НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Фізико-математичний факультет
(повна назва інституту/факультету)

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей
(повна назва кафедри)

«До захисту допущено»

Завідувач кафедри
__________ О.І. Клесов
(підпис) (ініціали, прізвище)

“___”_____________20__ р.

Дипломна робота

освітньо-кваліфікаційного рівня «спеціаліст»

зі спеціальності 111, математика, математик
(код і назва)

на тему: «Задача багатокритеріальної оптимізації ключових показників математичної моделі діяльності малих підприємств».

Виконав (-ла): студент (-ка) 6 курсу, групи ОМ-61 с
(шифр групи)

Боднарчук Валерія Степанівна _______________
(прізвище, ім'я, по батькові) (підпис)

Керівник канд. фіз.-мат. наук, доц. Алєксєєва І.В _______________
(посада, науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали) (підпис)

Рецензент завідувач відділу Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, д.ф.-м.н., с.н.с. П.І. Стецюк _______________
(посада, науковий ступінь, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали) (підпис)

Засвідчую, що у цій дипломній роботі немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студент _____________
(підпис)

Київ – 2017 року

Національний технічний університет України

**«Київський політехнічний інститут
імені Ігоря Сікорського»**

Фізико-математичний факультет
(повна назва)

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей
(повна назва)

Освітньо-кваліфікаційний рівень – «спеціаліст»

Спеціальність 111, математика, математик
(код і назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри
__________ О.І. Клесов
(підпис) (ініціали, прізвище)

«___»____________20__ р.

ЗАВДАННЯ
на дипломну роботу студенту
Боднарчук Валерії Степанівни
(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи «Задача багатокритеріальної оптимізації ключових показників математичної моделі діяльності малих підприємств»,

керівник роботи канд. фіз.-мат. наук, доц. Алєксєєва І.В.,
(прізвище, ім'я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом по університету від «02» листопада 2017 р. № 4074-с

2. Термін подання студентом роботи до 14 грудня 2017р.

3. Вихідні дані до роботи технологічна таблиця для побудови математичної моделі у EXCEL, методи розв'язання багатокритеріальної задачі оптимізації.

4. Зміст роботи вступ; побудова моделі малого ІТ підприємства та розв'язання за допомогою різних методів; прийняття рішення по знайденим розв'язкам; висновки; список використаних джерел.

5. Перелік ілюстративного матеріалу (із зазначенням плакатів, презентацій тощо) ____

____

6. Дата видачі завдання 1.09.2017

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання дипломної роботи	Термін виконання етапів роботи	Примітка
1	Пошук літератури з тематики дипломної роботи	1.09.16-3.09.16	
2	Ознайомлення з проблемами теорії векторної оптимізації, поняттям оптимальності за Парето.	5.09.16-20.10.16	
3	Вивчення методів розв'язання векторних задач лінійної оптимізації та їх переваг і недоліків.	21.10.16-21.11.16	
4	Побудова математичної моделі малого підприємства у вигляді ВЗЛП, для знаходження її ключових економічних показників.	22.11.16-26.11.16	
6	Аналіз отриманих розв'язків, вибір найкращого за методом VIKOR.	26.11.16-30.11.16	
5	Оформлення дипломної роботи	1.12.2017-12.12.16	

Студент ______________ Боднарчук В.С.
(підпис) (ініціали, прізвище)

Керівник роботи ______________ Алєксєєва І.В.
(підпис) (ініціали, прізвище)

АНОТАЦІЯ

В даній дипломній роботі побудовано математичну модель лінійної векторної задачі оптимізації малого підприємства з залученням додаткового ресурсу. Одержано розв'язки поставленої задачі кількома методами з використанням надбудови «Пошук розв'язку» у Excel. Виконано порівняння отриманих розв'язків методом багатокритеріального прийняття рішення VIKOR.

Робота виконана на сторінок 62, містить 11 рисунків, 2 таблиці, 5 додатків.

Ключові слова: багатокритеріальна оптимізація, векторна задача лінійного програмування, методи розв'язання векторної задачі лінійного програмування, оптимізація підприємства.

Summary

In this thesis a mathematical model of a linear vector problem of optimization of a small enterprise with the involvement of additional resources is constructed. The solution of the task is achieved by several methods using the "Search Solution" add-in in Excel. The comparison of the obtained solutions by the method of multicriteria decision making VIKOR is fulfilled.

Work is performed on 62 pages, contains 11 drawings, 2 tables, 5 appendices.

Keywords: multiobjective optimization, multiobjective optimization problems, solution methods multiobjective optimization problems, optimization of the enterprise.

ЗМІСТ

ВСТУП

Кожен день в нашому житті ми приймаємо рішення - великі і малі, пов'язані з бізнесом, з особистими і громадськими справами. У давнину люди приймали рішення, ґрунтуючись на інтуїції, висновках астрологів, віщунів та тощо.

Вивчення систем лінійних рівнянь ведеться досить давно. Виділення класам задач, які визначаються лінійним функціоналом на множині з лінійними обмеженнями варто віднести до 30-х років. Одним з перший хто досліджував в загальній формі лінійне програмування був: Джон фон Нейман, знаменитий математик і фізик, який довів основну теорему про математичні ігри і досліджував економічну модель, яка носила його ім’я.

Коли вченими був усвідомлений той факт, що економічними процесами можна навчитися керувати, в економіку міцно ввійшло поняття оптимальності. Оптимальність зв'язується із здійсненням найкращого вибору (досягненням бажаної мети) при обмежених можливостях. Розвитку та впровадження поняття оптимальності в економіці чимало сприяла поява таких розділів математики, як лінійне, нелінійне і динамічне програмування.

З 1969 року стала вручатися Нобелівська премія в області економіки. Серед Нобелівських лауреатів є чимало професійних математиків або ж економістів, які отримали блискучу математичну освіту. У зв'язку з цим слід нагадати ім'я нашого співвітчизника, математика Л.В. Канторовича, який стояв біля витоків зародження лінійного програмування і його широкого застосування в плановій економіці. Він став Нобелівським лауреатом спільно з американським економістом Т. Купмансом в 1975 році.

Розвитку проблеми прийняття рішення в умовах багатокритеріальної невизначеності присвячені праці багатьох вітчизняних і зарубіжних вчених:

В.С. Михалевича [15], І.В. Сергієнка [16],Ю.К. Машуніна [11], R.E.Steuer, Carlos A. Coello Coello [18] та інших.

Вибір рішення полягає у вказівці серед допустимого такого рішення, яке оголошується обраним (найкращим). Слід зауважити, що нерідко відбувається вибір не одного, а цілого набору рішень, що є певною підмножиною множини можливих рішень X. Найпростіший приклад, - коли потрібно вибрати кілька людей, які претендують на заміщення певного числа вакантних посад. Принципова складність завдань вибору при багатьох критеріях полягає в неможливості апріорного визначення того, що називати найкращим рішенням. Кожна особа, яка приймає рішення, має право вкладати свій зміст в це поняття. Більш того, невелика зміна обставин, при яких здійснюється вибір, може привести до зміни змісту найкращого рішення. Поняття найкращого рішення залежить від надзвичайно великої кількості параметрів, які не вдається врахувати в рамках фіксованої математичної моделі.

РОЗДІЛ І. ПОНЯТТЯ ПРО ВЕКТОРНУ ЗАДАЧУ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

1.1 Побудова математичної моделі виробничої фірми

Побудова математичної моделі виробничого плану фірми [5]. Припускаємо формування вектору змінних, наявність критерію і умов обмеження, які накладаються на функціонування фірми.

Вектор змінних. Нехай $X(t)=\{x_j(t), j=1,...,N\}$ - вектор змінних, кожна компонента, якого $j \in N$ визначає вид та об'єм $x_j(\mathrm{t})$ виробів, які потрібно включити у виробництво у цьому році $t \in T, N$ - множина видів виробів, робіт, послуг. На змінні $x_j(\mathrm{t})$ накладаються умови $u_j, j \in N$. Вони визначають теоретичний об'єм виробів j-виду. Величини $u_j, j \in N$ отримані при дослідження ринка товару, які можуть вироблятися підприємством, тобто $x_j(\mathrm{t}) \le \mathrm{u}_j(\mathrm{t}), \mathrm{j}=1,...,N$.

Критерій визначає ціль функціонування фірми і слугує виміром оцінки до досягнення поставленої мети.

Продукція, яка виробляється на фірмі характеризується множиною критеріїв K техніко-економічних показників. Функціональну залежність будь-якого показника $k \in K$ від об'єму виробництва даної продукції $X(\mathrm{t})$ позначимо через $f(X(\mathrm{t}))$, у припущені, така залежність існує. Нехай функціональна залежність $f(X(\mathrm{t}))$ лінійна, тобто

$$\forall k \in K, f_k(X(\mathrm{t}))=\sum_{j=1}^{N} c_j^k x_j(\mathrm{t}), \tag{1.1}$$

де c_j^k - величина k-го показника, який характеризує одиницю j-го вида продукції, $j \in N$.

$\forall k \in K, f_k(X(\mathrm{t}))$ можна використовувати, як критерій.

Обмеження враховуються при розвитку плану пов’язаних з ресурсами (потужність підприємства, трудові ресурси і плановими показниками, які необхідно досягнути).

Обмеження по ресурсам. Припустимо лінійну залежність затрат ресурсів від об’єму вироблених товарів $X(t)=\{x_j(t),\ j=1,...,N\}$:

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(t)x_j(t) \le b_i(t), I=1,...,M \ , \tag{1.2}$$

де $a_{ij}(\mathrm{t}), i=1,...,\mathrm{M}$, $\mathrm{j}=1,...,\mathrm{N}$ - кількість i-го ресурсу, необіхідного для виробництва одиниці j-го виду виробу.

Множина індексів ресурсів М включає:

- множену матеріальних ресурсів $M_{mat} \subset M$, які характеризують матеріали, напівфабрикати і так далі, які використовуються на виробництві;
- множину трудових ресурсів (спеціальностей) $M_{tr} \subset M$, які приймають участь у виробництві;
- множину фондованих ресурсів (потужність) $M_f \subset M$.

Аналогічно (1.2) представимо затрати по i-му ресурсу для окремого q-го підрозділу:

$$\sum_{j=1}^{N_q} a_{ij}^q(t)x_j(t) \le b_i^q, i=1,...,M_q, q=1,...,Q, \tag{1.3}$$

де b_i^q- величина i-го ресурсу, наявного у q-тому підрозділі підприємства на планованого періоду, q-індекс, Q-множина підрозділів (складів «цехів») підприємства, M_q- множина видів ресурсу, які використовуються в q–тому підрозділі.

Обмеження пов’язані з плановими показниками:

$$\sum_{j=1}^{N} c_i x_i(\mathrm{t}) \ge \mathrm{b}_k^{\min}(\mathrm{t}), \mathrm{k} \in \mathrm{K}\ , \tag{1.4}$$

де c_i - величина одиниці j - го економічного показника, який характеризує підприємство, $b_k^{\min}$ - мінімальна величина планового показника, якого потрібно досягнути у фірмі.

Для побудови моделі точних показників, які використовуються у критеріях і обмеженнях.

Витрати виробництва на одиницю продукції поділяють на змінні та постійні в залежності від їх участі.

Змінні витрати залежать від об’єму виробництва:

$a_{ij}(t), j = 1,...,N, I = 1,...,M$ - витрати i-го ресурсу на одиницю j-го виду продукції (норма); i, M - індекси і множина всіх ресурсів (матеріальних, трудових, і т.д.), тобто змінні витрати, які змінюються пропорційно об’єму виробництва деякого виду продукту;

$G_i(X) = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(t) x_j(t), I = 1,...,M$ - витрати i-го ресурсу на всі види продукції.

Собівартість одиниці продукту, отримані затрати, представимо у вигляді суми собівартостей змінних витрат:

$$a_j^p = \sum_{i=1}^{M_{mat}} p_i a_{ij}^{mat} + \sum_{i=1}^{M_{tr}} p_i a_{ij}^{tr} + \sum_{i=1}^{M_f} p_i a_{ij}^f, \; j = 1,...,N, \qquad (1.5)$$

де a_{ij}^{mat}, a_{ij}^{tr}, a_{ij}^{f}, p_i - витрати на одиницю продукту і вартість матеріальних, трудових і фондованих ресурсів відповідно;

Постійні витрати не залежать від об’єму виробництва і розраховані на одиницю продукту a_j^{nak}- (амортизаційні витрати, адміністративні затрати, витрати на утримання будівель і обладнання). В цілому планові витрати одиниці продукту обчислюється, як сума собівартості та витрат: $a_j = a_j^p + a_j^{nak}, j = 1,...,N$ - вона є основною для формування ринкової ціни продукції. Аналогічно визначається (по мірі можливості) і зіставляють витрати виробництва на одиницю продукту на аналогічний товар фірми конкурента.

Ціна одиниці продукції j –го виду є наслідком маркетингових дослідів і припускається проведення розрахунку рівня ціни за умови політики цін, який приймається стосовно до кожного конкретного сегменту ринка.

Об'єм продаж:

$$f_k(X(\mathrm{t})) = \sum_{j=1}^{N} p_j x_j, k \in K \tag{1.6}$$

де k -індекс показника об'єму продажу.

Прибуток:

Валовий прибуток на одиницю продукту знаходиться, як різниця між вартістю j -го виду продукції p_j і змінними витратами:

$$\pi_j^{val} = p_j - a_j^p(t),\ j = 1,...,N, \tag{1.7}$$

Прибуток від реалізації продукту по фірмі:

$$\pi = f_k(X(t)) = \sum_{j=1}^{N} \pi_j x_j, k \in K, \tag{1.8}$$

Прибуток, який підлягає розподілу: $\pi^{pd} = \pi - c^{div}$, де c^{div}- сумарний дивіденд, передбачувані до видачі в плановому році.

Добавлена собівартість на одиницю продукту визначається як різниця між вартістю та матеріальними витратами продукту виду:

$$p_j^{dob} = p_j - a_j^{mat}(t), j = 1,..., N, \tag{1.9}$$

де $a_j^{mat}(t) = \sum_{i=1}^{M_{mat}} p_i a_{ij}, j = 1,..., N$ - собівартість матеріальних витрат на одиницю виду продукту, понесених зовнішніми виробниками.

Використовуючи економічні показники (6)-(9), як критерій (1) основна ціль фірми і враховуючи обмеження (2)-(4), представимо модель функціонування фірми в стандартному вигляді задачі лінійного програмування:

$$\max\ f_k(X(t)) \equiv \sum_{j=1}^{N} c_j^k x_j(t), \forall k \in K, \tag{1.10}$$

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(t)x_j(t) \le b_i(t), I = 1,...,M \ , \tag{1.11}$$

$$\sum_{j=1}^{N_q} a_{ij}^q(t)x_j(t) \le b_i^q(t), i = 1,...,M_q, q = 1,...,Q \ , \tag{1.12}$$

$$\sum_{j=1}^{N} c_j^k x_j(t) \ge b_k^{\min}(t), k \in K \ , \tag{1.13}$$

$$0 \le x_j(t) \le u_j(t), \ j = 1,...,N \ , \tag{1.14}$$

Задача (10)-(14) це і є математична модель економіки фірми.

1.2 Оптимальність за Парето

Широкий спектр задач у промисловості, техніці, економіці та багатьох інших галузях містить необхідність одночасної оптимізації декількох цілей. У багатьох випадках цілі визначаються в непорівнянних одиницях і існує певна ступінь конфлікту між ними, наприклад, одна ціль не може бути покращена без погіршення іншої. Такі задачі називають задачами багатокритеріальної оптимізації (Multiobjective Optimization Problems).

Вперше задача багатокритеріальної векторної оптимізації виникла у італійського економіста Вільфредо Парето при математичному дослідженні товарного обміну. В умовах однокритеріальних задач оптимізації зазвичай отримують один оптимальний розв‘язок. Проте, в багатокритеріальній оптимізації не існує прямого метода визначення чи розв‘язок краще, ніж інші. Найчастіше в багатокритеріальній оптимізації для порівняння розв‘язків застосовують метод, який називають відношенням домінантності Парето і який, замість єдиного оптимального розв‘язку, призводить до набору альтернатив з різними компромісами серед цілей [18].

Загальна лінійна задача багатокритеріальної оптимізації полягає в знаходженні допустимого вектора змінних $X \geq 0$ $(X = \{x_j\}, j = \overline{1,n})$, який максимізує векторний критерій $F(X)$ і записується у вигляді [23]:

$$F(X) = \{f_k \;\; X \;\; = \sum_{j=1}^{n} c_j^k x_j, \; ,k = \overline{1,K}\} \to \max$$
$$AX \leq B, \, X \geq 0, \qquad (1.15)$$

де $G(X) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid AX \leq B, \, X \geq 0\}$ – область допустимих розв‘язків.

У багатоцільовій оптимізації приймають відношення Парето домінації, яке спочатку було запропоновано Френсісом Йосидро Еджвортом у 1881 році [4], але узагальнено французьким економістом-віце-президентом Вілфредо Парето в 1896 році [1].

Означення 1[3] (співвідношення Парето домінування).

Ми говоримо, що вектор z^1 Парето - домінує у векторі z^2, позначається це $z^1 \underset{pareto}{\succ} z^2$, тоді і тільки якщо:

$$\forall i \in \{1,...,\mathrm{k}\} : \mathrm{z}_i^1 \geq z_i^2 \quad \text{і} \quad \exists i \in \{1,...,\mathrm{k}\} : \mathrm{z}_i^1 \geq z_i^2 .$$

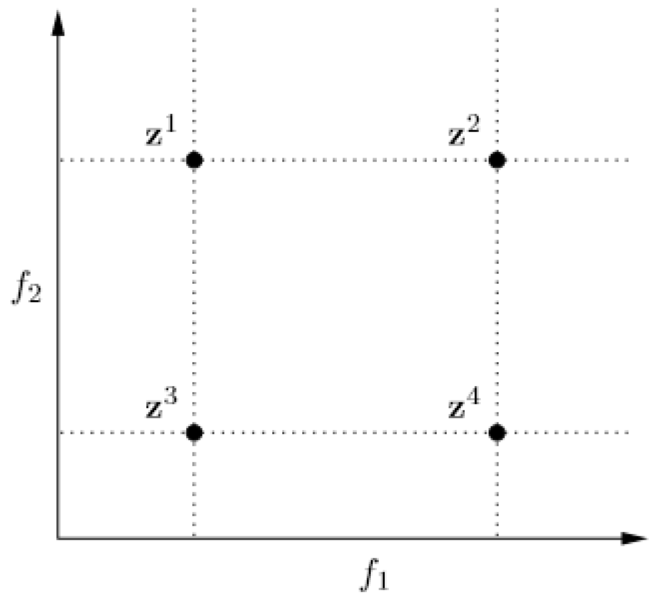


Рис. 1. Домінантне відношення

На малюнку зображено домінантне відношення Парето з прикладом з двовимірними векторами. Вектор z^2 строго більше z^3 в обох цілях, тому $z^2 \underset{pareto}{\succ} z^3$. Вектор z^1 також Парето-домінат вектора z^3, оскільки відносно f_1 ці вектори рівні, але в f_2, вектор z^3 строго менше, ніж z^1. Оскільки це не є загальним розв'язанням, деякі елементи не можна порівняти, як це відбувається, наприклад, з z^1 і z^4, тобто $z^4 \underset{pareto}{\not\succ} z^1$ і $z^1 \underset{pareto}{\not\succ} z^4$. Аналогічно, $z^4 \underset{pareto}{\succ} z^3$, $z^2 \underset{pareto}{\succ} z^1$, а $z^2 \underset{pareto}{\succ} z^4$.

Таким чином, для вирішення задачі ми повинні знайти ті рішення $x \in X$, чиї образи, $z = f(x)$, не є Парето-домінуючим будь-яким іншим вектором у реалізованому просторі. У прикладі, вектор домінує з z^2, і, отже, ми кажемо, що z^2 одно домінований.

Означення 2 (розв’язок оптимальний за Парето)

Розв‘язок X^* називається розв‘язком оптимальним за Парето задачі векторної оптимізації (1.15), якщо не існує іншого розв‘язку $X \in G(\mathrm{X})$ такого, що $f_k(\mathrm{X}) \geq f_k(X^*)\ \forall k = \overline{1,K}$ і хоча б для одного індексу $l \in \{1,\ldots,K\}$ $f_l(X) \geq f_l(X^*)$.

Означення 3 (розв’язок слабо оптимальний за Парето)

Розв‘язок X^* називається розв‘язком слабо оптимальним за Парето (оптимальним за Слейтером) задачі векторної оптимізації (1), якщо не існує іншого розв‘язку $X \in G(X)$ такого, що $f_k(X) > f_k(X^*)\ \forall k = \overline{1,K}$.

Набір оптимальних рішень Парето та його зображення в об'єктивному просторі визначається в наступному.

Означення 4 (оптимальна множина Парето).

Оптимальний набір Парето, P^*, визначається як:

$$P^* = \{x \in X \mid \nexists y \in X : f(y) \geq f(x)\}.$$

Означення 4 (фронт Парето).

Для парето-оптимального набору P^*, фронт Парето, FP^* визначається так: $FP^* = \{ f(x) = (f_1(x),\ldots, f_k(x)) \mid x \in P^*\}$.

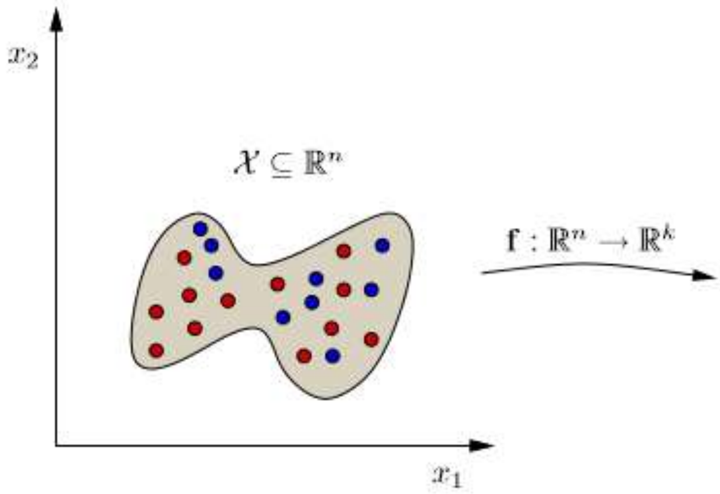


Рис. 2. Оптимальний набір

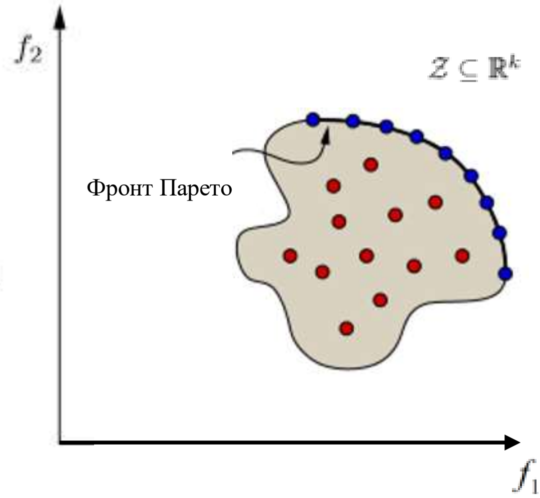


Рис.3.Фронт Парето

На малюнку показано поняття оптимального набору Парето і його зображення в об'єктивному просторі, на фронті Парето. Темні точки позначають оптимальні вектори Парето. У змінному просторі ці вектори називаються векторами оптимального рішення Парето, а в об'єктивному просторі називаються оптимальними векторами Парето. Як ми бачимо у фігурі, фронт Парето складається тільки з невідомих векторів.

На деяких методах оптимізації корисно знати нижню та верхню межі множини Парето. Ідеальна точка являє собою нижні межі і визначається $z_i^* = \min_{z \in Z} z_i$ для всіх $i = 1, \ldots, k.$ У свою чергу, верхня межа визначається точкою, яка $z_i^{nad} = \max_{z \in Z} z_i$ для всіх $i = 1, \ldots, k.$ Як ми вже згадували раніше, домінування Парето є найпоширенішим відношенням переваг, що використовується у векторній задачі лінійного програмування.

РОЗДІЛ 2. ІНТЕРПРЕТАЦІЯ ВЕКТОРНОЇ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ.

2.1 Основні поняття та означення

Означення 1: Нормалізація критеріїв – це однозначне відображення функції $F_k(\mathrm{X}),\quad \mathrm{k}=1,...,K$ в одновимірний простір R^1(сама функція $F_k(\mathrm{X}),\quad \forall\, \mathrm{k}\in K$ представляє собою функцію перетворення із N- вимірного евклідового простору R^N в R^1).

Для нормалізації критеріїв у векторних задачах будуть використовуватись лінійні перетворення:

$$F_k(X)=\mathrm{a}_k\, F_k'(\mathrm{X})+\mathrm{c}_k,\quad \forall k\in K,$$

або

$$F_k(X)=\left(F_k'(\mathrm{X})+\mathrm{c}_k\right)/\mathrm{a}_k,\quad \forall k\in K,$$

де $F_k'(\mathrm{X}),\ k=1,...,K$ – попередні (до нормалізації) значення критерія; $F_k(\mathrm{X}),\quad k=1,...,K,$ – нормалізоване значення критерія; a_k, c_k – постійне.

Для нормалізації критерію у векторній задачі повинні задовольняти умовам:

а) вони повинні вимірюватись в одних одиницях;

б) в точках оптимуму $X_k^*,\ k=1,...,K$ всі повинні мати однакові значення (наприклад, дорівнювати 1 або 100%)

Означення 2: Відносна оцінка $\lambda_k(X)$ представляє собою нормалізований критерій $k\in K$ в точці $X\in S$ ВЗЛП з нормалізацією:

$$\lambda_k(X)=\frac{F_k(X)-F_k^0}{F_k^*-F_k^0},\quad \forall k\in K$$

де $F_k(X)$ – величина k-го критерію в точці $X\in S$; F_k^* – величина k-го критерію в точці оптимуму $X^*\in S$, отриманий при розв’язуванні ВЗЛП окремо по кожному критерію; F_k^0– найгірша величина k-го критерію на множині допустимих значень S в ВЗЛП.

З нормалізації випливає, що будь-яка відносна оцінка точки $X \in S$ по k-му критерію відповідає обом вимогам нормалізації критеріїв.

<u>Означення 3:</u> Критерій $q \in K$ в ВЗЛП в точці $X \in S$ має пріоритет над іншими критеріями $k = 1,..., \mathrm{K}$, якщо відносна оцінка по цьому критерію рівна або більша інших відносних оцінок критеріїв, тобто

$$\lambda_q(X) \geq \lambda_k(X), \quad k = 1,..., K,$$

І строгий пріоритет, якщо хоча б для одного критерію $t \in K, \quad \lambda_q(X) > \lambda_t(X), \quad t \neq q,$ а для решти критеріїв

$$\lambda_q(X) \geq \lambda_k(X), \quad k = 1,..., K, \quad k \neq t \neq q.$$

<u>Означення 4:</u> У ВЗЛП з пріоритетним критерієм k-го над іншими критеріями $k = 1,..., \mathrm{K}, \quad \forall X \in S_q,$, вектор $P^q(X)$ кожна компонента, якого показує наскільки відносна оцінка $\lambda_q(X), \quad q \in K,$ більша інших відносних оцінок $\lambda_k(X), \quad k = 1,.., K,$ будемо вважати числовий вираз пріоритет q-го на рештою критеріями $k = 1,..., K,$ тобто

$$P^q(X) = \{p_k^q(X) = \lambda_q(X) / \lambda_k(X), \quad k = 1,.., K\},$$

$$p_k^q(X) \geq 1, \quad \forall X \in S_q \subset S, \quad k = 1,..., K, \quad \forall q \in K.$$

Заданий вектор пріоритетів критерію являє собою набір числових величин пріоритету одного з критеріїв і ВЗЛП над іншими, які хотіла отримати особа, що приймає рішення.

Теорема (про оптимальність Парето розв’язку ВЗЛП при рівнозначних критеріях)

В ВЗЛП максимізація при рівнозначних критеріях точка оптимуму $X^0 = \{\lambda^0, \quad X^0\}$, отримується на основі нормалізації критерію і принципу гарантованого результату, оптимальна по Парето, причому якщо критерії строго випуклі, то така точка тільки одна.

$\triangleleft$Із означення оптимальності розв'язку слідує, що в точці оптимуму X^0

$$\lambda^0 \le \lambda_k(X^0), \quad k = 1,...,K,$$

або

$$\lambda^0 \le (F_k(X^0) - F_k^{\ 0}) \Big/ (F_k^{\ *} - F_k^{\ 0}), \quad k = 1,...,K.$$

З теореми (про оптимальність по Парето розв'язку ВЗЛП максимізації з двома рівнозначними критеріями) і внаслідок системи, яка знаходиться вище завжди присутні два критерії, наприклад $q \in K$ і $p \in K$, для яких виконується тотожність:

$$\lambda^0 = \frac{F_q(X^0) - F_q^0}{F_q^* - F_q^0}, \quad q \in K, \quad p \in K, \tag{2.1}$$

а решта $\lambda^0 \le \lambda_k(X^0), \quad k = 1,...,K.$

Якщо точка оптимуму єдина, то теорема доказана. Але якщо точка оптимуму не єдина, тобто X^0 представляє собою підмножину, для якого виконується (2.1), то виконуємо другий етап доведення (іншими словами, перевіряємо на оптимальність решта критеріїв).

Розглянемо решта множин критеріїв $k \in K, \quad k \ne q \ne p$. Їх на два менше, ніж в першій множині K. Знайдемо максимум відносних оцінок для решти критеріїв $k \in K, \quad k \ne q \ne p$:

$$\lambda' = \max_{X \in S} \lambda$$

при умовах

$$\lambda_{q}(X) = \lambda^0, \quad \lambda_q(X) = \lambda^0,$$

де

$$\lambda = \min_{\substack{k \in K \\ k \neq q \neq p}} \lambda_k(X) \quad \text{та} \quad \lambda \leq \lambda_k(X), \quad k = 1,\ldots,K, \quad k \neq q \neq p.$$

В результаті розв'язку задачі отримаємо точку максимуму $X' \in S$ таку, що $\lambda' \leq \lambda_k(\mathrm{X}'), \quad k = 1,\ldots,K, \quad k \neq q \neq p,$і $\lambda_{q}(X') = \lambda^0, \quad \lambda_q(X') = \lambda^0,$

Аналогічний алгоритм застосовуємо для решти критеріїв, які залишилися. Так як множина критеріїв K скінчена, то розв'язок задач вигляду (яке представлене вище) скінчене. Тобто отримаємо точку оптимуму $X^0 = \{\lambda^0, \quad X^0\}$, яка є нашим оптимальним розв'язком задачі ВЗЛП, при цьому $\lambda^0 = \min_{k \in K} \lambda_k(\mathrm{X}^0)$ і $\lambda^0 \leq \lambda_k(\mathrm{X}^0), \quad \forall k \in K.$

При необхідності аналогічно повторюємо К-2 раз. В результаті приходимо до висновку, що не існує іншої точки X'', для якої один з критеріїв збільшився, а решта критеріїв при цьому не зменшились.

Таким чином, точка X^0 є не тільки гарантованим результатом, але і оптимальна по Парето, а це і потрібно було довести. $\triangleright$

Теорема (про оптимальність по Парето в ВЗЛП з заданим пріоритетом)

Якщо у опуклій ВЗЛП максимізації заданий пріоритет k–го критерію $p_k^q, \quad k = 1,\ldots,K, \quad \forall q \in K,$ над іншими критеріями, то точка оптимуму X^0 отримана на основі нормалізації критеріїв і принципу гарантованого результату, оптимальна по Парето, при чому така точка єдина.

$$\exists X' \in R^N [\forall \mathrm{k} \in \mathrm{K} \mid \mathrm{F}_k'(\mathrm{X}') \geq F_k(\mathrm{X}^0)] \,\&\, [\exists r \in K \mid \mathrm{F}_r(\mathrm{X}') > F_r(\mathrm{X}^0)].$$

2.2 Метод MaxMin для розв'язку ВЗЛП

2.2.1 Розв’язування ВЗЛП у випадку рівнозначних критеіїв

Для розв‘язання задачі пропонується застосувати один з апостеріорних методів [11], який гарантує одержання розв‘язку слабо оптимального за Парето.

На першому етапі розв‘язують задачу з початковими умовами за кожним критерієм окремо і знаходять найкращу точку X_k^* (точку оптимуму) і найгіршу X_k^0 (точку антиоптимуму), $\forall k \in K = K_1 \cup K_2$.

Далі будується максимінна задача оптимізації з нормалізованими критеріями [3]:

$$\lambda^0 = \max_x \min_k \lambda_k(X),$$

де $\lambda_k(X) = \dfrac{F_k(X) - F_k(X_k^0)}{F_k(X_k^*) - F_k(X_k^0)}, \forall k \in K$ – відносна оцінка k-го критерію в точці X_k^*, в якій значення $F_k(X_k^*)$ найкраще по k-му критерію, $F_k(X_k^0)$ – найгірше. Зауважимо, що $\forall k \in K$ в точці оптимуму X_k^*:

$$\lambda_k(X_k^*) = \frac{F_k(X_k^*) - F_k(X_k^0)}{F_k(X_k^*) - F_k(X_k^0)} = 1,$$

а в точці X_k^0:

$$\lambda_k(X_k^0) = \frac{F_k(X_k^0) - F_k(X_k^0)}{F_k(X_k^*) - F_k(X_k^0)} = 0,$$

тобто відносна оцінка лежить в межах $0 \le \lambda_k \le 1$, $\forall k \in K$.

На наступному етапі розв‘язання максимінна задача перетворюється в в стандартну задачу лінійного програмування, яка називається λ- задачею:

$$\lambda^0 = \max_x \lambda\,,$$

$$\lambda - \frac{F_k(X) - F_k(X_k^0)}{F_k(X_k^*) - F_k(X_k^0)} \le 0,\; k = \overline{1,K}\,,$$

$$A(\mathrm{X}) \le B,\; X \ge 0\,,$$

де $\lambda = \min_k \lambda_k(\mathrm{X})$.

В результаті розв‘язання λ- задачі одержуємо точку оптимуму X_{opt}, значення векторного критерію $F(X_{opt})$, відносну оцінку λ^0, яка є максимальним нижнім рівнем для усіх відносних оцінок $\lambda_k(X_{opt})$, $k = \overline{1,K}$ або гарантованим результатом.

2.2.2 Розв’язування ВЗЛП у випадку з пріоритетним критерієм

Розглянемо розв'язання ВЗЛП у випадку введення вектора пріоритетів [11].

Зазвичай при розв’язувані векторних задач з пріоритетами використовують знання людини, якій зрозумілий фізичний сенс задачі і пріоритет того або іншого критерію над іншими критеріям. Таку людину називають особою, що приймає рішення.

Вибір точки $X^0 \in S$ здійснюється за двома схемами:

1. Задається вектор пріоритетів $p_k^q, \quad k=1,...,K, \quad \forall q \in K$, і знаходиться відповідна точка оптимуму X^0 в якій значення $F_q(X^0)$ наближається до заданого f_q^0. (теорема 1-3)

2. По заданому значенню цільової функції f_q^0 знаходиться вектор пріоритетів $p_k^q, \quad k=1,..,K, \quad q \in K,$ і знаходиться $X^0 \in S$.

Алгоритм розв’язку векторної задачі з пріоритетним критерієм

Крок 1. Розв’язування ВЗЛП з рівнозначними критеріями. Результаті знаходимо точки оптимуму $X_k^*, \quad k=1,...,K,$, величини цільових функцій в цих точках $F_k^*, \quad k=1,..,K,$ які є границею множини Парето, а також найгіршу не зміну частину критерію $F_k^0, \quad k=1,...,K$.

При розв'язувані масимінної задачі і побудові на її основі λ-задачі отримаємо X^0- точку оптимуму розв’язку ВЗЛП при рівнозначних критеріях і максимальну оцінку λ^0, яка є гарантованим рівнем для всіх критеріїв у відносних одиницях.

В кожній точці $X_k^*, \quad k=1,...,K$ обчислюємо всі критерії $q=1,...,K$:

$$\left\{F_q(X_k^*), \quad q=1,...,K\right\}, \quad k=1,..,K$$

Як показують значення кожного із $q \in K$ критеріїв при переході від одної оптимальної точки до іншої.

В точці X^0 обчислюємо значення критеріїв $F_k(X^0)$ і всіх відносних оцінок $\lambda_k(X^0)$, які задовольняють нерівності $\lambda^0 \le \lambda_k(X^0), \quad k = 1,..,K, \quad X^0 \in S,$ тобто точка $X^0 \in S \subset S$ є центром множини Парето в відносних одиницях. В ній всі критерії більше або рівні λ^0. В інших точках $X \in S^0$ найменший із критеріїв у відносних оцінках $\lambda = \min_{k \in K} \lambda_k(X)$ завжди менше λ^0, тобто λ^0 виявляється найвищою точкою купола, побудованого із мінімальних відносних оцінок в точках оптимуму:

$$\left\{\lambda_q(X_k^*) = \left(F_q(X_k^*) - F^0\right) \Big/ \left(F_q^* - F^0\right), q = 1,..,K\right\}, \quad k = 1,..,K.$$

Матриця дозволяє визначити значення всіх критеріїв у відносних оцінках на границі множини Парето. Ця інформація є основою для подальшого вивчення структури множини Парето. З її допомогою вибираємо пріоритетний критерій $q \in K$.

Крок 2. Знаходимо границі зміни пріоритету критерію $q \in K$ для якого в точках X^0 і X_q^*

визначаємо пріоритет критерію $q \in K$ у співвідношенні до інших критеріїв:

$$p_k^q(X^0) = \lambda_q(X^0) \big/ \lambda_k(X^0),$$
$$p_k^q(X_q^*) = \lambda_q(X_q^*) \big/ \lambda_k(X_q^*), \quad k = 1,...,K,$$

І встановлюємо границі зміни заданого вектору пріоритетів:

$$p_k^q(X^0) \le \mathrm{p}_k^q \le p_k^q(X_q^*), \quad k = 1,..,K, \quad \forall q \in K.$$

Крок 3. Отримані результати

$$F_1^*, \mathrm{F}_2^*, ..., \mathrm{F}_k^*,$$
$$F_1(X^0), \mathrm{F}_2(X^0), ..., \mathrm{F}_k(X^0),$$
$$F_1(X_q^*), \mathrm{F}_2(X_q^*), ..., \mathrm{F}_k(X_q^*),$$
$$\lambda_1(X_q^*), \lambda_2(X_q^*), ..., \lambda_k(X_q^*)$$

І границі зміни заданого вектору пріоритету.

Ці результати є основою для прийняття рішення.

Крок 4. Особа, що приймає рішення, проводить ряд аналізів розв'язку ВЗЛП при рівнозначних критеріїв. Виявляє найбільш суперечливі критерії. Припускаємо, що у особи, яка приймає рішення має уявлення про пріоритетний критерій у вигляді його числового значення F_q. Вона порівнює цю величину з показниками по q-му критерію F_q^*, $F_q(X^0)$ і результатом на кроці 6.

Якщо $F_q(\mathrm{X}^0)$ відповідає вимогам особи, що приймає рішення, то задача розв'язана і переходимо до кроку 7. У іншому випадку, вибираємо нове значення коефіцієнтів заданого вектору пріоритетів $p_q = \left\{ p_k^q, k = 1, \ldots, \mathrm{K} \right\}, \quad \forall q \in K,$ таким образом, щоб оновлений заданий вектор пріоритетів був більше аналогічного вектора на попередній ітерації в точці оптимуму X_t^0.

$$p_k^q \geq p_k^q(X_t^0), \quad k = 1,..,K, \quad X_t^0 \in S^0 \subset S.$$

Крок 5. В даній λ - задачі вводимо заданий вектор пріоритетів в результаті якого отримаємо λ-задачу з пріоритетами:

$$\begin{aligned}
&\lambda^0 = \max \lambda, \\
&\lambda - p_k^q \lambda_k(X) \leq 0, \quad k = 1, \ldots, \mathrm{K}, \\
&G(\mathrm{X}) \leq \mathrm{B}, \quad X \geq 0.
\end{aligned}$$

Крок 6. Розв'язуємо λ-задачу . В результаті знаходимо:

- Точку оптимуму X_t^0;
- Максимальну відносну оцінку λ_t^0, таку, щоб $\lambda_t^0 \leq p_k^q \lambda_k(X_t^0), \quad k = 1, \ldots, \mathrm{K}, \quad \forall q \in K$;
- Величини всіх критеріїв $F_k(X_t^0), \quad k = 1, \ldots, K$;
- Відносних оцінок $\lambda_k(X_t^0), \quad k = 1, \ldots, K$;

- Вектор пріоритетів q-го критерію над іншими критеріями $p_k^q(X_t^0), \quad k=1,...,K.$

Переходимо до кроку 3.

Крок 7. Кінець.

В результаті розв'язку отримаємо точку оптимуму X_t^0 і максимальну відносну оцінку, таку, щоб $\lambda^0 \le p_k^q \lambda_k(X^0), \quad k=1,..,K, \quad \forall q \in K,$, де вектор пріоритетів $p_k^q, k=1,..,K,$ відповідає заданим поняттям ЗЛП про пріоритет q-го критерію над іншими.

2.3 Метод лінійної згортки з однаковими та різними пріоритетами

Розглянемо метод лінійної згортки, з однаковими та різними пріоритетами [10].

Формування задачі:

$$\mathrm{F}_{скал}^{\max}(x) = \sum_{k=1}^{l} \omega_k F_k^0(x), \quad x \in X,$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = \overline{1,m},$$
$$0 \le x_j,\ j = \overline{1,n}.$$

де $\omega_i, \quad i = 1,...,l,$ - вагові коефіцієнти, що відповідають цільовим функціям мають задовольняти наступній умові:

$$\sum_{i=1}^{l} \omega_i = 1, \quad \omega_i \ge 0, \quad i = 1,..,l,$$

і $F_k^0(x)$ є нормалізована k-го цільова функція $F_k(x), \quad k = 1,..,l.$

Для випадку лінійно зваженої суми ми розглядаємо задачу звичайну лінійну задачу програмування з лінійними цільовими функціями, що має наступну форму:

$$F_i(x) = \sum_{k=1}^{l} c_i^k x_i, \quad a_{ki} \in R.$$

Для нормалізовані цільові функції використаємо наступні форми перетворення:

$$F_k^0(x) = \frac{F_k(x)}{S_k} = \frac{c_1^k}{S_k} x_1 + \frac{c_2^k}{S_k} x_2 + ... \frac{c_n^k}{S_n} x_n,$$

де обчислення значення S_k знаходяться наступним чином:

$$S_k = \sum_{i=1}^{n} \left| c_i^k \right| \ne 0.$$

Очевидно, що у багатьох практичних завданнях об'єктивні функції представлені різними одиницями вимірювання (наприклад, якщо F1 вимірюється в кілограмах, F2 в секундах тощо). З цих причин необхідна нормалізація цільових функцій. Цілком очевидно, що тепер ці коефіцієнти мають значення з сегмента [0,1].

$$\mathrm{F}_{скал}^{\max}(x)=\sum_{k=1}^{l}\omega_k \frac{F_k(x)}{S_k}, \quad x\in X \tag{2.2}$$

Наступна теорема дає практичні критерії для виявлення деяких оптимальних рішень Парето задачі (2.2).

<u>Теорема:</u> Розв’язок ВЗЛП у випадку лінійних цільових функцій, при використані метода скалярізації для задачі (2.2) є оптимальним по Парето, якщо задовольняють наступним умовам: $\dfrac{\omega_k}{S_k}>0$ для $k\in\{1,...,l\}$.

$\lhd$ Позначимо X^* розв’язок ВЗЛП (2.2), яку отримали при максимізації функції $\mathrm{F}(x)=\sum_{k=1}^{l}\omega_k F_k^0(x).$ Очевидно, що виконується умова $\mathrm{F}(x^*)\geq F(x), \quad \forall x\in X.$ Далі ми отримаємо наступні твердження

$$\sum_{k=1}^{l}\omega_k F_k^0(x^*)\geq\sum_{k=1}^{l}\omega_k F_k^0(x), \quad \forall x\in X, \Leftrightarrow$$
$$\sum_{k=1}^{l}\omega_k F_k^0(x^*)-\sum_{k=1}^{l}\omega_k F_k^0(x)\geq 0, \quad \forall x\in X, \Leftrightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{l}\frac{\omega_k}{S_k}(\mathrm{F}_k(x^*)-F_k(x))\geq 0, \quad \forall x\in X. \tag{2.3}$$

Припустимо, навпаки, що розв'язок x^*задачі не є оптимальним по Парето. Тоді існує якийсь розв'язок x' для якого: $F_k(x')\geq F_k(x^*),$ що означає:

$$F_k(x^*)-F_{\ k}(x')\leq 0, \quad \forall k\in\{1,..,l\}.$$

Тоді існує хоча б один індекс k_i, для якого нерівність є сильною. Отже ці нерівності та припущення розглянуті вище про те, що значення $\frac{\omega_k}{S_k}$ є правильними, отримаємо

$$\sum_{k=1}^{l} \frac{\omega_k}{S_k} \left[F_k(x^*) - F(x') \right] \leq 0.$$

От і отримали суперечність твердженню (2.3). Таким чином, $\mathrm{F}(X^*) \geq F(x), \quad \forall x \in X.$ повинно бути оптимальним по Парето.

Ця теорема є способом побудови зважених коефіцієнтів $\omega_i, \quad i = 1,..,l$ для того, щоб генерувати тільки оптимальні рішення Парето, застосовуючи метод лінійної згортки. Тобто, якщо рішення визначають додатне дійсне число c, зважені коефіцієнти автоматично генеруються як $\omega_i = c \cdot S_i, \quad i = 1,...,l.$

<u>Наслідок</u>: Розв’язок ВЗЛП у випадку не нормованих лінійних цільових функцій, сформованих методом лінійної згортки (2.2), є оптимальним по Парето, якщо виконані наступні умови: $\omega_k > 0$ для всіх $k \in \{1,...,l\}$.

Отже, Основною ідеєю в методі лінійної згортки є вибір вагових коефіцієнтів ω_i, що відповідають цільовим функціям $F_i(x), \quad i = 1,..,l.$ Щоб далі, задачу багатокритеріальної оптимізації перетворити на звичайну задачу лінійного програмування з однією цільовою функцією. Багато авторів розробили системні підходи до вибору ваги. Одне з двох напрямків із методом лінійної згортки полягає в тому, що постійна та постійна зміна маси не обов'язково призводить до точного повного представлення оптимального набору Парето. Також були виявлені деякі недоліки мінімізації зважених сум задач у задачах багатокритеріальної оптимізації [2].

2.4 Метод послідовних поступок

Розв'яжемо векторну задачу лінійного програмування методом послідовних поступок [9].

Спочатку встановлюємо переваги серед всіх критеріїв, при чому на перше місце ставимо найважливіший.

Далі знаходимо оптимальний розв'язок по першому критерію і встановлюємо для нього поступку ΔF_1. Потім розв'язуємо задачу по другому критерію з додатковою умовою $F_1 \geq F_1^* - \Delta F_1$, де F_1^*- максимальне значення першого критерію. Після знаходження оптимального розв'язку по критерію F_2 назначаємо до нього поступку і вирішуємо задачу по третьому критерію з додатковими умовами з першими двома критеріями. Аналогічно продовжуємо розв'язування задачі, поки не буде знайдене значення останнього критерію, який є менш важливий з поступками по інших критеріям.

Нехай потрібно знайти оптимальне значення за трьома критеріями: $F_1 \to \max,\ \ F_2 \to \min,\ \ F_3 \to \max,$ при чому найважливіший є критерій F_1, на другому місці по пріоритету є F_2, він важливіший ніж F_3.

В результаті розв'язку задачі по першому критерію отримаємо, що $F_1^* = 155.$ Назначимо поступку по цьому критерію $\Delta F_1 = 30$ і далі розв'яжемо задачу по другому критерію з додатковою умовою по першому критерію $(\mathrm{F}_1 \geq F_1^* - \Delta F_1 = 1500 - 30 = 125,$ тобто $F_1 \geq 125)$. Нехай мінімальне значення другого критерію $F_2^* = 70,$ а поступка до нього $\Delta F_2 = 20$. Тоді розв'язуємо задачу на максимум критерію F_3 з додатковими умовами для першого та другого критерію. Умови по другому критерію $(\mathrm{F}_2 \leq F_1^* + \Delta F_1 = 70 + 20 = 125,$ тобто $F_2 \leq 90)$.

Якщо особі, що приймає рішення, задовольняють всі отримані розв'яки всіх трьох критеріїв, то задача вважається розв'язаною. Якщо ж якісь значення критеріїв не підходять, то робимо зміни у величинах поступок і розв'язуємо задачу спочатку.

РОЗДІЛ 3. ПРИКЛАД ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ У ФОРМІ ВЕКТОРНОЇ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ДЛЯ ОПТИМІЗАЦІЇ ФУНКЦІОНУВАННЯ МАЛОГО ПІДПРИЄМСТВА

3.1 Побудова моделі

Розглянемо математичну модель розвитку малого IT підприємства на основі багатокритеріальної лінійної задачі векторної оптимізації. Найважливішим ресурсом такого підприємства є персонал, тому основним ресурсним обмеженням вважаємо робочий час працівників. Нехай

$$F(x) = \{ f_k(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j^k x_j, \quad k = 1,..,K\} \tag{3.1}$$

Множина цілей, які потрібно максимізувати (дохід, додана вартість, прибуток)

За умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i + z_i, \; i = \overline{1,m}, \tag{3.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_i z_i \le V, \tag{3.3}$$

$$0 \le x_j \le u_j, \; j = \overline{1,n}, \; z_i \ge 0, \; i = \overline{1,m}, \tag{3.4}$$

де $X = \ x_j \ , j = \overline{1,n}$ – вектор змінних, кожна компонента якого визначає кількість j-го типу проектів, що розробляється підприємством, c_j^k – економічний показник k-го типу, що характеризує одиницю j-го типу продукту, a_{ij} – норми витрат i-го виду ресурсів на розробку кожного типу продукту, b_i – запас i-го ресурсу, V – сума витрат на залучення додаткових ресурсів, v_i – вартість одиниці i-го ресурсу, z_i – кількість одиниць i-го виду ресурсів, u_j – об‘єм попиту $i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$.

Після консультації з представниками кількох ІТ підприємств і на основі даних про середню зарплату в ІТ індустрії була складена технологічна таблиця. Змінами задачі є типи проектів, які виконуються на підприємстві, подвійні індекси це технологічні варіанти їх виконання. Особливістю даної задачі є наявність R&D проекту, який не є прибутковий в поточний період часу.

Таблиця 1

Тип продукції	x1		x2		x3	x4	x5			x6			запас	вартість		робочих днів (годин)		З/П	
Технологічний варіант	x11	x12	x21	x22	x31	x41 (R&D)	x51	x52	x53	x61	x62	x63	ресурсу	ресурсу		249	1986		
Ресурс 1	48		88		8		40		16	200	100		1986		5.952381			Ресурс 1	1000
Ресурс 2		48		84		40		32	20		100	168	1986		7.142857			Ресурс 2	1200
Ресурс 3	40			88			200			480			1986	7.14	7.142857			Ресурс 3	1200
Ресурс 4		36	84			80		200			496		1986		8.928571			Ресурс 4	1500
Ресурс 5	40		80						168			400	1986	7.14	7.142857			Ресурс 5	1200
Ресурс 6	48			80				240		488			1986	7.14	7.142857			Ресурс 6	1200
Ресурс 7			88				280		80		420		1986		8.928571			Ресурс 7	1500
Ресурс 8		56			80	80		240				460	1986		11.90476			Ресурс 8	2000
Ресурс 9					160	120	200			400		320	1986		11.90476			Ресурс 9	2000
Ресурс 10				60		200			280		280		1986		20.83333			Ресурс 10	3500
Собівартість 1(з/п)	1200	1330.952	2630.952	3050	2904.762	7547.619	6547.619	6585.714	7985.714	12866.67	15321.43	13342.86	вірстість на придбання						
Собівартість 2 (ресурси)	420	425	921	930	871	2642	1964	1976	2396	3217	3250	3250	додаткового ресурсу						
Вартість(обсяг)	2500	2500	5000	5000	10000		11000	11000	11000	22500	22500	22500	27804						
Прибуток	880	744.0476	1448	1020	6224	-10189	2488	2439	619	6417	3928.571	5907.143							
Додана вартість	FALSE	2075	4079.167	4070	9129	-2642	9035.714	9024.286	8604.286	19283.33	19250	19250							
Попит	20		30				6												

де 4 - тип проекту (R&D – research and development) націлений на пошук та розвиток кожного робітника фірми, Запас ресурсу – 1986 (робочих годин у році).

На основі технологічної таблиці будуємо математичну модель у вигляді ВЗЛП з системою обмежень.

В даній задачі розглядаємо чотири критерії, що потребують максимізації. 1-дохід підприємства, як оборот підприємства; 2- прибуток. Традиційна теорія фірми вважає, що поведінка фірми визначається єдиною ціллю – максимізацією прибутку, що неадекватно відображує реальну ситуацію на сучасному ринку. В інноваційних підприємствах більш важливим показником є додана вартість (так звана японська модель).

Система обмежень:

$$
\begin{cases}
48x_{11}+88x_{21}+8x_{31}+40x_{51}+16x_{53}+200x_{61}+100x_{62}\le 1986;\\
48x_{21}+84x_{22}+40x_{41}+32x_{52}+20x_{53}+100x_{62}+168x_{63}\le 1986;\\
40x_{11}+88x_{22}+200x_{51}+480x_{61}\le 1986+z_1;\\
36x_{12}+84x_{21}+80x_{41}+200x_{52}+496x_{62}\le 1986;\\
40x_{11}+80x_{21}+168x_{53}+400x_{63}\le 1986+z_2;\\
48x_{11}+88x_{22}+240x_{52}+488x_{61}\le 1986+z_3;\\
88x_{21}+280x_{51}+80x_{53}+420x_{62}\le 1986;\\
48x_{11}+88x_{21}+8x_{31}+40x_{51}+16x_{53}+200x_{61}+100x_{62}\le 1986;\\
56x_{12}+80x_{31}+80x_{41}+240x_{51}+460x_{63}\le 1986;\\
160x_{31}+120x_{41}+200x_{51}+400x_{61}+320x_{63}\le 1986;\\
60x_{22}+200x_{41}+280x_{51}+280x_{62}\le 1986;\\
7.14z_1+7.14z_2+7.14z_3\le 27804;\\
x_{11}+x_{12}\le 20;\\
x_{21}+x_{22}\le 30;\\
x_{51}+x_{52}+x_{53}\le 6;\\
x_{41}\ge 0.1(x_{11}+x_{12}+x_{21}+x_{22}+x_{31}+x_{51}+x_{52}+x_{53}+x_{61}+x_{62}+x_{63});\\
x_{41}\le 0.2(x_{11}+x_{12}+x_{21}+x_{22}+x_{31}+x_{51}+x_{52}+x_{53}+x_{61}+x_{62}+x_{63}).
\end{cases}
\qquad (3.5)
$$

Критерії, що потребують максимізації:

Дохід підприємства:

$$F_1=2500x_{11}+2500x_{12}+5000x_{21}+5000x_{22}+10000x_{31}+11000x_{51}+11000x_{52}+11000x_{53}+22500x_{61}+22500x_{62}+22500x_{63}$$

Прибуток:

$$F_2=880x_{11}+774x_{12}+1448x_{21}+1020x_{22}+6224x_{31}-10189x_{41}+2488x_{51}+2438x_{52}+618x_{53}+6416x_{61}+3928x_{62}+5907x_{63}$$

Додана вартість:

$$F_3=2080x_{11}+2075x_{12}+4079x_{21}+4070x_{22}+9128x_{31}-2642x_{41}+9036x_{51}+9024x_{52}+8604x_{53}+19283x_{61}+19250x_{62}+19250x_{63}$$

Обсяг виробництва:

$$F_4=x_{11}+x_{12}+x_{21}+x_{22}+x_{31}+x_{41}+x_{51}+x_{52}+x_{53}+x_{61}+x_{62}+x_{63}$$

3.2 Розв’язання ВЗЛП

1. Метод побудови λ - задачі для розв'язку ВЗЛП

Даний метод гарантує одержання розв'язку слабо оптимального за Парето.

На першому етапі знайдемо розв'язки задачі за кожним критерієм окремо і знайдемо найкращу точку X_k^* (точка оптимуму) і найгіршу X_k^0 (точка антиоптимуму).

Використовуючи надбудову "Пошук розв'язку" в MS Excel знайдемо розв'язок задачі.

Одержимо точки і значення функцій в них:

$$F_{\max}^1 = 29776.17;$$
$$X_1^* = (20; 0; 6.2774; 15.7585; 2.1817; 5.2024; 0; 5.2125; 0; 2.2806; 0; 0.3136; 1295.4692; 0; 2598.6484)$$
$$F_{\max}^2 = 69705.44;$$
$$X_2^* = (0; 0; 0; 0; 11.1202; 1.7229; 0; 3; 9939; 0; 0; 2.1156; 0; 0; 0; 0)$$
$$F_{\max}^3 = 234572.1119;$$
$$X_3^* = (20; 0; 6.2774; 15.7585; 2.1817; 5.2024; 0; 5.2125; 0; 2.2806; 0; 0.3136; 1295.4692; 0; 2598.6484)$$
$$F_{\max}^4 = 62.8824;$$
$$X_4^* = (12; 05278; 7.4712; 14.9961; 14.0446; 8.1250; 5.7165; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0)$$

Точки антиоптимуму:

$$F_{\min}^1 = 0;$$
$$X_1^0 = (0; 0.0000000000062; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0)$$
$$F_{\min}^2 = -39422.4826;$$
$$X_2^0 = (0; 20; 8.6282; 7.3415; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0)$$
$$F_{\min}^3 = 0;$$
$$X_3^0 = (0; 0.00000000028; 0; 0; 0; 0; 0.000000000001; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0)$$
$$F_{\min}^4 = 0;$$
$$X_4^0 = (0; 0; 0; 0; 0; 0.0000000000025; 0.00000000001; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0)$$

Таким чином, для значення векторних критеріїв в точках X_k^* складаємо таблицю (табл.2).

Таблиця 2

	F^1	F^2	F^3	F^4
X_1^*	297706.2	32532.33709	234572.1119	57.22692737
X_2^*	202738.5	69705.44424	173729.6451	18.95284488
X_3^*	297706.2	32532.3371	234572.1119	57.22692737
X_4^*	276454.8	44948.21221	218965.1925	62.88249543

- Розв’язування ВЗЛП у випадку рівнозначних критеіїв

Далі будується максимінна задача оптимізації з нормалізованими критеріями [3]:

$$\lambda^0 = \max_x \min_k \lambda_k(x),$$

де, $\lambda_k(X) = \dfrac{F_k(X) - F_k(X_k^0)}{F_k(X_k^*) - F_k(X_k^0)}, \quad \forall k \in K$ - відносна оцінка k –го критерію в точці X_k^* в якій значення $F_k(X_k^*)$ найкраще по k- му критерію, $F_k(X_k^0)$- найгірше. Зауважимо, що $\forall k \in K$ в точці оптимуму X_k^*:

$$\lambda_k(X_k^*) - \frac{F_k(X_k^*) - F_k(X_k^0)}{F_k(X_k^*) - F_k(X_k^0)} = 1,$$

а в точці X_k^0:

$$\lambda_k(X_k^0) - \frac{F_k(X_k^0) - F_k(X_k^0)}{F_k(X_k^*) - F_k(X_k^0)} = 0,$$

тобто відносна оцінка лежить в межах $0 \le \lambda_k \le 1, \quad \forall k \in K.$

На наступному етапі розв’язування максимінна задача перетворюється в стандартну задачу лінійного програмування, яка називається λ- задачею:

$$\lambda^0 = \max_x \lambda,$$
$$\lambda - \frac{F_k(X) - F_k(X_k^0)}{F_k(X_k^*) - F_k(X_k^0)} \le 0, \quad k = 1,...K,$$
$$A(x) \le 0, \quad B(x) \ge 0,$$

де $\lambda = \min_k \lambda_k(x).$

В результаті λ - задачі одержимо точку оптимуму X_{opt}, значення векторного критерію $F(\mathrm{X}_{opt})$, відносну оцінку λ^0, яка є максимальним нижнім рівнем для усіх відносних оцінок $\lambda_k = (\mathrm{X}_{opt}), \quad k = 1,...,K$ або гарантованим результатом.

Будуємо λ - задачу

$$\lambda^0 = \max_x \lambda$$
$$\begin{cases} \lambda - (0.01x_{11} + 0.01x_{12} + 0.02x_{21} + 0.02x_{22} + 0.03x_{31} + 0.04x_{51} + 0.04x_{52} + 0.04x_{53} + 0.08x_{61} + 0.08x_{62} + \\ \qquad + 0.08x_{63} - 0.000000000000052) \le 0 \\ \lambda - (0.01x_{11} + 0.01x_{12} + 0.01x_{21} + 0.01x_{22} + 0.06x_{31} + 0.09x_{41} + 0.02x_{51} + 0.02x_{52} + 0.01x_{53} + 0.06x_{61} + 0.04x_{62} + \\ \qquad + 0.05x_{63} + 0.3612) \le 0 \\ \lambda - (0.01x_{11} + 0.01x_{12} + 0.02x_{21} + 0.02x_{22} + 0.04x_{31} + 0.01x_{41} + 0.04x_{51} + 0.04x_{52} + 0.04x_{53} + 0.08x_{61} + \\ \qquad + 0.08x_{62} + 0.08x_{63} - 0.00000000000023) \le 0 \\ \lambda - (0.02x_{11} + 0.02x_{12} + 0.02x_{21} + 0.02x_{22} + 0.03x_{31} + 0.02x_{41} + 0.02x_{51} + 0.02x_{52} + 0.02x_{53} + 0.02x_{61} + 0.02x_{62} + \\ \qquad + 0.02x_{63} - 0.000000000000022) \le 0 \end{cases}$$

Також додаються всі умови з початкової задачі.

Розв’язуючи побудовану задачу, як стандартну задачу лінійного програмування одержимо точку оптимуму

$$X_{opt} = (9.472899; 0; 10.10715; 16.81058; 8.74738; 4.886827; 0; 3.730264; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 708.8087)$$

Максимальну відносну оцінку $\lambda = 0{,}85485$ і значення цільових функцій у вказаній точці

$$F^1 = 286777.6; \quad F^2 = 53865.52;$$
$$F^3 = 229956.1; \quad F^4 = 53.75551.$$

Та відносні оцінки:

$$\lambda_1 = 0,9633; \quad \lambda_2 = 0,8549;$$
$$\lambda_3 = 0,9803; \quad \lambda_4 = 0,8549.$$

- Розв’язування ВЗЛП у випадку з вектором пріоритетів.

Знаходимо відносні оцінки в точках оптимуму:

$$\left\{\lambda_q(X_k^*)=\left(F_q(X_k^*)-F_q(X_q^0)\right)\Big/\left(F_q(X_q^*)-F_q(X_q^o)\right),\ q=1,..,4\right\},\quad k=1,..,4.$$

		L-матриця		
F1	1	0.659362	1	0.910061
F2	0.681002	1	0.740624	0.301401
F3	1	0.659362	1	0.910061
F4	0.928616	0.773136	0.933466	1

Рис. 4

Обираємо пріоритетом критерій F_2, як найбільш суперечливий.

	задач. 1	L-матриця,F2
L1	0.963291	0.681002
L2	0.85485	1
L3	0.980322	0.740624
L4	0.85485	0.301401

Рис. 5

Знаходимо границі зміни пріоритету критерію $q\in K$ для якого в точках X^0 і X_q^* визначаємо пріоритет критерію $q\in K$ у співвідношенні до інших критеріїв:

$$p_k^q(X^0) = \frac{\lambda_q(X^0)}{\lambda_k(X^0)},$$

$$p_k^q(X_q^*)=\frac{\lambda_q(X_q^*)}{\lambda_k(X_q^*)}, \quad k=1,...,K,$$

Підставимо у формулу наші значення. Отримаємо такі межі:

$$0.0887427 < p_1 < 1.468424$$
$$p_2$$
$$0.872009 < p_3 < 1.350213$$
$$1 < p_4 < 3.317839$$

Для першого критерію обираємо $p_1 = 1.2$, для третього – $p_3 = 1.1$, а для четвертого – $p_4 = 2$.

$$\lambda^0 = \max_x \lambda,$$
$$\lambda - p_k \frac{f_k(X) - f_k(X_k^0)}{f_k(X_k^*) - f_k(X_k^0)} \le 0, \quad k = 1,\ldots K,$$
$$A(x) \le 0, \quad B(x) \ge 0,$$

де $\lambda = \min_k \lambda_k(x)$.

Розв'язок $\lambda = 0,9591107715$.

$X_{opt} = (0; 0; 0; 11.163; 10.35644; 2.741413; 0; 3.909048915; 0; 0; 1.985639; 0; 0; 0; 0)$

Значення цільових функцій у вказаній точці

$$F^1 = 247055,8; \quad F^2 = 65242,95;$$
$$F^3 = 206231; \quad F^4 = 30,15554.$$

Та відносні оцінки:

$$\lambda_1 = 0,829865; \quad \lambda_2 = 0,959108;$$
$$\lambda_3 = 0,879179; \quad \lambda_4 = 0,47954.$$

Переваги методу гарантованого результату розв'язання задачі векторної оптимізації:

а) Одержання розв'язку оптимального за Парето, тобто такого, який гарантує, що не існує точок з області допустимих розв'язків, в яких можна покращити один з критеріїв, не погіршуючи при цьому інші;

б) Дозволяє визначити максимальний нижній рівень серед усіх відносних оцінок, що є нормалізованими критеріями. Нормалізація критеріїв дає можливість порівнювати їх між собою, оскільки нормалізовані критерії вимірюються в одних і тих самих одиницях і в точках оптимуму набувають однакових значень (дорівнюють 1 або 100%). Нормалізація критеріїв в оптимізаційних задачах не впливає на результат розв'язку.

в) Дозволяє виявити найбільш суперечливі критерії і покращити їх значення розв'язуючи задачу шляхом введення вектору пріоритетів.

Недоліком методу є необхідність попереднього розв‘язання задачі для знаходження найкращих і найгірших значень за кожним критерієм окремо, що суттєво збільшує кількість обчислювальних процедур.

2. Метод лінійної згортки.

З сформуємо задачу:

$$\mathrm{F}^{\max}_{скал}(x) = \sum_{k=1}^{l} \omega_k F_k^0(x), \quad x \in X,$$

де $\omega_i, \quad i = 1,...,l,$ - вагові коефіцієнти, що відповідають цільовим функціям мають задовольняти наступній умові:

$$\sum_{i=1}^{l} \omega_i = 1, \quad \omega_i \geq 0, \quad i = 1,..,l,$$

і $F_k^0(x)$ є нормалізована k-го цільова функція $F_k(x), \quad k = 1,..,l.$

Тепер наша задача буде складатися з цільової функції $F^{\max}_{скаляр}(x)$ та початкових умов.

$$F^{\max}_{скаляр}(x) = \sum_{k=1}^{l} \omega_k \frac{F_k(x)}{S_k}, \quad x \in X, \text{де } S_k = \sum_{j=1}^{n} \left| c_j^k \right| \neq 0.$$

- з однаковими приорітетами;

  У цьому випадку вагові коефіцієнти будуть всі однакові $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = 0,25.$ Тоді задача буде мати вигляд

$$F^{\max}_{скаляр} = 0.035806 x_{11} + 0.034991 x_{12} + 0.048749 x_{21} + 0.046197 x_{22} + 0.098564 x_{31} - 0.04547 x_{41} +$$
$$+ 0.078265 x_{51} + 0.077946 x_{52} + 0.066223 x_{53} + 0.147998 x_{61} + 0.133217 x_{62} + 0.14491 x_{63}$$

$$\begin{cases} 48x_{11}+88x_{21}+8x_{31}+40x_{51}+16x_{53}+200x_{61}+100x_{62}\le 1986; \\ 48x_{21}+84x_{22}+40x_{41}+32x_{52}+20x_{53}+100x_{62}+168x_{63}\le 1986; \\ 40x_{11}+88x_{22}+200x_{51}+480x_{61}\le 1986+z_1; \\ 36x_{12}+84x_{21}+80x_{41}+200x_{52}+496x_{62}\le 1986; \\ 40x_{11}+80x_{21}+168x_{53}+400x_{63}\le 1986+z_2; \\ 48x_{11}+88x_{22}+240x_{52}+488x_{61}\le 1986+z_3; \\ 88x_{21}+280x_{51}+80x_{53}+420x_{62}\le 1986; \\ 48x_{11}+88x_{21}+8x_{31}+40x_{51}+16x_{53}+200x_{61}+100x_{62}\le 1986; \\ 56x_{12}+80x_{31}+80x_{41}+240x_{51}+460x_{63}\le 1986; \\ 160x_{31}+120x_{41}+200x_{51}+400x_{61}+320x_{63}\le 1986; \\ 60x_{22}+200x_{41}+280x_{51}+280x_{62}\le 1986; \\ 7.14z_1+7.14z_2+7.14z_3\le 27804; \\ x_{11}+x_{12}\le 20; \\ x_{21}+x_{22}\le 30; \\ x_{51}+x_{52}+x_{53}\le 6; \\ x_{41}\ge 0.1(x_{11}+x_{12}+x_{21}+x_{22}+x_{31}+x_{51}+x_{52}+x_{53}+x_{61}+x_{62}+x_{63}); \\ x_{41}\le 0.2(x_{11}+x_{12}+x_{21}+x_{22}+x_{31}+x_{51}+x_{52}+x_{53}+x_{61}+x_{62}+x_{63}). \end{cases}$$

Розв'язуємо, як звичайну задачу лінійного програмування. Для цього використаємо надбудову Excel «Пошук розв’язку».

Отримаємо розв’язок задачі

$$X^{opt}=(20;0;10.91564;14.27985;8.177965;5.646046;0;3.087013;0;0;0;0;70.62641;0;857.2707)$$

Значення цільових функцій у вказаній точці:

$$F^1=291714.2;\quad F^2=48870.45;$$
$$F^3=231841.9;\quad F^4=62.10651.$$

- різними приорітетами.

У випадку з різними приорітетами вагові коефіцієнти будуть наступними $\omega_1=0,1;\quad \omega_2=0,5;\quad \omega_3=0,3;\quad \omega_4=0,1.$ Задача набуде наступного вигляду:

$$F^{\max}_{скаляр}=0.026477x_{11}+0.024856x_{12}+0.040711x_{21}+0.035624x_{22}+0.115099x_{31}-0.1194x_{41}+$$
$$+0.071485x_{51}+0.070868x_{52}+0.048195x_{53}+0.155411x_{61}+0.12591x_{62}+0.149296x_{63}$$

$$
\begin{cases}
48x_{11} + 88x_{21} + 8x_{31} + 40x_{51} + 16x_{53} + 200x_{61} + 100x_{62} \le 1986; \\
48x_{21} + 84x_{22} + 40x_{41} + 32x_{52} + 20x_{53} + 100x_{62} + 168x_{63} \le 1986; \\
40x_{11} + 88x_{22} + 200x_{51} + 480x_{61} \le 1986 + z_1; \\
36x_{12} + 84x_{21} + 80x_{41} + 200x_{52} + 496x_{62} \le 1986; \\
40x_{11} + 80x_{21} + 168x_{53} + 400x_{63} \le 1986 + z_2; \\
48x_{11} + 88x_{22} + 240x_{52} + 488x_{61} \le 1986 + z_3; \\
88x_{21} + 280x_{51} + 80x_{53} + 420x_{62} \le 1986; \\
48x_{11} + 88x_{21} + 8x_{31} + 40x_{51} + 16x_{53} + 200x_{61} + 100x_{62} \le 1986; \\
56x_{12} + 80x_{31} + 80x_{41} + 240x_{51} + 460x_{63} \le 1986; \\
160x_{31} + 120x_{41} + 200x_{51} + 400x_{61} + 320x_{63} \le 1986; \\
60x_{22} + 200x_{41} + 280x_{51} + 280x_{62} \le 1986; \\
7.14z_1 + 7.14z_2 + 7.14z_3 \le 27804; \\
x_{11} + x_{12} \le 20; \\
x_{21} + x_{22} \le 30; \\
x_{51} + x_{52} + x_{53} \le 6; \\
x_{41} \ge 0.1(x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22} + x_{31} + x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{61} + x_{62} + x_{63}); \\
x_{41} \le 0.2(x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22} + x_{31} + x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{61} + x_{62} + x_{63}).
\end{cases}
$$

Розв'язуємо, як звичайну задачу лінійного програмування. Для цього використаємо надбудову Excel «Пошук розв’язку».

Отримаємо розв’язок задачі

$$X^{opt} = (20;0;\,9.575199;14.45878;8.218225;\,5.592367;0;3.671469;0;0;0;0;86.37234;0;1011.855)$$

Значення цільових функцій у вказаній точці:

$$F^1 = 2942738.3; \quad F^2 = 49334.47;$$
$$F^3 = 232885.9; \quad F^4 = 61.51604.$$

Переваги методу лінійної згортки:

- Найпростіший прийом розв’язання задачі багатокритеріальної оптимізації, тому що цільова функція являє собою певну комбінацію наявних критеріїв. Тим самим зводить її до звичайної задачі лінійного програмування;
- Метод гарантує отримання розв'язку оптимального за Парето.

Недоліки методу лінійної згортки:

- Не завжди вдається коректно оцінити вагу критеріїв;
- Потребує зведення критеріїв до безвимірних величин, що не дозволяє використовувати одразу початкові критерії;

- Не можна дати економічну інтерпретацію одержаній цільовій функції.

3. Метод послідовних поступок.

Спочатку встановлюємо переваги серед всіх критеріїв, при чому на перше місце ставимо найважливіший.

Знаходимо розв'язок по першому критерію.

$$F_{\max}^{1} = 2500x_{11} + 2500x_{12} + 5000x_{21} + 5000x_{22} + 10000x_{31} + \\ + 11000x_{51} + 11000x_{52} + 11000x_{53} + 22500x_{61} + 22500x_{62} + 22500x_{63}$$

$$\begin{cases} 48x_{11} + 88x_{21} + 8x_{31} + 40x_{51} + 16x_{53} + 200x_{61} + 100x_{62} \le 1986; \\ 48x_{21} + 84x_{22} + 40x_{41} + 32x_{52} + 20x_{53} + 100x_{62} + 168x_{63} \le 1986; \\ 40x_{11} + 88x_{22} + 200x_{51} + 480x_{61} \le 1986 + z_1; \\ 36x_{12} + 84x_{21} + 80x_{41} + 200x_{52} + 496x_{62} \le 1986; \\ 40x_{11} + 80x_{21} + 168x_{53} + 400x_{63} \le 1986 + z_2; \\ 48x_{11} + 88x_{22} + 240x_{52} + 488x_{61} \le 1986 + z_3; \\ 88x_{21} + 280x_{51} + 80x_{53} + 420x_{62} \le 1986; \\ 48x_{11} + 88x_{21} + 8x_{31} + 40x_{51} + 16x_{53} + 200x_{61} + 100x_{62} \le 1986; \\ 56x_{12} + 80x_{31} + 80x_{41} + 240x_{51} + 460x_{63} \le 1986; \\ 160x_{31} + 120x_{41} + 200x_{51} + 400x_{61} + 320x_{63} \le 1986; \\ 60x_{22} + 200x_{41} + 280x_{51} + 280x_{62} \le 1986; \\ 7.14z_1 + 7.14z_2 + 7.14z_3 \le 27804; \\ x_{11} + x_{12} \le 20; \\ x_{21} + x_{22} \le 30; \\ x_{51} + x_{52} + x_{53} \le 6; \\ x_{41} \ge 0.1(x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22} + x_{31} + x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{61} + x_{62} + x_{63}); \\ x_{41} \le 0.2(x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22} + x_{31} + x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{61} + x_{62} + x_{63}). \end{cases}$$

Розв'язок X^1, підставимо у цільову функцію $F_{\max}^{1} = 297706.2$, зробимо поступку 10%, тоді $\Delta = 0{,}1$. Тоді $F_{\max}^{1} = F_{\max}^{1} - \Delta F_{\max}^{1} = 267935.6$

Далі будемо розв'язувати задачу для другого критерію тільки до початкових умов добавляємо умову:

$$2500x_{11} + 2500x_{12} + 5000x_{21} + 5000x_{22} + 10000x_{31} + $$
$$+11000x_{51} + 11000x_{52} + 11000x_{53} + 22500x_{61} + 22500x_{62} + 22500x_{63} \geq 267935.6$$

Розв’язок X^2, підставимо у цільову функцію $F^2_{\max} = 61537.35$, знову зробимо поступку 10%, тоді $\Delta = 0{,}1$. $F^2_{\max} = F^2_{\max} - \Delta F^2_{\max} = 55383.61.$

Далі розв’яжемо задачу для третього критерію. У якій до початкових умов додаються:

$$2500x_{11} + 2500x_{12} + 5000x_{21} + 5000x_{22} + 10000x_{31} + 11000x_{51} + 11000x_{52} + $$
$$+ 11000x_{53} + 22500x_{61} + 22500x_{62} + 22500x_{63} \geq 267935.6$$
$$880x_{11} + 744.0476x_{12} + 1448.214\, x_{21} + 1020\, x_{22} + 6223.81x_{31} - 10189.3x_{41} + $$
$$+2488.095x_{51} + 2438.571x_{52} + 618.5714x_{53} + 6416.667x_{61} + 3928.571x_{62} + 5907.143\, x_{63} \geq 55383.61$$

Розв’язок X^3, підставимо у цільову функцію $F^3_{\max} = 228974.5$, знову зробимо поступку 10%, тоді $\Delta = 0{,}1$. $F^3_{\max} = F^3_{\max} - \Delta F^3_{\max} = 206077.1$

Та розв’яжемо задачу для останньої цільової функції. До початкових умов додаються:

$$2500x_{11} + 2500x_{12} + 5000x_{21} + 5000x_{22} + 10000x_{31} + 11000x_{51} + 11000x_{52} + $$
$$+ 11000x_{53} + 22500x_{61} + 22500x_{62} + 22500x_{63} \geq 267935.6$$
$$880x_{11} + 744.0476x_{12} + 1448.214\, x_{21} + 1020\, x_{22} + 6223.81x_{31} - 10189.3x_{41} + $$
$$+2488.095x_{51} + 2438.571x_{52} + 618.5714x_{53} + 6416.667x_{61} + 3928.571x_{62} + 5907.143\, x_{63} \geq 55383.61$$
$$2080x_{11} + 2075x_{12} + 4079.167\, x_{21} + 4070\, x_{22} + 9128.571x_{31} - 2641.67x_{41} + $$
$$+9035.714x_{51} + 9024.286x_{52} + 8604.286x_{53} + 19283.33x_{61} + 19250x_{62} + 19250x_{63} \geq 206077.1$$

Остаточний розв’язок буде мати вигляд

$$X^{opt} = (5.945886; 0; 10.28538; 17.59853; 8.924668; 4.650442; 0; 3.749963; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 607.2757)$$

Цільові функції будуть мати такі значення у X^{opt}.

$$F^1 = 284780.5; \quad F^2 = 455383.61;$$
$$F^3 = 228974.5; \quad F^4 = 51.15487.$$

Переваги методу послідовних поступок:

- Метод не обмежує можливості особи, що приймає рішення,(ОПР) у виборі поступок та ефективних альтернатив(це обґрунтовується наступною теоремою).

Теорема [6].

Нехай без обмеження загальності будемо вважати, що $\langle 1,2,\ldots,m \rangle$ впорядкування критеріїв за їх важливістю для ОПР. Тоді якщо $x^* \in P(x)$, є парето-оптимальним, то існує такий набір поступок і Δf, що на останньому кроці буде отримана множина розв`язків, всі елементи якої рівноцінні x^*.

Недоліки методу:

- Якщо на перших кроках ОПР допускає занадто щедрі поступки для більш важливих критеріїв, то отримана альтернатива може мати більш ніж треба високі показники по менш важливим критеріям і навпаки, якщо занадто низькі поступки для важливих => низькі для не важливих.
- Обчислювальна складність на кожному кроці зростає, адже на кожному кроці додається нове обмеження. Додавання обмежень може змінити клас оптимізаційної задачі, яку ми розв'язуємо .
- Лише на першому кроці поступка 1 Δ f відповідає дійсному значенню, бо на наступних кроках поступки значно менші за їх фактичне значення, бо визначаються на скорочених множинах альтернатив ($G_i \subseteq X$).

РОЗДІЛ 4. МЕТОД VIKOR БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОГО ПРИЙНЯТТЯ РІШЕННЯ

4.1 Описання методу VIKOR

Методи класифікації альтернатив застосовуються у процесі вибору з множини альтернатив, що складаються з множини дискретних значень.

Для нашої задачі для вибору одного з отриманих 5 розв'язків використаємо метод VIKOR[8]. Метод VIKOR (VIKOR – від сербського Visekriterijumska Opimizacija i Kompromisno Resenje, means Multicriteria Optimization and Compromise Solution) (Opricovic, 1998) був розроблений з метою зменшення впливу ефекту компенсації, тобто ситуації, коли гірші значення деяких показників можуть бути компенсовані кращими значеннями інших. Він базується на метриці Мінковського* L_p.

Означення*:

Відстань Мінковського порядку p між двома точками

$P = (x_1, x_2, ..., x)$ та $Q = (y_1, y_2, ..., y_n) \in R^n$

визначається наступним чином: $\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}$.

Відстань Мінковського при $p \geq 1$ є метрика у результаті нерівності Мінковського. Відстань Мінковського зазвичай використовується із порядком p, який дорівнює 1 або 2.

Коли $p = 2$ — це Евклідова відстань, коли p = 1 це Манхетенська відстань. Коли p прямує до нескінченності — це відстань Чебишова:

$$\lim_{p\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p} = \max_{i=1}^{n} |x_i - y_i|.$$

Метод VIKOR використовує дві характерні метрики для формулювання рейтингу, $p=1$ і $p \to \infty$. Для порівняння спочатку розраховують значення показника S_i, який характеризує наближеність альтернативи до найкращої точки за формулою:

$S_i = \sum_{j=1}^{n} \omega_j \, (x_j^* - x_{ij}) \big/ (x_j^* - \bar{x}_j), \quad p=1, \quad i=\overline{1,m},$ а потім значення показника R_i, який характеризує максимальну віддаленість альтернативи від найкращої точки за показником з найбільшою віддаленістю.

$$R_i = \max_j [\omega_j \, (x_j^* - x_{ij}) \big/ (x_j^* - \bar{x}_j)], \quad p \to \infty.$$

Метод VIKOR базується на ідеї ідеального та компромісного рішення, а загальний індекс рейтингу для кожної альтернативи розраховується за такою формулою:

$$Q_i = \nu \frac{(\mathrm{S}_i - \mathrm{S}^*)}{(\bar{S} - S^*)} + (1-\nu) \frac{(\mathrm{R}_i - \mathrm{R}^*)}{(\bar{\mathrm{R}} - \mathrm{R}^*)},$$

де

$$\left.\begin{aligned} S^* &= \min_i S_i, \\ \bar{S} &= \max_i S_i, \\ R^* &= \min_i R_i, \\ \bar{R} &= \max_i R_i, \end{aligned}\right. \text{ - граничні значення показників}$$

і ν - значення стратегії більшості критеріїв (цілей), значення яких зазвичай встановлюється рівним 0,5.

Метод VIKOR визначає найбільшу альтернативу описується наступним чином: альтернативи сортуються за значеннями S, R та Q у порядку зростання. Найбільш прийнятна альтернатива A '- така, з мінімальним значенням Q, якщо виконуються дві додаткові умови (Opricovic & Tzeng, 2004):

С1 Прийнятна перевага:

Умова С1 виконується, якщо виконується таке рівняння:

$$Q(\mathrm{A}^{*}) - \mathrm{Q}(\mathrm{A}'') \geq DQ,$$

де $DQ = 1/(m-1)$, і A'' є альтернативою, яка має другу позицію в рейтингу за Q, а m - кількість альтернатив.

С2. Прийнятна стабільність у прийнятті рішень:

Альтернатива A' також повинна бути найкращою за S або R. Якщо одна з цих умов не виконується, то замість найбільш прийнятної альтернативи пропонується набір компромісних рішень із перевагою (Antucheviciene et al., 2011). Цей набір складається з:

- альтернатив A' і A'', якщо тільки умова С2 не буде виконано,

або

- альтернативи $A', A'', ..., A^{n}$; якщо умови С1 та С2 не виконуються, де A^{n} визначається за співвідношенням:

$Q(\mathrm{A}^{n}) - \mathrm{Q}(\mathrm{A}') \geq DQ.$

Метод VIKOR дуже часто використовується на практиці для оптимізації рішень та складних систем зокрема під час відбору кандидатів для підвищення кваліфікації, для підвищення виробничих процесів, для оцінювання банківських установ, у медицині під час оцінювання ризиків.

4.2 Застосування методу до аналізу розв'язків побудованої математичної моделі

Для вибору одного з 5 отриманих розв'язків поставленої векторної задачі використаємо метод VIKOR.

Метод був розроблений для вибору кращої альтернативи, що визначається дискретним набором показників, з метою визначення найкращої і зменшенням впливу ефекту компенсації, тобто ситуації, коли гірші значення деяких показників можуть бути компенсовані кращими значеннями інших. Він базується на метриці Мінковського L_p, яка для даного методу має вигляд

$$\min L_{p,i} = \left\{ \sum_{j=}^{m} w_j^p \left(\frac{x_j^* - x_{ij}}{x_j^* - x_j^-} \right)^p \right\}^{\frac{1}{p}},$$

де $L_{p,i}$ – метрична норма, $1 \le p < \infty$, для i–ої альтернативи, x_j^* – найкращий, x_j^- – найгірший показник j-го критерію.

	F^1	F^2	F^3	F^4
1	286777.6	53865.52	229956.1	53.7551
2	247055.8	65242.95	206231	30.1556
3	291714.2	48870.45	231841.9	62.1065
4	281413.8	57942.83	227319.7	46.77136
5	284780.5	55383.61	228974.5	5115487

Для порівняння спочатку розраховують значення показника S_i, який характеризує наближеність альтернативи до найкращої точки за формулою: $S_i = \sum_{j=1}^{n} \omega_j \,(x_j^* - x_{ij}) \big/ (x_j^* - \overline{x}_j), \quad p = 1, \quad i = \overline{1, m},$ а потім значення показника R_i за формулою: $R_i = \max_j [\omega_j \,(x_j^* - x_{ij}) \big/ (x_j^* - \overline{x}_j)], \quad p \to \infty,$ який характеризує максимальну віддаленість альтернативи від найкращої точки за показником з найбільшою віддаленістю.

Для розрахунків побудуємо матрицю:

	F^1	F^2	F^3	F^4
1	0.110541	0.694911	0.07363398	0.26138253
2	1	0	1	1
3	0	1	0	62.1065
4	0.230648479	0.445877	0.17657375	0.479959832
5	0.155260684	0.602189	0.11196069	0.342764692

- Рівнозначні критерії;

$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = 0,25.$

S1	0.285117
S2	0.75
S3	0.25
S4	0.333265
S5	0.303044

Рис.6

R1	0.17
R2	0.25
R3	0.25
R4	0.12
R5	0.15

Рис. 7

Метод VIKOR базується на ідеї ідеального та компромісного рішення, а загальний індекс рейтингу для кожної альтернативи розраховується за такою формулою:

$$Q_i = \nu \frac{(S_i - S^*)}{(\bar{S} - S^*)} + (1-\nu)\frac{(R_i - R^*)}{(\bar{R} - R^*)},$$

і ν - значення стратегії більшості критеріїв (цілей), значення яких зазвичай встановлюється рівним 0,5.

Де

$$\left.\begin{aligned} S^* &= \min_i S_i, \\ \bar{S} &= \max_i S_i, \\ R^* &= \min_i R_i, \\ \bar{R} &= \max_i R_i, \end{aligned}\right. \quad \text{- граничні значення показників}$$

Отримаємо такі значення:

Q1	0.241785
Q2	1
Q3	0.5
Q4	0.083265
Q5	0.170562

$Q_4 < Q_5 < Q_1 < Q_3 < Q_2$

Рис. 8

Порівнявши значення бачимо, що найкращий Q_4. Перевіримо умову $Q_5 - Q_4 \geq \frac{1}{m-1} = 0,25 : Q_4 - Q_5 = 0,0873 \ngeq 0,25.$ Тому не має прийнятної переваги над Q_5, а це метод послідовних поступок. Тому обираємо два методи.

- <u>з пріоритетом критерію:</u>

$\omega_1 = 0.2, \omega_2 = 0.5, \omega_3 = 0.2, \omega_4 = 0.1.$

S1	0.41
S2	0.50
S3	0.50
S4	0.35
S5	0.39

Рис. 9

R1	0.35
R2	0.50
R3	0.20
R4	0.22
R5	0.30

Рис.10

Отримаємо такі значення:

Q1	0.442376
Q2	1
Q3	0.5
Q4	0.038231
Q5	0.291902

$Q_4 < Q_5 < Q_1 < Q_3 < Q_2$

Рис.11

Порівнявши значення бачимо, що найкращий Q_4. Виконується $Q_4 - Q_5 = 0,253671 > 0,25.$ Тому Q_4 має прийнятну перевагу над іншими критеріями і саме тому найкращим методом для розв’язку нашої задачі є метод лінійної згортки з вектором пріоритетів.

Оскільки змінними нашої задачі є кількість виготовлених проектів то знайдемо розв'язки цілочислової задачі за обраними методами.

Остаточно, за методом лінійної згортки отримаємо такий розв'язок

$$X^{opt} = (0,0,12,15,9,4,0,3,1,0,0,0,0,0,343)$$

Знайдемо значення цільвових функцій для даного розв'язку

$$F^1 = 269000, \quad F^2 = 55870, \quad F^3 = 217267.6, \quad F^4 = 44.$$

Знайдемо розв'язок і за методом послідовних поступок:

$$X^{opt} = (0,0,12,15,9,4,0,3,1,0,0,0,0,0,581)$$

$$F^1 = 269000, \quad F^2 = 55870, \quad F^3 = 217267.6, \quad F^4 = 44.$$

Розв'язки вийшли однакові окрім останнього значення, яке відповідає за додатковий ресурс.

ВИСНОВКИ

- Побудувана модель малого IT підприємства у вигляді лінійної багатокритеріальної задачі оптимізації;

- Знайдено розв’язок поставленої задачі кількома методами, які оптимізують роботу підприємства. Проаналізовано переваги та недоліки кожного з розглянутих методів;

- Проведено порівняння отриманих розв’язків методом багатокритеріального прийняття рішень.

В роботі розвинуто підхід до використання математичних моделей типу векторної задачі лінійного програмування для покращення діяльності малих IT підприємств. Аналіз розв‘язку ВЗЛП дозволяє спрогнозувати розвиток підприємства, визначити можливість залучення додаткових трудових ресурсів і прийняти оптимальне управлінське рішення за необхідними економічними показниками.

Результати дипломної роботи доповідались на XVIII Міжнародній науковій конференції ім. акад. Михайла Кравчука (7-10 жовтня 2017 року, Луцьк – Київ).

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Pareto, V. (1896) Cours D'Economie Politique. F. Rouge, 1896.

2. Машунин Ю.К. (2016) Моделирование и прогнозирование развития фирмы на базе векторной оптимизации (1. Постановка проблемы), Известия ДВФУ. Экономика и управление. 1. 2016. С. 17–36

3. Jaimes AL, Martınez SZ, Coello CAC (2009). An introduction to multiobjective optimization techniques/ Optimization in Polymer Processing, 2009, P. 29 – 57

4. Edgeworth, F. Y. Mathematical Physics. P. Kegan, 1881. P 19

5. I. Das, J.E. Dennis, «A closer look at drawbacks of minimizing weighted sums of objectives for Pareto set generation in multicriteria optimization problems», Struct. Optim. 14 (1997) 63-69.

6. http://om.univ.kiev.ua/old/F1/lectures/mmpr_all.pdf (Лекції)

7. Костевич Л.С. Математическое программирование - информационные технологии оптимальных решений, 2003 ,Р. 380-390.

8. Das I., Dennis J.E., (1997) A closer look at drawbacks of minimizing weighted sums of objectives for Pareto set generation in multicriteria optimization problems, Struct. Optim. 14 1997, P. 63-69

9. Костевич Л.С. (2003) Математическое программирование - информационные технологии оптимальных решений, Минск: Новое знание, 2003, 424 с.

10. Stanimirovic I. P., Zlatanovic M. L., Petkovic M. D. (2011) On the linear weighted sum method for multi-objective optimization. Ser.Math.Inform. 26, 2011, P.49 – 63

11. Машунін Ю.К. (3013) Теория управления. Математический аппарат управления в экономике, Москва, Логос, 2013. 448 с.

12. Ногин В.Д. (2007) Принятие решений при многих критериях, СПб.: Издательство «ЮТАС», 2007, 104 с.

13. М. Элдоус, Р. Стэнсфилл «Методы прийнятия решений», Москва, 1997, - 81 с.

14. Лотов А.В., Поспелова И.И. (2008) Многокритериальные задачи принятия решений, М.: МАКС Пресс, 2008, 197 с.

15. Михалевич В., Волкович В. (1982) Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем, М., 1982. – 327 с.

16. Сергиенко И.В. (1985) Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации, К. : Изд-во "Наук. думка", 1985. – 384 с.

18. Jaimes AL, Martınez SZ, Coello CAC (2009). An introduction to multiobjective optimization techniques/ Optimization in Polymer Processing, 2009, P. 29 – 57

19. Машунин Ю. Моделирование и прогнозирование развития фирмы на базе векторной оптимизации (2015) / Известия ДВФУ. Экономика и управление 1. 2015, С. 17 – 36.

20. Алєксєєва І.В., Боднарчук В.С. (2017) Приклад застосування математичної моделі у формі векторної задачі лінійного програмування для оптимізації функціонування малого підприємства. Матеріали XVIII міжнародної наукової конференції імені ак. Михайла Кравчука, 7—10 жовтня 2017 р., Київ: Т. 2, Київ : НТУУ «КПІ», 2017, С. 91 — 97.

21. Opricovic S., Tzeng G.-H. (2004) Compromise solution by MCDM methods: A comparative analysis of VIKOR and TOPSIS/ European Journal of Operational Research 156, 2004, P. 445–455

22. Steuer R.E. (1986) Multiple Criteria Optimization: Theory, Computations, and Application. — New York: John Wiley & Sons, 1986, 546 P.

23. Подиновский В.В., Ногин В.Д. (1982) Парето-оптимальные решения многокритериальных задач, М.: Наука, 1982, 256 с.

24. Ашманов С.А. (1981) Линейное программирование, М.: Наука, 1981, 340с.

ДОДАТОК 1

Математична модель векторної задачі лінійного програмування

Тип продукції	x1		x2		x3	x4	x5			x6			запас	вартість	робочих днів (годин)			з/п	
Технологічний варіант	x11	x12	x21	x22	x31	x41 (R&D)	x51	x52	x53	x61	x62	x63	ресурсу	ресурсу		240	1986		
Ресурс 1	48		88		8		40		16	200	100		1986		5.952381			Ресурс 1	1000
Ресурс 2		48		84		40		32	20		100	168	1986		7.142857			Ресурс 2	1200
Ресурс 3	40			88			200			480			1986	7.14	7.142857			Ресурс 3	1200
Ресурс 4		36	84			80		200			496		1986		8.928571			Ресурс 4	1500
Ресурс 5	40		80						168			400	1986	7.14	7.142857			Ресурс 5	1200
Ресурс 6	48			80				240		488			1986	7.14	7.142857			Ресурс 6	1200
Ресурс 7			88				280		80		420		1986		8.928571			Ресурс 7	1500
Ресурс 8		56			80	80		240				460	1986		11.90476			Ресурс 8	2000
Ресурс 9					160	120	200			400		320	1986		11.90476			Ресурс 9	2000
Ресурс 10				60		200			280		280		1986		20.83333			Ресурс 10	3500
Собівартість 1(з/п)	1200	1330.952	2630.952	3050	2904.762	7547.619	6547.619	6585.714	7985.714	12866.67	15321.43	13342.86	вартість на придбання додаткового ресурсу 27804						
Собівартість 2 (ресурси)	420	425	921	930	871	2642	1964	1976	2396	3217	3250	3250							
Вартість(обсяг)	2500	2500	5000	5000	10000		11000	11000	11000	22500	22500	22500							
Прибуток	880	744.0476	1448	1020	6224	-10189	2488	2439	619	6417	3928.571	5907.143							
Додана вартість	2080	2075	4079.167	4070	9129	-2642	9035.714	9024.286	8604.286	19283.33	19250	19250							
Попит	20		30				6												

		x11	x12	x21	x22	x31	x41	x51	x52	x53	x61	x62	x63	z1	z2	z3			
Ресурс 1		48		88		8		40		16	200	100					0	<=	1986
Ресурс 2			48		84		40		32	20		100	168				1.394E-08	<=	1986
Ресурс 3		40			88			200			480			-1			0	<=	1986
Ресурс 4			36	84			80		200			496					1.097E-08	<=	1986
Ресурс 5		40		80						168			400		-1		0	<=	1986
Ресурс 6		48			80				240		488					-1	0	<=	1986
Ресурс 7				88				280		80		420					0	<=	1986
Ресурс 8			56			80	80		240				460				1.661E-08	<=	1986
Ресурс 9						160	120	200			400		320				1.241E-09	<=	1986
Ресурс 10					60		200			280		280					2.068E-09	<=	1986
Дод. Ресурс														7.14	7.14	7.14	0	<=	27804
Попит1		1	1														2.818E-10	<=	20
Попит2				1	1												0	<=	30
Попит3								1	1	1							0	<=	6
R&D		-0.1	-0.1	-0.1	-0.1	-0.1	1	-0.1	-0.1	-0.1	-0.1	-0.1	-0.1				-1.78E-11	>=	0
R&D		-0.2	-0.2	-0.2	-0.2	-0.2	1	-0.2	-0.2	-0.2	-0.2	-0.2	-0.2				-4.8E-11	<=	0
	Вартість F1	2500	2500	5000	5000	10000		11000	11000	11000	22500	22500	22500	0	0	0	7.044E-07		
	Прибуток F2	880	744.0476	1448	1020	6224	-10189.29	2488.095	2438.571	618.5714	6416.667	3928.571	5907.143	0	0	0	1.043E-07		
	Додана вартість F3	2080	2075	4079.167	4070	9128.571	-2642	9035.714	9024.286	8604.286	19283.33	19250	19250				5.579E-07		
	Обсяг F4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1				2.921E-10		

ДОДАТОК 2

Розв'язання задачі за методом MaxMin

F1max	297706.2														
	x11	x12	x21	x22	x31	x41	x51	x52	x53	x61	x62	x63	z1	z2	z3
	20	0	6.277411	15.75851	2.181776	5.202448	0	5.212508038	0	2.280668	0	0.313609	1295.469	0	2598.648
F1min	1.55E-07														
	0	6.2E-11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
F2 max	69705.44														
	x11	x12	x21	x22	x31	x41	x51	x52	x53	x61	x62	x63	z1	z2	z3
	0	0	0	0	11.12026	1.722986	0	3.993917842	0	0	2.115681	0	0	0	0
F2min	-39422.5														
	0	20	8.079487	8.628205	0	7.341538	0	0	0	0	0	0	0	0	0
F3 max	234572.1														
	x11	x12	x21	x22	x31	x41	x51	x52	x53	x61	x62	x63	z1	z2	z3
	20	0	6.277411	15.75851	2.181776	5.202448	0	5.212508038	0	2.280668	0	0.313609	1295.469	0	2598.648
F3 min	5.57E-07														
	0	2.82E-10	0	0	0	1.03E-11	0	0	0	0	0	0	0	0	0
F4max	62.8825														
	x11	x12	x21	x22	x31	x41	x51	x52	x53	x61	x62	x63	z1	z2	z3
	12.52788	7.472117	14.99615	14.0447	8.125057	5.71659	0	0	0	0	0	0	0	0	0
F4min	1.41E-10														
	0	0	0	0	0	2.53E-12	1.38E-10	0	0	0	0	0	0	0	0

L	x11	x12	x21	x22	x31	x41	x51	x52	x53	x61	x62	x63	z1	z2	z3				
1	-0.0083975417	-0.0083975417	-0.0167950834	-0.0167950834	-0.0335901668	0.0000000000	-0.0369491835	-0.0369491835	-0.0369491835	-0.0755778753	-0.0755778753	-0.0755778753	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	0	6.21031E-16	<=	0
1	-0.0126245519	-0.0106741680	-0.0207762005	-0.0146330034	-0.0892872801	0.1461763256	-0.0356944176	-0.0349839450	-0.0088740763	-0.0920540244	-0.0563596068	-0.0847443542	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	-0.36125	-0.05481644	<=	0
1	-0.0088672092	-0.0088458938	-0.0173898194	-0.0173507412	-0.0389158428	0.0112616399	-0.0385199852	-0.0384712643	-0.0366807701	-0.0822064191	-0.0820643164	-0.0820643164	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	0	-0.00754529	<=	0
1	-0.0159026768	-0.0159026768	-0.0159026768	-0.0159026768	-0.0159026768	-0.0159026768	-0.0159026768	-0.0159026768	-0.0159026768	-0.0159026768	-0.0159026768	-0.0159026768	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	0	1.88998E-15	<=	0
	48		88		8		40		16	200	100						1986	<=	1986
		48		84		40		32	20		100	168					1579.702674	<=	1986
	40			88			200			480			-1				1986	<=	1986
		36	84			80		200			496						1986	<=	1986
	40		80						168			400		-1			1800.229113	<=	1986
	48			80				240		488					-1		1986	<=	1986
			88				280		80		420						965.3672629	<=	1986
		56			80	80		240				460					1934.725973	<=	1986
					160	120	200			400		320					1986	<=	1986
				60		200			280		280						1986	<=	1986
													7.14	7.14	7.14		6674.929333	<=	27804
	1	1															20	<=	20
			1	1													25.3132145	<=	30
							1	1	1								3.071741173	<=	6
	-0.1	-0.1	-0.1	-0.1	-0.1	1	-0.1	-0.1	-0.1	-0.1	-0.1	-0.1					7.49401E-16	>=	0
	-0.2	-0.2	-0.2	-0.2	-0.2	1	-0.2	-0.2	-0.2	-0.2	-0.2	-0.2					-5.62706041	<=	0

L	x11	x12	x21	x22	x31	x41	x51	x52	x53	x61	x62	x63	z1	z2	z3	
0.9843	20	0	10.97008253	14.34313197	7.57909214	5.627060409	0	3.071741173	0	0	0	0.306556276	76.19561331	0	858.668439	1

L				
F1	293043.663	L1	0.984338552	0.984338552
F2	47253.65643	L2	0.794261758	0.677904817
F3	232668.2865	L3	0.991883837	0.991883837
F4	61.8976645	L4	0.984338552	0.984338552

	x11	x12	x21	x22	x31	x41	x51	x52	x53	x61	x62	x63	z1	z2	z3
Xopt	20	0	10.97008253	14.34313197	7.57909214	5.627060409	0	3.071741173	0	0	0	0.306556276	76.19561331	0	858.668439

ДОДАТОК 3

Розв’язання задачі методом лінійної згортки

	x11	x12	x21	x22	x31	x41	x51	x52	x53	x61	x62	x63	z1	z2	z3			
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		
																S_k		
F1	2500	2500	5000	5000	10000		11000	11000	11000	22500	22500	22500	0	0	0	125500		
F2	880	744.0476	1448.214	1020	6223.81	-10189.3	2488.095	2438.571	618.5714	6416.667	3928.571	5907.143	0	0	0	42302.98		
F3	2080	2075	4079.167	4070	9128.571	-2641.67	9035.714	9024.286	8604.286	19283.33	19250	19250	0	0	0	108522		
F4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	12		
F1/s_k	0.01992	0.01992	0.039841	0.039841	0.079681	0	0.087649	0.087649	0.087649	0.179283	0.179283	0.179283	0	0	0			
F2/s_k	0.020802	0.017589	0.034234	0.024112	0.147125	-0.24086	0.058816	0.057645	0.014622	0.151684	0.092867	0.139639	0	0	0			
F3/s_k	0.019167	0.019121	0.037588	0.037504	0.084117	-0.02434	0.083262	0.083156	0.079286	0.177691	0.177383	0.177383	0	0	0			
F4/s_k	0.083333	0.083333	0.083333	0.083333	0.083333	0.083333	0.083333	0.083333	0.083333	0.083333	0.083333	0.083333	0	0	0			
Fскаляр	0.035806	0.034991	0.048749	0.046197	0.098564	-0.04547	0.078265	0.077946	0.066223	0.147998	0.133217	0.14491	0	0	0			
Умови	x11	x12	x21	x22	x31	x41	x51	x52	x53	x61	x62	x63	z1	z2	z3			
	48		88		8		40		16	200	100					1986	<=	1986
		48		84		40		32	20		100	168				1524.133	<=	1986
	40			88			200			480			-1			1986	<=	1986
		36	84			80		200			496					1986	<=	1986
	40		80						168			400		-1		1673.251	<=	1986
	48			80				240		488					-1	1986	<=	1986
			88				280		80		420					960.5763	<=	1986
		56			80	80		240				460				1846.804	<=	1986
					160	120	200			400		320				1986	<=	1986
				60		200			280		280					1986	<=	1986
													7.14	7.14	7.14	6625.186	<=	27804
	1	1														20	<=	20
			1	1												25.19549	<=	30
							1	1	1							3.087013	<=	6
	-0.1	-0.1	-0.1	-0.1	-0.1	1	-0.1	-0.1	-0.1	-0.1	-0.1	-0.1				-2.2E-15	>=	0
	-0.2	-0.2	-0.2	-0.2	-0.2	1	-0.2	-0.2	-0.2	-0.2	-0.2	-0.2				-5.64605	<=	0

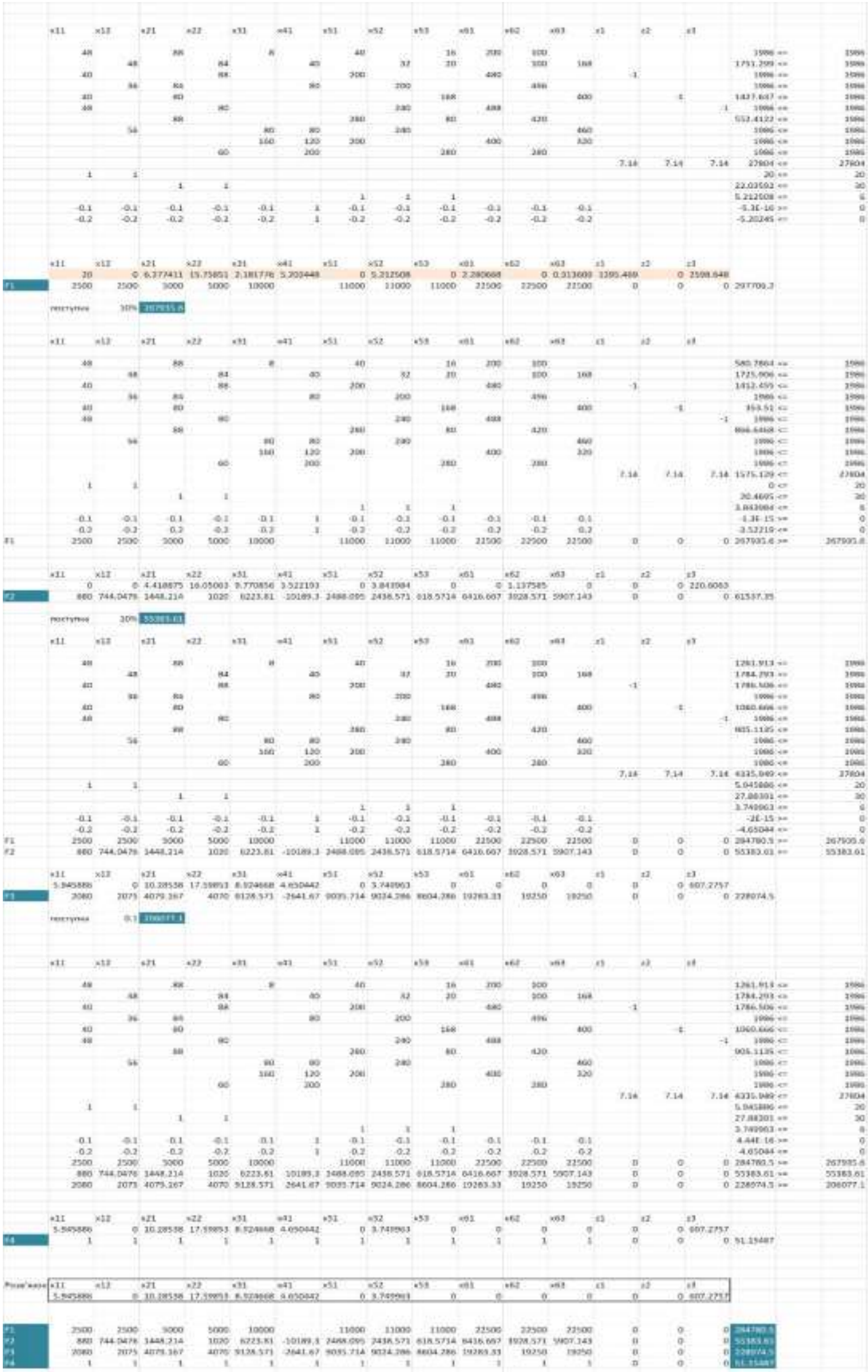
	x11	x12	x21	x22	x31	x41	x51	x52	x53	x61	x62	x63	z1	z2	z3	
	20	0	10.91564	14.27985	8.177965	5.646046	0	3.087013	0	0	0	0	70.62641	0	857.2707	
Fскаляр	0.035806	0.034991	0.048749	0.046197	0.098564	-0.04547	0.078265	0.077946	0.066223	0.147998	0.133217	0.14491	0	0	0	2.697891

Розв'язок	x11	x12	x21	x22	x31	x41	x51	x52	x53	x61	x62	x63	z1	z2	z3	
	20	0	10.91564	14.27985	8.177965	5.646046	0	3.087013	0	0	0	0	70.62641	0	857.2707	
F1	2500	2500	5000	5000	10000		11000	11000	11000	22500	22500	22500	0	0	0	291714.2
F2	880	744.0476	1448.214	1020	6223.81	-10189.3	2488.095	2438.571	618.5714	6416.667	3928.571	5907.143	0	0	0	48870.45
F3	2080	2075	4079.167	4070	9128.571	-2641.67	9035.714	9024.286	8604.286	19283.33	19250	19250	0	0	0	231841.9
F4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	62.10651

F1	F2	F3	F4
291714.2	48870.45	231841.9	62.10651

ДОДАТОК 4

Розв'язування задач методом послідовних поступок



ДОДАТОК 5

Метод VIKOR

	лямбда	лямбда пр	скал	скал з пр	послід поступ	max	min
f1	286777.6	297706.1727	291714.2	292738.291	284780.5229	297706.2	284780.5
f2	53865.52	32532.3373	48870.45	49334.4732	55383.61324	55383.61	32532.34
f3	229956.1	234572.1119	231841.9	232885.926	228974.5155	234572.1	228974.5
f4	53.7551	57.22692743	62.10651	61.5160372	51.15486589	62.10651	51.15487

	f1	f2	f3	f4
1 лимда	286777.6	53865.52	229956.1	53.7551
2 лямбда пр	247055.8	65242.95	206230.96	30.1556
3 скал	291714.2197	48870.45	231841.938	62.10650956
4 скал з пр	281413.8231	57942.83	227319.712	46.77135638
5 послід пост	284780.5229	55383.61	228974.515	51.15486589
max	291714.2197	65242.95	231841.938	62.10650956
min	247055.8	48870.45	206230.96	30.1556

жодний розв'язок не є домінований

	F1	F2	F3	F4
1 лимбда	0.110541746	0.694911	0.07363398	0.26138253
2 лямбда пр	1	0	1	1
3 скал	0	1	0	0
4 скал з пр	0.230648479	0.445877	0.17657375	0.479959832
5 послід пост	0.155260684	0.602189	0.11196069	0.342764692

			0.2	0.5	0.2	0.1

Рівнозначні критерії		з пріоритетом	
S1	0.29	S1	0.41
S2	0.75	S2	0.50
S3	0.25	S3	0.50
S4	0.33	S4	0.35
S5	0.30	S5	0.39
R1	0.17	R1	0.35
R2	0.25	R2	0.50
R3	0.25	R3	0.20
R4	0.12	R4	0.22
R5	0.15	R5	0.30
Q1	0.241785	Q1	0.442376
Q2	1	Q2	1
Q3	0.5	Q3	0.5
Q4	0.083265	Q4	0.038231
Q5	0.170562	Q5	0.291902

неможе бути >1

Q4<Q5<Q1<Q3<Q2