $\frac{sinz}{z^2}$ в околі точки $z=0$

487. $\frac{e^z}{z^3}$ в околі точки $z=0$

488. $\frac{\sin^2 z}{z}$ в околі точки $z=0$

489. $\dfrac{e^z}{z-1}$ в околі точки $z=0$

490. $z^3 e^{\frac{1}{z}}$ в околі точки $z=0$

491. $\dfrac{1}{z}\sin^2\dfrac{1}{z}$ в околі точки $z=0$

492. $\dfrac{e^{2z}-1}{z}$ в околі точки $z=0$

493. $\dfrac{1-e^{-z}}{z^3}$ в околі точки $z=0$

494. $\dfrac{1}{z^2+z}$ $(0<|z|<1)$

495. $\dfrac{z+4}{z^2+3z+2}$ $(1<|z|<2)$

496. $\dfrac{4}{z^2-1}$ $(1<|z+2|<3)$

497. $\dfrac{1}{z^2+2z-8}$ $(1<|z+2|<4)$

498. $\dfrac{z+2}{z^2-4z+3}$ $(2<|z-1|<\infty)$

499. $\dfrac{z}{(z^2-4)(z^2-1)}$ $(1<|z|<2)$

500. $\dfrac{1}{z^2+z}$ $(1<|z|<+\infty)$

501. $\dfrac{z^2-z+3}{z^2-3z+2}$ $(1<|z|<2)$

502. $\dfrac{z}{(z-2)(z-3)}$ $(3<|z|<+\infty)$

503. $\frac{1}{(z+2)(1+z^2)}$, $(4<|z|<\infty)$

504. $\frac{2z-3}{z^2-3z+2}$, $(0<|z-1|<1)$

505. $\frac{1}{(z^2-4)^2}$, $(4<|z+2|<+\infty)$

506. $\frac{2z+1}{z^2+z-2}$, $(1<|z|<2)$

507. $\frac{z^2-z+3}{z^2-3z+2}$, (2<|z|<+∞)

508. $e^{z+\frac{1}{z}}$, (0<|z|<∞)

509. $\sin z \sin\frac{1}{z}$, (0<|z|<∞)

510. $\frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$, (1<|z|<2)

§7. Лишки функцій та їх застосування

Якщо функція $f(z)$ аналітична в кільці $0<|z-a|<\rho$, але не визначена в точці $z=a$, то цю точку називають ізольованою особливою точкою однозначного характеру даної функції.

Існують три типи ізольованих особливих точок:

1) Якщо існує границя $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ і вона скінченна, точка $z=a$ називається усувною.
2) Якщо $\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$, точка $z=a$ називається полюсом.
3) Якщо границя $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ не існує, точка $z=a$ називається істотно особливою.

Точку $z=a$ називають полюсом порядку n, якщо вона є нулем кратності n для функції $\varphi(z)=\frac{1}{f(z)}$. Нагадаємо, що функція $\varphi(z)$ має нуль $z=a$ кратності n, якщо $\varphi(z)=\varphi'(z)=\cdots=\varphi^{n-1}(z)=0, \varphi^{n}(z)\neq 0$.

Інтегральним лишком однозначної функції $f(z)$ в точці a називається величина

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(z)dz,$$

де γ – коло $|z-a|=R$, всередині якого функція $f(z)$ аналітична за винятком, можливо, самої точки $z=a$ (обхід кола – проти годинникової стрілки).

Якщо функція $f(z)$ аналітична в точці $z=a$, або ця точка є усувною, то лишок в ній дорівнює нулю: $\operatorname*{res}\limits_{z=a} f(z)=0$.

Якщо точка $z=a$ є простим ($n=1$) полюсом функції $f(z)$, то

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z)=\lim_{z\to a}(z-a)f(z).$$

Якщо в околі точки $z = a$ функція $f(z)$ має вигляд $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, причому $\varphi(a) \neq 0, \psi(a) = 0, \psi'(a) \neq 0$, тобто точка $z = a$ є простим полюсом, лишок в цій точці можна обчислити за формулою

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

Якщо точка $z = a$ є полюсом порядку n, то

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [f(z) \cdot (z-a)^n].$$

Якщо в околі точки $z = a$ функцію $f(z)$ розвинути в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-a)^n,$$

то $\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \mathrm{C}_{-1}$. За цією формулою обчислюють лишки зокрема в істотно особливих точках.

Нагадаємо, що для обчислення інтегралів по замкнутому контуру можна використовувати наведені в §5 формули:

а). якщо контур C є кусково-гладка замкнена крива, а функція $f(z)$ є аналітичною всередині та на самій кривій C, то

$$\oint_C f(z)dz = 0;$$

б). у тих же умовах має місце формула Коші:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz = f(z_0),$$

де z_0 лежить в області D, яка обмежена кривою C.

Якщо в області D міститься скінченне число ізольованих особливих точок z_k ($k = 1,2, \dots, n$) функції $f(z)$, то

$$\oint_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{\gamma_k} f(z)dz \, , \qquad (*)$$

де кожна γ_k – це замкнена кусково-гладка крива,яка обмежує множину, що лежить всередині області D та містить тільки одну ізольовану особливу точку функції $f(z)$, а саме z_k . Згідно з основною теоремою про лишки остання рівність набуває вигляду:

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z).$$

Хоча деякі з інтегралів у правій частині **(*)** буває доцільним обчислювати за допомогою формули Коші та формул для похідної

$$f^n(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n-1}},$$

яка має місце в тих же умовах, що і формула Коші.

За допомогою лишків можна обчислювати деякі визначені інтеграли. Нехай $f(\mathrm{x}) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, де $P_m(x)$, $Q_n(x)$ – многочлени, $n \geq m+2$, і $f(x)$ неперервна на всій дійсній осі. Тоді $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{res} f(z)$, де сума береться по усіх полюсах z_k функції $f(z)$, які знаходяться у верхній півплощині $\operatorname{Im} Z > 0$.

У тих же припущеннях, але при $n \geq m+1$,мають місце рівності

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\lambda x dx = \operatorname{Re}\left\{2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{res}(f(z)e^{i\lambda z})\right\}, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\lambda x dx = \operatorname{Im}\left\{2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{res}(f(z)e^{i\lambda z})\right\}, \lambda > 0,$$

де сума береться по усіх полюсах z_k функції $f(z)$, які знаходяться у

верхній півплощині $\operatorname{Im} Z > 0$.

Якщо R(x,y)- раціональна функція двох змінних, неперервна для $|x| \leq 1, |y| \leq 1$, то для обчислення інтегралів вигляду $\int\limits_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt$ можна покласти $z = e^{it}$. Тоді

$$\cos t = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \sin t = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), dt = \frac{dz}{di}.$$

Одержуємо:

$$\int\limits_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt = \oint\limits_{|z|=1} f(z)dz,$$

де останній інтеграл від функції комплексної змінної можна обчислювати за допомогою лишків.

Приклад 1: Знайти нулі функції $f(z) = 1 + chz$ та виявити їх кратність.

Роз’язання: Роз’язуючи рівняння $chz = -1$ або $\cos iz = -1$, одержимо, що точки $z_k=(1+2k)\pi i, k\in Z,$ є нулями данної функції. Оскільки

$$f'(z_k)=sh\left[(1+2k)\pi i\right]=0,$$

$$f''(z_k)=ch\left[(1+2k)\pi i\right]\neq 0,$$

то точки $z_k, k\in N$ є нулями функції $f(z)$ кратності 2.

Приклад 2: Знайти ізольовані особливі точки функції $f(z)=\dfrac{1}{z(1-\exp 2z)}$, вказати їх характер, а якщо це полюс – вказати його порядок.

Роз'язання: Розглянемо функцію $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)}=z(1-\exp 2z)$. Вона має нулі $z*=0, z_k=2\pi ki, k\in Z, k\neq 0$.Оскільки $\varphi'(0)=0$, але $\varphi''(0)\neq 0$, то точка $z=z*$ є полюсом другого порядку для функції $f(z)$.

Оскільки $\varphi'(z_k)\neq 0, k\in Z, k\neq 0$,то точки $z_k, k\in Z, k\neq 0$ є простими полюсами функції $f(z)$.

Приклад 3: Знайти лишок функції $f(z)=z^3\sin\dfrac{1}{z^2}$ у її особливій точці.

Роз'язання : Особливою точкою є точка z=0. Це істотно особлива точка. Розвинення функції $f(z)$ в ряд Лорана в околі точки z=0 має вигляд:

$$f(z)=z^3\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{3!z^6}+\frac{1}{5!z^{10}}+\ldots\right)=z-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^7}+\ldots,$$

звідки випливає,що C_{-1}=0, отже

$\underset{z=0}{res}\, f(z)=0$.

Приклад 4: Обчислити інтеграл $\oint\limits_c \dfrac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$, де С – коло $|z-1-i|=\sqrt{2}.$

Роз'язання : Функція $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}$

має три особливі точки: $z_1=1$ – полюс другого порядку, $z_2=-i$, $z_3=i$ – прості полюси. Всередині контура С знаходяться точки z_1 та z_3.

Отже $\oint_c f(z)dz=2\pi i\,(res_{z=1}f(z)+res_{z=i}f(z))$.

Знаходимо лишки за наведеними вище формулами

$$res_{z=1}f(z) = \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left[(z-1)^2\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}\right] = \lim_{z\to 1}\frac{-2z}{(z^2+1)^2} = -\frac{1}{2}.$$

$$res_{z=\mathrm{i}}f(z) = \lim_{z\to \mathrm{i}}(z-i)\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)} = \frac{1}{4}.$$

Відповідь: $\oint_c \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)} = 2\pi i\left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right] = -\frac{\pi i}{2}.$

Приклад 5: Обчислити інтеграл

$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^3}.$

Розв'язування: Підінтегральна функція має єдиний полюс у верхній півплощині, а саме точку z=i. Це полюс третього порядку, отже

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^3} = 2\pi i\, res_{z=i}\frac{1}{(z^2+1)^3} = 2\pi i\cdot\frac{1}{2}\lim_{z\to i}\left(\frac{1}{(z+i)^3}\right)^{(2)} = \pi i\ \lim_{z\to i}\frac{12}{(z+i)^5} = \frac{3\pi}{8}.$$

Завдання теоретичного характеру

a). Точка z_0 є нулем функції $\varphi(z)$ порядку n та нулем функції $f(z)$ порядку m. Чи є вона нулем для функцій

$$\varphi(z)+f(z);\ \ \varphi(z)\cdot f(z);\ \ \frac{\varphi(z)}{f(z)}?$$

Якщо так, якого він порядку?

b). Нехай $f(z)=\varphi\left(\frac{1}{z}\right)$, де $\varphi(\xi)$ є аналітичною в точці $\xi=0$. Довести, що

$$\underset{z=\infty}{res}\, f(z) = -\varphi'(0).$$

c). Довести формулу :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)}\cdot\pi.$$

d). Нехай функції $f(z)$ та $g(z)$ є аналітичними в точці z=a та $f(a) = g(a) = 0$. Довести, що точка z=a є ізольованою особливою точкою для функції $F(z)=\frac{f(z)}{g(z)}$, але вона не може бути істотно особливою точкою.

e). Нехай $f(z)$ обмежена в деякому околі точки z=a. Довести, що в цьому випадку ізольована особлива точка z=a є для функції $f(z)$ усувною.

f). Нехай

$$\lim_{z\to a}(z-a)f(z)=0.$$

Довести, що в цьому випадку ізольована особлива точка $z=a$ є для функції $f(z)$ усувною.

g). Нехай

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{|z-a|=\rho}|f(z)|\cdot|dz|=0.$$

Довести, що в цьому випадку ізольована особлива точка $z=a$ є для функції $f(z)$ усувною.

h). Нехай $f(z)$ аналітична на множині $0<|z-a|<r$, а в точці $z=a$ має полюс. Нехай

$$g(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{f(z)}, \text{при } 0<|z-a|<r,\\ 0, \text{при } z=0.\end{cases}$$

Довести, що $g(z)$ аналітична в деякому околі точки $z=a$.

i). Нехай $f(z)=(z-a)^m\cdot\varphi(z)$, *де* $m=\pm1;\pm2;\ldots$, функція $\varphi(z)$ аналітична в точці $z=a$ та $\varphi(a)\neq 0$. Довести, що коли $m>0$, то функція $f(z)$ має в точці $z=a$ нуль порядку m, а коли $m<0$, то функція $f(z)$ має в точці $z=a$ полюс порядку $(-m)$.

j). Нехай $f(z)$ має в точці $z=a$ полюс порядку m. Визначити порядок полюса функції $f^{(n)}(z)$ в точці $z=a$.

k). Нехай $f(z)$ аналітична в точці $z=a$ та має в цій точці нуль порядку m. Якого порядку нуль в точці $z=a$ має функція

$$F(z)=\int_a^t (z-t)^n f(t)dt, n=0,1,2,3\ldots?$$

l). Нехай функція $g(z)$ аналітична в точці $z=a$, $g(a)=b$. Нехай функція $f(\xi)$ має в точці $\xi=b$ істотно особливу точку. Довести, що функція $F(z)=f(g(z))$ має в точці $z=a$ істотно особливу точку.

m). Нехай $z=a$ є ізольованою особливою точкою функції $f(z)$. Нехай $\mathrm{Re}f(z)>0$ в деякому околі точки $z=a$. Довести, що точка $z=a$ є усувною точкою функції $f(z)$.

n). Нехай $z=a$ є істотно особливою точкою функції $f(z)$. Довести, що в будь-якому околі точки $z=a$ функції

$$Ref(z), \qquad \mathrm{Im}f(z), \qquad \frac{\mathrm{Im}f(z)}{\mathrm{Re}f(z)}$$

приймають усі дійсні значення.

o). Нехай $\varphi(z)$ аналітична в точці z=a, *f*(z) має в цій точці простий полюс,

$$\underset{z=a}{res}\, f(z) = \mathrm{b}.$$

Знайти

$$\underset{z=a}{res}\big(\varphi(z) f(z)\big).$$

p). Нехай *f*(z) має нуль порядка *n* в точці z=a. Знайти

$$\underset{z=a}{res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right).$$

q). Нехай *f*(z) має полюс порядка *n* в точці z=a. Знайти

$$\underset{z=a}{res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right).$$

r). Нехай $\varphi(z)$ аналітична в точці z=a , *f*(z) має нуль порядка *n* в цій точці.
Знайти

$$\underset{z=a}{res}\left(\varphi(z)\cdot\frac{f'(z)}{f(z)}\right).$$

s). Нехай $\varphi(z)$ аналітична в точці z=a , *f*(z) має полюс порядка *n* в цій точці.
Знайти

$$\underset{z=a}{res}\left(\varphi(z)\cdot\frac{f'(z)}{f(z)}\right).$$

t). Нехай $\varphi(z)$ аналітична в точці z=a , φ'(a)≠0, *f*(ξ) має полюс першого порядку
в точці $\mathrm{b} = \varphi(a)$, $\underset{\xi=b}{\mathrm{res}}\, f(\xi) = \mathrm{C}$. Знайти

$$\underset{z=a}{res}\big(f(\varphi(z))\big).$$

Завдання для аудиторної та самостійної роботи

Знайти нулі функції та їх кратність, якщо

511. $f(z) = z^3 \sin z$;

512. $f(z) = \frac{sh^3 z}{z}$;

513. $f(z) = (z + \pi i) sh\, z$;

514. $f(z) = \frac{(\cos z - 1)^2}{z}$;

515. $f(z) = (z^2 + \pi^2)(1 + e^{-z})$;

Знайти ізольовані особливі точки функції та з’ясувати їх характер (якщо це полюс – вказати його порядок)

516. $f(z) = (z - z^3)^{-1}$;

517. $f(z) = z^4 (1 + z^4)^{-1}$;

518. $f(z) = e^z (1 + z^2)^{-1}$;

519. $f(z) = (z^2 + 1) e^{-z}$;

520. $f(z) = (e^z - 1)^{-1} - z^{-1}$;

521. $f(z) = \exp[(z - 1)^{-1}]$;

522. $f(z) = (e^z - 1)^{-1}$;

523. $f(z) = (\sin z - \sin a)^{-1}$;

524. $f(z) = \exp[(tg\, z)^{-1}]$;

525. $f(z) = \frac{\sin\frac{z}{2}}{e^{iz} - 1}$;

526. $f(z) = sh\, \frac{1}{z+1} - \frac{\sin \pi z}{z^3}$;

527. $f(z) = \sin \frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$;

Знайти лишки функції в усіх її ізольованих точках

528. $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$;

529. $f(z) = \frac{z}{(z - z_1)^m (z - z_2)}$, m=2,3,…;

530. $f(z) = \frac{1}{z^5 - z^7}$;

531. $f(z) = \frac{z^{2n}}{(1+z)^n}$, n$\in Z$;

532. $f(z) = (e^z - 1)^{-1} - z^{-1}$;

533. $f(z) = \exp \frac{1}{1-z}$;

534. $f(z) = \frac{1}{1 - \exp z}$;

535. $f(z) = \frac{1}{\sin z}$;

536. $f(z) = \frac{1}{\cos z - 3}$;

537. $f(z) = z^n \cdot \sin \frac{1}{z}$, n$\in N$;

538. $f(z) = (sin \frac{1}{z})^{-1}$;

539. $f(z) = \sin z \sin \frac{1}{z}$;

540. $f(z) = \frac{\cos z}{(z^2+1)^2}$;

541. $f(z) = \exp(z^2 + \frac{1}{z^2})$;

542. $f(z) = \exp \frac{z}{z-1}$;

543. $f(z) = \frac{\sin\frac{1}{z}}{1-z}$;

544. $f(z) = \frac{\exp\frac{1}{z}}{1+z}$;

545. $f(z) = \exp \frac{z^2+1}{z}$;

546. $f(z) = e^z sin \frac{1}{z}$;

547. f(z)=exp(z+$\frac{1}{z}$);

548. f(z)=cos$\frac{z^2+4z-1}{z+3}$;

Обчислити інтеграл $\oint_C f(z)dz$, де С – коло з центром в точці z_0 та радіусом R, якщо

549. f(z)=$\frac{1}{z(z-1)^2(z+1)}$, $z_0=0$, R=2;

550. f(z)=$\frac{e^z}{(z-i\pi)^n}$, n$\in N$, $z_0=0$, R=4;

551. f(z)=$\frac{cosz}{z^n}$, $n\in N$, $z_0=0$, R=1;

552. f(z)=$\frac{z^4\exp(\pi z)}{z^2+1}$, $z_0=1$, R=1,5;

553. f(z)=$\frac{e^z-1}{z^3}$, $z_0=0$, R=2;

554. f(z)=$\frac{z^2}{e^z-1}$, $z_0=2\pi i$, R=1;

555. f(z)=$z^2sin\frac{1}{z}$, $z_0=0$, R=5;

556. f(z)=$\frac{zexp(2z)}{z^4+8z^2-9}$, $z_0=-i\sqrt{2}$, R=2;

557. f(z)=exp$\frac{z}{1-z}$, $z_0=0$, R=2;

558. f(z)=izcos$\frac{1}{z}$ - exp$\frac{i}{z}$, $z_0=0$, R=1;

559. f(z)=$\frac{z}{e^{z^2}-1}$, $z_0=0$, R=4;

560. f(z)=$\frac{z}{sinz(1-cosz)}$, $z_0=0$, R=5;

561. f(z)=$\frac{1}{z-2}$ ·exp$\frac{1}{z-1}$, $z_0=0$, R=3;

562. f(z)=(2z-1)cos$\frac{z}{z-1}$, $z_0=0$, R=3;

563. f(z)=exp$\frac{1}{z-1}$cos$\frac{1}{z-1}$, $z_0=1$, R=1;

564. f(z)=exp$\frac{1}{z-1}$sin$\frac{1}{z-1}$, $z_0=1$, R=0,5;

565. f(z)=$\frac{1}{z}$cos$\frac{1}{z-2i}$, $z_0=i$, R=2;

566. f(z)=$\frac{z}{1-z}$exp$\frac{1}{z}$, $z_0=0$, R=2;

567. f(z)=$\frac{1}{z+2}$sin$\frac{1}{z+1}$, $z_0=-1$, R=2;

568. f(z)=$\frac{1}{z-1}$cos$\frac{1}{z}$, $z_0=0$, R=2;

569. f(z)=cos$\frac{1}{z}\cdot e^z$, $z_0=0$, R=1;

Обчислити інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, якщо

570. f(x)=$(1+x^2)^{-1}$;

571. f(x)=$(x^2-2x+2)^{-1}$;

572. f(x)=$x^2(x^4+10x^2+9)^{-1}$;

573. f(x)=$(x+1)(x^2+1)^{-1}(x^2+4)^{-1}$;

574. f(x)=$x^2(1+x^4)^{-1}$;

575. f(x)=$(1+x^6)^{-1}$;

576. f(x)=$(x^2+2x+2)^{-2}$;

577. f(x)=$xsinx\cdot(x^2+1)^{-1}$;

578. f(x)=$cosx(1+x^4)^{-1}$;

579. f(x)=$(x+1)sin2x\cdot(x^2+2x+2)^{-1}$;

580. f(x)=$x^3sinx\cdot(x^4+5x^2+4)^{-1}$;

581. f(x)=$xcosx\cdot(x^2-2x+10)^{-1}$;

582. f(x)=$xsinax\cdot(x^2+b^2)^{-1}$;

583. f(x)=$cosax\cdot(x^2+b^2)^{-2}$;

Обчислити інтеграл $\int_0^{2\pi} f(t)dt$, якщо

584. f(t)=$(a+cost)^{-1}$, a>1;

585. f(t)=$(1+0,6cost)^{-2}$;

586. f(t)=$sint(1-2acost+a^2)^{-1}$, a≠1;

587. f(t)=$(2+cost)(2-sint)^{-1}$;

588. f(t)=$(sint+cost)(3+2sint)^{-1}$;

589. f(t)=$(2+sint+cost)^{-1}$;

590. f(t)=$(sint)^2(a+bcost)^{-1}$, a>b>0;

Завдання для індивідуальної роботи

(робити завдання № 590+*к*, 620+*к*, 650+*к*, 680+*к*, 710+*к*, де *к* – номер варіанта)

Знайти усі особливі точки функції, визначивши їх характер (№ 591-620):

591. $\frac{1}{1-\sin z}$

592. $\left(\frac{z}{\cos z-1}\right)^2$

593. $\frac{1-\sin z}{\cos z}$

594. $\frac{z-\pi}{\sin^2 z}$

595. $\frac{1}{\cos z-\frac{1}{2}}$

596. $z^2\sin\frac{1}{z}$

597. $(z-1)\cos\frac{1}{(z-1)^2}$

598. $\tan^2 2z$

599. $\frac{1}{z^3(z^2+4)^2}$

600. $z^2e^{\frac{1}{z}}$

601. $\frac{1}{z-\sin z}$

602. $\frac{1}{\cos z-1+\frac{z^2}{2}}$

603. $\frac{1}{e^{-z}+z-1}$

604. $\frac{2z+3}{(z+1)^3(z^2-3z+2)^2}$

605. $\frac{\sin z-3\cos^2 z}{z(z^2+9)^2}$

606. $\frac{1}{z}e^{\frac{z+1}{z}}$

607. $\frac{1+\cos\pi z}{(3z^2+z-2)^2}$

608. $\frac{1}{2+z^2-2\mathrm{ch} z}$

609. $\frac{1-\cos z}{z^2}$

$$610.\ e^{\frac{1}{z+2}}$$

$$611.\ \cos\frac{1}{z}$$

$$612\ \frac{\sinh z}{z-\sinh z}$$

$$613.\ \frac{1}{e^{-z}-1}$$

$$614.\ \frac{z}{z^6+2z^5+z^4}$$

$$615.\ \frac{z^2}{\cos z-1}$$

$$616.\ \frac{1-\sin z}{\cos z}$$

$$617.\ \sin\frac{\pi}{z+1}$$

$$618.\ e^{-\frac{1}{z^2}}$$

$$619.\ \cosh\frac{1}{z}$$

$$620.\ \frac{1}{z^3(2-\cos z)}$$

Обчислити усі лишки функції (№ 621-650):

621. $f(z) = \frac{e^z-1-z}{(1-\cos 2z)\sin z}$

622. $f(z) = \frac{\sin z^2}{\left(z^3-\frac{\pi}{4}z^2\right)}$

623. $f(z) = z^2 \sin\frac{1}{z}$

624. $f(z) = \cos\frac{1}{z} + z^3$

625. $f(z) = \frac{\sin\frac{1}{z}}{1-z}$

626. $f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^3(z-2)}$

627. $f(z) = e^{\frac{z^2+1}{z}}$

628. $f(z) = \frac{z}{(z-1)^3(z+2)^2}$

629. $f(z) = \frac{\sin 2z}{(z+i)\left(z-\frac{i}{2}\right)^2}$

630. $f(z) = e^{z^2+\frac{1}{z^2}}$

631. $f(z) = e^{\frac{z}{z-1}}$

632. $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}$

633. $f(z) = e^{\frac{1}{z^2}} \cos z\,,\ \ res\, f(0) - ?$

634. $f(z) = \frac{z^2}{\cosh z - 1 - \frac{z^2}{2}},\quad res\, f(0) - ?$

635. $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$

636. $f(z) = z^2 \sin\frac{1}{z+1}$

637. $f(z) = \frac{\tan z}{z^2 - \frac{\pi}{4} z}$

638. $f(z) = \frac{e^{\pi z}}{z-i}$

639. $f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2-1)(z+3)}$

640. $f(z) = \frac{1-\cos z}{z^3(z-3)}$

641. *f(z)=e*$^{-\frac{1}{z^2}}/\ 1 + z^4$

642. *f(z)=* $e^z/z^3(z-1)$

643. *f(z)=chz* $/(z^2+1)(z-3)$

644. *f(z)=cosz* $/\ z^3 - \frac{\Pi}{2} z^2$

645. *f(z)=(1-chz)shz /(1-cosz)* sin^2, *resf(o) - ?*

646. *f(z)=*$z^3 sin\, \frac{1}{z^2}$

647. *f(z)=sin2z-2z/* $(1 - cosz)^2$, *resf(o) - ?*

648. *f(z)=1/z*$^4 + 1$

649. *f(z)=sin3z-3sinz/ ((sinz-z)sinz), resf(o) - ?*

650. $f(z)=e^{z} sin\frac{1}{z^2}$

З допомогою лишків обчисліть контурні інтеграли (№ 651-710):

651. $\int_c \frac{e^z dz}{z^2(z^2-9)}$, c: |z|=1

652. $\int_c \frac{\sin z}{(z+1)^3} dz$, c: |z|=2

653. $\int_c z^2 \sin\frac{1}{z} dz$, c: |z|= $\frac{1}{2}$

654. $\int_c (z+1)e^{\frac{1}{2}} dz$, c:|z|= $\frac{1}{3}$

655. $\int_c \frac{\cos\frac{3}{2}}{z^2-4} dz$, c: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

656. $\int_c \frac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2} dz$ c : |z-i| = 3

657. $\int_c \frac{dz}{z^5+z^3}$, c: |z|=3

658. $\int_c \frac{zdz}{1-\cos z}$, c: |z|=5

659. $\int_c \frac{e^z}{z^4(z^2-1)} dz$, c:|z|=3

660. $\int_c \left(\sin\frac{1}{z^2}+e^{z^2}\cos z\right) dz$, c:|z|= $\frac{2}{3}$

661 $\int_c z^n e^{\frac{1}{3z}}$, c : |z|=4

662 $\int_c \frac{z+1}{z^2+2z-3} dz$, c: $x^2+y^2=16$

663 $\int_c \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}$, c:|z|=4

664. $\int_c \frac{e^z dz}{z(1-z)^3}$, c: |z|=1,5

665 $\int_c \frac{dz}{z^5+z^3}$, c: |z|=2

666 $\int_c \frac{dz}{1+z^4}$,c:|z+1|=1

667. $\int_c \frac{dz}{1+z^4}$, c: $x^2+y^2=2x$

668. $\int_c \frac{\sin \Pi z}{z^2-z} dz$, c: |z|=√2

669, $\int_c \frac{dz}{(z-1)^2(z+2)}$, c: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{2}{3}}$

670 $\int_c \frac{1}{z-1}\sin\frac{1}{z}dz$, c: $|z|=2$

671. $\int_c$ tgzdz, c: $|z|=2$

672. $\int_c \frac{\sin \Pi z}{(z^2-1)^2}dz$, c: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

673. $\int_c \frac{e^z dz}{z^2(z^2-9)}$, c: $|z|=4$

674. $\int_c \frac{z^3 dz}{1+2z^4}$, c: $|z|= \frac{1}{2}$

675. $\int_c \frac{zdz}{(z-1)(z-2)^2}$, c: $|z-2|= \frac{1}{2}$

676. $\int_c \frac{dz}{(z-3)(z^5-1}$, c: $|z|=2$

677. $\int_c \frac{\operatorname{tg} z}{z-1}dz$, c: ромб з вершинами $z_1=3$, $z_2=-3$, $z_3=i$, $z_4=-i$.

678. $\int_c \frac{\cos\frac{\Pi}{6}z}{(z-1)(z+3)^2}dz$, c: $|z-1|=5$

679. $\int_c \frac{\sin z}{z^2\left(z-\frac{\Pi}{2}\right)^3}dz$, c: $|z+i|= \frac{3}{2}$

680. $\int_c \frac{ze^{27}dz}{z^4+8z^2-9}$, c: $|z+i\sqrt{2}|=2$

681. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{shz}{z^2 \sin z}dz$

682. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin 3z - 3z}{z^2 sh^2 iz}dz$

683. $\oint\limits_{|z|=4} \frac{shiz - \sin iz}{z^3 \sin z}dz$

684. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin^2 z}{z \cos z}dz$

685. $\oint\limits_{|z|=0.1} \frac{chz - \cos 3z}{z^2 \sin 5\pi z}dz$

686. $\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{z(z+\pi)}{\sin 2z} dz$

687. $\oint\limits_{|z+2|=2} zch\frac{1}{z+2} dz$

688. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^8 - 3z^4 + 5z - 10}{z^5} dz$

689. $\oint\limits_{|z|=0.5} \frac{e^{5z} - ch6z}{z\sin \pi z} dz$

690. $\oint\limits_{|z|=0.05} \frac{e^{4z} - 1 - \sin 4z}{z^3 sh16\pi z} dz$

691. $\oint\limits_{|z-10|=1} \frac{dz}{e^{iz} + 1}$

692. $\oint\limits_{|z|=5} \frac{sh2z - 2z}{z^2 \sin^2 z} dz$

693. $\oint\limits_{|z|=0.5} \frac{e^{2z} - 1 - 2z}{zsh^2 4iz} dz$

694. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{1 - \cos \pi z}{z\sin^2 z} dz$

695. $\oint\limits_{|z-1|=1} z\sin\frac{z}{z-1} dz$

696. $\oint\limits_{|z|=0.4} \frac{e^{2z} - 1 - 2z}{zsh^2 2\pi z} dz$

697. $\oint\limits_{|z-1|=1} ze^{\frac{1}{z-1}} dz$

698. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{sh3z - \sin 3z}{z^3 sh2z} dz$

699. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{6z-\sin 6z}{z^2 sh^2 6z} dz$

700. $\oint\limits_{c} \frac{dz}{e^{2z}+i}; \quad c: |z-3\pi i| = 1$

701. $\oint\limits_{c} \frac{dz}{e^{\pi z}+1}; \quad c: |z-3i| = 1$

702. $\int\limits_{|z|=0.5} \frac{e^{2z}-\cos 9z}{zsh\pi iz} dz$

703. $\int\limits_{|z|=0.5} \frac{sh2\pi z-2\pi z}{z^2 \sin^2 \frac{\pi^2 z}{3}} dz$

704. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{z-\sin z}{2z^4} dz$

705. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{z-shz}{3z^4} dz$

706. $\oint\limits_{|z+2i|=1} \frac{dz}{e^{\pi z}+i}$

707. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{e^{\pi z}-i}$

708. $\oint\limits_{|z|=0.2} \frac{3\pi z-\sin 3\pi z}{z^2-sh^2\pi^2 z} dz$

709. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z-\cos z}{2z-\sin 2z} dz$

710. $\int\limits_{|z|=1} \frac{e^{iz}-\cos iz}{z^2} dz$

Обчислити невласний інтеграл (№ 711-728):

711. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin 2x-\sin x}{(x^2+4)^2} dx$

712. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+9)(x^2+4)^2}$

713. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x dx}{x^2-2x+10}$

714. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+10x^2+9}$

715. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+5}{x^4+5x^2+6}dx$

716. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3\sin x}{x^4+5x^2+4}dx$

717. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3\sin x}{x^4+5x^2+4}dx$

718. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4x+13)^2}$

719. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)\sin 2x}{x^2+2x+2}dx$

720. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+4}{(x^2+9)^2}dx$

721. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+5}{x^4+5x^2+6}dx$

722. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}$

723. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+16)^3}$

724. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos x}{x^2+2x+17}dx$

725. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin 2x-\sin x}{(x^2+4)^2}dx$

726. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{(x^2+x+1)^2}dx$

727. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+4}{(x^2+9)^2}dx$

728. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)\sin 2x dx}{x^2+2x+2}$

Обчислити визначений інтеграл (№ 729-740):

729. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{3}\sin t-2}$

730. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dt}{4\sqrt{5}\sin t+9}$

731. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dt}{3-\sqrt{5}\sin t}$

732. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dt}{3\sin t+5}$

733. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dt}{5+2\sqrt{6}\sin t}$

734. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dt}{3-2\sqrt{2}\sin t}$

735. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{35}\sin t-6}$

736. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dt}{3\sqrt{7}\sin t+8}$

737. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dt}{2+\sqrt{3}\sin t}$

738. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dt}{4\sqrt{3}\sin t-7}$

739. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dt}{7+4\sqrt{3}\sin t}$

740. $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dt}{4\sin t+5}$

§8. Конформні відображення

Нехай D – деяка однозв'язна область точок комплексної площини z $(z = x + iy)$, на якій визначено аналітичну функцію $w = f(z)$ $(w = u + iv)$. Ця функція відображає область D на деяку область D_1, розміщену на комплексній w-площині. Якщо $w = f(z)$ однолиста в області D (тобто для будь-яких $z_1 \neq z_2$ в області D має місце нерівність $w_1 \neq w_2$, де $w_1 = f(z_1)$, $w_2 = f(z_2)$), то вона відображає цю область на область D_1 з тим же порядком зв'язності, тобто границі D та D_1 складаються з однакової кількості ліній, які їх обмежують.

Приклад 1. За допомогою функції $w = 2z + 1$ знайти відображення кола $x^2 + y^2 = 1$ (це – область D) на площину w.

Розв'язування: Оскільки $z = x + iy$, то $w = 2(x + iy) + 1 = (2x + 1) + 2yi$. Маємо систему

$$\begin{cases} u = 2x + 1 \\ v = 2y, \end{cases}$$

з якої знаходимо

$$x = \frac{u - 1}{2}, y = \frac{v}{2},$$

а якщо підставити це в рівняння кола

$$\left(\frac{u - 1}{2}\right)^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2 = 1,$$

одержимо рівняння

$$(u - 1)^2 + v^2 = 4.$$

Це і є область D_1.

Відповідь: D_1: $(u - 1)^2 + v^2 = 4$.

Приклад 2. Знайти область D_1, в яку відображує функція $w = \frac{z+1}{z-1}$ область D: $y > x + 1$.

Розв'язування: Спочатку знайдемо образ лінії $y = x + 1$. Маємо

$$w = 1 + \frac{2}{z - 1} = 1 + \frac{2}{x + iy - 1} = 1 + \frac{2}{(x - 1) + i(x + 1)}$$
$$= 1 + 2\frac{(x - 1) - i(x + 1)}{(x - 1)^2 + (x + 1)^2} = 1 + \frac{(x - 1) - i(x + 1)}{x^2 + 1},$$

звідки

$$w-1=\frac{x-1}{x^2+1}-i\frac{x+1}{x^2+1}.$$

Оскільки $w=u+iv$, то

$$\begin{cases} u=1+\dfrac{x-1}{x^2+1}, \\ v=-\dfrac{x+1}{x^2+1}. \end{cases}$$

Знайдемо з системи x, для чого поділимо почленно першу рівність на другу

$$\frac{u-1}{v}=\frac{1-x}{x+1},$$

звідки

$$x=\frac{v-u+1}{v+u-1}.$$

Підставивши це значення x у друге рівняння системи, матимемо

$$v=-\frac{2v(v+u+1)}{(v-u+1)^2+(v+u-1)^2}, v\neq 0.$$

Або $(v-u+1)^2+(v+u-1)^2=2(1-u-v)$, чи після перетворень $u^2+v^2-u+v=0.$

Це є коло з центром в точці $z=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ та радіусом $R=\frac{1}{\sqrt{2}}$, тобто

$$\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

Залишилось з'ясувати, чи є D_1 множиною точок, що лежать всередині цього кола, або навпаки. Для цього візьмемо точку $z_0=-2$, яка належить області D. Маємо $w=f(-2)=\frac{1}{3}$, а ця точка лежить всередині кола $\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$.

Відповідь. D_1: $|w-1/2+i/2|<1/(2)^{½}$.

Завдання для аудиторної та самостійної роботи

В яку область D_1 відображає функція $W=f(z)$ область D , якщо:

741. $W=z^2$, D: Re z>0, Im z>0;

742. $W = \frac{z-i}{z+1}$, D: $y>x$;

743. $W = \frac{z-i}{z+i}$, D: $|z| < 1$;

744. $W = \frac{z}{z-i}$, D: $|z-1| < 1$;

745. $W = \frac{z}{z-1}$, D: $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z>0$;

746. $W = \frac{1}{z}$, D: $0 < \operatorname{Re} z < 1$;

747. $W = \frac{1}{z}$, D: $0 < \arg z < \varphi \leq \pi$;

748. $W = \frac{z+1}{z+2}$, D: $1 < |z| < 2$;

749. $W = \frac{z+i}{z-i}$, D: $|z| > 1$;

750. $W = \frac{z-1}{z+i}$, D: $|z| < 1$;

751. $W = \ln z$, D: $r < |z| < R$, $0 < \arg z < \pi$;

752. $W = z^2 + 1$, D: $|z| < 1$, $0 < \arg z < \pi/2$;

753. $W = e^{2z}$, D: $\operatorname{Re} z < 0$, $0 < \operatorname{Im} z < \pi/4$;

754. $W = \ln z + 1$, D: $1 < |z| < e$, $0 < \arg z < e$;

755. $W = \operatorname{tg} z$, D: $-(\frac{\pi}{4}) < \operatorname{Re} z < \pi/4$;

756. $W = \operatorname{tg} z$, D: $0 < \operatorname{Re} z < \pi$;

В яку область D_1 перейде область D, якщо послідовно виконати слідуючі відображення:

757 D: $|z| < 1$; $W_1 = \frac{z+1}{z-1}$, $W = iW_1$;

758 D: круг $|z| < 1$ із розрізом вздовж відрізка, що з’єднує точки

$z_1 = 0$ та $z_2 = 1$, $W_1 = \sqrt{z}$, $W_2 = \frac{W_1+1}{W_1-1}$, $W = W_2^2$;

759 D: круг $|z| < 1$ із розрізом вздовж відрізка, що з’єднує точки

$z_1 = \frac{i}{2}$ та $z_2 = i$, $W_1 = -iz$, $W_2 = \frac{1}{2}(W_1 + \frac{1}{W_1})$, $W_3 = W_2 + 1$,

$W_4 = \frac{1}{W_3}$, $W_5 = W_4 - \frac{4}{9}$, $W=\sqrt{W_5}$;

760 Знайти таке відображення круга $|z| < 1$ на круг $|w| < 1$, щоб w(0)=0, та $\arg w'(0) = \frac{\pi}{2}$.

Завдання для індивідуальної роботи

(робити завдання № 760+κ, 790+κ, де κ – номер варіанта)

Знайти образ області D або кривої при відображенні функцією $W = f(z)$ та дати графічну інтерпретацію (№ 761-820):

761. $w = \frac{1}{z}, D: \begin{cases} x^2 + y^2 < 2y \\ y > x \end{cases};$

762. $w = \frac{2z+1}{z+2}, D: \begin{cases} |z| < 1 \\ y > 0 \end{cases};$

763. $w = e^{2z}, D: \begin{cases} 0 < y < \frac{\pi}{2} \\ x > 0 \end{cases};$

764. $w = z^2, D: \begin{cases} |z| > 1/2, \\ Rez > 0 \end{cases};$

765. $w = z^3, D: \begin{cases} x^2 + y^2 \le 1, \\ 0 < argz < \pi/6 \end{cases};$

766. $w = \frac{z-1}{2z-6}, D: |z-1| < 2;$

767. $w = e^{iz}, D: \begin{cases} 0 < x < \pi \\ y > 0 \end{cases};$

768. $w = \frac{1}{z}, D: \begin{cases} x^2 + y^2 < x \\ y > \frac{1}{2}x \end{cases};$

769. $w = \frac{z+1}{z-2}, D\ |z-1| < 2;$

770. $w = z^2, D: \begin{cases} y \le x \\ 0 \le x \le 1; \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$

771. $w = lnz, D: y > 0;$

772. $w = 4 + 2iz, D: |z - i| < 1;$

773. $w = \frac{2}{z-1}, D: 1 < |z| < 2;$

774. $w = e^z, D: -\pi < y < 0;$

775. $w = z^2, D: \begin{cases} |z| < 2 \\ 0 < argz < \pi/2 \end{cases};$

776. $w = \frac{1}{z}, D: \begin{cases} |z-i| > 1 \\ Imz > 0 \end{cases};$

777. $w = \frac{1-z}{1+z}, D: \begin{cases} |z| < 1 \\ Imz > 0. \end{cases};$

778. w=z^4 , D:

$$\begin{cases} |z| \geqslant 2 \\ \frac{\pi}{8} \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

;

779.

$$w = \frac{z-3+i}{z+1+i};\ \operatorname{Re} z < 1.$$

780. w=8z-1, D:x^2+y^2 >= 4;

781.

$$w = \frac{2}{z-1};\ \text{область}\ D:\{1 < |z| < 2\}.$$

782. w=e^z , D: 0 < y < πi/2 ;

783. w=(i-z)/(i+z), D: x > 0 , y < 0;

784. w= 2(z+1/z), D: |z|<1, 0<arg(z)<πi/2;

785. w=z^2 , D: xϵ[o;2] , yϵ[0;2] , y > x;

786.

$$w = \frac{1-z}{1+z};\ \text{область}\ D:\{|z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}.$$

787. w=1/z, D:

$$\begin{cases} |z-1|<1 \\ y>x \end{cases}$$

;

788. w= (2iz)/(z+3), D: |z-1|<2;

789. w=ln z, D: x^2+y^2 < 1 , y > 0;

790. w=1/(z-i), D: y > 0.

791. $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$, область D: $\begin{cases} |z|=1 \\ Imz>0 \end{cases}$;

792. w=ctg z, область D: 0 < x < πi/4;

793. w= cos z,   область D: xϵ[-πi/2;πi/2];

794.

$$w=\frac{2}{z-1};\ \text{область}\ D:\{1<|z|<2\}.$$

795.

$$w=\frac{2}{z-1};\ \text{область}\ D:\{1<|z|<2\}.$$

796.

$w=\cos z$, область D: $0<x<\pi,\ y<0.$

797.

$w=\cos z$, область D: $0<x<\pi/2,\ y>0.$

798.

$w=\cos z$, область D: . $-\pi/2<x<\pi/2,\ y>0.$

799.

$w=\cos z$, область D: $0<x<\pi.$

800.

. $w=\cos z$, прямокутник $0<x<\pi,\ -h<y<h,\ h>0.$

801.

$w=\arcsin z$; верхня півплощина.

802.

$w=\arcsin z$; перший квадрант.

803.

. $w=\operatorname{ch} z$; прямокутна сітка $x=C,\ y=C$.

804.

$w=\operatorname{ch} z$; область D: $0<y<\pi$.

805.

$w=\operatorname{ch} z$; область D: $x>0,\ 0<y<\pi$.

806.

$w=\operatorname{Arsh} z$, перший квадрант.

807.

$w=\operatorname{tg} z$, область D: $0<x<\pi,\ y>0$.

808.

. $w=\operatorname{tg} z$, область D: $0<x<\pi$.

809.

. $w=\operatorname{tg} z$, область D: $0<x<\pi/4$.

810

. $w=\operatorname{tg} z$, область D: $-\pi/4<y<\pi/4$.

811.

. $w=\operatorname{cth} z$; область D: $0<y<\pi,\ x>0$.

812.

$w=\operatorname{cth} z$; область D: $0<y<\pi$.

813.

w=e^z,прямі x=C,y=C.

814.

w=e^z, область D: $\alpha<y<\beta$,$0\le\alpha<\beta\le 2\pi$.

815.

w=e^z пряма y=kx+b.

816.

w=e^zобласть D: між прямими y=x y=x+2π.

817.

w=e^z, область D: $x < 0, 0 < y < \alpha \leq 2\pi$.

818.

w=e^z область D: $0 < y < \alpha \leq 2\pi, x > 0$.

819.

$w = \ln z$; полярна сітка $|z| = R,\ \arg z = \theta$.

820.

$w = \ln z$; кут: $0 < \arg z < \alpha \leq 2\pi$.

821.

. $w = \ln z$; сектор $|z| < 1,\ 0 < \arg z < \alpha \leq 2\pi$.

<u>Відповіді:</u>

№1. $\pm\frac{1\pm i}{\sqrt{2}}$; №2. $\pm(\sqrt{3} - i)$; №3. $\pm\sqrt{2\cos\frac{\varphi}{2}}\,e^{\frac{i\varphi}{4}}$;

№4. $\sqrt{2(1-\sin\alpha)}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\right]$; №5. $\cos\alpha + i\sin\alpha$;

№6. $\frac{1}{|\cos\alpha|}(\cos(\alpha-\pi)+i\sin(\alpha-\pi))$; №7. -1;

№8. $-2+\frac{3}{2}i$; №9. 2; №10. $\frac{1}{4}$; №17. $\frac{\sin^2 nx}{\sin x}$;

№18. $\frac{\sin 2nx}{2\sin x}$; №19. $\frac{a^{n+1}\cos n\varphi - a^{n+1}\cos(n+1)\varphi - a\cos\varphi + 1}{a^2 - 2a\cos\varphi + 1}$;

№20. $z_1 = 5 + i;\ z_2 = 3 + 2i;$

№21. $z_1 = -1;\ z_1 = 3;\ z_3 = 1 + 2i;\ z_4 = 1 - 2i;$

№22. $(3; 1); (1; 3);$

№23. $x = c\text{tg}\frac{k\pi}{n}, k = 1,2, \dots, (n - 1);$

№24. $z_1 = 0;\ z_2 = 1;\ z_3 = -1;\ z_4 = i;\ z_5 = -i;$

№25. $\frac{3}{2} - 2i;$

№26. $z = i(1 - \sqrt{2});$

№27. $z^6 + 2z^5 + 4z^4 + 4z^3 + 5z^2 + 2z + 2;$

№28. $z_2 = 1 - i;\ z_3 = \frac{1}{6}\left(-1 - \sqrt{13}\right);\ z_4 = \frac{1}{6}(\sqrt{13} - 1);$

№29. $i;$

№30. $\sin\varphi - \frac{1}{2};$

№91. Частина площини, яка лежить між двома колами $x^2 + (y + 1)^2 = 1$ та $x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2;$

№92. Спільна частина двох кругів $x^2 + y^2 < 1$ та $(x + 1)^2 + y^2 < 1;$

№93. Точки круга $(x - 1)^2 + y^2 < 1$, які лежать над прямою $y = x;$

№94. Точки, які лежать зовні кола $\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{16};$

№95. Круг $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 < \frac{1}{4};$

№96. Піввісь $y = 0, x \geq 0;$

№97. Парабола $y^2 = 1 - 2x;$

№98. Півплощина $x > 0;$

№99. Півплощина $x > 1;$

№100. Пряма $y = -x;$

№101. $xy = -1$;

№102. $x^2 - y^2 = \frac{1}{2}$;

№103. $(x+1)^2 + (y-0{,}5)^2 = \frac{9}{4}$;

№104. $x^2 + y^2 = 1$;

№105. $(x-0{,}5)^2 - y^2 = 0{,}25$;

№106. $y^2 = 2x + 1$;

№107. $x^2 + y^2 < 1$;

№108. Об'єднання відкритих кругів $|z-i| < \sqrt{2}$ та $|z+i| < \sqrt{2}$ без їх спільної частини;

№109. Коло з центром в точці $-\frac{b}{a}$ та радіусом $\sqrt{\frac{b^2-ac}{a^2}}$;

№110. Права половина круга $x^2 + y^2 < 1$;

№111. Півплощина, яка містить точку $z = 0$ та обмежена дотичною до кола $x^2 + y^2 = 1$, проведеною через точку $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$;

№112. Чотири кути величиною $\frac{\pi}{4}$ з вершиною у точці $z = 0$, бісектрисами яких є промені $\arg z = -\frac{\pi}{16} + \pi k, k = 0,1,2,3$;

№113. Гіпербола з фокусами в точках z_1 та z_2 та дійсною піввіссю a;

№114. $k(z+\bar{z}) + 2b + i(z-\bar{z}) = 0$;

№115. $z^2 + \bar{z}^2 = 2a^2$;

116. $z + \bar{z} + z\bar{z} = 0$;

№117. $z\bar{z} + i(z - \bar{z}) - 2 = 0$;

№118. Промінь $y = x + 5, x \geq 0$;

№119. Коло $x^2 + y^2 = 4$;

№120. $y = -\frac{x+1}{x-1}$;

№151. $\cos 1$;

№152. $\operatorname{ch} 1$;

№153. $(-1)^k \operatorname{ch} 2$;

№154. 0;

№155. $\operatorname{ch}^2 1 - i \operatorname{sh}^2 1$;

№156. $-i$;

№157. $\frac{80}{91} + \frac{9i\sqrt{3}}{91}$;

№158. $\frac{312}{313} + \frac{25i}{313}$;

№159. $\cos 3 \operatorname{sh} 2 + i \sin 3 \operatorname{ch} 2$;

№160. $i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in Z$;

№161. $\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{7\pi}{4} i$;

№162. $\ln 2 + i\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right), k \in Z$;

№163. $\frac{1}{2}\ln 50 + i(\operatorname{arctn} 7 + 2\pi k), k \in Z$;

№164. $\exp(-(3+4k)\frac{\pi}{2}), k \in Z$;

№165. $\exp((1 + 4k)\frac{\pi}{2}), k \in Z$;

№166. $\exp\left[\frac{\pi}{4}(1 + 8k)\right] \cdot \left(\cos\frac{1}{2}\ln 2 + i \sin\frac{1}{2}\ln 2\right), k \in Z$;

№167. $\exp\left[\frac{\pi}{3}(1 + 6k)\right] \cdot (\cos \ln 2 - i \sin \ln 2), k \in Z$;

№168. $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$;

№169. $2\pi k - i \ln\left(\sqrt{2} - 1\right), (2k + 1)\pi - i \ln\left(\sqrt{2} + 1\right), k \in Z$;

№170. $\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \frac{7\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$;

№171. $-\frac{1}{2}[(2k+1)\pi + \operatorname{arctg} 2] + \frac{1}{4} i \ln 5, k \in \mathcal{Z}$;

№172. $\frac{1}{2}(\operatorname{arctg} 2 - 2\pi k) + \frac{i}{4}\ln 5, k \in \mathcal{Z}$; №173. $\frac{4k+1}{2}\pi - i\ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right), k \in \mathcal{Z}$;

№174. $2\pi k \pm i \ln 3, k \in \mathcal{Z}$;

№175. $-\frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{5} + (2k+1)\pi\right) + \frac{i}{2}\ln\frac{\sqrt{26}}{5}, k \in \mathcal{Z}$; №211. Ні;

№212. $w' = e^z + ze^z$; №213. Ні; №214. Так, $w' = 2z\exp(z^2)$;

№215. Ні; №216. Так, $w' = 3\cos 3z$; №217. $\frac{1}{z}$;

№218. $z^2 + 2z$; №219. $2\operatorname{sh} z - z^2$; №220. $2\sin z - z$;

№221. $4\operatorname{ch} z + z^2 - 1$; №222. $2\cos 2z + z$;

№223. $2i(\cos z - 1) - iz^2 + 2$; №224. $(2+i)z^3$; №225. $(i-2)z^4$;

№226. $\frac{z-1}{z+1}$; №227. Ні; №228. Так; №229. Так;

№230. Ні; №231. Так; №232. $c_1(ax + by) + c_2$;

№233. $c_1 xy + c_2$; №234. $c_1 \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + c_2$;

№235. $c_1(x^2 - y^2) + c_2$; №236. $\operatorname{Re} z > 0$;

№237. $x^2 + y^2 < 1, z \neq 0$; №238. $x^2 + y^2 < 1, z \neq 0$.

№ 239. $x^2 + y^2 > \frac{1}{3}$;

№ 240. $f'(z) = 0, z \in D$;

№ 241. $e^z - 1$; №

№242. e^{iz}; №

№243. $3z - 2iz$;

№ 244. $-z + 2iz$;

№ 245. $e^{-iz} - 2$;

№ 246. ie^{-z};

№ 247. $\mathrm{sh}z$;

№ 248. $\mathrm{ch}z + 1$;

№ 249. $\cos z$;

№ 250. $1 - \cos z$;

№ 251. 2^{-z};

№ 252. $(3 + i)z^2 + 3$;

№ 253. $-(1 + 2i)z^2 + 2$;

№ 254. $2iz^3 + 4$;

№ 255. $(1 - i)z^3$;

№ 256. $-(1 + 2i)z^3 + 1$;

№ 257. $-2iz^3 - 1$;

№ 258. $iz^3 + 2z + 5$;

№ 259. $-iz^3 + 4z + 1$;

№ 260. $z^2 - 3iz$;

№ 261. $z^2 + 5z - 11$;

№ 262. $i \cdot 2^{-iz}$;

№ 263. $-i \cdot 3^z + i$;

№ 264. $2^{-iz} + 1$;

№ 265. $-2z^2 + z + 1$;

№ 266. $i3^{iz} - i$;

№ 267. $-(1 + i)z^2 + iz$;

№ 268. $\cos(2z + 1)$;

№ 269. $-z^2 + 1$;

№ 270. $\ln z$;

№ 301. $2\pi i$;

№ 302. $2 + i$;

№ 303. $2 + 2i$;

№ 304. 1;

№ 305. 2;

№ 306. 2;

№ 307. $-\frac{i}{e}$;

№ 308. $2A^2\pi^2$;

№ 309. 0;

№ 310. $\frac{1}{3}R^3 + e^{i\frac{\pi}{4}}$; № 311. $\frac{2}{3}(1+3i)$; № 312. $2+\frac{i}{2}$;

№ 313. $\frac{3+i}{2}$; № 314. $\frac{1}{2}\left(2\sqrt{5}+\sqrt{2}+\ln\left(2+\sqrt{5}\right)-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$;

№ 315. $\ln 2+\pi i$; № 316. πi; № 317. 0;

№ 318. πi; № 319. $e\left(2-e^{-i}-1\right)$; № 320. $1+e^{-i}(e-2)$;

№ 321. 1; №322. 2; № 323. $-7e^{-2}+(3-2i)e^{i}$;

№ 324. $-\frac{1}{8}\left(\frac{\pi^2}{4}+3\ln^2 2\right)+i\frac{\pi}{8}\ln 2$; № 325. $\frac{4}{\pi}\sqrt[4]{2}\left(\sqrt{2}+i\left(\sqrt{2}+2\right)\right)$;

№ 326. $-\frac{8i}{3}$; № 327. $-\ln\sqrt{\mathrm{sh}^2 1+\mathrm{ch}^2 1}+i\,\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}1\cdot\mathrm{th}1)$;

№ 328. $\frac{1}{8}(e-1)\left(1+i\sqrt{3}\right)$; № 329. $\frac{1}{8}\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(e^{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}-1\right)$;

№ 330. $\frac{1}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)(1-\ln 2)$; № 391. Розбігається;

№ 392. Збігається; № 393. Збігається; № 394. Збігається;

№ 395. Розбігається; № 396. Збігається абсолютно; № 397. Збігається;

№ 398. Розбігається; № 399. Збігається; № 400. Розбігається;

№ 401. $1<|z-2i|<2$; № 402. $|z|<e$; № 403. $2<|z+1+i|<3$;

№ 404. $|z-1|>1$; № 405. $1<|z|<5$; № 406. $|z-1|<\frac{\sqrt{2}}{3}$;

№ 407. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(z-1)^n}{4^{n+1}}, R = 4;$

№ 408. $2 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 7}{4^{n+1}} (z-1)^n, R = 4;$

№ 409. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{(z-1)^n}{n}, R = 1;$

№ 410. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e \cdot 3^n (z-1)^n}{n!};$

№ 411. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n}{(2n+1)!} [(2n+1)\cos 2 - 2\sin 2](z+1)^{2n+1} - \cos 2 -$

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} [2\cos 2 + 2n \sin 2](z+1)^{2n};$

№ 412. $\operatorname{ch} 2 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(z-i)^{2n+1}}{(2n+1)!} + i \operatorname{sh} 2 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(z-i)^{2n}}{(2n)!};$

№ 413. $25 + 70(z-2) + 74(z-2)^2 + 39(z-2)^3 + 10(z-2)^4 + (z-2)^5;$

№ 414. $-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{z^{n+1}};$

№ 415. $-\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{z^{2n+1}};$

№ 416. $-\frac{i}{4(z-i)} - \frac{1}{4(z-i)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+3) i^n (z-i)^n}{2^{n+4}};$

№ 417. $\frac{1}{2} + z + z^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)! z^n};$

№ 418. $(z-2)^3 + 6(z-2)^2 + \frac{23}{2}(z-2) + 5 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{48n^2+72n+23}{(2n+2)!}(z-2)^{1-2n} +$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{(2n+2)!}(16n^2 + 24n + 5)(z-2)^{2n};$

№ 419. $-\sum_{n=-\infty}^{-2} e \cdot z^n + \frac{1-e}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{p=n+2}^{\infty} \frac{1}{p!}\right) z^n;$

№ 420. $\frac{1}{z} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\pi k)^{2n}}\right) z^{2n-1};$

№ 511. $z = 0$ – *кратності* $4, z = \pi n, n = \pm 1, \pm 2, \ldots,$ *кратності* $1;$

№ 512. $z=0-$ *кратності* $2, z=\pi n i, n=\pm1,\pm2,\dots,-$*кратності* 3;

№ 513 z=-πi-кратності 2, z=πni,n=0,1,±2,±3,…,- кратності 1;

№ 514. z=0 - кратності 3, z=2πn, n=±1,±2,…, -кратності 4;

№ 515. z=±πi - кратності 2, z=(2n+1)πi, n=1,±2,±3,…,-кратності 1;

№ 516. z=0, z=±1-прості полюси; № 517. $z=\frac{\pm1\pm i}{\sqrt{2}}$ – прості полюси;

№ 518. z=±i – прості полюси; № 519 немає;

№ 520. z=0- усунена точка, z=2πki, k=±1, ±2,…, - прості полюси;

№ 521. z=1 -істотно особлива точка; № 522. z=2πki, kϵz, -прості полюси;

№ 523. z=a+2πn, z=π-a +2πk, nϵz, kϵz-прості полюси;

№ 524. z=πn, nϵz - істинно особливі точки; № 525 z=2πk, kϵz – усунені точки;

№526 z=0 - полюс другого порядку, z=-1 -істотно особлива точка;

№ 527. $z=\frac{1}{\pi k}$, k=±1, ±2,…, -істотно особливі точки, z=0 – неізольована особлива точка; № 528. $res f(1)=-1, res\, f(2)=2, res\, f\,(\infty)=-1$;

№ 529. $res\, f(z_1)=-\frac{z_2}{(z_2-z_1)^m}$; $resf(z_2)=\frac{z_2}{(z_2-z_1)^m}$, $resf(\infty)=0$;

№ 530. $resf(0)=1, resf(\pm1)=-\frac{1}{2}; resf(\infty)=0$

№ 531. $resf(-1)=-resf(\infty)=(-1)^{n+1}\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$;

№ 532 $resf(2\pi ni)=1$, n=±1, ±2,…; № 533. $resf(1)=-resf(\infty)=-1$;

№ 534. $resf\;(2\pi ni)=-1$, nϵz; № 535 $resf(\pi n)=(-1)^n$, nϵz;

№ 536 $resf(2\pi n-i\ln(3\pm2\sqrt{2}))=\pm\frac{1}{2i\sqrt{2}}$, nϵz;

№ 537 $resf(0)=0$, якщо n=2k-1, kϵN; $resf(0)=\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$, *якщо* $n=2k, k\epsilon N$;

№ 538. $resf(\frac{1}{\pi n})=(-1)^{n+1}\frac{1}{\pi^2n^2}$, n=±1,±2,…; № 539. $resf(0)=resf(\infty)=0$;

№ 540. $resf(\pm i)=\pm\frac{i}{4e}$, $resf(\infty)=0$; № 541. $resf(0)=0$;

№ 542. $resf(1)=e$; № 543. $resf(0)=\sin 1;\ res(1)=-\sin 1$

№ 544. $resf(0)=1-e^{-1}$, $resf(-1)=e^{-1}$; № 545. $resf(0)=e^{-1}-1$;

№ 546. $resf(0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!(2n+1)!}$; № 547. $resf(0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(n+1)!}$;

№ 548. $resf(-3)=-\sin 2\left[\sum_{n=1}^{\infty}x=\frac{4^{2n}}{(2n-1)!(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^{2n+1}1}{(2n)!(2n+1)!}\right]$;

№ 549. 0; № 550. $-\frac{2\pi i}{(n-1)!}$;

№ 551. 0, якщо n=2k, k ϵ N; $\frac{(-1)^k}{(2k)!}$, якщо n=2k+1, k=0, 1, 2,…; № 552. 0;

№ 553. πi; № 554. $-8\pi^3 i$; № 555. $\frac{-\pi i}{3}$; № 556. $\frac{\pi i ch2}{5}$;

№ 557. $-\frac{2\pi i}{e}$; № 558. 3π; № 559. 10πi; № 560. 0;

№ 561. 2πi; № 562. –(sin 1 + cos 1)2πi; № 563. 2πi; № 564.2πi;
№ 565. 2πi; № 566. 0; № 567.2πisin 1; № 568. -2πi;
№ 569.$2\pi i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+1)!}$; № 570. π; № 571.$\pi$; № 572. $\frac{\pi}{8}$;
№ 573. $\frac{\pi}{6}$; № 574. $\frac{\pi}{(2\sqrt{2})}$; № 575. $\frac{2\pi}{3}$; № 576. $\frac{\pi}{2}$;
№ 577.$\frac{\pi}{(e)}$; № 578. $2\pi\sqrt{2}(\cos\frac{\sqrt{2}}{2}ch\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin\frac{\sqrt{2}}{2}sh\frac{\sqrt{2}}{2})$; № 579. $\frac{\pi\cos 2}{e^2}$;
№ 580.$\frac{\pi(4-e)}{3e^2}$; № 581.$\frac{\pi(\frac{1}{3}\cos 1-\sin 1)}{e^2}$; № 582.$\frac{\pi}{2e^{ab}}$; № 583. $\frac{\pi(ab+1)}{(4b^3e^{ab})}$;
№ 584.$\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$; № 585. $\frac{125\pi}{32}$; № 586.0; № 587.$\frac{4\pi}{\sqrt{3}}$;
№ 588.$\frac{2(3\sqrt{5-7})}{(3\sqrt{5-5})}$; № 589.$\pi\sqrt{2}$; № 590. $\frac{2\pi(a-\sqrt{a^2-b^2})}{b^2}$; № 741.$Imw>0$;
№ 742.$u^2+(v+1)^2>2$; № 743.Rew<0;
№ 744. $u^2+(v-1)^2<1$; № 745.Rew$<0{,}5$,$Imw<0$;
№ 746. $|$w-$\frac{1}{2}|>\frac{1}{2}$, u>0; № 747.-$\varphi<\arg w<0$;
№ 748.$|w-\frac{1}{3}|>\frac{1}{3}$, u$<\frac{3}{4}$; № 749. Rew$>0$;
№ 750. u$<v$; № 751.$\ln z<u<\ln R$;
№ 752. $|$w-1$|<1$, Imw>0; № 753. $|$w$|<1$, 0$<argw<\frac{\pi}{2}$;
№ 754.Прямокутник з вершинами у точках 1,2,2+ie, 1+ie;
№ 755. $|$w$|<1$;
№ 756.Уся площина w із розрізом вздовж відрізка u=0, -1$\leq v<1$;
№ 757.Imw<0; № 758. Imw>0;
№ 759. Imw>0; № 760. W=-iz.

Література

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. –М.: Наука, 1985.
2. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного.
3. Лунц Т.Л., Эльсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного. –М.: Наука, 1958.
4. Краснов М.Л., Макаренко Г.И. Операционные исчесления. –М.: Наука, 1964.
5. Мартыненко В.С. Операционные исчесления. –М.: Наука, 1964.
6. Методические указания к типовому расчету по теории функций комплексного переменного и операционному исчеслению для студентов электрорадиотехнических специальностей / Сост. Л.П. Пеклова, С.В. Горленко, А.А.Якубенко, Буценко Ю.П. и др. –К.: КПИ, 1989.

7). Комплексний аналіз. Методичні вказівки до виконання типової розрахункової роботи з комплексного аналізу для студентів другого курсу фізико-математичного факультету / Уклад.: В.В.Дрозд. – К.: НТУУ «КПІ», 2016

Зміст