Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Інститут математики Національної академії наук України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова
Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки
Рівненський державний гуманітарний університет

МАТЕРІАЛИ ВІСІМНАДЦЯТОЇ МІЖНАРОДНОЇ НАУКОВОЇ КОНФЕРЕНЦІЇ ІМЕНІ АКАДЕМІКА МИХАЙЛА КРАВЧУКА

7—10 жовтня 2017 року, Луцьк — Київ

I

Київ
2017

National Technical University of Ukraine
“Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”
Institute of Mathematics of the National Academy of Science of Ukraine
Taras Shevchenko National University of Kyiv
National Pedagogical Drahomanov University
Lesya Ukrainka East European National University
Rivne State Humanitarian University

PROCEEDINGS OF EIGHTEENTH INTERNATIONAL SCIENTIFIC MYKHAILO KRAVCHUK CONFERENCE

October 7–10, 2017, Lutsk – Kyiv

I

Kyiv
2017

**Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского»
Институт математики Национальной академии наук Украины
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченка
Национальный педагогический университет имени М. Драгоманова
Восточноевропейский национальный университет
имени Леси Украинки
Ровенский государственный гуманитарный университет**

МАТЕРИАЛЫ ВОСЕМНАДЦАТОЙ МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ ИМЕНИ АКАДЕМИКА МИХАИЛА КРАВЧУКА

7–10 октября 2017 года, Луцк — Киев

I

**Киев
2017**

УДК 51:061.2/.3

Матеріали Вісімнадцятої міжнародної наукової конференції імені академіка Михайла Кравчука, 7—10 жовтня 2017 року, Київ: Т. 1. — Київ: НТУУ «КПІ», 2017. — 252 с.

Proceedings of Eighteenth International Scientific Mykhailo Kravchuk Conference, October 7–10, 2017, Kyiv: Vol. 1. — Kyiv: NTUU «KPI», 2017. — 252 p.

Материалы Восемнадцатой международной научной конференции имени академика Михаила Кравчука, 7—10 октября 2017 года, Киев: Т. 1. — Киев: НТУУ «КПИ», 2017. — 252 с.

ISBN 978-617-7021-57-4

ISBN 978-617-7021-57-4

©Автори

©НТУУ «КПІ», 2017

Академік Всеукраїнської академії наук
Academician of All-Ukrainian Academy of Sciences
Академик Всеукраинской академии наук
Михайло Кравчук
Mychailo Kravchuk
Михаил Кравчук

1892—1942

XVIII Міжнародна наукова конференція
імені академіка Михайла Кравчука

Програмний комітет

Акад. НАН України *М. Згуровський* (Україна) — співголова
Проф. *Н. Вірченко* (Україна) — співголова

Акад. НАН України *Ю. Якименко* (Україна)
Акад. НАН України *М. Ільченко* (Україна)
Акад. НАН України *А. Самойленко* (Україна)
Акад. НАН України *М. Перестюк* (Україна)
Акад. НАН України *Я. Яцків* (Україна)
Проф. *Р. Андрушків* (США)
Проф. *А. Бомба* (Україна)
Проф. *В. Ванін* (Україна)
Проф. *М. Городній* (Україна)
Проф. *П. Задерей* (Україна)
Проф. *І. Парасюк* (Україна)
Проф. *М. Працьовитий* (Україна)
Проф. *А. Прикарпатський* (Польща)
Проф. *А. Романюк* (Україна)

Організаційний комітет

М. Згуровський — співголова
Н. Вірченко — співголова
В. Гайдей — заступник голови
В. Ковтунець
О. Клесов
М. Дудкін
С. Івасишен
Ю. Харкевич
О. Іванов
І. Алєксєєва
О. Диховичний
Н. Задерей
Л. Федорова

Eighteenth International Scientific Mykhailo Kravchuk Conference

Programme Committee

Acad. NASU *M. Zgurovsky* (Ukraine) — Co-Chair
Prof. *N. Virchenko* (Ukraine) — Co-Chair

Acad. NASU *Yu. Yakymenko* (Ukraine)
Acad. NASU *M. Ilchenko* (Ukraine)
Acad. NASU *A. Samoilenko* (Ukraine)
Acad. NASU *M. Perestiuk* (Ukraine)
Acad. NASU *Ya. Yatskiv* (Ukraine)
Prof. *R. Andrushkiw* (USA)
Prof. *A. Bomba* (Ukraine)
Prof. *V. Vanin* (Ukraine)
Prof. *M. Horodniy* (Ukraine)
Prof. *P. Zaderei* (Україна)
Prof. *I. Parasiuk* (Ukraine)
Prof. *M. Pratsiovytyi* (Ukraine)
Prof. *А. Прикарпатський* (Poland)
Prof. *A. Romaniuk* (Ukraine)

Organizing Committee

M. Zgurovsky — Co-Chair
N. Virchenko — Co-Chair
V. Haidey — Deputy Chair
V. Kovtunets
O. Klesov
M. Dudkin
S. Ivasyshen
Yu. Kharkevych
O. Ivanov
I. Alyeksyeyeva
O. Dykhovychnyi
N. Zaderei
L. Fedorova

XVIII Международная научная конференция имени академика Михаила Кравчука

Программный комитет

Акад. НАН Украины М. Згуровский (Украина) — сопредседатель
Проф. Н. Вирченко (Украина) — сопредседатель
Акад. НАН Украины Ю. Якименко (Украина)
Акад. НАН Украины М. Ильченко (Украина)
Акад. НАН Украины А. Самойленко (Украина)
Акад. НАН Украины Н. Перестюк (Украина)
Акад. НАН Украины Я. Яцкив (Украина)
Проф. *Р. Андрушкив* (США)
Проф. *А. Бомба* (Украина)
Проф. *В. Ванин* (Украина)
Проф. *Н. Городний* (Украина)
Проф. *П. Задерей* (Украина)
Проф. *И. Парасюк* (Украина)
Проф. *Н. Працевитый* (Украина)
Проф. *А. Прикарпатский* (Польша)
Проф. *А. Романюк* (Украина)

Организационный комитет

М. Згуровский — сопредседатель
Н. Вирченко — сопредседатель
В. Гайдей — заместитель председателя
В. Ковтунец
О. Клесов
Н. Дудкин
С. Ивасишен
Ю. Харкевич
А. Иванов
И. Алексеева
А. Дыховичный
Н. Задерей
Л. Федорова

УКРАЇНСЬКИЙ ВЧЕНИЙ СВІТОВОЇ СЛАВИ

Михайло Пилипович Кравчук (1892—1942) — найвизначніший український математик XX сторіччя, всесвітньо відомий учений, громадський діяч, академік Всеукраїнської академії наук.

«... Майже жодне явище у створенні математичної науки в Україні не сталося без його участі,... ані закладалися ***перші*** *українські школи в місті і по селах,* ***перші*** *курси,* ***перші українські університети*** *(народний і державний),..., ані утворювалася математична термінологія або наукова мова... — нічого цього не робилося без* ***найактивнішої участі Михайла Кравчука*** *» (так писалося в характеристиці на нього, надісланої до Всеукраїнської академії наук 1929 р. у зв'язку з висуненням його кандидатури в дійсні члени академії).*

Наукові праці М. Кравчука з різних галузей математики (вищої алгебри та математичного аналізу, теорії диференціальних та інтегральних рівнянь, теорії імовірностей та математичної статистики тощо) увійшли до скарбниці ***світової Науки.*** *За його ідеями й відкриттями виразно проступала перспектива поглибленого розвитку й використання їх.*

Вже давно існують на сторінках наукових досліджень і ***многочлени Кравчука,*** *і* ***моменти Кравчука****, і* ***формули Кравчука****, і осцилятори* ***Кравчука****, а завдяки пошукам І. Качановського виявилося, що М. Кравчук стояв біля витоків* ***винаходу першого у світі електронного комп'ютера!***

Увесь свій короткий вік М. Кравчук працював невпинно й творчо на благо ***Науки****, на благо* ***Освіти рідного народу.***

«Моя любов — Україна і математика» *— таким було його життєве кредо.*

Він справжній поет формул, математика для нього — це творчість, натхнення і радість. Він педагог за покликанням. Його лекції — це і сила, й безмірна глибочінь, і краса математичної думки. На його лекції ходили як на свято.

М. Кравчук викладав математичні предмети і в Київському університеті, і у політехнічному, авіаційному, архітектурному, ветеринарно-зоотехнічному, сільськогосподарському інститутах Києва. Він відкрив талант і дав путівку у світ відкриттів видатним конструкторам ***Сергію Корольову*** *і* ***Архипу Люльці****.*

Пам'ять про М. Кравчука живе у ***серцях київських політехніків****, де він викладав вищу математику з 1921 р. і завідував кафедрою вищої математики (1934—1938 рр). Видано його «Науково-популярні праці», «Вибрані математичні праці», книгу «Розвиток математичних ідей Михайла Кравчука», відкрито* ***пам'ятник*** *М. Кравчуку (2003 р.), створено фільм «Голгофа академіка Кравчука» (2004 р.), названо його ім'ям одну з київських* ***вулиць*** *(2009 р.)*

Життя цього видатного вченого-математика спалахнуло як блискучий болід і після арешту й засуду в терорному 1938 році приречено було згоріти через кілька літ у суворих колимських таборах.

Ім'я М. Кравчука повернулось в український науковий пантеон і є зразком для наслідування та продовження його досліджень у працях сучасних і прийдешніх науковців в ***Україні й далеко поза Україною.***

OUTSTANDING UKRAINIAN MATHEMATICIAN ACADEMICIAN M. KRAVCHUK (1892—1942)

Mykhailo Kravchuk *made significant contributions to numerous branches of mathematics and the development of* ***mathematical education****. In 1929 Kravchuk was elected a full member of All-Ukrainian Academy of Sciences.*

Kravchuk was the author of more than 180 scientific works, including 10 monographs, in a number of branches of mathematics (algebra and number theory, theory of functions of real and complex variable, theory of differential and integral equations, mathematical statistics and probability theory, history of mathematics, Ukrainian mathematical terminology etc.)

Let us point some fundamental lines of his research:

— investigations in the theory of permutation matrices, quadratic and bilinear forms, theory of algebraic and transcendental equations;

— the creation and mathematical proof of the general method of moments and its application to the approximate solution of ordinary linear differential equations, integral equations, equations of mathematical physics;

— introduction and use of polynomials associated with the binomial distribution, now known in the world mathematical literature as ***Kravchuk's polynomials;***

— analysis of complex questions in philosophy, the history of mathematics and techniques.

Mykhailo Kravchuk never learned about the role that his sci. works played in the inventions of the first electronic computer. American scientist ***John Atanasoff*** *(1903–1995) took a great interest in Kravchuk's sci. works when he investigated the problem of* ***making electronic computer****.*

His selfness efforts for the sake of the ***development of science*** *in* ***Ukraine****, extraordinary* ***talent*** *as* ***teacher*** *and* ***reputation among students*** *and* ***scientific community*** *could not go unnoticed by authority.*

In 1938 *Kravchuk was arrested and accused of involvement in a host of typical counterrevolutionary activities — changes that were common in those years in USSR. In the same year he was sentenced to 20 years of confinement and 5 years of exile and transported to concentration camps in* ***Kolyma****. There in consequence of cold, undernourishment and illnesses he* ***was died in March 9, 1942.***

He was ***rehabilitated*** *be soviet regime only* ***in 1956****. But only in 1992, almost 100 years after his birth, M. Kravchuk was readmitted to membership in* ***the National Academy of Sciences of Ukraine****. The same year his name was entered in the International Calendar of Scientists by UNESCO. The* ***First Kravchuk International Conference*** *was held at Kyiv Polytechnic Institute "KPI" in 1992.* ***Three books*** *of M. Kravhuk's works were* ***published*** *in Kyiv:*

"Popular scientific works" (2000).

"Selected mathematical works" (2002).

"Development of the Mathematical ideas of Mykhailo Kravchuk (Krawtchouk)".

On the 20th of May 2003 the NTUU "KPI" unveiled ***a statue of M. Kravchuk****.*

I

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ТА ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ, ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

THEOREM ON CONVERGENCE OF THE SERIES OF THE SOLUTION TO THE CAUCHY PROBLEM FOR THE BBGKY HIERARCHY OF EQUATIONS OF MANY-KIND PARTICLE SYSTEMS IN THE BANACH SPACE $E_{\xi,\beta}$

H. M. Hubal

Lutsk National Technical University, Lutsk, Ukraine

niik-g@yandex.ru

The convergence of the series of the solution to the Cauchy problem for the BBGKY hierarchy of equations in cumulant representation is proved for the Banach space of sequences of bounded measurable functions.

Keywords: BBGKY hierarchy of equations, Banach space, many-kind particle system, pair short-range hard core interaction potential, cumulant representation.

The non-equilibrium state of many-kind particle systems can be described by a solution of the Cauchy problem for the BBGKY hierarchy of equations which can be represented as the iteration series or the functional series (Bogolyubov, 1946; Cercignani, Gerasimenko & Petrina, 1997; Illner & Pulvirenti, 1987). We can describe the cluster nature of the evolution of many-kind particle systems by the solution in the cumulant representation (Gubal', 2014; Gerasimenko, Ryabukha & Stashenko, 2004).

Consider a many-kind particle system. Denote by $2\sigma_i$ and m_i the i-th particle diameter and mass respectively. Particles are characterized by their phase coordinates $(q_i, v_i) \equiv x_i$.

Let particles interact via the pair short-range hard core interaction potential $\Phi(q)$.

Consider the Banach space $E_{\xi,\beta}$ of sequences

$$f = \{f_n(x_{-n_2}, \ldots, x_{n_1})\}_{n=n_1+n_2\geq 0}$$

of bounded measurable functions $f_n(x_{-n_2}, \ldots, x_{n_1})$ equal to zero on the set of forbidden configurations with the norm

$$\|f\| = \sup_{n\geq 0} \xi^{-n} \sup_{\substack{n_1,n_2\geq 0\\ n_1+n_2=n}} \sup_{x_{-n_2},\ldots,x_{n_1}} \left| f_n(x_{-n_2}, \ldots, x_{n_1}) \right| e^{\beta \sum\limits_{i=-n_2}^{n_1} \frac{m_i v_i^2}{2}},$$

where $\xi, \beta > 0$.

A solution

$$F(t) = \{F_{|Y|}(t, Y)\}_{|Y| = s = s_1 + s_2 \geq 0}$$

of the Cauchy problem for the BBGKY hierarchy of equations is represented as the expansion in the space $E_{\xi,\beta}$:

$$F_{|Y|}(t,Y) = \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\int\limits_{(\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^1)^{n_1+n_2}} d(X\setminus Y)\mathfrak{A}_{(n_2,n_1)}(t,X_Y)F_{|X|}(0,X), \qquad (1)$$

where

$$Y = (x_{-s_2},\ldots,x_{s_1}),$$

$$X = (x_{-(n_2+s_2)},\ldots,x_{s_1+n_1}),$$

$$d(X\setminus Y) = dx_{-(n_2+s_2)}\ldots dx_{-s_2+1}dx_{s_1+1}\ldots dx_{s_1+n_1},$$

$$X_Y = (x_{-(n_2+s_2)},\ldots,x_{-(s_2+1)},Y,x_{s_1+1},\ldots,x_{s_1+n_1}),$$

$$\mathfrak{A}_{(n_2,n_1)}(t,X_Y) = \sum_{P:X_Y=\bigcup_i X_i}(-1)^{|P|-1}\prod_{X_i\subset P}S_{|X_i|}(-t,X_i),$$

$\sum\limits_{P:X_Y=\bigcup_i X_i}$ — is the sum over all ordered partitions of the partially ordered set X_Y into $|P|$ nonempty pairwise disjoint partially ordered subsets and the set Y lies in one of the subsets X_i.

The following theorem holds.

Theorem 1. *For the pair short-range hard core interaction potential* $\Phi(q)$ *and for the initial data* $F(0)\in E_{\xi,\beta}$, *the series* (1) *converges uniformly on* Y *on every compact set in the space* $E_{\xi,\beta}$ *if*

$$0\le t<t_0\equiv\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{d}\left(\frac{1}{4\xi}\sqrt{\frac{\beta}{2\pi}}e^{-\left(2\beta B+\frac{1}{\sqrt{m}}\right)}-R\right)},$$

where

$$d=\max\left(D,\frac{2}{R\beta}\right),\ D\equiv\sup_i|F_i|<+\infty,$$

F_i *is the force acting upon the* i*-th particle by its nearest neighbours,* R *is the range of interaction,*

$$m=\min(m_a,m_b),$$

$$m_a=\min(m_{s_1+1},\ldots,m_{s_1+n_1}),\ m_b=\min(m_{-(n_2+s_2)},\ldots,m_{-(s_2+1)}).$$

References

Bogolyubov, N. N. (1946). *Problems of a dynamical theory in statistical physics.* Moscow: Gosudarstv. Izdat. Tehn. Teor. Lit.

Cercignani, C., Gerasimenko, V. I., & Petrina, D. Ya. (1997). *Many-particle dynamics and kinetic equations.* Dordrecht: Kluwer Acad. Publ.

Gerasimenko, V. I., Ryabukha, T. V., & Stashenko, M. O. (2004). On the structure of expansions for the BBGKY hierarchy solutions. *J. Phys. A: Math. and General, 37*(42), 9861–9872.

Gubal', G. N. (2014). On the existence of weak local in time solutions in the form of a cumulant expansion for a chain of Bogolyubov's equations of a one-dimensional symmetric particle system. *Journal of Mathematical Sciences*, *199*(6), 654–666.

Illner, R., & Pulvirenti, M. (1987). A derivation of the BBGKY hierarchy for the hard sphere particle systems. *Transp. Theory and Statist. Phys., 16*(7), 997–1012.

LINIOWE ROZSZERZENIA UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

Marek Morawiak
Politechnika Śląska w Gliwicach, Polska
Marek.Morawiak@polsl.pl

Dany jest układ równań różniczkowych:

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x, \tag{1}$$

gdzie $\varphi \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$, $a(\varphi)$ funkcją wektorową ciągłą 2π-okresową ze względu na każdą zmienną. $A(\varphi)$ jest $n \times n$-wymiarową macierzą, której elementami są funkcje ciągłe, 2π-okresowe ze względu na każdą zmienną. W pracach Samoilenko (1987), Mitropolskiy, Samoilenko & Kulyk (1990) przyjęto mówić, że funkcja $a(\varphi)$ jest określona na m-wymiarowym torusie T_m i pisać $a(\varphi) \in C\left(T_m\right)$, gdzie $C\left(T_m\right)$ oznacza przestrzeń funkcji ciągłych, 2π-okresowych względem każdej zmiennej. Wiadomo, że jeżeli istnieje forma kwadratowa

$$\left\langle S(\varphi)x, x \right\rangle,$$

której pochodna względem układu (1) jest dodatnio określona, wówczas posiada on dokładnie jedną funkcję Greena — Samojlenki. Taką formę kwadratową nazywa się funkcją Lapunowa. W szczególnych przypadkach może ona być funkcją skalarną.

Rozpatrując układ równań różniczkowych postaci:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sin\varphi, \qquad \frac{dx}{dt} = \left(\cos 2n\varphi\right)x, \tag{2}$$

można dobrać formę kwadratową, której pochodna względem układu (2) będzie dodatnio określona. Forma kwadratowa ma następującą postać:

$$V = x^2 \exp\left\{s_n(\varphi)\right\}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

gdzie

$$s_1(\varphi) = -4\cos\varphi,$$

$$s_2(\varphi) = -\frac{16}{3}\cos^3\varphi,$$

$$s_3(\varphi) = -\frac{64}{5}\cos^5\varphi + \frac{32}{3}\cos^3\varphi - 4\cos\varphi, \text{ itd.}$$

Oznacza to, że układ (2) jest regularny.

Układ (2) można uogólnić do postaci:

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \frac{dx}{dt} = \left[\mu_0(\varphi) + \mu_1(\varphi)\right]x, \tag{3}$$

gdzie $\varphi \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^1$, $\mu_0(\varphi), \mu_1(\varphi)$ są funkcjami ciągłymi 2π-okresowymi ze względu na każdą zmienną. Zakładamy także, że funkcja $\mu_1(\varphi)$, spełnia następujące liniowe jednorodne równanie różniczkowe cząstkowe:

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial s}{\partial \varphi_j} a_j(\varphi) = \mu_1\left(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\right), \tag{4}$$

mające rozwiązanie postaci

$$s = s(\varphi) = s\left(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\right),$$

będące 2π-okresowe względem każdej zmiennej.

Twierdzenie 1. *Jeżeli występująca w układzie równań (4) funkcja* $\mu_0(\varphi)$ *spełnia nierówność:*

$$\left|\mu_0(\varphi)\right| > 0, \ \forall \varphi \in T_m ,$$

oraz równanie (4) *posiada rozwiązanie* $s(\varphi) \in C^1(T_m)$, *wówczas układ* (3) *jest regularny, tzn. posiada dokładnie jedną funkcje Greena — Samojlenki. Forma kwadratowa, której pochodna względem układu* (3) *będzie dodatnio określona ma postaci*

$$V = x^2 \exp\left\{-2s(\varphi)\right\}.$$

Uwaga 1. Jeżeli nie można znaleźć rozwiązania równania (4) mającego postać

$$s(\varphi) = s\left(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m\right),$$

będącego 2π-okresowym względem każdej zmiennej lub też rozwiązanie to nie istnieje, wówczas proponuje się, aby rozważyć równanie różniczkowe cząstkowe następującej postaci:

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial s}{\partial \varphi_j} a_j(\varphi) = \mu_1(\varphi) - \overline{\mu}(\varphi), \tag{5}$$

w którym wybieramy funkcję ciągłą 2π-okresową względem każdej zmiennej $\overline{\mu}(\varphi) \in C^1(T_m)$, tak aby równanie (5) miało rozwiązanie $s(\varphi) \in C^1(T_m)$, oraz spełniało nierówność:

$$\left|\mu_0(\varphi) + \overline{\mu}(\varphi)\right| > 0, \ \forall \varphi \in T_m,$$

wówczas układ (3) będzie regularny.

Rozpatrzmy układ równań różniczkowych:

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi_1}{dt} = 1 + 2\sin\varphi_1 + 3\sin\varphi_2, \\ \dfrac{d\varphi_2}{dt} = 2 + 3\sin\varphi_1 + 4\sin\varphi_2, \\ \dfrac{dx}{dt} = \left[\mu_0\left(\varphi_1, \varphi_2\right) + 5\sin\varphi_1 + 6\sin\varphi_2 + 7\sin^2\varphi_1 + 8\sin\varphi_1\sin\varphi_2 + 9\sin^2\varphi_2\right]x. \end{cases}$$

Równanie odpowiadające (5) ma postać:

$$\frac{ds}{d\varphi_1}\left(1 + 2\sin\varphi_1 + 3\sin\varphi_2\right) + \frac{ds}{d\varphi_2}\left(2 + 3\sin\varphi_1 + 4\sin\varphi_2\right) =$$

$$= 5\sin\varphi_1 + 6\sin\varphi_2 + 7\sin^2\varphi_1 + 8\sin\varphi_1\sin\varphi_2 + 9\sin^2\varphi_2 - \overline{\mu}\left(\varphi_1,\varphi_2\right),$$

gdzie w funkcji $\overline{\mu}\left(\varphi_1,\varphi_2\right)$ postaci:

$$\overline{\mu}\left(\varphi_1,\varphi_2\right) = \overline{\mu}_1\sin\varphi_1 + \overline{\mu}_2\sin\varphi_2 + \overline{\mu}_{11}\sin^2\varphi_1 + \overline{\mu}_{12}\sin\varphi_1\sin\varphi_2 + \overline{\mu}_{22}\sin^2\varphi_2,$$

współczynniki $\overline{\mu}_1,\overline{\mu}_2,\overline{\mu}_{11},\overline{\mu}_{12},\overline{\mu}_{22}$ dobieramy tak, aby równanie różniczkowe cząstkowe miało rozwiązanie postaci

$$s = s\left(\varphi_1,\varphi_2\right) = s_1\cos\varphi_1 + s_2\cos\varphi_2,$$

gdzie $s_1, s_2 = const.$ Wybierając przykładowo $s_1 = 1, s_2 = 0$, otrzymujemy, że układ będzie regularny, jeżeli spełniona jest nierówność

$$\mu_0\left(\varphi_1,\varphi_2\right) > \frac{36}{29}.$$

Spis literatury

Kulyk, V. L. (2015). Konstrukcje funkcji Lapunowa w teorii liniowych rozszerzeń układów dynamicznych na torusie. *Ukr. Mat. Żurn.*, *67*(10), 1348–1355.

Kulyk, V. L., & Paczko, D. (2014). Some conditions of regularity of linear extensions of dynamical systems with respect to selected variables. *Nonlinear Analysis: Modeling and Control*, *19*(4), 602–610.

Mitropolskiy, J. A., Samoilenko, A. M., & Kulyk, V. L. (1990). *Issliedowania dichotomii liniejnych sistem differencjalnych urawnienij s pomoszcziu funkji Lapunowa*. Kijów: Naukowa dumka.

Samoilenko, A. M. (1987). *Elementy matematycznej teorii wieloczęstotliwościowych drgań*. Moskwa: Nauka.

SOME PROPERTIES OF THE R-HYPERGEOMETRIC FUNCTION

O. V. Ovcharenko
National Technical University of Ukraine
“Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, Kyiv, Ukraine
lena_rum@ukr.net

With the theory of generalized special functions associated large number of different mathematical problems. Thus, the special functions are widely used in the construction of various integral transforms (Saigo, Kober, Saxena et al.), the theory of which (with kernels as special functions) in recent years has developed in the works of Kilbas and Saigo (2004), Mathai and Haubold (2008), Saxena (1967), Kalla and Saxena (1986), and which allow to obtain solutions in analytical form of many important classes of differential and integral equations. In this repot with the help of the (τ,β)-generalized confluent hypergeometric function the r-hypergeometric function is considered. The main properties of the r-hypergeometric function and important relations, in particular, the composite relation with integral operator of Erdelyi–Kober type, the relation of Erdelyi type, the Mellin transform are obtained.

Keywords: r-hypergeometric function; (τ,β)-generalized confluent hypergeometric function.

Let us consider the r-hypergeometric function in the following form:

$$ {}_r\tilde{F}^{\tau,\beta}\left(a,b;c;z\right)= $$

$$ =\frac{1}{\mathrm{B}\left(b,c-b\right)}\int_0^1 t^{b-1}\left(1-t\right)^{c-b-1}\left(1-zt\right)^{-a}\,{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{r}{t\left(1-t\right)}\right)dt, \quad (1) $$

where $\left\{a,b,c\right\}\subset\mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\,c>\mathrm{Re}\,b>0$, $r>0$; $\tau>0,\tau-\beta<1$, $\mathrm{B}\left(b,c-b\right),r=0$, $\left|z\right|<1;\mathrm{Re}\,\gamma>\mathrm{Re}\,\alpha>0$, $\left\{\tau,\beta\right\}\subset\mathbb{R}$, is the classical beta-function (Erdelyi et al, (1953), ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\ldots\right)$ is the (τ,β)-generalized confluent hypergeometric function (Virchenko, 2006):

$$ {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;z\right)= $$

$$ =\frac{1}{\mathrm{B}\left(a,c-a\right)}\int_0^1 t^{a-1}\left(1-t\right)^{c-a-1}\,{}_1\Psi_1\left[\begin{matrix}\left(c;\tau\right);\\ \left(c;\beta\right);\end{matrix}\,zt^{\tau}\right]dt, \qquad (2) $$

where ${}_1\Psi_1(\ldots)$ is the Fox–Wright function (Kilbas & Saigo, 2004). As $\tau=\beta=1,r=0$ in (2) we have the classical confluent hypergeometric function ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;z\right)$ (Kilbas & Saigo, 2004); as $r=0$ in (1) we have the Gauss hypergeometric function ${}_2F_1\left(a,b;c;z\right)$ (Erdelyi et al, 1953).

In the case of fulfilling of the conditions of existence of ${}_r\tilde{F}^{\tau,\beta}\left(a,b;c;z\right)$ following formulae are valid:

Lemma 1. *(The relation of Erdelyi type). As*

$$\operatorname{Re}\gamma > \operatorname{Re}\alpha > 0, \left\{a,b,c\right\} \subset \mathbb{C}, \operatorname{Re}c > \operatorname{Re}b > 0, r > 0;$$
$$r = 0, \left|z\right| < 1; \left\{\tau,\beta\right\} \subset \mathbb{R}, \tau > 0, \tau - \beta < 1,$$

the following relation of Erdelyi type is valid:

$${}_r\tilde{F}^{\tau,\beta}\left(a,b;c;z\right) = \left(1-z\right)^{-a} {}_r\tilde{F}^{\tau,\beta}\left(a,c-b;c;\frac{z}{z-1}\right).$$

Lemma 2. *(On the Mellin transform for* ${}_r\tilde{F}^{\tau}(a,b;c;z)$*). As the conditions:*

$$\tau \in \mathbb{R}_+, \left\{a,b,c\right\} \subset \mathbb{C}, \operatorname{Re}\left(c-b\right) > s, \operatorname{Re}c > \operatorname{Re}b > 0, r > 0;$$
$$r = 0, \operatorname{Re}\gamma > \operatorname{Re}\alpha > st, \left\{r,z\right\} \subset \mathbb{C}, \left|z\right| < 1,$$

following relation is valid:

$$\mathcal{M}\{{}_r\tilde{F}^{\tau}(a,b;c;z),s\} = A\,{}_2F_1(a,b+s;c+2s;z),$$

where

$$A = \frac{\mathrm{B}(b+s,c-b+s)}{\mathrm{B}(b,c-b)}\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(s)\Gamma(\alpha-s\tau)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-s\tau)}.$$

Theorem. *(On the composite relation with integral operator of Erdelyi–Kober type). As*

$$0 < \frac{1}{p} \le 1,\; 0 \le \lambda + \frac{2}{p} - 1 < c - a,\; \frac{1}{p} < a,\; \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} - \lambda > 0$$

for integral operator

$$(N^a_{c-\lambda}f)(x) \equiv x^{\lambda}\int\limits_0^{\infty}(xt)^{a-1}\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;-xt)f(t)dt$$

the following composite relation is valid:

$$(N^a_{c-\lambda}f)(x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} I^{c-a}_{\frac{2}{p}-1,\lambda+\frac{2}{p}-1} T^a f(x),$$

where T^a *is operator of the modified Laplace integral transform:*

$$(T^a f)(x) = x^{a-\frac{2}{p}}\int\limits_0^{\infty} t^{a-1}e^{-xt}f(t)dt,\; (x > 0),$$

$I^{c-a}_{\frac{2}{p}-1,\lambda+\frac{2}{p}-1}$ *is the integral operator of Erdelyi–Kober type:*

$$I^{c-a}_{\frac{2}{p}-1,\lambda+\frac{2}{p}-1}f(x) = \frac{x^{\lambda-c+a}}{\Gamma(c-a)}\int\limits_0^{x}(x-t)^{c-a-1}t^{\frac{2}{p}-1}\,{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\delta;\gamma;-\frac{r}{\frac{t}{x}\left(1-\frac{t}{x}\right)}\right)f(t)dt.$$

References

Erdelyi, A., Magnus, W., Oberhettinger F., & Tricomi, F. G. (1953). *Higher Transcendental Functions*. (Vol. 1). New York, NY: Mc.Grow-Hill.

Kalla, S. L., & Saxena, R. K. (1986). Integral operators involving hypergeometric functions. *Math. Zeitschr., 108*(2), 231–234.

Kilbas, A. A., & Saigo M. (2004). *H-transforms: Theory and Applications.* CRC Press.

Mathai, A. M., & Haubold, H. J. (2008). *Special functions for applied scientists*. New York, NY: Springer Science+ Business Media.

Saxena, R. K. (1967). On fractional operation operators. *Math. Zeitschr.*, *96*(4), 289–291.

Virchenko, N. (2006) On the generalized confluent hypergeometric function and its application. *Fract. Calculus and Appl. Math. J.*, *9*(2), 101–108.

MODELING OF NON-STATIONARY VIBRATIONS OF COMPLEX-SHAPE LAMINATED SHELLS UNDER IMPACT LOADING

N. V. Smetankina

A. N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, Ukraine

nsmetankina@ukr.net

An approach to solution of the problem about non-stationary vibrations of laminated cylindrical orthotropic shells with a complex shape in plan view is developed on the basis of the method of the given domain expansion. Vibrations of shells are investigated within the framework of the first order theory accounting to transverse shear strains, compression on width and normal element rotation inertia in each layer. The example of calculation of vibrations of a five-layer shell is presented.

Key words: laminated shell, complex shape, non-stationary vibrations, impact.

Laminated composite structures are advantageous as compared with homogeneous ones. Hence, they are used widely in mechanical engineering. Calculating dynamic response parameters for impact loading is a key effort in analyzing vibrations of composite structures (Abrate, 1998).

A review of recent studies shows that numerical methods are used widely to analyze non-stationary vibrations of laminated structures subjected to impact loads. The finite element method is used most often (Zhang & Yang, 2009). The analytical solution of these problems is given only for laminated plates and shells with a canonical plan-view shape (Kazanci, 2016). The paper suggests an analytical approach to investigating vibrations of a laminated shell with a complex shape in plan view under impact loading.

A constant-thickness non-closed cylindrical laminated shell is considered. It comprises orthotropic layers with constant thickness and various physical and mechanical properties. The number of layers and their layout is arbitrary. In the coordinate surface, it occupies the complex domain Ω limited by boundary $\Gamma:\ x_\Gamma = x(s),\, y_\Gamma = y(s)$.

An indenter with a semispherical end of impacts the outer surface of the shell's first layer. The indenter is dropped onto the shell from some height. Contact approach is found by solving the Hertzian problem on ball indentation into an elastic semispace

$$\alpha_c = kF^{2/3}.$$

The behavior of a laminated shell is described by the first-order theory accounting for transverse shear strain, thickness reduction and normal element rotation inertia in each layer (Smetankina et al., 2008)

$$u_k^i = u_k + \sum_{j=1}^{i-1} h_j u_{3+I(k-1)+j} + \left(z - \delta_{i-1}\right) u_{3+I(k-1)+i},\ k = 1,2,3,\ \ i = \overline{1,I},$$

where

$$\delta_i = \sum_{j=1}^{i} h_j,\ \delta_{i-1} \le z \le \delta_i;\ u_k = u_k\left(x, y, t\right)\ \left(k = 1,2,3\right)$$

are displacements of coordinate plane points to coordinate axes;

$$u_{3+I(k-1)+i} = u_{3+I(k-1)+i}\left(x,y,t\right)\ \left(k = 1,2\right)$$

are angles of rotation of the normal element in the i^{th} layer about the coordinate axes Ox and Oy;

$$u_{3+2I+i} = u_{3+2I+i}\left(x, y,t\right)$$

is normal element reduction within the i^{th} layer; t is time.

Stresses and strains are related by Hooke's law

$$\sigma_x^i = B_{11}^i\varepsilon_x^i + B_{12}^i\varepsilon_y^i + B_{13}^i\varepsilon_z^i,\ \sigma_y^i = B_{12}^i\varepsilon_x^i + B_{22}^i\varepsilon_y^i + B_{23}^i\varepsilon_z^i,$$

$$\sigma_z^i = B_{13}^i\varepsilon_x^i + B_{23}^i\varepsilon_y^i + B_{33}^i\varepsilon_z^i,$$

$$\tau_{yz}^i = B_{44}^i\gamma_{yz}^i,\ \tau_{xz}^i = B_{55}^i\gamma_{xz}^i,\ \tau_{xy}^i = B_{66}^i\gamma_{xy}^i,\ i = \overline{1,I}.$$

The equations of motion of a laminated shell affected by impact load, well as the respective boundary conditions on boundary Γ are derived by Hamilton's variational principle

$$\left[\mathbf{\Omega}^{\rho}\right]\mathbf{U}_{,tt} - \left[\mathbf{\Lambda}\right]\mathbf{U} = \mathbf{P},\ \left(x,y\right) \in \Omega;\ \mathbf{U} = \mathbf{U}_{,t} = 0,\ \ t = 0, \tag{1}$$

$$\left[\mathbf{B}^{\Gamma}\right]\ \mathbf{U} = \mathbf{P}^{\Gamma},\quad \left(x, y\right) \in \Gamma, \tag{2}$$

where $\left[\mathbf{\Omega}^{\rho}\right]$ and $\left[\mathbf{\Lambda}\right]$ are symmetric matrices,

$$\mathbf{U} = \left\{ u_j\left(x,y,t\right)\right\},\ B_{ij}^{\Gamma} = \chi_i^1 B_{ij}^u + \chi_i^2 B_{ij}^{\sigma},\ i,j=\overline{1,\ 3I+3}.$$

The problem of investigating non-stationary vibrations of a laminated shell subjected to an impact load is reduced to integrating a system of motion equations for a shell with account of boundary conditions jointly with the indenter equation of motion and the condition of joint displacement of the indenter and shell.

The analytical solution of the problem is obtained by the immersion method (Shupikov & Smetankina, 2001). According to this method, a non-closed cylindrical laminated shell is immersed into an auxiliary enveloping cylindrical shell with the same composition of layers. It is loaded within domain Ω similar to that for the primary shell. An auxiliary shell is one whose contour shape and boundary conditions yield a simple analytical solution. In this case, the auxiliary shell is a simply supported non-closed cylindrical laminated with rectangular plan-view shape, allowing to find the problem solution as trigonometric series.

To satisfy actual boundary conditions, additional distributed compensating loads

$$\mathbf{Q}^{\text{comp}} = \left\{ q_j^{\text{comp}}\left(x,y,t\right) \right\} \ \left(j = \overline{1,3I+3} \right),$$

the intensity of which are to be found, are applied to the auxiliary shell over the boundary Γ. The compensating loads appear in the motion equations as curvilinear distributions. Based on the condition of satisfying boundary conditions on the boundary Γ, we form a system of integral equations for determining the intensities of compensating loads

$$\left[\mathbf{B}^{\Gamma} \right] \ \mathbf{U}\left[\mathbf{Q}^{\text{comp}}\left(x,y,t\right) \right] = \mathbf{P}^{\Gamma}, \ \left(x,y\right) \in \Gamma .$$

Displacements and loads are expanded in the auxiliary shell domain in trigonometric series for functions satisfying simply supported conditions. The compensating loads are expanded into a series along the boundary Γ

$$q_j^{\text{comp}}\left(s,t\right) = \sum_{\alpha=1,2} \sum_{\mu=0}^{\infty} q_{j\alpha\mu}\left(t\right) b_{\alpha\mu}\left(s\right), \ j = \overline{1,3I+3}, \tag{3}$$

where

$$b_{1\mu} = \sin\left[\mu\gamma\left(s\right)\right], b_{2\mu} = \cos\left[\mu\gamma\left(s\right)\right], \ \gamma\left(s\right) = 2\pi \int_0^s \mathrm{d}\tilde{s} \Big/ \oint_{\Gamma} \mathrm{d}\tilde{s}\,, \ 0 \le \gamma\left(s\right) \le 2\pi ,$$

$$\mu = \overline{0,\mu^*}\,.$$

Hence, the system of integral equations is transformed to a system of algebraic equations with respect to the expansion coefficients of the compensating loads. The system of motion equations jointly with the equation of motion of the indenter is integrated by a method of expanding the solution into Taylor's series (Smetankina et al., 2007).

Having calculated the intensities of compensating loads (3), the solution of the problem (1) and (2) takes the final form

$$u_j\left(x,y,t\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{AB} \sum_{k=1}^{3I+3} \pi_{jk}^{mn} \sum_{l=1}^{3I+3} \sum_{\alpha=1,2} \sum_{\mu=0}^{\infty} \theta_{kl\alpha\mu}^{mn} q_{l\alpha\mu}\left(t\right) + \varepsilon_{jmn}\left(t\right) \right) C_{jmn}\left(x,y\right).$$

The method potentialities are demonstrated by calculating the strains and stresses in non-closed orthotropic cylindrical three-layer shells. A good match of theoretical results obtained by different methods confirms the feasibility and effectiveness of the method offered. The developed approach can be easily extended to impulse loading and impact applied to shells of complex shape in plan view with arbitrary boundary conditions.

References

Abrate, S. (1998) The dynamics of impact on composite structures. *Key Engineering Materials, 141*, 671–694.

Kazanci, Z. (2016). A review on the response of blast loaded laminated composite plates. *Progress in Aerospace Sciences, 81*, 49–59.

Shupikov, A. N., & Smetankina, N. V. (2001). Non-stationary vibration of multilayer plates of an uncanonical form. The elastic immersion method. *International Journal of Solids and Structures*, *38*(14), 2271–2290.

Smetankina, N. V., Shupikov, A. N., Sotrikhin, S. Yu., & Yareschenko, V. G. (2008). A noncanonically-shape laminated plate subjected to impact loading. Theory and experiment. *Transactions of the ASME. Journal of Applied Mechanics*, *75* (5), 051004-1–051004-9.

Smetankina, N. V., Shupikov, A. N., Sotrikhin, S. Yu., & Yareschenko, V. G. (2007). Dynamic response of an elliptic plate to impact loading. Theory and experiment. *International Journal of Impact Engineering*, *34*(2), 264–276.

Zhang, Y. X., & Yang, C. H. (2009) Recent developments in finite element analysis for laminated composite plates. *Composite Structures*, *88*, 147–157.

КУСКОВО-ПОЛІНОМІАЛЬНІ НАБЛИЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧ У НЕОДНОРІДНИХ СЕРЕДОВИЩАХ

В. І. Біленко[1], К. В. Божонок[1], С. Ю. Дзядик[2]
[1]*Національний педагогічний університет ім. М. П. Драгоманова, Київ, Україна*
[2]*Державний університет телекомунікацій, Київ, Україна*
katboz2014@gmail.com

Доповідь присвячена розв'язанню проблеми конструювання, теоретичного обґрунтування та програмної реалізації високоточних чисельно-аналітичних алгоритмів кусково-поліноміальної апроксимації розв'язків задач у неоднородних середовищах. Запропоновані алгоритми володіють важливими властивостям ненасичуваності за точністю та оптимальності в сенсі найкращого поліноміального наближення в квадратичній метриці.

Відомі результати робіт В. К. Дзядика поширюються на алгебраїчно-нелінійні рівняння в частинних похідних з кусково-неперервними коефіцієнтами.

Ключові слова: кусково-поліноміальна апроксимація, неоднорідні середовища, ненасичуваність, найкраще наближення, алгебраїчно-нелінійні рівняння.

Постановка задачі. Нехай X — банахів простір векторнозначних функцій u,

$$A(x,t)u = \frac{\partial}{\partial x}\left(a\ \ (x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + b(x,t,u)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}$$

— алгебраїчно-нелінійний диференціальний оператор, що діє в X, $a\ ,b,f(x,t,u)$ — є кусково-поліноміальні функції відповідного числа змінних на відрізках $[\xi_l;\xi_{l+1}]$, де $x=\xi_l$ ($l=\overline{0,s}$) — точки спряження (Сергієнко, 2010; Дейнека & Сергиенко, 2001). Розглянемо питання щодо застосування апроксимаційного методу В. К. Дзядика (a-методу) (див. Дзядык (1988)) до операторного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(x,t)u + f(x,t,u) \tag{1}$$

в області $\Pi = [0,H]\times[0,\Theta]$, $H,\Theta > 0$, з початковою умовою $u(x,0) = u_0(x)$ і крайовими умовами $u(0,t) = \mu_1(t)$, $u(H,t) = \mu_2(t)$.

Нехай у точках $x=\xi_l$, $l=\overline{1,s}$ задано умови спряження (Сергієнко, 2010):

$$R_{1l}\cdot q^-(\xi_l) + R_{2l}\cdot q^+(\xi_l) = [u](\xi_l) + \gamma_l \tag{2}$$

$$[q](\xi_l) = \lambda_l\ ,\ [u](\xi_{l+1}) = \gamma_{l+1}\ , \tag{3}$$

де $R_{1l},R_{2l}\ge 0$, $R_{1l}+R_{2l} > 0$, λ_l,γ_l — відомі сталі, $[\varphi](\xi_l) = \varphi^+(\xi_l) - \varphi^-(\xi_l)$, $\varphi^{\pm}(\xi_l) = \varphi(\xi_l \pm 0)$.

Алгоритм. Запропонований алгоритм, який узагальнює алгоритми, що були побудовані в попередніх роботах авторів (Bilenko, 1992; Біленко та ін., 2013; Біленко та ін., 2016a) полягає в реалізації наступної схеми:

1. Задачу (1) запишемо в еквівалентній інтегро-функціональній формі (Дзядык, 1988; Біленко та ін., 2016б)

$$\mathcal{L}u = F(x,t,u), \tag{4}$$

де $\mathcal{L}u$ — алгебраїчно-нелінійний інтегральний оператор, $F(x,t,u)$ — алгебраїчна функція трьох змінних, що знаходиться в результаті еквівалентного переходу, вигляду

$$F(x,t,u) = \sum_{i=0}^{I}\sum_{j=0}^{J}\sum_{k=0}^{K} A_{ijk} x^i t^j u^k, \tag{5}$$

де A_{ijk} — відомі коефіцієнти.

2. Наближений розв'язок інтегро-функціонального рівняння (4) шукаємо у вигляді поліномів

$$u_{mn}(x,t) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} c_{ij}\omega_i(x)\cdot\omega_j(t), \tag{6}$$

де $\{\omega_k(\cdot)\}_{k=0}^{\infty}$ — класичні ортогональні многочлени (Лежандра, Чебишова — Ерміта, Чебишова — Лагерра та узагальнені многочлени Якобі).

3. Інтегро-функціональне рівняння (4) замінюємо операторним рівнянням

$$\mathcal{L}u_{mn}(x,t) = F(x,t,u_{mn}(x,t)) + \varepsilon_{mn}(x,t) \tag{7}$$

щодо поліноміального розв'язку (6) із невідомою нев'язкою

$$\varepsilon_{mn}(x,t) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} \delta_{ij}\tau_{ij}\omega_i(x)\omega_j(t), \tag{8}$$

де $\delta_{00} = \frac{1}{4}$, $\delta_{0j} = \delta_{i0} = \frac{1}{2}$, якщо $i \geq 1$ і $j \geq 1$, та $\delta_{ij} = 1$, якщо $ij > 0$.

4. Конструюємо ітераційний процес, який ураховує особливості алгебраїчних нелінійностей (Хейгеман та ін., 1986) для знаходження розв'язку рівняння (7)

$$\mathcal{L}u_{mn}^{\nu+1}(x,t) = F(x,t,u_{mn}^{\nu}(x,t)) + \varepsilon_{mn}^{\nu}(x,t). \tag{9}$$

5. Після виконання операцій множення та інтегрування в (7) на кожному кроці ітерації ν, прирівнюємо коефіцієнти при однакових членах $x^i t^j$ і в отриманій таким чином системі нелінійних алгебраїчних рівнянь визначаємо всі невідомі коефіцієнти c_{ij} через τ_{ij}, $i = \overline{0,m}$, $j = \overline{0,n}$.

Теоретичне обґрунтування алгоритму. Оцінку похибки алгоритму дослідімо для випадку, коли функції ω_i та ω_j у формулах (6), (8) — це многочлени Чебишова першого роду

$$T_k(\cdot) = \cos(k\arccos(\cdot)),\ k = 0,1,2,\ldots,$$

зміщені, відповідно, на сегменти $[0,H]$ і $[0,\Theta]$:

$$T_i\left(2x / H - 1\right) \text{ та } T_j\left(2t / \Theta - 1\right).$$

Через $L_g^2[\pi]$ позначатимемо простір сумовних із квадратом функцій при чебишовській вазі

$$g\left(h,\theta\right) := 1 \,/\, \sqrt{1-\left(\frac{2x}{h}-1\right)^2}\sqrt{1-\left(\frac{2t}{\theta}-1\right)^2} \tag{10}$$

на прямокутнику $\pi = [0,h]\times[0,\theta]$ з загальновідомою нормою $\left\|\cdot\right\|_{L_g^2[\pi]}$.

На основі результатів Біленко та ін. (2013, 2016б) має місце така

Теорема. *Нехай при деяких* $h \in (0,H]$, $\theta \in \left(0,\Theta\right]$ *і деяких* $m,n = 1,2,3,\ldots$ *в кулі*

$$\sigma(\rho) := \left\{\psi \in L_g^2[\pi] : \left\|\psi\right\|_{L_g^2[\pi]} \le \rho\right\}$$

на кожному кроці ν *ітераційного процесу існує єдиний розв'язок* $u(x,t)$ *задачі (1) і єдиний розв'язок (6) операторного рівняння (8) на* π. *Тоді при вказаних* m *і* n *на* π *справедливі оцінки:*

a) $\left\|u(x,t)-u_{mn}^{\nu}(x,t)\right\|_X \le C_1\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\delta_{ij}\left|\tau_{ij}^{\nu}\right| + K_1\sigma_\nu(h)$;

b) $\left\|u(x,t)-u_{mn}^{\nu}(x,t)\right\|_X \le C_2E_{m,n}^{h\theta}(u)_X + K_2\sigma_\nu(h)$,

де $X = L_g^2[\pi]$ *з вагою (10);* $E_{m,n}^{h\theta}(u)_X$ *— максимальне значення найкращих наближень функцій* $u(x,t)$ *алгебраїчними поліномами двох змінних степеня, не вище ніж* m *і* n, *відповідно, на прямокутниках* $\pi_l = [\xi_l,\xi_{l+1}]\times[0,\theta]$; $C_i = C_i(h,\theta,s) = const$ $(i = 1,2)$, $K_j = K_j(h,\theta,s) = const$ $(j = 1,2)$; $\sigma_\nu(h)$ *визначається формулою*

$$\sigma_\nu(h) = \left\|f\right\|_{L_g^2[\Pi]}\cdot\frac{[2h(4+h)]^v}{v!}\exp[2h(4+h)],$$

де $h = \max(H,\Theta)$.

Висновок. З нерівностей a), b) теореми можна зробити висновок, що алгоритм буде ненасичуваним за точністю, оптимальним за порядком у сенсі найкращих наближень (Гаврилюк та ін., 2004; Бабенко, 1978; Молчанов, 1988; Самарский та ін., 2005; Гладкий та ін., 2006), і, отже, ефективним у випадку задач у неоднорідних середовищах за неповної інформації щодо початкових даних (Дейнека та ін., 2001).

У доповіді наведено результати розв'язування модельних задач (Біленко та ін., 2013) із монографій Дзядик (1988), Дейнека та ін. (2001) та деяких практичних задач (Біленко та ін., 2016а; Дзядык, 1973; Bozhonok, 2009).

Список літератури

Бабенко, К. И. (1978). О явлении насыщения в численном анализе. *Докл. АН СССР*, *241*(3), 505—508.

Bilenko, V. I. (1992). Integro-approxmational method for the modelling of certain class of nonlinear dynamic object. In *Proc. of the int. SYMP. on Comp math. modelling and scientific computations*, Sofia (p. 146–158). Sofia: Bulg. Acad. Sciences.

Біленко, В. І., Божонок, К. В., Дзядик, С. Ю., & Стеля, О. Б. (2016а). Алгоритм без насичення точності розв'язування алгебраїчно-нелінійних параболічних рівнянь. В *Матеріали XVI міжнар. наук. конференції ім. акад. Михайла Кравчука*, НТУУ «КПІ», Київ, 19—20 травня (Т. 1, с. 54—57). Київ: НТУУ «КПІ».

Біленко, В. І., Божонок, К. В., Дзядик, С. Ю., & Стеля, О. Б. (2016б). Наближення поліномами розв'язків алгебраїчно-нелінійних рівнянь математичної фізики. *Збірник праць Інституту математики НАН України*, *13*(3), 7—27.

Біленко, В. І., Дерієнко, А. І., & Кирилаха, Н. Г. (2013). Кусково-поліноміальні наближення розв'язків жорстких задач на основі апроксимаційного методу В. К. Дзядика. *Журн. обчисл. та приклад. математики*, (2), 68—77.

Bozhonok, E. V. (2009). Some existence conditions for the compact extrema of variational functionals of several variables in Sobolev space $W^{1,2}$. *Operator Theory: Advances and Applications*, *190*, 141–155.

Гаврилюк, И. П., & Макаров, В. Л. (2004). *Сильно позитивные операторы и численные алгоритмы без насыщения точности*. Киев: Ин-т математики НАН Украины.

Гладкий, С. Л., Степанов, Н. А., & Ясницкий, Л. Н. (2006) *Интеллектуальное моделирование физических проблем*. Л. Н. Ясницкий (Ред.). Москва: НИЦ «Регулярная и хаотичная динамика».

Дейнека, В. С., & Сергиенко, И. В. (2001). *Модели и методы решения задач в неоднородных средах*. Киев: Наукова думка.

Дзядык, В. К. (1988). *Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений*. Киев: Наукова думка.

Дзядык, С. Ю. (1973). О поведении решения неоднородных дифференциальных уравнений с точкой поворота и малым параметром при производной. *Украинский математический журнал*, *25*(2), 657—662.

Молчанов, И. Н. (1988). *Машинные методы решения прикладных задач. Дифференциальные уравнения*. Киев: Наукова думка.

Самарский, А. А., & Михайлов, А. П. (2005). *Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры.* (2-е изд., испр.). Москва: ФИЗМАТЛИТ.

Сергієнко, І. В. (2010). *Методи оптимізації та системного аналізу для задач трансобчислювальної складності*. Київ: Академперіодика.

Хейгеман, Л., & Янг, Д. (1986). *Прикладные итерационные методы*. Мир: Мир.

ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ’ЯЗКІВ НЕЛОКАЛЬНОЇ БАГАТОТОЧКОВОЇ ЗА ЧАСОМ ЗАДАЧІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ЕВОЛЮЦІЙНИХ ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Г. П. Вережак

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

g.verezhak@gmail.com

Установлено, що розв’язок нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційного рівняння з оператором диференціювання нескінченного порядку стабілізується до нуля при $t \to +\infty$ у просторі узагальнених функцій типу S'.

Ключові слова: багатоточкова задача, стабілізація розв’язку, еволюційне рівняння, узагальнена функція, псевдодиференціальний оператор.

При дослідженні проблеми про класи єдиності та класи коректності задачі Коші для рівнянь з частинними похідними зі сталими або залежними лише від часової змінної коефіцієнтами часто використовуються простори типу S, запроваджені Гельфандом та Шиловим (1958). У праці Городецький (2008) установлено, що простори типу S та S' — топологічно спряжені із просторами типу S — є природними множинами початкових даних задачі Коші для широких класів рівнянь з частинними похідними скінченного та нескінченного порядків, при яких розв’язки є цілими функціями за просторовими змінними. Узагальненням задачі Коші для таких рівнянь є нелокальна багатоточкова за часом задача з умовою

$$\sum_{k=0}^{m} \alpha_k u(t,\cdot)_{t=t_k} = f,$$

де $t_0 = 0$, $\{t_1,\dots,t_m\} \subset (0,T]$, $\{\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_m,\} \subset \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$ — фіксовані числа.

Початок досліджень зі стабілізації розв’язків задачі Коші для рівняння теплопровідності було покладено у 50-х роках М. Кжижанським (Krzyżański, 1957). У більшості праць, присвячених стабілізації розв’язків задачі Коші для тих чи інших рівнянь параболічного типу припускають, що початкова функція є звичайною, тобто досліджуються властивості розв’язків класичної задачі Коші.

У цій роботі досліджується нелокальна багатоточкова за часом задача для рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = A_\varphi u(t,x),\ t \in (0,\infty),\ x \in \mathbb{R},$$

у просторах типу S та S', де A_φ — псевдодиференціальний оператор з аналітичним символом φ, який також можна розуміти як оператор диференціювання «нескінченного порядку»:

$$A_\varphi = F^{-1}_{\sigma\to x}[\varphi(\sigma)F_{x\to\sigma}] = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(i\frac{d}{dx}\right)^k,$$

функція φ — символ оператора A_φ, задовольняє певні умови, які узагальнюють відому умову «параболічності» для параболічних псевдодиференціальних рівнянь, $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}^{-1}$ — пряме та обернене перетворення Фур'є. Установлені властивості фундаментального розв'язку нелокальної багаточкової за часом задачі для зазначеного рівняння, доведено коректну розв'язність задачі в півпросторі $t > 0$, знайдено аналітичне зображення розв'язку, досліджено поведінку розв'язку $u(t,\cdot)$ при $t \to +\infty$.

Для довільно фіксованих $\alpha,\beta > 0$ покладімо

$$S_\alpha^\beta := \{\varphi \in S \mid \exists c > 0 \exists A > 0 \; \exists B > 0 \; \forall \{k,m\} \subset \mathbb{Z}_+ \; \forall x \in \mathbb{R} :$$
$$\left| x^k \varphi^{(m)}(x) \right| \leq c A^k B^m k^{k\alpha} m^{m\beta}\}$$

Простір S_α^β можна охарактеризувати ще й так (Гельфанд & Шилов, 1958, с. 210): S_α^β складається з тих й лише тих нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій, які задовольняють нерівності

$$\left|\varphi^{(m)}(x)\right| \leq c_1 B_1^m m^{m\beta} \exp\left\{-c_2 \left|x\right|^{1/\alpha}\right\}, \, m \in \mathbb{Z}_+, \, x \in \mathbb{R},$$

з деякими додатними сталими c_1, B_1, c_2, залежними від функції φ. Якщо $0 < \beta < 1$ й $\alpha \geq 1 - \beta$, то S_α^β складається з тих й лише тих функцій φ, які допускають аналітичне продовження в комплексну площину і задовольняють нерівність

$$\left|\varphi(x + iy)\right| \leq c_3 \exp\left\{-a\left|x\right|^{1/\alpha} + b\left|y\right|^{1/(1-\beta)}\right\}, \; c_3, a, b > 0, \{x,y\} \subset \mathbb{R}.$$

У просторах S_α^β визначена і є неперервною операція зсуву аргументу

$$T_x : \varphi(\xi) \to \varphi(\xi + x).$$

Ця операція є також диференційовною в тому розумінні, що граничні співвідношення вигляду

$$(\varphi(x+h) - \varphi(x))h^{-1} \to \varphi'(x), \, h \to 0,$$

справджуються для кожної функції $\varphi \in S_\alpha^\beta$ в сенсі збіжності за топологією простору S_α^β. У S_α^β визначена і неперервна операція диференціювання. Простори типу S є досконалими (Гельфанд & Шилов, 1958); вони тісно пов'язані між собою перетворенням Фур'є, правильною є формула

$$\mathcal{F}[S_\alpha^\beta] = S_\beta^\alpha,$$

де

$$\mathcal{F}[S_\alpha^\beta] := \left\{\psi : \psi(\sigma) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{i\sigma x} dx, \, \varphi \in S_\alpha^\beta\right\}.$$

Символом $(S_{\alpha}^{\beta})'$ позначимо простір усіх лінійних неперервних функціоналів над відповідним простором основних функцій зі слабкою збіжністю, а його елементи називатимемо *узагальненими функціями*.

Оскільки в основному просторі S_{α}^{β} визначена операція зсуву аргументу T_x, то згортку узагальненої функції $f \in (S_{\alpha}^{\beta})'$ з основною функцією φ задамо формулою

$$(f * \varphi)(x) = \langle f_{\xi}, T_{-x}\breve{\varphi}(\xi)\rangle \equiv \langle f_{\xi}, \varphi(x-\xi)\rangle, \quad \breve{\varphi}(\xi) := \varphi(-\xi).$$

Із властивості нескінченної диференційовності операції зсуву аргументу в просторі S_{α}^{β} випливає, що згортка $f * \varphi$ є звичайною нескінченно диференційовною на $\mathbb{R}$ функцією.

Нехай $f \in (S_{\alpha}^{\beta})'$. Якщо $f * \varphi \in S_{\alpha}^{\beta}$, $\forall \varphi \in S_{\alpha}^{\beta}$ і із співвідношення $\varphi_{\nu} \to 0$ при $\nu \to +\infty$ за топологією простору S_{α}^{β} випливає, що $f * \varphi_{\nu} \to 0$ при $\nu \to +\infty$ за топологією простору S_{α}^{β}, то функціонал f називається *згортувачем* у просторі S_{α}^{β}. Оскільки $\mathcal{F}^{-1}[S_{\beta}^{\alpha}] = S_{\alpha}^{\beta}$, а також і $\mathcal{F}[S_{\beta}^{\alpha}] = S_{\alpha}^{\beta}$, бо кожний простір типу S разом з функцією $\varphi(x)$ містить і функцію $\varphi(-x)$, то перетворення Фур'є узагальненої функції $f \in (S_{\alpha}^{\beta})'$ означимо за допомогою співвідношення

$$\langle \mathcal{F}[f], \varphi\rangle = \langle f, \mathcal{F}[\varphi]\rangle, \varphi \in S_{\alpha}^{\beta}.$$

Звідси випливає, що $\mathcal{F}[f] \in (S_{\beta}^{\alpha})'$, якщо $f \in (S_{\alpha}^{\beta})'$.

Розглянемо еволюційне рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{dt} = A_{\varphi}u(t,x), \ \ (t,x) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R} \equiv \Omega, \tag{1}$$

де A_{φ} — псевдодиференціальний оператор у просторі $S_{1-\alpha}^{\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$, побудований за функцією φ, яка є мультиплікатором у просторі $S_{\alpha}^{1-\alpha}$ і такою, що $e^{\varphi} \in S_{\alpha}^{1-\alpha}$, тобто

$$A_{\varphi}\psi = \mathcal{F}^{-1}[\varphi(\sigma)\mathcal{F}[\psi]], \forall \psi \in S_{1-\alpha}^{\alpha}.$$

Під *розв'язком* рівняння (1) розуміємо функцію u диференційовну за t, яка при кожному $t \in (0,+\infty)$, належить простору $S_{1-\alpha}^{\alpha}$.

Для рівняння (1) задамо нелокальну багатоточкову за часом задачу

$$\mu u(t,\cdot)\big|_{t=0} - \mu_1 u(t,\cdot)\big|_{t=t_1} - \ldots - \mu_m u(t,\cdot)\big|_{t=t_m} = f, \tag{2}$$

де $m \in \mathbb{N}$, $\{\mu, \mu_1, \ldots, \mu_m\} \subset (0,+\infty)$, $\{t_1, \ldots, t_m\} \subset (0,+\infty)$ — фіксовані числа, причому

$$\mu > m\sum_{k=1}^{m}\mu_k,\ \ 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m < +\infty,\ \ f \in S^{\alpha}_{1-\alpha}.$$

Користуючись методом перетворення Фур'є знайдемо, що розв'язок задачі (1), (2) має вигляд

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} G(t,x-\xi)f(\xi)d\xi = G(t,x) * f(x),\ \ (t,x) \in \Omega,$$

де $G(t,x) = \mathcal{F}^{-1}\big[Q(t,\sigma)\big](x)$, де $Q(t,\sigma) = Q_1(t,\sigma)Q_2(\sigma)$,

$$Q_1(t,\sigma) = \exp\{t\varphi(\sigma)\}, Q_2(\sigma) = \left(\mu - \sum_{k=1}^{m}\mu_k \exp\{t_k\varphi(\sigma)\}\right)^{-1} \equiv \left(\mu - \sum_{k=1}^{m}\mu_k Q_1(t_k,\sigma)\right)^{-1}.$$

Основні властивості функції G наведемо в наступних твердженнях.

Лема 1. Для функції $Q_1(t,\sigma) = \exp\{t\varphi(\sigma)\}$, $t > 0$, $\sigma \in \mathbb{R}$ та її похідних (за змінною σ) правильними є оцінки

$$\left|D^s_\sigma Q_1(t,\sigma)\right| \le cA^s t^{s\alpha} s^{s(1-\alpha)} \exp\left\{-a_1 t\left|\sigma\right|^{1/\alpha}\right\},\ s \in \mathbb{Z}_+,$$

де сталі $c, A, a_1 > 0$ не залежать від t.

Лема 2. Функція Q_2 — мультиплікатор у просторі $S^{1-\alpha}_{\alpha}$.

Лема 3. Для функції $G(t,x)$, $t > 1$, $x \in \mathbb{R}$, та її похідних (за змінною x) справджуються нерівності

$$\left|D^s_x G(t,x)\right| \le \tilde{c}A_1^s s^{s\alpha} t^{-(s+1)\alpha} \exp\left\{-d_0(t^{-\alpha}\left|x\right|)^{1/(1-\alpha)}\right\},\ s \in \mathbb{Z}_+,$$

де сталі $\tilde{c}, A_1, d_0$ не залежать від t.

Лема 4. Функція $G(t,x)$, $t \in (0,+\infty)$, як абстрактна функція параметра t зі значеннями у просторі $S^{\alpha}_{1-\alpha}$, диференційовна за t.

Наслідок 1. Правильною є формула

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(f * G(t,x)\big) = f * \frac{\partial G(t,x)}{\partial t}, \forall f \in \left(S^{\alpha}_{1-\alpha}\right), t > 0.$$

Лема 5. У просторі $(S^{\alpha}_{1-\alpha})'$ справджується граничне співвідношення

$$\mu \lim_{t\to+0} G(t,\cdot) - \sum_{l=1}^{m}\mu_l \lim_{t\to t_l} G(t,\cdot) = \delta$$

де δ — дельта-функція Дірака.

Символом $(S^{\alpha}_{1-\alpha}, {}_*)'$ позначимо клас узагальнених функцій з $(S^{\alpha}_{1-\alpha})'$, які є згортувачами у просторі $S^{\alpha}_{1-\alpha}$.

Наслідок 2. Нехай $\omega(t,x) = f * G(t,x)$, $f \in (S^{\alpha}_{1-\alpha,\,*})'$, $(t,x) \in \Omega$. Тоді у просторі $(S^{\alpha}_{1-\alpha})'$ справджується граничне співвідношення

$$\mu \lim_{t \to +0} \omega(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t \to t_k} \omega(t,\cdot) = f.$$

Надалі функцію G називатимемо *фундаментальним розв'язком* багатоточкової (m-точкової) задачі для рівняння (1).

З наслідку 2 випливає, що для рівняння (1) m-точкову за часом задачу можна ставити так: знайти розв'язок $u \in C^1\Big((0,\infty), S^{\alpha}_{1-\alpha}\Big)$ рівняння (1), який задовольняє умову

$$\mu \lim_{t \to +0} u(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t \to t_k} u(t,\cdot) = f, \;\; f \in (S^{\alpha}_{1-\alpha,*})', \tag{3}$$

де граничне співвідношення (3) розглядається у просторі $(S^{\alpha}_{1-\alpha})'$.

Теорема 1. *Нелокальна багатоточкова за часом задача* (1), (3) *є коректно розв'язною. Розв'язок дається формулою*

$$u(t,x) = f * G(t,x), \;\; (t,x) \in \Omega,$$

де G *— фундаментальний розв'язок багатоточкової задачі для рівняння* (1).

Теорема 2. *Розв'язок* $u(t,x)$ *нелокальної багатоточкової за часом задачі (1), (3) стабілізується до нуля при* $t \to +\infty$ *у просторі* $(S^{\alpha}_{1-\alpha})'$.

Теорема 3. *Нехай* $u(t,x)$ *— розв'язок задачі (1), (3) із граничною функцією* f *в умові (3), яка є елементом простору* $(S^{\beta}_{1-\alpha})' \subset (S^{\alpha}_{1-\alpha})'$, $\beta > 1$, *і* $\operatorname{supp} f$ *— обмежена множина в* $\mathbb{R}$. *Тоді* $u(t,x) \to 0$, *коли* $t \to +\infty$ *рівномірно на* $\mathbb{R}$.

Список літератури

Гельфанд, И. М., & Шилов, Г. Е. (1958). *Пространства основных и обобщенных функций.* Москва: Физматгиз.

Городецький, В. В. (2008). *Еволюційні рівняння в зліченно-нормованих просторах нескінченно диференційовних функцій.* Чернівці: Рута.

Krzyżański, M. (1957). Sur l'allure asymptotique des potentiels de chaleur et de l'intégrale de Fourier–Poisson. *Annales Polonici Mathematici, 3*(2), 288–299.

ДОСЛІДЖЕННЯ ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОГО КЛАСУ ЗЛІЧЕННИХ СИСТЕМ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

Г. В. Верьовкіна

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

ganna.verov@gmail.com

Приведено умови існування періодичних розв'язків зліченої системи різницевих рівнянь. Побудовано алгоритм пошуку таких розв'язків у вигляді рівномірно збіжної послідовності періодичних функцій.

Ключові слова: різницеве рівняння, диференціальне рівняння, злічена вимірна система, скінчено вимірна система, простір обмежених числових послідовностей, періодичний розв'язок.

Розглядаємо зліченну систему різницевих рівнянь вигляду

$$x_{n+1} = x_n + f_n(x_n),\ n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

де $x_n = \left(x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^m, \ldots\right)$, $f_n = \left(f_n^1, f_n^2, \ldots, f_n^m, \ldots\right)$, $f_n(x)$ — періодична за n з періодом N вектор-функція.

Розгляньмо $M = \left(M_1, M_2, \ldots, M_m, \ldots\right)$ — вектор з невід'ємними координатами, що є точками із простору обмежених числових послідовностей $\mathcal{M}$.

Розглянемо нескінченну матрицю $\mathcal{K} = \left\{k_{ij}\right\}_{i,j=1}^{\infty}$ елементом i-го рядка та j-го стовпця якої є невід'ємне число k_{ij}. Позначимо K лінійний оператор, що діє із простору $\mathcal{M}$ у простір $\mathcal{M}$ і такий, що породжується матрицею $\mathcal{K}$. Вважаємо, що виконана наступна умова $\sup\limits_i \sum\limits_{j=1}^{\infty} k_{ij} < \infty$. Для оператора K виконується рівність

$$\left\|K\right\| = \left\|K\right\| = \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} k_{ij}.$$

Оператор K — цілком регулярний, тобто виконується $\left\|K\right\| \le q < 1$.

Для вектор-функції $f_n(x)$ через $\overline{f_n(x)}$ позначено її середнє, тобто

$$\overline{f_n(x)} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{n-1} f_j(x).$$

Представимо (1) у вигляді одного різницевого рівняння у просторі $\mathcal{M}$

$$x_{n+1} = x_n + f_n(x_n), \tag{2}$$

і вважаємо, що для кожного фіксованого значення n та x з області їх визначення, функція

$$f_n(x) = \left(f_n^1(x), f_n^2(x), \ldots, f_n^m(x), \ldots\right)$$

є точкою простору $\mathcal{M}$.

Далі розглядатимемо лише такі системи (2), для яких виконано умови:

1) права частина системи (2) визначена для всіх n та x, що належать області $\mathcal{D}$, де $\mathcal{D}$ — обмежена область простору $\mathcal{M}$, яка розглядається разом зі своєю межею, причому функція $f_n\left(x\right)$ є періодичною за n з періодом N, неперервною й задовольняє умови

$$\left|f_n(x)\right| \leq M, \left|f_n\left(x'\right) - f_n\left(x''\right)\right| \leq K\left|x' - x''\right|,$$

причому нерівності розуміємо покоординатно;

2) множина $\mathcal{D} - M\dfrac{N}{2}$ — не є порожньою;

3) оператор $Q = K\dfrac{N}{2}$ — цілком регулярний.

Для різницевих рівнянь має місце

Лема. Нехай $n \in \left[0, N-1\right]$, тоді має місце оцінка

$$\left|\sum_{i=0}^{n}\left(f_i - \overline{f_i}\right)\right| \leq 2\left(n+1\right)\left(1 - \frac{n+1}{N}\right)\left|f_n\right|_0 = \alpha_n\left|f_n\right|_0,$$

де $\alpha_n = 2\left(n+1\right)\left(1 - \dfrac{n+1}{N}\right)$.

Доведення леми проводиться аналогічно Самойленко (1966).

Припустімо, що система (2) має періодичний за n з періодом N розв’язок і відома точка x_0, через яку цей розв’язок проходить при $n = n_0 = 0$.

Має місце

Теорема 1. *Нехай ϕ_n — періодичний з періодом N розв’язок системи рівнянь* (2)*, що проходить через точку $x_0 \in \mathcal{D} - M\dfrac{N}{2}$. Тоді*

$$\phi_n = \lim_{k\to\infty} x_n^k(x_0)$$

рівномірно відносно n, x_0 і виконується нерівність

$$\left|\phi_n - x_n^k(x_0)\right| \leq Q^k\left(\mathrm{E} - Q^{-1}\right)M\frac{N}{2},$$

де $x_n^k(x_0)$ — періодичні за n функції, що визначаються співвідношеннями

$$x_n^k(x_0) = x_0 + \sum_{i=0}^{n-1}\left[f_i\left(x_i^{k-1}(x_0)\right) - \overline{f_i\left(x_i^{k-1}(x_0)\right)}\right],\ x_k^0\left(x_0\right) = x_0, k = 1,2,\ldots \quad (3)$$

Доведення. Зрозуміло, що кожна з функцій послідовності (5) є періодичною за n з періодом N. На підставі леми має місце оцінка

$$\left|x_n^k(x_0) - x_0\right| \le 2Mn\left(1 - \frac{n}{N}\right) \le M\frac{N}{2},$$

тобто $x_n^k(x_0) \in \mathcal{D}$ для всіх n та k, якщо $x_0 \in D - M\frac{N}{2}$.

Для доведення збіжності послідовності (3) оцінимо різницю $(x_n^2(x_0) - x_n^1(x_0))$:

$$x_n^2(x_0) - x_n^1(x_0) \le \left(1 - \frac{n}{N}\right)\sum_{i=0}^{n-1} K\left|x_i^1(x_0) - x_0\right| + \frac{n}{N}\sum_{i=n}^{N-1}\left|x_i^1(x_0) - x_0\right| =$$

$$= \left(1 - \frac{n}{N}\right)\sum_{i=0}^{n-1} KM\alpha_i + \frac{n}{N}\sum_{i=1}^{n} KM\alpha_i = \beta_n KM, \tag{4}$$

де

$$\beta_n = \frac{\alpha_n\alpha_{n-1}}{N^2} + \frac{(n+1)(n+2)}{6N}\alpha_{n-1} + +n\left(\frac{N}{3} - \frac{1}{3N}\right) - \frac{n^2}{6N}\alpha_n - \frac{n^2(n+1)(n+2)}{3N^2}.$$

Маємо $\beta_n \le \frac{N^2}{4}$ Тоді оцінку різниці $(x_n^2(x_0) - x_n^1(x_0))$ в (4) можна продовжити і отримаємо

$$\left|x_n^2(x_0) - x_n^1(x_0)\right| \le \left(K\frac{N}{2}\right)\left(M\frac{N}{2}\right).$$

Методом повної математичної індукції доводиться, що має місце наступна оцінка

$$\left|x_n^{k+1}(x_0) - x_n^1(x_0)\right| \le \left(K\frac{N}{2}\right)^k\left(M\frac{N}{2}\right) \text{ для всіх } n,k = 0,1,2,\ldots.$$

Остання нерівність із урахуванням регулярності оператора Q і доводить рівномірну відносно n, x_0 збіжність послідовності періодичних функцій (3) і виконання оцінки

$$\left|x_n^k(x_0) - x_n(x_0)\right| \le q^n\left(1 - q\right)^{-1}\left(M\frac{N}{2}\right),$$

де $x_n(x_0)$ — границя послідовності (3).

Переходимо у (3) до границі при $k \to \infty$ і отримаємо, що $x_n(x_0)$ є періодичним розв'язком рівняння

$$x_n(x_0) = x_0 + \sum_{i=0}^{n-1}\left[f_i\left(x_i(x_0)\right) - \overline{f_i\left(x_i(x_0)\right)}\right]. \tag{5}$$

Методом від супротивного доводиться, що рівняння (5) має єдиний розв'язок і тому

$$\phi_n = \lim_{k\to\infty} x_n^k(x_0).$$

Теорему доведено.

Для того, щоб з'ясувати питання про існування періодичного розв'язку системи (2) розглянемо вираз

$$S(x_0) = \overline{f_n\left(x_n(x_0)\right)} = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} f_i\left(x_i(x_0)\right).$$

Якщо вибрати точку x_0 за умови $S(x_0) = 0$, то рівняння (5) можна представити у вигляді

$$x_n(x_0) = x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} f_i\big(x_i(x_0)\big),$$

тобто функція $x_n(x_0)$ при такому виборі початкової точки x_0 буде періодичним розв'язком рівняння (2). Питання про існування нулів $S(x_0)$ розв'язується за допомогою функції

$$S^k(x_0) = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} f_i\Big(x_i^k(x_0)\Big).$$

Аналогічно Самойленко (1966) справедлива

Теорема 2. *Припустимо, що для системи* (2), *що задовольняє умовам* 1)—3) *в області* $\mathcal{D}$ *простору* $\mathcal{M}$ *виконуються умови:*

1) для деякого фіксованого n *і деякого цілого* k *відображення*

$$S^k(x_0) : D - M\frac{N}{2} \to \mathcal{M},$$

де

$$S^k(x_0) = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} f_i\Big(x_i^k(x_0)\Big)$$

має особливу точку $x^0 : S^k(x^0) = 0$;

2) *існує замкнена обмежена область* $\mathcal{D}_1$, *що міститься в* $\mathcal{D} - M\frac{N}{2}$, *містить точку* x^0 *і така, що* S^k *топологічно відображає* $\mathcal{D}_1$ *на* $S^k\mathcal{D}_1$;

3) *на межі* $\Gamma_{\mathcal{D}_1}$ *області* $\mathcal{D}_1$ *виконується нерівність*

$$\inf_{x\in\Gamma_{\mathcal{D}_1}} \left\| S^k(x) \right\| \geq \frac{q^n}{\big(1-q\big)}\frac{M}{2}.$$

Тоді система (2) має періодичний з періодом N розв'язок $x = x_n$ для якого $x_0 \in \mathcal{D}_1$.

Список літератури

Верьовкіна, Г. В. (2004). Про зведення зліченної системи різницевих рівнянь. *Вісник. Математика. Механіка*, *12*, 68—70.

Мартынюк, Д. И. (1972). Лекции по качественной теории разностных уравнений. Київ: Наукова думка.

Самойленко, А. М. (1966). Численно-аналитический метод исследования счетных систем периодических дифференциальных уравнений. *Математическая физика,* (2), С. 115—132.

УЗАГАЛЬНЕНИЙ ІНТЕГРАЛ ПУАССОНА

Н. О. Вірченко
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ, Україна

Серед спеціальних функцій виділяються функції Бесселя, завдяки своїм багато численним застосуванням у теорії диференціальних та інтегральних рівнянь, у фізиці, механіці та ін.

Запровадім інтеграл Пуассона для узагальненої функції Бесселя

$$J_{\mu,\omega}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\mu^2} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\mu^2+\mu\omega+2}{2}\right)} \; {}_1F_2\left(1;\frac{\mu^2-\mu\omega+2}{2},\frac{\mu^2+\mu\omega+2}{2};-\frac{x^2}{4}\right), \quad (1)$$

де $\mu,\omega \notin \mathbb{Z}$, ${}_1F_2(...)$ — гіпергеометрична функція. Функція (1) є розв'язком диференціального рівняння:

$$x^2y'' + xy' + (x-\mu^2)(x+\omega^2)y = 0.$$

Інтеграл Пуассона для узагальненої функції Бесселя подамо у вигляді:

$$\bar{J}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\int_{-1}^{1} e^{izt}\left(1-t^2\right)^{\nu-\frac{1}{2}} {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;-r\left(zt\right)\right)dt, \quad (2)$$

де $\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}$, ${}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(...\right)$ — $\left(\tau,\beta\right)$-узагальнена конфлюентна гіпергеометрична функція (Virchenko, 2006).

За допомогою відповідних підстановок можна переписати (2) у таких формах:

$$\bar{J}(z) = \frac{2\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_{0}^{1}\left(1-t^2\right)^{\nu-\frac{1}{2}}\cos\left(zt\right) {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;-r\left(z\cos t\right)\right)dt,$$

$$\bar{J}(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\int_{0}^{\pi} e^{i\cos\varphi}\left(\sin\varphi\right)^{2\nu} {}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\left(a;c;-r\left(z\cos\varphi\right)\right)d\varphi.$$

Список літератури

Virchenko, N. (2006). On the generalized confluent hypergeometric function and its application. *Fract. Calculus and Appl. Anal.*, *9*(2), 101–108.

ЛІ-АЛГЕБРАЇЧНА СТРУКТУРА ІНТЕГРОВНИХ «НЕБЕСНИХ» СУПЕРПОТОКІВ

О. Є. Гентош[1], Я. А. Прикарпатський[2]
[1]ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів, Україна
[2]Інститут сільського господарства у Кракові, Краків, Польща,
[2]Інститут математики НАН України, Київ, Україна
ohen@ua.fm

У статті Prykarpatsky Y. A. та Prykarpatski A. K. (2016) було запропоновано Лі-алгебраїчний опис деяких відомих багатовимірних інтегровних систем «небесних» рівнянь як умови сумісності двох гамільтонових потоків на спряженому просторі алгебри Лі рядів Лорана над алгеброю Лі гладких векторних полів на n -вимірному торі $\mathbb{T}^n$. У доповіді, що пропонується, розвинений у Prykarpatsky Y. A. та Prykarpatski A. K. (2016) підхід використовується для побудови інтегровних супераналогів двовимірних систем такого типу за допомогою алгебри Лі рядів Лорана

$$\tilde{\mathcal{G}} := \mathcal{G} \otimes \mathbb{C}[\lambda;\lambda^{-1}],\ \lambda \in \mathbb{C},$$

над алгеброю Лі $\mathcal{G}$ суперконформних векторних полів на суперколі $\mathbb{S}^{1|N} \simeq \mathbb{S}^1 \times \Lambda_1^N$ (Радул, (1991), де $\Lambda := \Lambda_0 \oplus \Lambda_1$ — алгебра Грассмана над полем $\mathbb{C}$, $\Lambda_0 \supset \mathbb{C}$, $\mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{R} / 2\pi\mathbb{Z}$.

Алгебру Лі $\mathcal{G}$ утворюють гладкі векторні поля на $\mathbb{S}^{1|N}$ у вигляді

$$K(F) := F\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\sum\nolimits_{i=1}^{N}(D_{\theta_i}F)D_{\theta_i},$$

де функція

$$F := F(x,\theta) = F(x,\theta_1,\ldots,\theta_N) \in C^{\infty}(\mathbb{S}^{1|N};\Lambda_0)$$

поліноміально залежить від антикомутуючих змінних $\theta_i \in \Lambda_1$, $i = \overline{1,N}$, $D_{\theta_i} := \partial / \partial\theta_i + \theta_i\partial / \partial x$ — суперпохідна за змінною θ_i, $x \in \mathbb{S}^1$. Комутатор на $\mathcal{G}$ записується так:

$$\begin{aligned}[K(F),K(Q)] &= K([F,Q]),\ \ K(F),K(G) \in \mathcal{G},\\ &= F\frac{\partial Q}{\partial x} - Q\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2}\sum\nolimits_{i=1}^{N}(D_{\theta_i}F)(D_{\theta_i}Q),\end{aligned} \tag{1}$$

тобто алгебра Лі $\mathcal{G}$ ізоморфна простору функцій $C^{\infty}(\mathbb{S}^{1|N};\Lambda_0)$ з комутатором (1).

Алгебра Лі $\tilde{\mathcal{G}}$ розкладається у пряму суму $\mathcal{G} := \tilde{\mathcal{G}}_+ \oplus \tilde{\mathcal{G}}_-$ двох підалгебр Лі:

$$\tilde{\mathcal{G}}_+ := \{K(\tilde{F}) : \tilde{F} := \tilde{F}(x,\theta;\lambda) = \sum\nolimits_{k\geq 0}^{\ll\infty}F_k(x,\theta)\lambda^k,\ K(F_k) \in \mathcal{G}\},$$

$$\tilde{\mathcal{G}}_- := \{K(\tilde{F}) : \tilde{F} := \tilde{F}(x,\theta;\lambda) = \sum\nolimits_{k\in\mathbb{N}}F_k(x,\theta)\lambda^{-k},\ K(F_k) \in \mathcal{G}\},$$

у зв'язку з чим на ній можна розглянути ще один комутатор:

$$[\tilde F,\tilde Q]=[\mathcal{R}\tilde F,\tilde Q]+[\tilde F,\mathcal{R}\tilde Q],\ \ K(\tilde F),K(\tilde Q)\in\tilde{\mathcal{G}},$$

де $\mathcal{R}:=(P_+-P_-)/2$, P_+,P_- — проектори на підалгебри Лі $\tilde{\mathcal{G}}_+$ та $\tilde{\mathcal{G}}_-$ відповідно. На регулярному спряженому просторі $\tilde{\mathcal{G}}^*_{reg}$ алгебри Лі $\tilde{\mathcal{G}}$ відносно білінійної форми на $\tilde{\mathcal{G}}^*_{reg}\times\tilde{\mathcal{G}}$:

$$\begin{gathered}(\tilde l,\tilde F)=\operatorname{res}_{\lambda\in\mathbb{C}}\int_0^{2\pi}dx\int d\theta_1\ldots d\theta_N\lambda^{-1}(\tilde l\tilde F),\\ \tilde l\in C^\infty(\mathbb{S}^{1|N}\times\mathbb{C};\Lambda_{p(N)}),\end{gathered}\tag{2}$$

де $p(N)=1$, якщо N непарне, і $p(N)=0$, якщо N парне, такий комутатор генерує дужку Лі — Пуассона

$$\{\gamma,\mu\}_{\mathcal{R}}(\tilde l)=(\tilde l,[\nabla\gamma(\tilde l),\nabla\mu(\tilde l)]_{\mathcal{R}}),$$

де $\gamma,\mu\in\mathcal{D}(\tilde{\mathcal{G}}^*_{reg})$ — гладкі за Фреше функціонали на $\tilde{\mathcal{G}}^*_{reg}$, ∇ — оператор градієнта відносно форми (2). Відповідний простір інваріантів Казимира $I(\tilde{\mathcal{G}}^*_{reg})$ породжується функціоналом $h\in\mathcal{D}(\tilde{\mathcal{G}}^*_{reg})$, який задовольняє співвідношення

$$ad^*_{\nabla h(\tilde l)}\tilde l=0,$$

еквівалентне такій умові:

$$-(\tilde l\nabla h(\tilde l))_x-\tilde l(\nabla h(\tilde l))_x+\frac{(-1)^{p(N)}}{2}\sum_{i=1}^N(D_{\theta_i}\tilde l(D_{\theta_i}\nabla h(\tilde l)))=0.$$

Теорема Адлера — Костанта — Саймза дозволяє побудувати нескінченну ієрархію гамільтонових потоків

$$\frac{d\tilde l}{dt_p}=ad^*_{\nabla h_+^{(p)}(\tilde l)}\tilde l=\{h^{(p)}(\tilde l),\tilde l\}_{\mathcal{R}},\ \ t_p\in\mathbb{R},\ \ p\in\mathbb{Z}_+,\tag{3}$$

де $\nabla h^{(p)}(\tilde l)=\lambda^p\nabla h(\tilde l)$, $p\in\mathbb{Z}_+$, які комутують один з одним, за допомогою асимптотичного розкладу

$$\nabla h(\tilde l)\simeq\sum_{k\in\mathbb{Z}_+}\nabla h_k(x,\theta)\lambda^{-k}$$

градієнта породжуючого функціонала $h\in\mathcal{D}(\tilde{\mathcal{G}}^*_{reg})$ при $|\lambda|\to\infty$. Еволюційні рівняння (3) набувають такого вигляду:

$$\begin{gathered}\frac{d\tilde l}{dt_p}=-(\nabla h_+^{(p)}(\tilde l)\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^N(D_{\theta_i}\nabla h_+^{(p)}(\tilde l))D_{\theta_i}+\left(2-\frac{N}{2}\right)\frac{\partial\nabla h_+^{(p)}(\tilde l)}{\partial x})\tilde l=\\ =-(A_{\nabla h_+^{(p)}(\tilde l)}+B_{\nabla h_+^{(p)}(\tilde l)})\tilde l,\ \ p\in\mathbb{Z}_+,\end{gathered}\tag{4}$$

де

$$A_{\nabla h_+^{(p)}(\tilde l)}:=(\nabla h_+^{(p)}(\tilde l))\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^N(D_{\theta_i}\nabla h_+^{(p)}(\tilde l))D_{\theta_i},\ \ p\in\mathbb{Z}_+.$$

Має місце

Теорема. *Умова комутування будь-яких двох потоків* d / dt_{p_1} *та* d / dt_{p_2}, $p_1 \neq p_2$, *з ієрархії (3) є еквівалентною співвідношенню*

$$\frac{\partial}{\partial t_{p_2}} A_{\nabla h_+^{(p_1)}(\tilde{l})} - \frac{\partial}{\partial t_{p_1}} A_{\nabla h_+^{(p_2)}(\tilde{l})} = [A_{\nabla h_+^{(p_1)}(\tilde{l})}, A_{\nabla h_+^{(p_2)}(\tilde{l})}],\ p_1 \neq p_2, \tag{5}$$

де

$$A_{\nabla h_+^{(p)}(\tilde{l})} := (\nabla h_+^{(p)}(\tilde{l}))\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\sum\nolimits_{i=1}^{N}(D_{\theta_i}\nabla h_+^{(p)}(\tilde{l}))D_{\theta_i},\ p \in \mathbb{Z}_+,$$

або

$$\frac{\partial}{\partial t_{p_2}} \nabla h_+^{(p_1)}(\tilde{l}) - \frac{\partial}{\partial t_{p_1}} \nabla h_+^{(p_2)}(\tilde{l}) = [\nabla h_+^{(p_1)}(\tilde{l}), \nabla h_+^{(p_2)}(\tilde{l})],\ \ p_1 \neq p_2. \tag{6}$$

Співвідношення (5) є умовою сумісності рівнянь з частинними похідними першого порядку:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_{p_1}} + A_{\nabla h_+^{(p_1)}(\tilde{l})}\right)\psi = 0,\ \left(\frac{\partial}{\partial t_{p_2}} + A_{\nabla h_+^{(p_2)}(\tilde{l})}\right)\psi = 0, \tag{7}$$

де $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^{1|N}; \Lambda_0)$.

Редукування співвідношення (5) на орбіти коприєднаної дії алгебри Лі $\tilde{\mathcal{G}}$ для різних p_1 та $p_2 \in \mathbb{Z}_+$ дозволяє отримати інтегровні супераналоги відомих інтегровних двовимірних систем «небесних» рівнянь із зображенням Лакса у вигляді (5). Розглянемо деякі приклади.

У випадку, коли $N = 1$ та $\tilde{l} = \theta(-2u_x + \lambda) - \xi / 2$, $u = u(x)$, $\xi = \xi(x)$, $\theta = \theta_1$, знаходимо, що асимптотичний розклад градієнта породжуючого функціонала $h \in \mathcal{D}(\tilde{\mathcal{G}}^*_{reg})$ при $|\lambda| \to \infty$ має такий вигляд:

$$\nabla h(\tilde{l}) \simeq 1 + (u_x + \theta\xi_x)\lambda^{-1} - (u_y + \theta\xi_y)\lambda^{-2} + \ldots.$$

При $p_1 = 1$ та $p_2 = 2$ з рівності (6) отримуємо, що

$$\begin{aligned} u_{xt} + u_{yy} &= u_y u_{xx} - u_x u_{yx} - \xi_x \xi_y / 2, \\ \xi_{xt} + \xi_{yy} &= u_y \xi_{xx} - u_x \xi_{yx} + u_{xx}\xi_y / 2 - u_{yx}\xi_x / 2, \end{aligned} \tag{8}$$

де $t_{p_1} := y$, $t_{p_2} := t$ та $(u,\xi)^{\mathrm{T}} \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1; \Lambda_0 \times \Lambda_1)$. Умова сумісності рівнянь з частинними похідними першого порядку:

$$\psi_y + ((\lambda + u_x) + \theta\xi_x)\psi_x + (\xi_x + \theta u_{xx})(D_\theta\psi) / 2 = 0,$$

$$\psi_t + ((\lambda^2 + u_x\lambda - u_y) + \theta(\xi_x\lambda - \xi_y))\psi_x +$$

$$+((\xi_x\lambda - \xi_y) + \theta(u_{xx}\lambda - u_{yx}))(D_\theta\psi) / 2 = 0,$$

де $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^{1|1}; \Lambda_0)$, задає зображення Лакса для системи (8).

Для $N=2$ та $\tilde{l}=(-a_x+\lambda)-\theta_2 w_x$, $a=a(x,\theta_1)$, $w=w(x,\theta_1)$, асимптотичний розклад градієнта породжуючого функціонала $h\in\mathcal{D}(\tilde{\mathcal{G}}^*_{reg})$ при $|\lambda|\to\infty$ набуває такого вигляду:

$$\nabla h(\tilde{l})\simeq 1+(a_x+\theta_2 w_x)\lambda^{-1}-(a_y+\theta_2 w_y)\lambda^{-2}+\ldots .$$

При $p_1=1$ та $p_2=2$ з рівності (6) маємо, що

$$\begin{aligned} a_{xt}+a_{yy}&=a_y a_{xx}-a_x a_{yx}-w_x w_y/2-(D_{\theta_1}a_x)(D_{\theta_1}a_y)/2,\\ w_{xt}+w_{yy}&=a_y w_{xx}-a_x w_{yx}+a_{xx}w_y/2-a_{yx}w_x/2+\\ &+(D_{\theta_1}a_y)(D_{\theta_1}w_x)/2-(D_{\theta_1}a_x)(D_{\theta_1}w_y)/2, \end{aligned}\tag{9}$$

де $t_{p_1}:=y$, $t_{p_2}:=t$ та $(a,w)^{\mathrm{T}}\in C^\infty(\mathbb{R}^2\times\mathbb{S}^{1|1};\Lambda_0\times\Lambda_1)$. Зображенням Лакса для системи (9) є умова сумісності рівнянь з частинними похідними першого порядку:

$$\begin{gathered} \psi_y+((\lambda+a_x)+\theta_2 w_x)\psi_x+((D_{\theta_1}a_x)-\theta_2(D_{\theta_1}w_x))(D_{\theta_1}\psi)/2+\\ +(w_x+\theta_2 a_{xx})(D_{\theta_2}\psi)/2=0,\\ \psi_t+((\lambda^2+a_x\lambda-a_y)+\theta_2(w_x\lambda-w_y))\psi_x+\\ +(((D_{\theta_1}a_x)\lambda-(D_{\theta_1}a_y))-\theta_2((D_{\theta_1}w_x)\lambda-(D_{\theta_1}w_y)))(D_{\theta_1}\psi)/2+\\ +((w_x\lambda-w_y)+\theta_2(a_{xx}\lambda-a_{yx}))(D_{\theta_2}\psi)/2=0, \end{gathered}$$

де $\psi\in C^\infty(\mathbb{R}^2\times\mathbb{S}^{1|2};\Lambda_0)$. Системи «небесних» рівнянь (8) та (9) задають суперконформні аналоги двовимірного «небесного» рівняння Михальова — Павлова (Михалев, 1992; Pavlov, 2003) для $N=1$ та $N=2$.

У роботі Manakov та Santini (2006) для знаходження розв'язків двовимірних систем «небесних» рівнянь з векторними зображеннями Лакса було розроблено метод оберненої задачі розсіювання.

Інший клас інтегровних суперконформних узагальнень двовимірних систем «небесних» рівнянь можна отримати за допомогою алгебри Лі рядів Лорана над напівпрямою сумою алгебри Лі $\mathcal{G}$ та простору $C^\infty(\mathbb{S}^{1|N};\Lambda_0)$.

Список літератури

Manakov, S. V., & Santini, P. M. (2006). Inverse scattering problem for vector fields and the Cauchy problem for the heavenly equation. *Physics Letters A, 359*(6), 613–619. Retrieved from nlin.SI/0604024.

Pavlov, M. V. (2003). Integrable hydrodynamic chains. *J. Math. Phys.*, *44*(9), 4134–4156.

Prykarpatsky, Y. A., & Prykarpatski, A. K. (2016). The integrable heavenly type equations and their Lie-algebraic structure. *arXiv preprint arXiv:1612.07760.*

Михалев, В. Г. (1992). О гамильтоновом формализме иерархий типа Кортевега-де Фриза. *Функц. анализ и его прил.*, *26*(2), 79—82.

Радул, А. О. (1991). Алгебры Ли дифференциальных операторов, их центральные расширения и W-алгебры. *Функц. анализ и его прил.*, *25*(1), 33—49.

ПРО НАБЛИЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ АБСТРАКТНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ В БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ

В. М. Горбачук

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ, Україна

v.m.horbach@gmail.com

Побудовано наближення розв'язків задачі Коші для абстрактного параболічного рівняннями цілими вектор функціями в банаховому просторі.

Ключові слова: абстрактне параболічне рівняння, півгрупа, аналітична півгрупа, цілі вектори.

Нехай $\mathfrak{B}$ — банахів простір над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел з нормою $\|\cdot\|$, а $\{U(t)\}_{t\geq 0}$ — C_0-півгрупа лінійних обмежених операторів у $\mathfrak{B}$, тобто:

1) $U(0)=I$ (I — тотожний оператор в $\mathfrak{B}$);

2) $\forall t,s\geq 0 : U(t+s)=U(t)U(s)$;

3) $\forall x\in\mathfrak{B} : \lim\limits_{t\to 0}\left\|U(t)x-x\right\|=0$.

Позначимо через A інфінітезімальний оператор (генератор) цієї півгрупи:

$$Ax=\lim_{t\to 0}\frac{U(t)x-x}{t},\quad \mathcal{D}(A)=\left\{x\in\mathfrak{B} : \lim_{t\to 0}\frac{U(t)x-x}{t}\ \text{існує}\right\},$$

де $\mathcal{D}(\cdot)$ — область визначення оператора). Як відомо (див., наприклад, [1]), оператор A завжди замкнений, $\overline{\mathcal{D}(A)}=\mathfrak{B}$ і $\rho(A)\neq\varnothing$ ($\rho(\cdot)$ — резольвентна множина оператора). Зазвичай C_0-півгрупу з генератором A записують як $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$.

C_0-півгрупа $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ називається *аналітичною з кутом аналітичності* $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$, якщо e^{tA} допускає продовження до оператор-функції e^{zA}, аналітичної в секторі $\Sigma_\theta=\{z\in\mathbb{C} : |\arg z|<\theta\}$, сильно неперервної уздовж довільного променя цього сектора з початком у точці 0. За додаткової умови

$$\forall\psi\in(0,\theta),\forall z\in\Sigma_\psi : \left\|e^{tA}\right\|\leq M_\psi,\ 0<M_\psi=const,$$

C_0-півгрупа $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ називається *обмеженою аналітичною*.

Розгляньмо задачу Коші

$$\frac{dy(t)}{dt}=Ay(t),t\in(0,\infty), \tag{1}$$

$$y(0) = x \in \mathfrak{B}, \tag{2}$$

де A — генератор обмеженої аналітичної C_0-півгрупи в $\mathfrak{B}$, а отже (див. Крейн, 1967), рівняння (1) є абстрактним параболічним і розв’язок задачі Коші (1)—(2) має вигляд

$$y(t) = e^{tA}x. \tag{3}$$

Нагадаємо, що під *розв’язком* (*ослабленим*) задачі (1)—(2) розуміють вектор-функцію $y(t)$, неперервну на $[0,\infty)$, сильно неперервно диференційовну на $(0,\infty)$ і таку, що задовольняє рівняння (1) та умову (2). Покажемо, як цей розв’язок можна наблизити цілими $\mathfrak{B}$-значними вектор-функціями. Для цього запровадьмо деякі простори гладких векторів оператора A.

Нехай A — довільний замкнений оператор в $\mathfrak{B}$. Для числа $\beta \geq 0$ покладаємо

$$\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A) = \left\{ x \in C^{\infty}(A) \mid \exists \alpha > 0, \exists c = c(x) > 0 : \left\| A^k x \right\| \leq c\alpha^k k^{k\beta}, \forall k \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

і

$$\mathfrak{G}_{(\beta)}(A) = \left\{ x \in C^{\infty}(A) \mid \forall \alpha > 0, \exists c = c(x,\alpha) > 0 : \left\| A^k x \right\| \leq c\alpha^k k^{k\beta},\ \forall k \in \mathbb{N}_0 \right\},$$

де

$$C^{\infty}(A) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}} \mathcal{D}(A^n)$$

— простір нескінченно диференційовних векторів оператора A.

Очевидно, що $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ й $\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$ — лінійні простори і, якщо $\beta_1 < \beta_2$, то

$$\mathfrak{G}_{(\beta_1)}(A) \subseteq \mathfrak{G}_{\{\beta_1\}}(A) \subseteq \mathfrak{G}_{(\beta_2)}(A) \subseteq \mathfrak{G}_{\{\beta_2\}}(A).$$

У просторах $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ та $\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$ вводиться топологія індуктивної і, відповідно, проективної границі банахових просторів

$$\mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha}(A) = \left\{ x \in C^{\infty}(A) \mid \exists c = c(x) > 0, \forall k \in \mathbb{N}_0 : \left\| A^k x \right\| \leq c\alpha^k k^{k\beta} \right\} (\alpha > 0)$$

з нормою

$$\| x \|_{\mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha}(A)} = \sup_{k \in \mathbb{N}_0} \frac{\| A^k x \|}{\alpha^k k^{k\beta}}.$$

Ясно, що

$$\mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha_1}(A) \subset \mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha_2}(A) \text{ при } \alpha_1 < \alpha_2 \tag{4}$$

і

$$\forall x \in \mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha_1}(A) : \left\| x \right\|_{\mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha_1}(A)} \geq \left\| x \right\|_{\mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha_2}(A)}.$$

Тому вкладення (4) є неперервним і

$$\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A) = \operatorname{ind}\lim_{\alpha\to\infty} \mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha}(A) = \bigcup_{\alpha>0} \mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha}(A);$$
$$\mathfrak{G}_{(\beta)}(A) = \operatorname{proj}\lim_{\alpha\to 0} \mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha}(A) = \bigcap_{\alpha>0} \mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha}(A).$$

Оскільки норми у просторах $\mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha}(A)$ є порівнянними й узгодженими, то $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ — регулярна індуктивна границя просторів $\mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha}(A)$, а отже, збіжність у $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ означає збіжність в $\mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha}(A)$ при деякому $\alpha > 0$. Збіжність в $\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$ рівносильна збіжності в $\mathfrak{G}_{\beta}^{\alpha}(A)$ при всіх $\alpha \in (0,\delta)$ з достатньо малим $\delta > 0$.

Простори $\mathfrak{G}_{\{1\}}(A), \mathfrak{G}_{(1)}(A)$ та $\mathfrak{G}_{\{0\}}(A)$ називаються відповідно *просторами аналітичних, цілих* та *цілих експоненціального типу* векторів оператора A.

У конкретному випадку, коли
$$\mathfrak{B} = C([a,b]), -\infty < a < b < \infty,$$
$$Ax(t) = \frac{dx(t)}{dt}, \quad \mathcal{D}(A) = C^{1}([a,b]),$$

$C^{\infty}(A)$ є не що інше, як множина нескінченно диференційовних на $[a,b]$ функцій, $\mathfrak{G}_{\{1\}}(A), \mathfrak{G}_{(1)}(A)$ і $\mathfrak{G}_{\{0\}}(A)$ — множини всіх аналітичних на $[a,b]$, цілих і цілих експоненціального типу функцій відповідно. Простори $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ $(\mathfrak{G}_{(\beta)}(A))$ з $\beta > 1$ відомі як класи Жевре типу Рум'є (Бьорлінга).

Усі простори в наведеному прикладі є щільними в $\mathfrak{B}$. Але в загальному випадку це, узагалі кажучи, не так. Тому постало питання, за яких умов на оператор A й число β, $\overline{\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)} = \mathfrak{B}$ або, принаймні, $\overline{\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)} = \mathfrak{B}$. Відповідь дає наступна

Теорема 1 (Gorbachuk & Mokrousov, 2002).**1** *Нехай* $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ *— обмежена аналітична* C_0*-півгрупа в* $\mathfrak{B}$ *з кутом аналітичності* θ. *Тоді*
$$\overline{\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)} = \mathfrak{B} \text{ при } \beta > 1 - \frac{2\theta}{\pi}.$$

Якщо ж $\beta = 1 - \dfrac{2\theta}{\pi}$, то можливі випадки, коли $\mathfrak{G}_{\{0\}}(A) = \{0\}$. Існують аналітичні C_0-півгрупи $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ з $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, для яких $\mathfrak{G}_{\{0\}}(A) = \{0\}$. Проте, якщо така півгрупа задовольняє умову Левінсона
$$\int_0^1 \ln\ln M(\delta)d\delta < \infty, \quad M(\delta) = \sup_{|\operatorname{Im}\lambda|\geq\delta>0} \left\|R(\lambda;A)\right\|,$$

$(R(\lambda; A)$ — резольвента оператора A), то $\overline{\mathfrak{G}_{\{0\}}(A)} = \mathfrak{B}$.

У статті Gorbachuk, V. M. and Gorbachuk, M. L. (2016) доведена така

Теорема 2.2 *Нехай A — замкнений лінійний оператор в $\mathfrak{B}$. Тоді для довільного $x \in \mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A)$ з $\beta < 1$ $\quad (x \in \mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$ з $\beta \leq 1)$ вектор-функція*

$$\exp(zA)x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k A^k x}{k!}$$

є цілою у просторі $\mathfrak{G}_{\{\beta\}}(A) \left(\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)\right)$.

За умови, що $x \in \mathfrak{G}_{\{1\}}(A)$, вектор-функція $\exp(zA)x$ є локально аналітичною у просторі $\mathfrak{G}_{\{1\}}(A)$. Якщо ж A — генератор обмеженої аналітичної півгрупи $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ в $\mathfrak{B}$, то сім'я $\left\{\exp(zA)\right\}_{z\in\mathbb{C}}$ утворює C_0-групу в цих просторах і

$$\forall x \in \mathfrak{G}_{(1)}(A) : \exp(tA)x = \begin{cases} e^{tA}x & \text{при} \quad t \geq 0, \\ \left(e^{-tA}\right)^{-1} x & \text{при} \quad t < 0. \end{cases}$$

Теореми 1, 2 дають змогу наблизити розв'язок (3) задачі (1)—(2) цілими у просторі $\mathfrak{G}_{(1)}(A)$ вектор-функціями. Справді, у випадку, коли півгрупа $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geq 0}$ є аналітичною, тобто рівняння (1) абстрактне параболічне, для будь-якого вектора $x \in \mathfrak{B}$ існує послідовність $\{x_n \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)\}_{n\in\mathbb{N}}$, яка збігається до x. Тоді, в силу рівномірної коректності задачі (1)—(2) на кожному скінченному проміжку $[0, T]$,

$$\forall t \in [0, \infty) : e^{tA}x_n \to e^{tA}x \text{ при } n \to \infty.$$

Більш того, ця збіжність є рівномірною і її точний розв'язок $e^{tA}x$ зображується у вигляді

$$y(t) = e^{tA}x = \lim_{n\to\infty} e^{tA}x_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k x_n.$$

У випадку, коли $x \in \mathfrak{G}_{(1)}(A)$, ми розлядаємо вектор-функцію

$$y_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k x$$

як наближений розв'язок цієї задачі. Беручи до уваги, що

$$\forall \alpha > 0, \exists c_\alpha > 0 : \left\| A^n x \right\| \leq c_\alpha \alpha^n n!,$$

одержуємо

$$\left\|y(t)-y_n(t)\right\| \le \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\left\|A^k x\right\| \le c_\alpha (t\alpha)^{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}(t\alpha)^k.$$

Вибираючи α так, щоб $t\alpha \le \frac{1}{2}$, приходимо до оцінки

$$\left\|y(t)-y_n(t)\right\| \le c_\alpha 2^{-n}.$$

Крім того, $y_n(0)=x$.

Таким чином, $y_n(t)$ — наближений розв'язок задачі (1)—(2) на $\left[0,\frac{1}{2\alpha}\right]$. Оскільки $\alpha\in(0,\infty)$ може бути яким завгодно, то $y_n(t)$ — наближений розв'язок цієї задачі на кожному інтервалі $[0,b],\ 0\le b<\infty$. Для відхилу (нев'язки) на цьому інтервалі маємо

$$\left\|y_n'(t)-Ay_n(t)\right\| \le \alpha c_\alpha (n+1)2^{-n}.$$

У випадку довільного x з $\mathfrak{B}$ має місце наступна

Теорема 3 (Горбачук, В. М. & Горбачук, М. Л., 2017). *Припустимо, що* A *— генератор обмеженої аналітичної* C_0*-півгрупи* $\left\{e^{tA}\right\}_{t\ge 0}$, *а* $y(t)$ *— розв'язок задачі Коші* (1)—(2) *з* $x\in\mathfrak{B}$. *Тоді*

$$\forall\varepsilon>0,\ \forall b>0,\ \exists n,m\in\mathbb{N}: \left\|y(t)-\sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}A^k x_m\right\| < \varepsilon,\ t\in[0,b].$$

Список літератури

Gorbachuk, M. L., & Mokrousov, Yu. G. (2002). On density of some sets of infinitely differentiable vectors of a closed operator on a Banach space. *Methods of Funct. Anal. Topology, 8*(1), 23–29.

Gorbachuk, V. M., & Gorbachuk, M. L. (2016). The representation of a C_0-semigroup of linear operators in a Banach space on the set of entire vectors of its generator. *Integral Equations and Operator Theory, 85*(4), 497–512.

Горбачук, В. М., & Горбачук, М. Л. (2017). Простори гладких та узагальнених векторів генератора аналітичної півгрупи та їх застосування. *Український математичний журнал, 69*(4), 478—509.

Крейн, С. Г. (1967). *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве*. Москва: Наука.

НЕЛОКАЛЬНА БАГАТОТОЧКОВА ЗА ЧАСОМ ЗАДАЧА ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ЗМІННИМИ СИМВОЛАМИ

В. В. Городецький, А. О. Широковських

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

v.gorodetskiy@chnu.edu.ua, a.shyrokovskykh@gmail.com

Подано означення та властивості фундаментального розв’язку нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційних рівнянь із псевдодиференціальними операторами, побудованими за змінними символами. Установлено розв’язність багатоточкової задачі в просторах типу W, подано інтегральне зображення розв’язку.

Ключові слова: псевдодиференціальні рівняння, змінний символ, багатоточкова за часом задача.

Одним з узагальнень задачі Коші для рівнянь з частинними похідними є нелокальна багатоточкова за часом задача, коли початкова умова $u(t,\cdot)\,|_{t=0}= f$ замінюється умовою

$$\sum_{k=0}^{m} \alpha_k u(t,\cdot)\Big|_{t=t_k} = f,$$

де $t_0 = 0$, $\{t_1,\dots,t_m\} \subset (0,T]$, $\{\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_m\} \subset \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$ — фіксовані числа (якщо $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$, то маємо, очевидно, задачу Коші). Нелокальні за часом задачі належать до нелокальних крайових задач для рівнянь з частинними похідними. Нелокальні задачі виникають при моделюванні різних процесів і задач практики крайовими задачами для рівнянь з частинними похідними з нелокальними умовами (див., напр., [1, 2]). Дослідженням нелокальних крайових задач займалося багато математиків, використовуючи при цьому різні методи й підходи (див., напр., [3—8]). Отримані важливі результати щодо постановки, коректної розв’язності та побудови розв’язків, сформульовані умови регулярності крайових умов для важливих випадків диференціально-операторних рівнянь.

У цій роботі досліджується нелокальна багатоточкова за часом задача для еволюційних рівнянь із псевдодиференціальними операторами, побудованими за змінними символами за допомогою перетворення Фур’є. Аналітичність функції-символа псевдодиференціального оператора дозволяє розуміти такий оператор як оператор диференціювання «нескінченного порядку» зі змінними коефіцієнтами, який діє в певному просторі аналітичних функцій. При цьому дається означення фундаментального розв’язку зазначеної задачі та досліджуються властивості такого розв’язку, установлюється розв’язність багатоточкової задачі. Знайдено інтегральне зображення розв’язку.

Символом $W_M^{\Omega}(\mathbb{R})$ позначимо сукупність функцій, заданих на $\mathbb{R}$, які є звуженням функцій із простору W_M^Ω на $\mathbb{R}$. Правильною є формула [9, с. 32]:

$$F\left[W_M^\Omega\left(\mathbb{R}\right)\right] = W_{M_1}^{\Omega_1}\left(\mathbb{R}\right),$$

де F — перетворення Фур'є, Ω_1 та M_1 — функції, двоїсті за Юнгом відповідно до функцій M та Ω (прикладами є функції $M\left(x\right) = x^p / p$, $\Omega\left(y\right) = y^q / q$, $1 / p + 1 / q = 1$).

Для довільно фіксованих $\alpha, \beta > 0$ покладаємо

$$S_\alpha^\beta\left(\mathbb{R}\right) \equiv S_\alpha^\beta := \{\varphi \in C^\infty\left(\mathbb{R}\right) \mid \ \exists c, A, B > 0 \ \ \forall\left\{k, n\right\} \subset \mathbb{Z}_+ \ \ \forall x \in \mathbb{R} :$$
$$\left|x^k \varphi^{(n)}\left(x\right)\right| \le c A^k B^n k^{k\alpha} n^{n\beta}\}.$$

Зазначимо, що $S_\alpha^\beta \equiv W_M^\Omega$, де $M\left(x\right) = x^{1/\alpha}$, $\Omega\left(y\right) = y^{1/\left(1-\beta\right)}$, $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $\alpha + \beta \ge 1$. Простори S_α^β перетворенням Фур'є відображаються у простори такого ж типу, а саме, правильною є формула [10, с. 245]:

$$F\left[S_\alpha^\beta\right] = S_\beta^\alpha.$$

Розглянемо функцію $a\left(t, x; \sigma\right)$, задану на $\left[0, T\right] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, яка задовольняє умови:

1) $a\left(t, x; \sigma\right)$ — неперервно диференційовна функція аргументу $t \in \left[0, T\right]$ (при фіксованих x, σ); $a\left(t, x; \sigma\right)$ — неперервно диференційовна обмежена на $\mathbb{R}$ функція аргументу x (при фіксованих t, σ);

2) при фіксованих t, x функція $a\left(t, x; \sigma\right)$, як функція змінної σ, допускає аналітичне продовження у всю комплексну площину, при цьому

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists c_\varepsilon > 0 \quad \forall \sigma + i\tau \in \mathbb{C} : \left|a\left(t, x; \sigma + i\tau\right)\right| \le c_\varepsilon \exp\left\{M\left(\varepsilon\sigma\right) + \Omega\left(\varepsilon\tau\right)\right\},$$
$$\forall\left(t, x\right) \in \Pi_T \equiv \left[0, T\right] \times \mathbb{R}$$

(тобто, $a\left(t, x; \cdot\right)$ — мультиплікатор у просторі W_M^Ω);

$$\exists c, a, b > 0 : \left|\exp\left\{a\left(t, x; \sigma + i\tau\right)\right\}\right| \le c \exp\left\{-M\left(a\sigma\right) + \Omega\left(b\tau\right)\right\}, \forall\left(t, x\right) \in \Pi_T$$

(тобто, $\exp\left\{a\left(t, x; \cdot\right)\right\} \in W_M^\Omega$).

Розглянемо псевдодиференціальний оператор A, побудований за символом

$$a\left(t, x; \sigma\right) \colon \left(A\psi\right)\left(x\right) := F_{\sigma \to x}^{-1}\left[a\left(t, x; \sigma\right) F_{x \to \sigma}\left[\psi\left(x\right)\right]\left(\sigma\right)\right]\left(x\right), \ \ \forall \psi \in W_{M_1}^{\Omega_1}\left(\mathbb{R}\right).$$

Зазначимо також, що A можна розуміти як оператор диференціювання нескінченного порядку [11], тобто

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\left(t, x\right)\left(-iD_x\right)^k,$$

за умови, що

$$a(t,x;\sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(t,x)\sigma^k$$

— ряд Тейлора функції-символа a за змінною σ (при фіксованих t,x).

У смузі $\Pi'_T = \{(t,x) : 0 \le \tau < t \le T, x \in \mathbb{R}\}$ розглянемо задачу про знаходження розв'язку еволюційного рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = Au(t,x),\ \ (t,x) \in \Pi'_T, \tag{1}$$

який задовольняє умови:

$$u(t,x) = u_1(t,x) + u_2(t,x),\ \mu \lim_{t\to\tau+0} u_1(t,x) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} u_1(t,x) = \varphi(x), \tag{2}$$

$$\lim_{t\to\tau+0} u_2(t,x) = 0, \tag{3}$$

у кожній точці $x \in \mathbb{R}$ для фіксованої функції $\varphi \in W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$, де $m \in \mathbb{N}$, $\{\mu, \mu_1, \ldots, \mu_m\} \subset (0, +\infty)$, $\{t_1, \ldots, t_m\} \subset (\tau, T]$ — фіксовані числа, причому

$$\mu > m\sum_{k=1}^{m} \mu_k,\ 0 \le \tau < t_1 < \ldots < t_m = T.$$

Задачу (1)—(3) називатимемо *нелокальною за часом* m*-точковою* (*багатоточковою*) *задачею* для рівняння (1).

Під *фундаментальним розв'язком* задачі (1)—(3) розумітимемо функцію

$$Z(t,x;\tau,\xi) = V(t,x;\tau,\xi) + \Gamma(t,x;\tau,\xi), (t,x) \in \Pi'_T, 0 \le \tau < t \le T, \xi \in \mathbb{R},$$

яка має властивості:

1) $LZ(t,x;\tau,\xi) = 0$, $L \equiv L(t,x;A,\partial/\partial t) := \partial/\partial t - A$, тобто Z, як функція (t,x) (при фіксованих τ,ξ) є розв'язком рівняння (1);

2) $$\mu \lim_{t\to\tau+0} \int_{\mathbb{R}} V(t,x;\tau,\xi)\varphi(\xi)d\xi - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lim_{t\to t_k} \int_{\mathbb{R}} V(t,x;\tau,\xi)\varphi(\xi)d\xi = \varphi(x),$$

$$\lim_{t\to\tau+0} \int_{\mathbb{R}} \Gamma(t,x;\tau,\xi)\varphi(\xi)d\xi = 0$$

у кожній точці $x \in \mathbb{R}$ для довільної функції $\varphi \in W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$.

Для побудови функції Z скористаємося методом Леві (методом параметрикса). З цією метою символ $a(t,x;\sigma)$ зафіксуємо в точці $(t,x) = (\chi,\xi)$, $\chi \in [\tau, T]$, $\xi \in \mathbb{R}$ і розгляньмо m-точкову задачу для еволюційного рівняння із сталим символом $a(\chi,\xi;\sigma)$:

$$L\left(\chi,\xi;A,\partial / \partial t\right)v\left(t,x\right)=0, \quad \left(t,x\right)\in \Pi_T', \tag{4}$$

$$\mu \lim_{t\to\tau+0} v\left(t,x\right)-\sum_{k=1}^{m}\mu_k \lim_{t\to t_k} v\left(t,x\right)=\varphi\left(x\right),\ \varphi\in W_{M_1}^{\Omega_1}\left(\mathbb{R}\right). \tag{5}$$

Розв’язок $v\in C^1\left(\left(\tau,T\right],W_{M_1}^{\Omega_1}\left(\mathbb{R}\right)\right)$ задачі (4), (5) шукатимемо за допомогою перетворення Фур’є. Безпосередньо знаходимо, що

$$v\left(t,x\right)=\int_{\mathbb{R}} G\left(t-\tau,x-\omega;\chi,\xi\right)\varphi\left(\omega\right)d\omega = G\left(t-\tau,x;\chi,\xi\right)*\varphi\left(x\right),$$

де $G\left(t-\tau,x;\chi,\xi\right)=F_{\sigma\to x}^{-1}\left[Q\left(t-\tau,\chi;\xi,\sigma\right)\right]$,

$$Q\left(t-\tau,\chi;\xi,\sigma\right)=\exp\left\{\left(t_k-\tau\right)a\left(\chi,\xi;\sigma\right)\right\}\left(\mu-\sum_{k=1}^{m}\mu_k\exp\left\{\left(t_k-\tau\right)a\left(\chi,\xi;\sigma\right)\right\}\right)^{-1}.$$

Властивості функції G залежать від властивостей функції Q. Оскільки $G=F^{-1}\left[Q\right]$, наведемо ряд лем, які допоможуть установити властивості функції G та її похідних як функцію аргументу x.

Лема 1. Функція G, як функція змінної x, є елементом простору $S_1^{1/\alpha}$. Для функції G та її похідних (за змінною x) справджуються нерівності

$$\left|D_x^k G\left(t-\tau,x;\chi,\xi\right)\right|\le c_1 B_1^k (t-\tau)^{-(k+1)/\alpha} k^{k/\alpha} e^{-b_0\left|x\right|}, k\in\mathbb{Z}_+, x\in\mathbb{R},$$

сталі $c_1,B_1,b_0>0$ не залежать від $t-\tau$, χ,ξ.

Лема 2. Правильною є формула

$$\frac{\partial I\left(t,\tau,x\right)}{\partial t}=\int_{\tau}^{t}d\mu\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial}{\partial t}G\left(t-\mu,x-\xi;\mu,\xi\right)\varphi\left(\mu,\xi\right)d\xi+\varphi\left(t,x\right).$$

Лема 3. 1. Нехай $\varphi\left(t,x\right)$, $\left(t,x\right)\in\left[0,T\right]\times\mathbb{R}$, — функція, неперервна за змінною t, $\varphi\left(t,\cdot\right)\in W_{M_1}^{\Omega_1}\left(\mathbb{R}\right)$. Правильною є формула

$$AI\left(t,\tau,x\right)=\int_{\tau}^{t}d\mu\int_{\mathbb{R}}AG\left(t-\mu,x-\xi;\mu,\xi\right)\varphi\left(\mu,\xi\right)d\xi$$

2. Для функції AG правильною є оцінка

$$\left|AG\left(t-\mu,x-\xi;\mu,\xi\right)\right|\le c(t-\mu)^{-1/\alpha} exp\left\{-a\left|x-\xi\right|\right\},\ t>\mu\ge 0,$$

сталі $c,a>0$ не залежать від t,μ.

На підставі отриманих вище результатів твердимо, що функція

$$Z\left(t,x;\tau,\xi\right)=V\left(t,x;\tau,\xi\right)+\Gamma\left(t,x;\tau,\xi\right), \quad V\left(t,x;\tau,\xi\right)=G\left(t-\tau,x-\xi;\tau,\xi\right),$$

$$\Gamma\left(t,x;\tau,\xi\right)=\int_{\tau}^{t}d\mu\int_{\mathbb{R}}G\left(t-\mu,x-\eta;\mu,\eta\right)\Phi\left(\mu,\eta;\tau,\xi\right)d\eta$$

(Φ визначається з деякого інтегрального рівняння), є фундаментальним розв'язком нелокальної за часом m-точкової задачі для рівняння (1), а функція

$$u\left(t,x\right)=\int_{\mathbb{R}}V\left(t,x;0,\xi\right)\varphi\left(\xi\right)d\xi+\int_{\mathbb{R}}\Gamma\left(t,x;0,\xi\right)\varphi\left(\xi\right)d\xi=u_1\left(t,x\right)+u_2\left(t,x\right), \quad (6)$$

$\left(t,x\right)\in\left(0,T\right]\times\mathbb{R}$, $\varphi\in W_{M_1}^{\Omega_1}\left(\mathbb{R}\right)$, — розв'язок цієї задачі при $\tau=0$. Підсумуємо отримані результати у вигляді наступного твердження.

Теорема. *m-точкова задача для рівняння* (1) *з параметром* $\tau=0$ *є розв'язною, при цьому розв'язок дається формулою* (6); $u\left(t,x\right)$ *— неперервна обмежена на* $\mathbb{R}$ *функція змінної* x *при кожному* $t\in\left(0,T\right]$.

Список літератури

1. Нахушев, А. М. (1995). *Уравнения математической биологии.* Москва: Высшая школа.
2. Белавин, И. А., Капица, С. П., & Курдюмов, С.П. (1988). Математическая модель глобальных демографических процессов с учетом пространственного распределения. *Журн. вычислит. матем. и мат. физики*, *38*(6), 885—902.
3. Дезин, А. А. (1980). *Общие вопросы теории граничных задач.* Москва: Наука.
4. Романко, В. К. (1974). Граничные задачи для одного класса дифференциальных операторов. *Дифференц. уравнения*, *10*(11), 117—131.
5. Романко, В. К. (1985). Нелокальные граничные задачи для некоторых систем уравнений. *Матем. заметки*, *37*(7), 727—733.
6. Макаров, А. А. (1994). Существование корректной двухточечной краевой задачи в слое для систем псевдодифференциальных уравнений. *Дифференц. уравнения, 30*(1), 144—150.
7. Чесалин, В. И. (1979). Задача с нелокальными граничными условиями для абстрактных гиперболических уравнений. *Дифференц. уравнения, 15*(11), 2104—2106.
8. Илькив, В. С., & Пташник, Б. И. (2005). Некоторая нелокальная двухточечная задача для систем уравнений с частными производными. *Сиб. мат. журн.*, *46*(1), 119—129.
9. Гельфанд, И. М., & Шилов, И. М. (1958). *Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений*. М.: Физматгиз.
10. Гельфанд, И. М., & Шилов, И. М. (1958). *Пространства основных и обобщеных финкций*. М.: Физматгиз.
11. Городецький, В. В., & Ленюк, О. М. (2000). Задача Коші для еволюційних рівнянь з операторами диференціювання нескінченного порядку. *Вісник Київського ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки, 4*, 65—70.

КОРЕКТНА РОЗВ’ЯЗНІСТЬ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ВИРОДЖЕНИХ $\overrightarrow{2b}$-ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ КОЛМОГОРОВА

В. С. Дронь[1], С. Д. Івасишен[2]

[1]*Інститут прикладних проблем механіки і математики імені Я. С. Підстригача НАН України, Львів, Україна*

[2]*Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ, Україна*

vdron@ukr.net

Розглядається задача Коші для виродженого рівняння типу Колмогорова з $\overrightarrow{2b}$-параболічною частиною за основними змінними і залежними лише від часової змінної t коефіцієнтами. Встановлюються властивості відповідного такій задачі об’ємного потенціалу в просторах Гельдера зростаючих при $|x| \to \infty$ функцій. Із цих властивостей випливає коректна розв’язність задачі Коші з однорідними початковими умовами.

Ключові слова: вироджене рівняння типу Колмогорова з $\overrightarrow{2b}$-параболічною частиною за основними змінними, задача Коші, об’ємний потенціал, простори Гельдера зростаючих функцій, коректна розв’язність.

Розглядається одновимірна часова змінна t і n-вимірна просторова змінна x, яка складається з груп змінних $x_j := (x_{j1},...x_{jn_j}) \in \mathbb{R}^{n_j}$, $j \in \{1,2,3\}$, де $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq 0$, $n = n_1 + n_2 + n_3$.

Нехай b_1, ..., b_{n_1} — деякі числа з $\mathbb{N}$. Позначається через $\overrightarrow{2b}$ вектор $(2b_1,...,2b_{n_1})$, через b — найменше спільне кратне чисел b_1, ..., b_{n_1}, через m_j — число b / b_j, $j \in \{1,...,n_1\}$. Об’єктом дослідження в цьому повідомленні є задача Коші вигляду

$$(\partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}} - \sum_{\|k_1\|\leq 2b} a_{k_1}(t)\partial_{x_1}^{k_1})u(t,x) = f(t,x),\ (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \quad (1)$$

$$u(t,x)\,|_{t=0} = 0,\ \ x \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

де для мультиіндекса $k_1 := (k_{11},...,k_{1n_1}) \in \mathbb{Z}_+^{n_1}$ покладено $\|k_1\| := \sum_{j=1}^{n_1} m_j k_{1j}$, $\Pi_{(0,T]} := (0,T] \times \mathbb{R}^n$, T — додатне число. Припускається, що коефіцієнти a_{k_1}, $k_1 \in \mathbb{Z}_+^{n_1}$, $\|k_1\| \leq 2b$, є неперервними комплекснозначними функціями на $[0,T]$ і такими, що диференціальний вираз

$$\partial_t - \sum_{\|k_1\|\le 2b} a_{k_1}(t)\partial_{x_1}^{k_1}$$

рівномірно на $[0,T]\times\mathbb{R}^{n_1}$ $\overrightarrow{2b}$-параболічний, тобто існує стала $\delta > 0$ така, що для всіх $t\in[0,T]$ і $\sigma_1\in\mathbb{R}^{n_1}$ виконується нерівність

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{\|k_1\|=2b} a_{k_1}(t)(i\sigma_1)^{k_1}\right) \le -\delta\sum_{j=1}^{n_1}\sigma_{1j}^{2b_j}.$$

Тут i — уявна одиниця.

Якщо $n_3\ge 1$, то рівняння (1) вироджується за двома групами змінних x_2 і x_3. Коли $n_3=0$, а $n_2\ge 1$, то є виродження за однією групою змінних x_2. У випадку $n_2=n_3=0$ рівняння (1) невироджене.

Рівняння (1) є виродженим рівнянням типу Колмогорова з $\overrightarrow{2b}$-параболічною частиною за основними змінними. Для нього існує фундаментальний розв'язок задачі Коші G, детальні властивості якого наведено у праці Ейдельмана, Івасишена та Кочубея (2004). Функція G породжує об'ємний потенціал з густиною f вигляду

$$u(t,x) := \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi)d\xi, \quad (t,x)\in\Pi_{(0,T]}. \tag{3}$$

Для випадку, коли рівняння (1) 2-го порядку, тобто $b_j=1$, $j\in\{1,\dots,n_1\}$, Ейдельманом, Івасишеним та Кочубеєм (2004) досліджувались властивості функції (3) у припущенні локальної гельдеровості й експоненціального зростання при $|x|\to\infty$ функції f. Зв'язок гельдерівських властивостей і поведінки при $|x|\to\infty$ густини f і функції u та її похідних з'ясовувався Дронем (2000) для рівняння (1) 2-го порядку, Дронем та Івасишеним (2016) — для рівняння довільного порядку при $b_j=b$, $j\in\{1,\dots,n_1\}$. Тут наводяться аналогічні властивості (3) для рівняння (1).

Використовуються такі позначення: $M:=\{1,2,3\}$; $\mathbb{Z}_+^l$ — множина всіх l -вимірних мультиіндексів; $k_l:=(k_{l1},\dots,k_{ln_l})$ — елемент множини $\mathbb{Z}_+^{n_l}$, $l\in M$; $k:=(k_1,k_2,k_3)$ — елемент множини $\mathbb{Z}_+^n$; $|k_l|:=k_{l1}+\dots+k_{ln_l}$, якщо $k_l\in\mathbb{Z}_+^{n_l}$, $l\in M$; $q_j:=2b_j/(2b_j-1)$, $j\in\{1,\dots,n_1\}$; m',m'' — найбільше й найменше з чисел $m_j, j\in\{1,\dots,n_1\}$;

$$[a,x] := \sum_{l=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_j} a_{lj}\left|x_{lj}\right|^{q_j},$$

якщо $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}_{+}^{n}$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^{n}$;

$$\left|x_l\right| := (\sum_{j=1}^{n_l} x_{lj}^2)^{1/2},$$

$x_l \in \mathbb{R}^{n_l}$, $l \in M$; ∂_t, ∂_y — операції диференціювання першого порядку відповідно за змінними t, y; ∂_y^s — операція диференціювання порядку $s > 1$ за змінною y; $\partial_{x_l}^{k_l} := \partial_{x_{l1}}^{k_{l1}} ... \partial_{x_{ln_l}}^{k_{ln_l}}$, якщо $x_l \in \mathbb{R}^{n_l}$, $k_l \in \mathbb{Z}_{+}^{n_l}$, $l \in M$;

$$\Delta_x^{x'} f(\cdot, x, \cdot) := f(\cdot, x, \cdot) - f(\cdot, x', \cdot);$$

$$d(x, \xi, \alpha) := \sum_{l=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_l}\left|x_{lj} - \xi_{lj}\right|^{\alpha_l/(2b(l-1)+m_j)},$$

якщо $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$, $\alpha_1 \in [0, m'']$, $\alpha_2 \in [0, 2b + m'']$, $\alpha_3 \in [0, 4b + m'']$.

Для додатного числа c_0 і набору $a := (a_1, a_2, a_3)$, $a_l := (a_{l1}, ..., a_{ln_l})$, $l \in M$, невід'ємних чисел a_{lj}, $j \in \{1, ..., n_l\}$, $l \in M$, таких, що

$$T < \min_{l \in M, j \in \{1, ..., n_l\}} (c_0 / a_{lj})^{(2b_j - 1)/(2b_j(l-1)+1)},$$

розглядаються такі функці з роботи Ейдельмана, Івасишена та Кочубея (2004):

$$k_{lj}(t, a_{lj}) := c_0 a_{lj}(c_0^{2b_j - 1} - a_{lj}^{2b_j - 1} t^{2b_j(l-1)+1})^{1-q_j}, \ j \in \{1, ..., n_l\}, \quad l \in M;$$

$$k(t) := (k_{11}(t, a_{11}), ..., k_{1n_1}(t, a_{1n_1}), k_{21}(t, a_{21}), ..., k_{2n_2}(t, a_{2n_2}), k_{31}(t, a_{31}), ..., k_{3n_3}(t, a_{3n_3}));$$

$$s_{1j}(t) := k_{1j}(t, a_{1j}) + 2^{q_j - 1}\theta(n_2 - j)t^{q_j}k_{2j}(t, a_{2j}) + 2^{q_j - 2}\theta(n_3 - j)t^{2q_j}k_{3j}(t, a_{3j}),$$
$$j \in \{1, ..., n_1\};$$

$$s_{2j}(t) := 2^{q_j - 1}k_{2j}(t, a_{2j}) + 4^{q_j - 1}\theta(n_3 - j)t^{q_j}k_{3j}(t, a_{3j}), \quad j \in \{1, ..., n_2\};$$

$$s_{3j}(t) := 4^{q_j - 1}k_{3j}(t, a_{3j}), \quad j \in \{1, ..., n_3\};$$

$$s(t) := (s_{11}(t), ..., s_{1n_1}(t), s_{21}(t), ..., s_{2n_2}(t), s_{31}(t), ..., s_{3n_3}(t)), \quad t \in [0, T],$$

де $\theta(\tau) = 1$ для $\tau \geq 0$ і $\theta(\tau) = 0$ для $\tau < 0$.

Нехай

$$\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3, \ \alpha_1 \in (0, m''], \ \alpha_2 \in (m', 2b + m''],$$
$$\alpha_3 \in (2b + m', 4b + m''], \ p_1 \in \{0, 1, ..., 2b\}, \ \{p_2, p_3\} \subset \{0, 1\}, \ p := (p_1, p_2, p_3).$$

Використовуються такі гельдерові простори функцій $w : \Pi_{[0,T]} \to C$:

$C^{\alpha}_{k(\cdot)}$ — простір усіх функцій w, для яких скінченною є норма

$$\|w\|^{\alpha}_{k(\cdot)} := \|w\|_{k(\cdot)} + [w]^{\alpha}_{k(\cdot)},$$

де

$$\|w\|_{k(\cdot)} := \sup_{(t,x)\in\Pi_{[0,T]}} \left(\left|w(t,x)\right| \exp\{-[k(t),x]\}\right),$$

$$[w]^{\alpha}_{k(\cdot)} := \sup_{\substack{\{(t,x),(t,x')\}\subset\Pi_{[0,T]} \\ x\neq x'}} \frac{|\ \Delta_x^{x'} w(t,x)\ |}{d(x,x',\alpha)(\exp\{[k(t),x]\} + \exp\{[k(t),x']\})};$$

$C^{\alpha}_{s(\cdot)}$ — простір, означення якого одержується з означення простору $C^{\alpha}_{k(\cdot)}$ заміною функції k на функцію s;

$C^{p,\alpha}_{s(\cdot)}$ — простір усіх функцій w, які разом зі своїми похідними $\partial^{k_l}_{x_l} w$, $l \in M$, $\|k_1\| \le p_1$, $|k_2| \le p_2$, $|k_3| \le p_3$ належать до простору $C^{\alpha}_{s(\cdot)}$, тобто є скінченною норма

$$\|w\|^{p,\alpha}_{s(\cdot)} := \|w\|^{\alpha}_{s(\cdot)} + \sum_{0<\|k_1\|\le p_1} \left\|\partial^{k_1}_{x_1} w\right\|^{\alpha}_{s(\cdot)} + \sum_{l=2}^{3} \sum_{0<|k_l|\le p_l} |\ \left\|\partial^{k_l}_{x_l} w\right\|^{\alpha}_{s(\cdot)}.$$

Описано гельдерівський клас експоненціально зростаючих при $|x| \to \infty$ функції f, при яких об'ємний потенціал (3) має неперервні похідні, що входять у рівняння (1), є класичним розв'язком ріняння (1). Установлено оцінки об'ємного потенціалу (3) у вагових просторах Гельдера, інші його властивості. З отриманих властивостей випливає така теорема про коректну розв'язність у вагових просторах Гельдера задачі Коші з однорідними початковими умовами (1), (2).

Теорема. *Нехай* $f \in C^{\alpha}_{k(\cdot)}$, *де* $\alpha = (\beta, \beta + m', \beta + 2b + m')$ *з деяким* $\beta \in (0, m'']$. *Тоді формулою (3) визначається єдиний розв'язок рівняння* (1)*, який належить до простору* $C^{r,\alpha'}_{s(\cdot)}$, *де* $r = (2b, 1, 1)$, $\alpha' = (\beta, \beta, \beta)$, *і для якого справджуються оцінка*

$$\|u\|^{r,\alpha'}_{s(\cdot)} \le C \|f\|^{\alpha}_{k(\cdot)}$$

і рівності

$$\lim_{t\to 0} \left(\sup_{x\in\mathbb{R}^n} (|\ \partial^k_x u(t,x)\ | \exp\{-[s(t),x]\}) \right) = 0, \ \frac{\|k_1\|}{2b} + |k_2| + |k_3| \le 1.$$

Список літератури

Eidelman, S. D., Ivasyshen, S. D., & Kochubei, A. N. (2004). *Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type* (Vol. 152). Springer Science & Business Media.

Дронь, В. С. (2000). Про коректну розв'язність у вагових просторах Гельдера задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова. *Наук. вісник Чернівецького ун-ту*, *76*, 32—41.

Дронь, В. С., & Івасишен, С. Д. (2016). Властивості об'ємного потенціалу для одного класу ультрапараболічних рівнянь довільного порядку. *Буковинський мат. журн.*, *4*(3—4), 47—56.

ПРО ОБЧИСЛЕННЯ ОДНОГО НЕВЛАСНОГО ІНТЕГРАЛА З ПАРАМЕТРОМ

А. Г. Зеленський

Придніпровська державна академія будівництва та архітектури,
Дніпро, Україна

a.zelensky@ukr.net

Із математичних і фізичних міркувань обчислюється один важливий невласний інтеграл з параметром, який входить у розв’язок задачі згину товстих пластин за однією математичною теорією при дії зосереджених поперечних навантажень.

Ключові слова: невласний інтеграл з параметром, неоднорідне диференціальне рівняння з частинними похідними, товста пластина, операторний метод, дельта-функція Дірака.

Розглядається наступний невласний інтеграл з параметром:

$$S = \int_0^\infty \frac{J_0(pr)J_0(pr_0)}{p}dp, \tag{1}$$

де J_0 – функція Бесселя 1-го роду індекса 0.

Такий інтеграл входить у розв’язок визначального рівняння згину товстих пластин за однією математичною теорією (Зеленський, 2011; Зеленський & Приварников, 2015) від дії зосереджених навантажень

$$\nabla^2\nabla^2(\nabla^2 - k_1)(\nabla^2 - k_2)\Phi(r) = \mu_2(\nabla^2 - \mu_0)q_0\delta(r - r_0), \tag{2}$$

де k_1, k_2, μ_2, μ_0, q_0, r_0 — сталі; ∇^2 — оператор Лапласа, $\delta(r - r_0)$ — дельта-функція Дірака, $\Phi(r)$ — шукана функція.

Права частина цього рівняння відповідає дії на пластину поперечного рівномірно розподіленого по колу радіуса r_0 навантаження інтенсивності q_0.

Після використання операторного методу (Zelensky, 2016), який зводить неоднорідне рівняння 8-го порядку (2) до неоднорідних рівнянь 2-го і четвертого порядків, доводиться мати справу з рівнянням Пуассона:

$$\nabla^2\sigma(r) = \frac{q_0\delta(r - r_0)}{D}, \tag{3}$$

де D — стала, яке відповідає згину товстої пластини від рівномірно розподіленого навантаження інтенсивності q_0 по колу радіуса r_0.

Використовуючи інтегральне перетворення Ганкеля й надалі обернене перетворення, дістаємо розв’язок рівняння (3) у вигляді

$$\sigma(r) = -\frac{q_0 r_0}{D}\int_0^\infty \frac{J_0(pr)J_0(pr_0)}{p}dp. \tag{4}$$

У статті Шевляков та Шевченко (1964) наведено формулу, за якою обчислюється інтеграл (1), але без її виведення. Зазначимо, що в класичній літературі

(Ватсон, 1949; Градштейн & Рыжик, 1971; Коренев, 1971) указаний інтеграл не наводиться. У даній роботі виводиться формула для інтеграла (1). Виведення ґрунтується на математичних і фізичних міркуваннях.

Розгляньмо рівняння

$$\nabla^2 \sigma(x, y) = \frac{P\delta(x - x_0, y - y_0)}{D}, \tag{5}$$

яке відповідає згину пластини від зосередженої сили P, прикладеної в довільній точці (x_0, y_0). Розв’язок рівняння (5) можна знайти як у роботі Кеч та Теодореску (1978). Інтегруванням цього розв’язку по колу радіуса r_0 з центром у початку координат виводиться розв’язок $\sigma(r)$ рівняння, яке відповідає згину товстої пластини від дії рівномірно розподіленого навантаження інтенсивності q_0 по колу радіуса r_0:

$$\sigma(r) = q_0 r_0 \ln r_0 \,/\, D \ \text{ при } r < r_0; \ \ \sigma(r) = q_0 r_0 \ln r \,/\, D \ \text{ при } r > r_0. \tag{6}$$

Порівнюючи (4) і (6), дістанемо інтеграл (1):

$$S = -\ln r_0, \text{ якщо } r < r_0; \quad S = -\ln r, \text{ якщо } r > r_0,$$

що збігається з результатом роботи Шевляков та Шевченко (1964).

Список літератури

Zelensky, A. G. (2016). Method of solution equation system within the variant of mathematical theory of non-thin shallow shells. *Международный научный журнал. Физ.-мат. науки*, (7), 137–142.

Ватсон, Г. Н. (1949). *Теория бесселевых функций*. (Ч. 1). Москва: Изд-во иностранной литературы.

Градштейн, И. С., & Рыжик, И. М. (1971). *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*. Мосва: Наука.

Зеленський, А. Г. (2011). Метод зниження порядку неоднорідних диференціальних рівнянь із частинними похідними в теорії пластин середньої товщини. *Вісник Дніпропетр. ун-ту*, *19*(7). Серія механіка. *15*(1), 81—89.

Зеленський, А. Г., & Приварников, А. К. (2015). Про метод розв’язування неоднорідних рівнянь із частинними похідними в математичній теорії плит. *Международный научный журнал. Физико-математические науки*, (2), 154—159.

Кеч, В., & Теодореску, П. (1978). *Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике*. Москва: Мир.

Коренев, Б. Г. (1971). *Введение в теорию бесселевых функций*. Москва: Наука.

Шевляков, Ю. О., & Шевченко, В. П. (1964). Розв’язок задачі згину пологих сферичних оболонок. *Прикладна механіка*, *10*(4), 382—391.

ФУНДАМЕНТАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ КОЛМОГОРОВА ІЗ ГЛАДКИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

С. Д. Івасишен[1], І. П. Мединський[2]

[1]*Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ, Україна*

[2]*Національний університет «Львівська політехніка», Львів, Україна*

ivasyshen.sd@gmail.com, i.p.medynsky@gmail.com

Для виродженого параболічного рівняння типу Колмогорова із гладкими коефіцієнтами методом Леві побудовано фундаментальний розв'язок задачі Коші та отримано точні оцінки його похідних.

Ключові слова: ультрапараболічне рівняння типу Колмогорова, фундаментальний розв'язок задачі Коші, метод Леві, параметрикс, об'ємний потенціал.

Фундаментальний розв'язок задачі Коші (ФРЗК) для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова за додаткової гладкості коефіцієнтів рівняння із двома та трьома групами просторових змінних будували М. Вебер, А. М. Ільїн, І. М. Сонін, Г. П. Малицька та інші математики. Для побудови ФРЗК використовувався класичний метод Леві або його модифікації. У працях цих авторів припускалось існування неперервних і обмежених похідних певного порядку за просторовими змінними від коефіцієнтів рівняння. Детальніший аналіз цих результатів можна знайти в монографії Eidelman, Ivasyshen та Kochubei (2004). У цьому повідомленні викладено основні моменти та результати побудови методом Леві ФРЗК за припущення, що коефіцієнти рівняння мають обмежені похідні довільних порядків. Точні формулювання наводяться нижче.

Розглядається рівняння із двома групами просторових змінних. Нехай n, n_1, n_2 — задані натуральні числа такі, що $n_1 \geq n_2 \geq 1$ і $n = n_1 + n_2, m_1 = 1/2, m_2 = 3/2, M := m_1 n_1 + m_2 n_2$, T — задане додатне число. Просторова змінна $x \in \mathbb{R}^n$ складається із двох груп змінних $x := (x_1, x_2)$, $x_1 := (x_{11}, \ldots, x_{1n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1}, x_2 := (x_{21}, \ldots, x_{2n_2}) \in \mathbb{R}^{n_2}$.

Рівняння, яке розглядається, має вигляд

$$Lu(t,x) := \big(S - A(t,x,\partial_{x_1})\big)u(t,x), (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{1}$$

де

$$S := \partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}}, A(t,x,\partial_{x_1}) := \sum_{j,l=1}^{n_1} a_{jl}(t,x)\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} + \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t,x)\partial_{x_{1j}} +$$

$$+a_0(t,x), \Pi_{\mathrm{H}} := \left\{ (t,x) \,|\, t \in \mathrm{H} \subset \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Припускається, що коефіцієнти a_{jl}, a_j і a_0 є комплекснозначними функціями на $\Pi_{[0,T]}$, які задовольняють такі умови:

1) існує така стала $\delta > 0$, що для довільних $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}$ і $\sigma_1 := (\sigma_{11}, \ldots, \sigma_{1n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1}$ справджується нерівність

$$\mathrm{Re} \sum_{j=1}^{n_1} a_{jl}(t,x)\sigma_{1j}\sigma_{1l} \geq \delta \left|\sigma_1\right|^2;$$

2) існують обмежені похідні довільного порядку.

Поряд з рівнянням (1) розглядається рівняння з коефіцієнтами, залежними від параметрів $y := (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^n$, тобто рівняння вигляду

$$L_0 u(t,x) := \left(S - A(t,y,\partial_{x_1})\right)u(t,x),\, (t,x) \in \Pi_{(0,T]},\, y \in \mathbb{R}^n. \qquad (2)$$

За припущень **1** і **2** в монографії Eidelman, Ivasyshen та Kochubei (2004) для рівняння (2) побудовано ФРЗК Z_0, для якого справджуються оцінки

$$\left|\partial_x^k \partial_\xi^l \partial_y^{l_0} Z_0(t,x;\tau,\xi;y)\right| \leq C_{kll_0}(t-\tau)^{-M-M_{kl}} E_c(t-\tau,x,\xi), \qquad (3)$$

$$\left|SZ_0(t,x;\tau,\xi;y)\right| \leq C(t-\tau)^{-M-1} E_c(t-\tau,x,\xi), \qquad (4)$$

а також рівності

$$\partial_x^k Z_0(t,x;\tau,\xi;y) = (-\partial_\xi)^k Z_0(t,x;\tau,\xi;y),\, k \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\}, \qquad (5)$$

де $0 \leq \tau < t \leq T, \{x,\xi,y\} \in \mathbb{R}^n$, c і C_{kll_0} — додатні сталі,

$$M_{kl} := m_1\left(\left|k_1\right| + \left|l_1\right|\right) + m_2\left(\left|k_2\right| + \left|l_2\right|\right),\ \{k,l\} \subset \mathbb{Z}_+^n,$$

$$E_c(t,x,\xi) := \exp\left\{-c\left(t^{-1}\left|x_1 - \xi_1\right|^2 + t^{-3}\left|x_2 + tx_1' - \xi_2\right|^2\right)\right\}, x_1' := (x_{11}, \ldots, x_{1n_2}).$$

ФРЗК Z для рівняння (1) шукається у вигляді

$$Z(t,x;\tau,\xi) = G(t,x;\tau,\xi) + W(t,x;\tau,\xi), \qquad (6)$$

де параметрикс G визначається формулою

$$G(t,x;\tau,\xi) = Z_0(t,x;\tau,\xi;x), \qquad (7)$$

а об'ємний потенціал W — відповідно формулою

$$W(t,x;\tau,\xi) = \int_\tau^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\beta,\lambda)Q(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda, 0 \leq \tau < t \leq T, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \qquad (8)$$

Нехай властивості невідомої густини Q є такими, що оператор L можна застосовувати під знаками інтегралів у (8). Тоді для функції Q одержується інтегральне рівняння вигляду

$$Q(t,x;\tau,\xi) = K(t,x;\tau,\xi) +$$

$$+\int_\tau^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} K(t,x;\beta,\lambda)Q(\beta,\lambda;\tau,\xi)d\lambda, 0 \leq \tau < t \leq T, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \qquad (9)$$

у якому ядро K визначається формулою

$$K(t,x;\tau,\xi) = \left(A(t,x,\partial_{x_1})Z_0(t,y;\tau,\xi;y)\right)\Big|_{y=x}. \qquad (10)$$

Для похідних від K за змінними x_i та ξ_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, отримуються вирази

$$\partial_{x_i} K(t,x;\tau,\xi) = \left(\sum_{j,l=1}^{n_1} \partial_{x_i} a_{jl}(t,x) \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1l}} + \sum_{j=1}^{n_1} \partial_{x_i} a_j(t,x) \partial_{x_{1j}} + \partial_{x_i} a_0(t,x) \right) \times$$

$$\times \Big(\partial_{x_1}^{k_1} Z_0(t,y;\tau,\xi;x) \Big)\Big|_{y=x} + \left(\sum_{j,l=1}^{n_1} a_{jl}(t,x) \partial_{y_i} \partial_{y_{1j}} \partial_{y_{1l}} + \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t,x) \partial_{y_i} \partial_{y_{1j}} + a_0(t,x) \partial_{y_i} \right) \times$$

$$\times \Big(\partial_{x_1}^{k_1} Z_0(t,y;\tau,\xi;x) \Big)\Big|_{y=x} + \left(\sum_{j,l=1}^{n_1} a_{jl}(t,x) \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1l}} + \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t,x) \partial_{x_{1j}} + a_0(t,x) \right) \times$$

$$\times \big(\partial_{x_1}^{k_1} Z_0(t,y;\tau,\xi;x) \big)\big|_{y=x},\ i \in \{1,\ldots,n\}$$

та

$$(\partial_{x_i} + \partial_{\xi_i}) K(t,x;\tau,\xi) = \left(\sum_{j,l=1}^{n_1} \partial_{x_i} a_{jl}(t,x) \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1l}} + \sum_{j=1}^{n_1} \partial_{x_i} a_j(t,x) \partial_{x_{1j}} + \right.$$

$$\left. + \partial_{x_i} a_0(t,x) \right) \big(\partial_{x_1}^{k_1} Z_0(t,y;\tau,\xi;x) \big)\big|_{y=x} + \left(\sum_{j,l=1}^{n_1} a_{jl}(t,x) \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1l}} + \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t,x) \partial_{x_{1j}} + \right.$$

$$\left. + \big(a_0(t,x) \big) \right) \Big(\partial_{x_1}^{k_1'} Z_0(t,y;\tau,\xi;x) \Big)\Big|_{y=x},\ \partial_{x_1}^{k_1'} := \partial_{x_1}^{k_1} \partial_{x_i},\ i \in \{1,\ldots,n\}.$$

Оцінивши доданки із правих частин цих виразів, з урахуванням обмеженості коефіцієнтів рівняння та їх похідних, а також оцінок (3), отримуються оцінки

$$\left| \partial_x^k K(t,x;\tau,\xi) \right| \le C(t-\tau)^{-M-M_{k0}} E_c(t-\tau,x,\xi), \tag{11}$$

$$\left| (\partial_{x_i} + \partial_{\xi_i}) K(t,x;\tau,\xi) \right| \le C(t-\tau)^{-M} E_c(t-\tau,x,\xi), \tag{12}$$

де $0 \le \tau < t \le T$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{Z}_+^n$, $i \in \{1,\ldots,n\}$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$.

Зауважимо, що при доведенні нерівностей (12) істотно використовуються рівності (5). Оцінки (11) і (12) дозволяють обґрунтувати існування резольвенти для інтегрального рівняння (9) з потрібними властивостями:

$$\left| \partial_x^k Q(t,x;\tau,\xi) \right| \le C(t-\tau)^{-M-M_{k0}} E_c(t-\tau,x,\xi),$$

$$0 \le \tau < t \le T, \{x,\xi\} \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{Z}_+^n. \tag{13}$$

Щоб завершити доведення того, що ФРЗК для рівняння (1) визначається формулою (6), залишається довести, що функція (8) має всі похідні, що входять у це рівняння. Наступні оцінки та властивості параметриксу (7) випливають з оцінок (3), (4) і властивості (5) функції Z_0 і доводяться аналогічно до того, як це доводиться для ядра K .

$$\left| \partial_x^k G(t,x;\tau,\xi) \right| \le C(t-\tau)^{-M-M_{k0}} E_c(t-\tau,x,\xi), \tag{14}$$

$$\left| SG(t,x;\tau,\xi) \right| \le C(t-\tau)^{-M-1} E_c(t-\tau,x,\xi), \tag{15}$$

$$\left| (\partial_{x_i} + \partial_{\xi_i}) G(t,x;\tau,\xi) \right| \le C(t-\tau)^{-M} E_c(t-\tau,x,\xi), \tag{16}$$

де $0 \leq \tau < t \leq T$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{Z}_+^n$, $i \in \{1,\ldots,n\}$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$.

Обґрунтування існування похідних від об'ємного потенціалу (8) та одержання оцінок його похідних проводиться, використовуючи оцінки (14)—(16), подібно до того, як це робилось у праці Івасишена та Мединського (2016). При цьому використовується методика з монографії Ейдельмана (1964) для рівномірно параболічних систем із гладкими коефіцієнтами.

Основним результатом повідомлення є

Теорема. *Нехай виконуються умови* **1** *і* **2.** *Тоді для рівняння (1) існує класичний ФРЗК, для якого справджуються оцінки*

$$\left|\partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)\right| \leq C(t-\tau)^{-M-M_{k0}} E_c(t-\tau,x,\xi),$$

$$\left|SG(t,x;\tau,\xi)\right| \leq C(t-\tau)^{-M-1} E_c(t-\tau,x,\xi),$$

де $0 \leq \tau < t \leq T$, $\{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{Z}_+^n$.

Зауважимо, що задача побудови ФРЗК (і не тільки класичного) за якомога слабших припущень на коефіцієнти, отримання точних оцінок ФРЗК і його похідних виявилась значно складнішою. Вона потребувала розвитку спеціальної техніки досліджень об'ємних потенціалів та інтегралів типу похідних від таких потенціалів і, особливо, інтегралів, ядрами й густинами яких є оцінюючі функції, що залежать від спеціальних параметричних точок. Цей підхід реалізовано в праці Івасишена та Мединського (2016), де знайдено умови на коефіцієнти ультрапараболічного рівняння типу Колмогорова, за яких доведено існування класичного ФРЗК для рівняння з двома групами просторових змінних. Для цього використано модифікований метод Леві, особливістю якого є покрокова, поступова заміна параметричних точок.

Список літератури

Eidelman, S. D., Ivasyshen, S. D., & Kochubei, A. N. (2004). *Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type* (Vol. 152). Basel: Birkhäuser.

Івасишен, С. Д., & Мединський, І. П. (2016). Класичні фундаментальні розв'язки для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова з двома групами просторових змінних. *Збірник праць Ін-ту математики НАН України, 13*(1), 108—155.

Эйдельман, С. Д. (1964). *Параболические системы*. Москва: Наука.

ЗНАХОДЖЕННЯ, ВЛАСТИВОСТІ ТА ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ВИРОДЖЕНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

С. Д. Івасишен[1], Г. С. Пасічник[2]

[1]*Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ, Україна*

[2]*Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна*

ivasyshen.sd@gmail.com, h.pasichnyk@chnu.edu.ua

Розглядається ультрапараболічне рівняння зі зростаючими у групі молодших членів коефіцієнтами й виродженням на початковій гіперплощині. Для такого рівняння знаходиться й вивчається фундаментальний розв'язок задачі Коші, а також наводяться деякі його застосування.

Ключові слова: ультрапараболічне рівняння зі зростаючими коефіцієнтами і виродженням на початковій гіперплощині, фундаментальний розв'язок задачі Коші, задача Коші у звичайній постановці, вагова задача Коші, задача без початкових умов.

Розглядається ультрапараболічне рівняння типу Колмогорова вигляду

$$\alpha(t)\partial_t u - \beta(t)\left(\sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}}u + \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}}u + \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1s}}u + b\sum_{j=1}^{n_1}\partial_{x_{1j}}\left(x_{1j}u\right)\right) - au = 0,$$

$$t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

де натуральні числа n_1, n_2 і n_3 такі, що $n_3 \le n_2 \le n_1$ і $n = n_1 + n_2 + n_3$; змінна $x \in \mathbb{R}^n$ складається з трьох груп змінних $x_l := (x_{l1},\dots,x_{ln_l}) \in \mathbb{R}^{n_l}$, $l \in \{1,2,3\}$; a_{js}, $\{j,s\} \subset \{1,\dots,n_1\}$, b та a — дійсні сталі, причому $a_{js} = a_{sj}$ і виконується умова

$$\exists\delta > 0\ \forall\sigma_1 := (\sigma_{11},\dots,\sigma_{1n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1}:\ \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}\sigma_{1j}\sigma_{1s} \ge \delta\left|\sigma_1\right|^2;$$

α та β — неперервні на $[0,\infty)$ функції, для яких $\alpha(t) > 0$, $\beta(t) > 0$ при $t > 0$ і $\alpha(0)\beta(0) = 0$, причому функція β монотонно неспадна.

Зазначимо, що в рівнянні (1) коефіцієнти групи старших членів сталі, а коефіцієнти у групі молодших членів є необмежено зростаючими, коли $\left|x_1\right| \to \infty$, причому має місце виродження при $t = 0$. Для такого рівняння не завжди можна ставити задачу Коші при $t = 0$ у звичайному розумінні, але можна розглядати фундаментальний розв'язок задачі Коші (ФРЗК), під яким розуміється така функція $G(t,x;\tau,\xi)$, $0 < \tau < t$, що формула

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi, \quad t > \tau, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

визначає розв'язок рівняння (1) при $t > \tau$, $x \in \mathbb{R}^n$, який задовольняє початкову умову

$$u(t,x)\Big|_{t=\tau} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

для будь-якого $\tau > 0$ і довільної неперервної та обмеженої функції φ.

Для рівняння (1) знайдено такий явний вираз для ФРЗК:

$$G(t,x;\tau,\xi) = (4\pi)^{-n/2} e^{n_1 bB(t,\tau)} e^{aA(t,\tau)} (\det A_{n_1n_1} \det A_{n_2n_2} \det A_{n_3n_3})^{-1/2} \times$$
$$\times \prod_{l=1}^{3} (p_l(B(t,\tau)))^{-n_l/2} \exp\Big\{ -\frac{1}{4p_1(B(t,\tau))} \sum_{j,l=1}^{n_1} a_1^{jl} \left(e^{bB(t,\tau)} x_{1j} - \xi_{1j} \right) \times$$
$$\times \left(e^{bB(t,\tau)} x_{1l} - \xi_{1l} \right) - \frac{1}{4p_2(B(t,\tau))} \sum_{j,l=1}^{n_2} a_2^{jl} \times$$
$$\times \Big(x_{2j} - \xi_{2j} + f(B(t,\tau))(x_{1j} + \xi_{1j}) \Big) \Big(x_{2l} - \xi_{2l} + f(B(t,\tau))(x_{1l} + \xi_{1l}) \Big) -$$
$$- \frac{1}{4p_3(B(t,\tau))} \sum_{j,l=1}^{n_3} a_3^{jl} \left(x_{3j} - \xi_{3j} + \frac{B(t,\tau)}{2}(x_{2j} + \xi_{2j}) + g(B(t,\tau))(x_{1j} - \xi_{1j}) \right) \times$$
$$\times \left(x_{3l} - \xi_{3l} + \frac{B(t,\tau)}{2}(x_{2l} + \xi_{2l}) + g(B(t,\tau))(x_{1l} - \xi_{1l}) \right) \Big\},$$
$$0 < \tau < t, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$

у якому

$$p_1(t) := \begin{cases} \dfrac{e^{bt} - 1}{2b}, & b \neq 0, \\ t, & b = 0, \end{cases}$$

$$p_2(t) := \begin{cases} 12\Big(\dfrac{t}{b^2} - \dfrac{2(e^{bt} - 1)}{b^3(e^{bt} + 1)}\Big), & b \neq 0, \\ t^3, & b = 0, \end{cases}$$

$$p_3(t) := \begin{cases} 720\Big(\dfrac{t}{b^4} + \dfrac{t^3}{12b^2} - \dfrac{t^2(e^{bt} + 1)}{2b^3(e^{bt} - 1)}\Big), & b \neq 0, \\ t^5, & b = 0, \end{cases}$$

$$f(t) := \begin{cases} \dfrac{e^{bt} - 1}{b(e^{bt} + 1)}, & b \neq 0, \\ \dfrac{t}{2}, & b = 0, \end{cases} \qquad g(t) := \begin{cases} \dfrac{1}{b^2}\Big(\dfrac{tb(e^{bt} + 1)}{2(e^{bt} - 1)} - 1\Big), & b \neq 0, \\ \dfrac{t^2}{12}, & b = 0. \end{cases}$$

Отримано точні оцінки функції G та її похідних, установлено властивість нормальності ФРЗК, виведено формулу згортки та вирази коефіцієнтів a_{js} через функцію G.

Рівняння (1), що мають виродження при $t = 0$, класифікуються за величинами

$$A(t,\tau) := \int_{\tau}^{t} \frac{d\theta}{\alpha(\theta)}, \quad B(t,\tau) := \int_{\tau}^{t} \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} d\theta.$$

Так, рівняння (1) має слабке виродження, коли $A(T,0) < \infty$, сильне — якщо $A(T,0) = \infty$, і дуже сильне — коли $A(T,0) = \infty$ і $B(T,0) = \infty$.

За допомогою властивостей ФРЗК у випадку слабкого виродження доведено теореми про коректну розв'язність та інтегральне зображення розв'язків звичайної задачі Коші у вагових L_p-просторах швидкозростаючих при $|x| \to \infty$ функцій. У випадку сильного виродження розглянуто задачу зі спеціальною ваговою початковою умовою при $t = 0$ і задачу без початкових умов, коли виродження дуже сильне.

Зауважимо, що вказані вище результати для випадку слабкого виродження подібні до результатів, одержаних у працях Івасишена та Пасічник (2014, 2015) для рівняння, яке отримується з рівняння (1), якщо в ньому взяти

$$\alpha(t) = \beta(t) = 1, \ t \geq 0.$$

Огляд результатів для рівнянь з виродженнями на початковій гіперплощині наведено у праці Івасишена, Мединського та Пасічник (2016).

Список літератури

Івасишен, С. Д., & Пасічник, Г. С. (2014). Фундаментальний розв'язок задачі Коші для одного параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами групи молодших членів. *Зб. праць Ін-ту математики НАН України, 11*(2), 126—153.

Івасишен, С. Д., & Пасічник, Г. С. (2015). Інтегральне зображення розв'язків одного параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами в групі молодших членів. *Зб. праць Ін-ту математики НАН України, 12*(2), 205—229.

Івасишен, С. Д., Мединський, І. П., & Пасічник, Г.С. (2016). Параболічні рівняння з виродженнями на початковій гіперплощині. *Буковинський мат. журн., 4*(3—4), 57—68.

Івасишен, С., & Пасічник, Г. (2014). Задача Коші для одного параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами в групі молодших членів. *Мат. вісн. Наук. тов. ім. Т. Шевченка*, ***11***, 73—87.

ПРО ДЕЯКІ КЛАСИ ІНТЕГРОВНИХ У КВАДРАТУРАХ НОРМАЛЬНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

О. Ф. Калайда
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
aleksei_kalaida@comcast.net

Мова йтиме про рівняння Ріккаті (Ляшко, Боярчук, Гай, & Калайда, 1987; Головач & Калайда, 1997) та загальніші рівняння типу рівняння Бернуллі (Шинковська & Заєць, 2017), а також про новий клас рівнянь — рівнянь, звідних до цілостепеневих рівнянь і, зокрема, рівняння Ріккаті.

Перш за все відмітимо своєрідну симетричність рівняння Ріккаті

$$y' = p(x) + q(x)y + r(x)y^2 .$$

А саме, легко переконатись, що при діленні цього рівняння на y^2 ми знову дістаємо рівняння Ріккаті (відносно функції $z = 1 / y$; можна сказати, зворотне рівняння Ріккаті)

$$z' = -p(x)z^2 - q(x)z - r(x).$$

Як відомо (Головач & Калайда, 1997), за частинним розв'язком рівняння Ріккаті інтегрується у квадратурах. Тому за частинним розв'язком одного з цих рівнянь вони інтегруються у квадратурах.

Далі розглянемо клас нормальних степеневих рівнянь, звідних до цілостепеневих рівнянь і, зокрема, рівняння Ріккаті. А саме, розгляньмо нормальне рівняння (рівняння з лінійною частиною)

$$y' = p(x) + P(x)y + \sum_{j=1}^{n} Q_j(x)y^{\alpha_j}.$$

Зрозуміло, що при сталих або пропорційних коефіцієнтах $p(x), P(x), Q_j(x)$ це рівняння інтегрується у квадратурах.

Розгляньмо інші можливості. Заміною $z = y^{1-\alpha_1}$ при $p(x) \equiv 0$ та умові

$$\alpha_j + (k_j - 1)\alpha_{j-1} = k_j, k_j \in \mathbb{N},$$

відносно z матимемо цілостепеневе рівняння

$$z' = Q_1(x) + P(x)z + \sum_{j=2}^{n} Q_j(x)z^j.$$

За його частинним розв'язком $z_1(x)$ відомою підстановкою

$$z = u + z_1(x)$$

дістанемо рівняння такого ж виду, але без «вільного» члена $Q_1(x)$ (при $n = 2$ — рівняння Бернуллі, а тим самим, знаходимо і загальний розв'язок вихідного рівняння; між іншим, підстановка Бернуллі, більш конкретизована в статті Калайда (2014), придатна як для лінійного рівняння, так і для рівняння Бернуллі; у першому випадку вона приводить до елементарного диференціального рівняння, у другому — до рівняння з відокремлюваними змінними).

Нарешті, узагальнимо клас досліджуваних на інтегровність у квадратурах рівнянь та додамо методи таких досліджень. Мова йтиме про рівняння з лінійною частиною

$$y' = p(x) + q(x)y + f(x, y)$$

(частинний його випадок при $f(x, y) = r(x)y^{\alpha}$ досліджено за допомогою підстановки Бернуллі (Шинковська & Заєць, 2017).

Підстановкою $y = u\exp(p(x)) = uv(x)$ (Калайда, 2014) дістаємо рівняння

$$u' = \frac{p(x)}{v} + \frac{f(x, uv)}{v} \overset{\text{def}}{=} \phi(x, u).$$

Отже, якщо це рівняння належить до одного із класів інтегровних у квадратурах, то дана підстановка ефективна (одна з таких можливостей для частинного випадку рівняння типу Бернуллі — рівняння Бернуллі з «вільним» членом $p(x)$ — розглянута Шинковською та Заєць (2017)). Розгляньмо ще дві можливості інтегровності такого рівняння.

Записуємо розглядуване рівняння у вигляді

$$(y - \int p(x)dx)' =$$

$$= p(x)\int p(x)dx + p(x)(y - \int p(x)dx) + f(x, \int p(x)dx + (y - \int p(x)dx)).$$

Це рівняння того ж типу (відносно $y - \int p(x)dx$), але з іншим «вільним членом». До нього теж можна застосувати підстановку Бернуллі [4] і, можливо, добути інтегровний клас рівнянь.

Нарешті, у випадку рівняння, досліджуваного в статті Шинковська та Заєць (2017), при цілому α можна анулювати бернуллівську його частину $q(x)y + r(x)y^{\alpha}$ і знову добути рівняння попереднього типу з іншим «вільним членом» і також, можливо, зінтегрувати.

Список літератури

Головач, Г. П., & Калайда, О. Ф. (1997). *Збірник задач з диференціальних та інтегральних рівнянь*. Київ: Техніка.

Калайда, О. Ф. (2014). Найпростіший метод розв’язування лінійного рівняння та рівняння у повних диференціалах. У *Матеріалах III Міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті»*, 25—26 грудня 2014 року, Київ (с. 167—168). Київ: НТУУ «КПІ». http://matan.kpi.ua/public/files/mvstu3/mvstu3-abstracts.pdf

Ляшко, И. И., Боярчук, А. К., Гай, Я. Г., & Калайда, А. Ф. (1987). *Математический анализ*. (Ч. 3.). Киев: Вища школа.

Шинковська, І. Л., & Заєць, І. П. (2017). Деякі випадки інтегрованості диференціальних рівнянь першого порядку. *У Матеріалах V Міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті»*, 29—30 грудня 2016 р., Київ (с. 185—188). Київ: НТУУ «КПІ». http://matan.kpi.ua/public/files/2016/mvstu5/MSTU5.pdf

ПРО КЛАС ВАРІАЦІЙНИХ ЗАДАЧ ТИПУ ЗАДАЧІ ПРО БРАХІСТОХРОНУ ТА ТИПУ ЗАДАЧІ ДІДОНИ

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

aleksei_kalaida@comcast.net

Йтиметься про клас варіаційних задач типу задачі про брахістохрону та задач типу задачі Дідони (Калайда, 1999, 2014, 2017). Ці задачі характерні тим, що безпосередньо містять кривину

$$\kappa(x) = y'' \,/\, (1 + y'^2)^{3/2}$$

екстремалей в рівнянні Ейлера – Лагранжа.

Розглянемо функціонал

$$J(y) = \int_a^b k(x, y, y')\sqrt{1 + y'^2}dx \tag{1}$$

Його рівняння Ейлера — Лагранжа є

$$k'_y(x, y, y') - \frac{d}{dx}(k'_{y'}(x, y, y')\sqrt{1 + y'^2} + k(x, y, y')\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}) = 0.$$

1. Якщо $k = k(x, y')$, то маємо його перший інтеграл

$$k'_{y'}(x,y')\sqrt{1 + y'^2} + k(x,y')\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = C$$

і, зокрема, при $k = k(x)$ рівняння

$$k(x)y' = C\sqrt{1 + y'^2} \Rightarrow y' = \frac{C}{\sqrt{k^2(x) - C^2}},$$

так що

$$y = C_1 + C\int \frac{dx}{\sqrt{k^2(x) - C^2}}, \forall C, C_1, \kappa(x) = -\frac{k'(x)}{k(x)}\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

2. При $k = l(x)y$ маємо інтегровне у квадратурах рівняння

$$\psi(x) + \frac{yy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = C, \phi(x) = \int l(x)dx, \psi(x) = \phi(x) \,/\, l(x).$$

Тому

$$y^2 = C_1 + \int \frac{\psi(x) - C}{\sqrt{1 - (\psi(x) - C)^2}}dx \Rightarrow y = \left(C_1 + \int \frac{\psi(x) - C}{\sqrt{1 - (\psi(x) - C)^2}}dx\right)^{1/2}.$$

3. При $k = k(y, y')$ маємо перший інтеграл рівняння

$$k(y, y')\sqrt{1 + y'^2} - y'(k'_{y'}(y, y') + y' \,/\, \sqrt{1 + y'^2} = C,$$

а зокрема, при $k = k(y) -$ рівняння

$$k(y)\left(\sqrt{1+y'^2}-\frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}\right)=C\Rightarrow k^2(y)-C^2=\pm C^2y'^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=C_1+C\int\frac{dy}{\sqrt{k^2(y)-C^2}}\Rightarrow \kappa(y)=\frac{k'_y(y)}{k(y)}\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}},$$

($k=y$ $-$рівняння профілю плівки, натягнутої на кільця зі спільною віссю (Мышкис, 1971).

Розглянемо, далі, функціонал J варіаційних задач типу задачі Дідони (модифікованих задач Дідони (Калайда, 2014, 2017))

$$J(y)=\int_a^b(k(x,y,y')+\sqrt{1+y'^2})dx.$$

та нові класи інтегровного у квадратурах його рівняння Ейлера — Лагранжа

$$k'_y(x,y,y')-\frac{d}{dx}(k'_{y'}(x,y,y')+y'\,/\,\sqrt{1+y'^2})=0. \qquad (2)$$

1. При $k=k(x,y')$ рівняння (2) має перший інтеграл

$$k'_{y'}(x,y')+\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=C.$$

Зокрема, при $k(x,y')=l(x)y'$ рівняння інтегрується в квадратурах. Справді, у цьому випадку маємо рівняння

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=C-l(x),$$

а тому

$$y=C_1+\int\frac{C-l(x)}{\sqrt{1-(C-l(x))^2}}dx.$$

2. При $k=k(y,y')$ рівняння (2) має перший інтеграл

$$k(y,y')+\sqrt{1+y'^2}-y'\left(k_{y'}(y,y')+\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)=C.$$

Випадки $k=l(x)y, k=l(y)y$ (кривизни екстремалей, відповідно, $\kappa=l(x)$, $\kappa=(l(y)y)'_y$) розглянуто в статтях Калайда (2014, 2017).

Нарешті відмітимо, що для функціоналу методу найменших квадратів розв'язування задачі Коші для явних рівнянь

$$y^{(m)}=f(x,W(y)),W(y(x_0)=W_0$$

немає потреби складати рівняння Ейлера (Мышкис, 1971), бо перша варіація такого функціонала (на класі функцій удвічі меншої гладкості) дорівнює нулеві на розв'язках диференціального рівняння. Більш загально про це йдеться, зокрема, у статті Калайда (2008).

Список літератури

Калайда, О. Ф. (1999). *Варіаційне числення*. Київ: Видавничий центр «Київський університет».

Калайда, О. Ф. (2008). Про одну необхідну умову екстремуму функціоналів. *У Матеріалах XII Міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука* (Т. 1, с. 636, Т. 2, с. 216). Київ: НТУУ «КПІ».

Калайда, О. Ф. (2014). Деякі узагальнення та модифікації задачі Дідо. У *Матеріалах III Міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному універсистеті»*, 25—26 грудня 2014 року, Київ (с. 166). Київ: НТУУ «КПІ». http://matan.kpi.ua/public/files/mvstu3/mvstu3-abstracts.pdf

Калайда, О. Ф. (2017). До питання інтегровності в квадратурах рівняння Ейлера модифікованої задачі Дідони. *У Матеріалах V Міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті»*, 29—30 грудня 2016 року, Київ (с. 154—156). Київ: НТУУ «КПІ». http://matan.kpi.ua/public/files/2016/mvstu5/MSTU5.pdf

Мышкис, А. Д. (1971). *Математика для втузов*: *Специальные курсы*. Москва: Наука.

ПРО НЕПОВНІ РІВНЯННЯ ЕЙЛЕРА — ПУАССОНА

О. Ф. Калайда
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
aleksei_kalaida@comcast.net

Перш за все наведемо простіше доведення основної леми варіаційного числення (для інтегралів довільної кратності): з рівності

$$I = \int\limits_D f(X)\eta(X)d\omega_x = 0$$

для неперервної функції f і довільної нетривіальної функції $\eta, \eta\Big|_C = 0,$ де C — межа області інтегрування D, випливає $f(X) \equiv 0.$ Доведення традиційно слідує від супротивного, але при функції η із множини

$$\left\{\eta\Big|_C = 0, f(X)\eta(X) \ge 0\right\}$$

(доречі, застосовувані при доведенні леми традиційні громіздкі конструкції довільної функції теж належать даній множині). Тоді за відомою властивістю інтегралів (Ляшко, Боярчук, Гай, & Калайда, 1987) маємо $I \ge \alpha > 0,$ що суперечить твердженню леми.

Рівняння Ейлера — Пуассона для інтегрального функціонала J,

$$J(y) = \int\limits_a^b F(x, W(y), y^{(m)})dx \tag{1}$$

($W(y) = (y \,...\, y^{(m-1)})^{\mathrm{T}}$ — матриця Вронського функції y (Ляшко, Боярчук, Гай, & Калайда, 1987; Калайда, 1999)

$$F'_y(x, W(y), y^{(m)}) - \frac{d}{dx}F'_{y'}(\cdot) + ... + (-1)^m \frac{d^m}{dx^m}F'_{y^{(m)}}(\cdot) = 0 \tag{2}$$

можна, відповідно, при непарному та парному m записати також у вигляді

$$E(y) + \frac{d^2}{dx^2}E(y'') + ... + \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}E(y^{(m-1)}) + \begin{cases} 0, \, m = 2k-1 \\ F'_{y^{(m)}}(\cdot), \, m = 2k \end{cases} = 0$$

(E — оператор диференціального виразу рівняння Ейлера — Лагранжа для функціонала (1) при $m = 1$). Легко переконатись, що при $F = F(y^{(k)}, y^{(k-1)})$

$$E(y^{(k)}) = F'_{y^{(k)}}(\cdot) - \frac{d}{dx}F'_{y^{(k+1)}}(\cdot) = \frac{1}{y^{(k+1)}}\frac{d}{dx}(F(\cdot) - y^{(k+1)}F'_{y^{(k+1)}}(\cdot)).$$

Тому при

$$F(W(y), y^{(m)}) = F_1(y, y') + F_2(y'', y''') + ... + F_m(y^{(m-1)}, y^{(m)})$$

рівняння (2) матиме вигляд

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{d^{j-1}}{dx^{j-1}}\frac{1}{y^{(j)}}\frac{d}{dx}(F_j(y^{(j-1)}, y^{(j)}) - y^{(j)}F'_{j,\, y^{(j)}}(y^{(j-1)}, y^{(j)}\ )) = 0.$$

У цьому несуперечливість першого інтеграла

$$F(y, y') - y'F'_{y'}(y, y') = C$$

рівняння (1) з інтегрантом $F(y, y')$:

$$\frac{(F(\cdot) - y'F'_{y'}(\cdot))'_x}{y'} = 0 \Rightarrow (F(\cdot) - y'F'_{y'}(\cdot))'_x = 0.$$

Крім того звідси слідує, що як і одночленне рівняння (1), наприклад, $2k$-го порядку, з понижуваним порядком на k одиниць, двочленне рівняння

$$(F'_{y^{(k-1)}}(y^{(k-1)}, y^{(k)})^{(k-1)}_x - (F'_{y^{(k)}}(y^{(k-1)}, y^{(k)}))'^{(k)}_x = 0$$

теж допускає пониження його порядку на k одиниць. Справді, якщо інтегрант функціонала (1) залежить лише від $y^{(m)}$, то після пониження його порядку дістаємо рівняння (узагалі кажучи, неявне (Калайда, 1999)

$$F''_{y^{(m)},y^{(m)}}(y^{(m)}) = P_{m-1}(x;C_1,...,C_m),$$

де $P_{m-1}(x; \dots)$ – довільний алгебричний многочлен $(m-1)$-порядку. Відносно $y^{(m)}$ — це скінченне рівняння. З нього знаходимо його розв'язки

$$y^{(m)} = \phi_k(x;C_1,...,C_m)$$

— лінійні неоднорідні рівняння, а отже, і загальний розв'язок відповідного цьому рівняння Ейлера — Пуассона

$$y = \int(m)\int\phi_k(x;C_1,...,C_m)(dx)^m + Q_{m-1}(x;A_1,...,A_m),$$

де $Q_{m-1}(x;A_1,...,A_m)$ — загальний розв'язок однорідного рівняння $y^{(m)} = 0$.

У випадку ж двочленного рівняння після першого пониження його поряду маємо рівняння

$$F'_{y^{(k-1)}}(\cdot) - (F'_{y^{(k)}}(\cdot))'_x = \int P_{k-2}(x)y^{(k)}(x)dx + C_k,$$

інтегруванням частинами звідне до диференціального. Отже, його порядок понижено навпіл.

Відмітимо, що у випадку інтегранта $F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(m)})$ рівняння (2) після пониження порядку рівняння

$$F'_{y^{(k)}}(\cdot) - \dots (-1)^{m-k}\frac{d^{m-k}}{dx^{m-k}}F'_{y^{(m)}}(\cdot) = P_{k-1}(x) \qquad (3)$$

$(2m-k)$-го порядку з понижуваним порядком ($P_{k-1}(x)$ — довільний алгебричний многочлен $(k-1)$-го порядку) належить до класу рівнянь

$$\sum_{j=1}^{n} A_j(x, W(y)) B_j(x, y^{(k)}, ..., y^{(m)}) = 0,\ B_j(x, 0, y^{(k+1)} ..., y^{(m)}) \Rightarrow B_j(x, 0, ..., 0) \equiv 0.$$

Як і рівняння (3), воно має частинне сімейство розв'язків

$$y_0 = \tilde{P}_{k-1}(x)$$

(довільний алгебричний многочлен $(k-1)$-го порядку).

Список літератури

Калайда, О. Ф. (1999). *Варіаційне числення*. Київ: Видавничий Центр «Київський університет».

Ляшко, И. И., Боярчук, А. К., Гай, Я. Г., & Калайда, А. Ф. (1987). *Математический анализ*. (Ч. 1). Киев: Вища школа.

Ляшко, И. И., Боярчук, А. К., Гай, Я. Г., & Калайда, А. Ф. (1987). *Математический анализ*. (Ч. 3). Киев: Вища школа.

ПРИЗНАКИ m-АККРЕТИВНОЙ ЗАМЫКАЕМОСТИ ЛИНЕЙНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА

В. Ф. Коваленко

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

kvf4591@gmail.com

Получены новые признаки m-аккретивной замыкаемости симметрических эллиптических операторов второго порядка с сингулярными коэффициентами, действующих в пространствах Лебега $L^p(\mathbb{R}^l), p \in \left[1, l\right)$.

Ключевые слова: линейные эллиптические операторы второго порядка, сингулярные коэфициенты, полугруппы сжатий.

В пространстве

$$L^p = L^p(\mathbb{R}^l), p \in \left[1, \infty\right), l \geq 3,$$

рассмотрим дифференциальное выражение

$$Au(x) = -\sum_{k,j=1}^{l} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_{kj}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}u(x)\right) + V(x)u(x),$$

коэффициенты которого удовлетворяют условиям

$$\mathbb{R}^l \ni x \to a_{kj}(x) \in \mathbb{R}^1,\ \mathbb{R}^l \ni x \to V(x) \in \mathbb{R}^1_+ =: \left[0, \infty\right];$$

$$a_{kj} = a_{jk},\ k, j = 1, \cdots, l;$$

$$\sum_{j=1}^{l} \xi_j^2 \leq \sum_{k,j=1}^{l} \xi_j a_{kj}(x)\xi_k \qquad \forall \xi = \left(\xi_1, \ldots, \xi_l\right) \in \mathbb{R}^l. \tag{1}$$

Следующее условие необходимо для корректного определения оператора $A : L^p \to L^p$ на функциях из $C_0^\infty = C_0^\infty(\mathbb{R}^l)$:

$$V + \left|b\right| + \sum_{j,k=1}^{l} \left|a_{kj}\right| \in L^p_{loc},$$

$$b = \left(b_1, \ldots, b_l\right),\ \ b_j = \sum_{k=1}^{l} \frac{\partial}{\partial x_k} a_{kj}. \tag{2}$$

В работе установлены признаки m-аккретивной замыкаемости в L^p оператора $A \upharpoonright C_0^\infty$. Подчеркнем, что по принятому нами определению оператор T *m-аккретивен*, если T — генератор сильно непрерывной полугруппы сжатий. В условиях (1), (2) оператор

$$A_p =: \left[A \upharpoonright C_0^\infty\right]^{\sim}_{L^p \to L^p}$$

m-аккретивен тогда и только тогда, когда линеал $\left(1 + A\right)\left[C_0^\infty\right]$ плотен в L^p.

Все встречающиеся в тексте частные производные понимаются в смысле обобщенных функций. Используем следующие обозначения: L_k^p — пространство Соболева, т. е. пополнение C_0^∞ по норме

$$u_{p,k} = \sum_{|\alpha| \le k} D^\alpha u_p;$$

$\mathcal{L}\left(L^p, L^q\right)$ — пространство ограниченных отображений из L^p в L^q, $\mathcal{L}\left(L^p\right) = \mathcal{L}\left(L^p, L^p\right)$; $s\text{-}L^p\text{-}\lim$, $w\text{-}L^p\text{-}\lim$ — знаки сильной и слабой сходимости L^p; $\restriction$ — знак сужения; 1_{B_R} — индикатор шара

$$B_R = \left\{x \in \mathbb{R}^l \middle| |x| \le R\right\};$$

$$F_R = \left\{\eta \in C_0^\infty \middle| 0 \le \eta \le 1, \eta\left(x\right) = 1 \text{ на } B_R\right\};$$

$$df \cdot a \cdot dg =: \sum_{k,j=1}^{l} \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}\right) a_{kj}\left(x\right) \left(\frac{\partial g(x)}{\partial x_j}\right),$$

$$\Lambda = -d \cdot a \cdot d =: -\sum_{k,j=1}^{l} \frac{\partial}{\partial x_k} a_{kj} \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Для всех $\xi \in F_R$ определим операторы

$$V_\xi = V\xi,\ L_\xi = d\xi \cdot a \cdot d \text{ и } \Lambda_{(\xi)} = -d \cdot a^{(\xi)} \cdot d,$$

где $a^{(\xi)} = I + \xi\left(a - I\right)$, т. е. $a_{kj}^{(\xi)} = \delta_{kj} + \xi(x)\left(a_{kj}(x) - \delta_{kj}\right)$.

Пусть

$$\left\|a^\partial\right\|_q = \max_{r,k,j=1,\ldots,l} \left\|\frac{\partial a_{kj}}{\partial x_r}\right\|_q .$$

Теорема 1. *Дополнительно к* (1) *предположим, что для некоторого показателя* $p_0 \in \left(\frac{3}{2}, \frac{l}{2}\right]$

$$V + |b| + \sum_{j,k=1}^{l} \left|a_{kj}\right| \in L^{p_0} + L^\infty,\quad \left\|a^\partial\right\|_{2p_0} < \infty. \tag{3}$$

Тогда оператор

$$A_p =: \left[A \restriction C_0^\infty\right]^\sim_{L^p \to L^p}$$

m*-аккретивен при любом* $p \in \left[1, p_0\right]$.

Следствие. Для каждой $\psi \in L^2 \cap L^p \cap L^t \ \left(t > \dfrac{l}{2}\right)$ существует последовательность $\left\{\varphi_n\right\}_1^\infty$ C_0^∞-функций такая, что

$$s - L^p - \lim_n \varphi_n = \left(1 + A_p\right)^{-1}\psi,$$

$$s - L^p - \lim_n \left(1 + A\right)\varphi_n = \psi, \ \sup_n \left\|\varphi_n\right\|_\infty < \infty,$$

$$s - L^p - \lim_n a_{kj}\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_r} = a_{kj}\frac{\partial}{\partial x_r}\left(1 + A_p\right)^{-1}\psi.$$

Теорема 2. *Пусть* $p_0 > 1$ *и* $R < \infty$ *фиксированы. Дополнительно к* (1) *предположим, что*

(i) $0 \le V \in L_{loc}^{p_0}$ *и при любом* $\xi \in F_R$ *оператор*

$$A_{(\xi)p_0} =: \left[\Lambda_{(\xi)} + V_\xi \restriction C_0^\infty\right]^{\sim}_{L^{p_0} \to L^{p_0}}$$

m*-аккретивен;*

(ii) *для произвольных фиксированных функций* $\psi \in L^\infty \cap L^1, \xi, \eta \in F_R$, $\eta \restriction \operatorname{supp}\xi = 1$ *существует последовательность* $\left\{\varphi_n\right\}_1^\infty$ C_0^∞*-функций такая, что*

а) п. в. $-\lim\limits_n \varphi_n = \left(1 + A_{(\eta)p_0}\right)^{-1}\psi$,

б) $w - L^{p_0} - \lim\limits_n \left(1 + A_{(\eta)p_0}\right)\varphi_n = \psi$,

в) $\sup\limits_n \left\{\left\|\varphi_n\right\|_\infty + \left\|L_\xi \varphi_n\right\|_{p_0}\right\} < \infty$;

(iii) $L_\xi\left(1 + A_{(\eta)p_0}\right)^{-1} 1_{B_{R_\xi}} \in \mathcal{L}\left(L^\infty, L^{p_0}\right)$ *при любом* $R_\xi \ge R$, *для которого* $\xi(\cdot) = 1$ *на* $B_{R_\xi}; \Lambda\xi \in L^q$ *для некоторого* $q \ge \dfrac{2l}{l+2}$ $\ \forall \xi \in F_R$;

(iv) *существует функция* $\mathbb{R}^l \ni x \to U(x) \in \mathbb{R}_+^1$ *такая, что* $U \in L_{loc}^\infty$, $U(x) \to \infty$ *при* $\left|x\right| \to \infty$, $\left|\operatorname{grad} U\right| \in L_{loc}^q$ *с* $q > 2p_0'$ *и*

$$dU \cdot a \cdot dU \le c_0 + c_1 V^{1-\delta}$$

для некоторых чисел $c_0, c_1 \ge 0$ *и* $\delta \in (0,1]; p_0' = p_0\left(p_0 - 1\right)^{-1}$.

Тогда оператор

$$A_p =: \left[\Lambda + V \restriction C_0^\infty\right]^{\sim}_{L^p \to L^p}$$

при любом $p \in (1, p_0]$ m*-аккретивен.*

Если, кроме того $\mathbb{R}^l \ni x \to \varepsilon(t) \in]0,1]$ *такая, что* $\varepsilon(t) \to 0$ *при* $t \to \infty$, $c_1 \varepsilon^2(t) t \le 4$ *для всех достаточно больших* t *и*

$$\text{(v)}\ \varlimsup_{t\to\infty} \sqrt{t}\varepsilon(t)\left(\operatorname{mes}\left\{x \in \mathbb{R}^l : 1 \le \varepsilon(t)U(x) \le 1 + \frac{1}{\delta}\right\}\right)^{\frac{1}{1+t}} = M < \infty,$$

то оператор

$$A_1 =: \left[\Lambda + V \upharpoonright C_0^\infty\right]^{\sim}_{L^1 \to L^1}$$

m*-аккретивен. В частности* $e^{-t\Lambda_1} 1 = 1\ \forall t > 0, \left(\Lambda_1 = A_1\left(a, 0\right)\right)$.

Замечания. 1. В предположении (3) теоремы 1 условия (i)–(iii) выполняются автоматически.

2. (ii)$\Rightarrow$(i), причем в (ii) только условие в) является дополнительным к (i).

3. Условия (i), (ii) локальные, а условия (iv), (v) глобальные. Так, (iv), (v) ограничивают совместный с V рост a_{kj} на бесконечности и относятся к существу дела. Условие (iii) носит технический характер.

4. Теоремы 1, 2 обобщают соответствующие результаты Davies (1985), Семенов (1985), Перельмутер и Семенов (1987), где рассмотрены случаи $p = 2$ и $p = 1$.

Доказательство теорем основано на априорных оценках из теории уравнений в частных производных и конструкции, описанной в Семенов (1985).

Список литературы

Davies, E. B. (1985). L^1 properties of second order elliptic operators. *Bull. London Math. Soc., 17,* 417–436.

Перельмутер, М. А., & Семенов, Ю. А. (1987). Эллиптические операторы, сохраняющие вероятность. *Теория вероятностей и ее применения, 32*(4), 786–789.

Семенов, Ю. А. (1985). Гладкость обобщенных решений уравнения $\hat{H}u = f$ и существенная самосопряженность оператора $\hat{H} = -\sum_{i,j} \nabla_i a_{ij} \nabla_j + V$ с измеримыми коэфициентами. *Математический сборник, 127*(3), 311–335.

ДОСЛІДЖЕННЯ ПРАВИЛЬНО ЗМІННИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ІЗ ПРАВИЛЬНО ТА ШВИДКО ЗМІННИМИ НЕЛІНІЙНОСТЯМИ

Н. П. Колун

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, Одеса, Україна

nataliiakolun@ukr.net

Установлюються асимптотичні властивості деяких типів розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку, що містять у правій частині суму доданків із правильно та швидко змінними нелінійностями.

Ключові слова: диференціальні рівняння, правильно змінні нелінійності, швидко змінні нелінійності.

Розглядається диференціальне рівняння

$$y'' = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i p_i(t) \varphi_i(y), \tag{1}$$

у якому $\alpha_i \in \{-1;\ 1\}$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$, $p_i : [a,\omega[\to]0,+\infty[$ $\left(i=\overline{1,m}\right)$ — неперервні функції, $-\infty < a < \omega \le +\infty$, $\varphi_i : \Delta_{Y_0} \to]0,+\infty[$, де Δ_{Y_0} — деякий однобічний окіл Y_0, Y_0 дорівнює або нулю, або $\pm\infty$, неперервні функції при $i=\overline{1,l}$ і двічі неперервно диференційовані при $i=\overline{l+1,m}$, такі, що

$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi_i(\lambda y)}{\varphi_i(y)} = \lambda^{\sigma_i} \ \left(i=\overline{1,l}\right) \quad \text{для будь-якого } \lambda > 0, \tag{2}$$

$$\varphi'_i(y) \ne 0, \ \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \varphi_i(y) \in \{0, +\infty\}, \ \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi''_i(y)\varphi_i(y)}{\varphi'^2_i(y)} = 1 \ \left(i=\overline{l+1,m}\right). \tag{3}$$

У силу виконання умов (2) кожна з функцій φ_i при $i \in \{1,\dots,l\}$ є правильно змінною при $y \to Y_0$ функцією порядку σ_i (Maric, 2000), а в силу виконання умов (3) функції $\varphi_i \,(i=\overline{l+1,m})$ є швидко змінними при $y \to Y_0$ (Maric, 2000), тобто права частина рівняння (1) містить як правильно, так і швидко змінні нелінійності при $y \to Y_0$.

Розв'язок y диференціального рівняння (1) називатимемо $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язком, де $-\infty \le \lambda_0 \le +\infty$, якщо він визначений на проміжку $[t_0, \omega[\subset [a,\omega[$ і задовольняє наступним умовам

$$\lim_{t \uparrow \omega} y(t) = Y_0, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} y'(t) = \begin{cases} \text{або} & 0, \\ \text{або} & \pm\infty, \end{cases} \qquad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{y'^2(t)}{y''(t)y(t)} = \lambda_0.$$

У роботі Евтухов та Клопот (2014) були отримані умови існування та асимптотика $P_\omega\left(Y_0, \lambda_0\right)$-розв'язків у випадку, коли всі функції φ_i — правильно змінні при $y \to Y_0$.

Мета роботи полягає в отриманні для рівняння (1) загального виду при $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0;1\right\}$ умов існування $P_\omega\left(Y_0, \lambda_0\right)$-розв'язків диференціального рівняння (1), а також асимптотичних при $t \uparrow \omega$ зображень для таких розв'язків та їх похідних першого порядку. При цьому розглядається випадок, коли на кожному такому розв'язку y рівняння (1) права частина рівняння еквівалентна при $t \uparrow \omega$ одному s-тому доданку, де $s \in \left\{1, \ldots, l\right\}$, тобто коли

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{p_i(t)\varphi_i(y(t))}{p_s(t)\varphi_s(y(t))} = 0 \text{ для будь-якого } i \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{s\}. \tag{4}$$

Запровадимо наступні позначення:

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{якщо } \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{якщо } \omega < +\infty, \end{cases}$$

$$\Delta_{Y_0}(b) = \begin{cases} [b, Y_0[, & \text{якщо } \Delta_{Y_0} - \text{лівий окіл } Y_0, \\ ]Y_0, b], & \text{якщо } \Delta_{Y_0} - \text{правий окіл } Y_0, \end{cases}$$

де $\left|b\right| < 1$ при $Y_0 = 0$ і $b > 1$ $(b < -1)$ при $Y_0 = +\infty$ $(Y_0 = -\infty)$.

$$\nu_0 = \operatorname{sign} b, \qquad \nu_1 = \begin{cases} 1, \text{ якщо } & \Delta_{Y_0} - \text{лівий окіл } Y_0 \\ -1, \text{ якщо } & \Delta_{Y_0} - \text{правий окіл } Y_0 \end{cases},$$

$$J_i\left(t\right) = \int_{A_i}^{t} \pi_\omega\left(\tau\right) p_i\left(\tau\right) d\tau, \qquad H_i(y) = \int_{B_i}^{y} \frac{ds}{\varphi_i(s)} \quad (i = \overline{1, l}),$$

$$A_i = \begin{cases} a, \text{ якщо } \displaystyle\int_a^\omega \pi_\omega(\tau) p_i(\tau) d\tau = \pm\infty, \\ \omega, \text{ якщо } \displaystyle\int_a^\omega \pi_\omega(\tau) p_i(\tau) d\tau = \text{const}, \end{cases} \qquad B_i = \begin{cases} b, \text{ якщо } \displaystyle\int_b^{Y_0} \frac{dy}{\varphi_i(y)} = \pm\infty, \\ Y_0, \text{ якщо } \displaystyle\int_b^{Y_0} \frac{dy}{\varphi_i(y)} = \text{const}. \end{cases}$$

$$Z_i = \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}(b)}} H_i(y) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } B_i = Y_0, \\ +\infty, & \text{якщо } B_i = b < Y_0, \\ -\infty, & \text{якщо } B_i = b > Y_0. \end{cases}$$

Отримано такі результати.

Теорема 1. *Нехай* $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0;1\right\}$ *і при деякому* $s \in \left\{1, \ldots, l\right\}$ *виконується нерівність* $\sigma_s \neq 1$. *Тоді для існування в диференціального рівняння* (1) $P_\omega\left(Y_0, \lambda_0\right)$*-розв'язків, які задовольняють умовам* (4)*, необхідно щоб виконува-*

лись нерівності

$$\alpha_s \nu_0 \lambda_0 > 0, \qquad \nu_0 \nu_1 \lambda_0 \left(\lambda_0 - 1\right) \pi_\omega\left(t\right) > 0 \text{ при } t \in]a, \omega[, \tag{5}$$

а також умови

$$\alpha_s\left(\lambda_0 - 1\right) \lim_{t \uparrow \omega} J_s\left(t\right) = Z_s, \qquad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega\left(t\right) J_s'\left(t\right)}{J_s\left(t\right)} = \frac{\left(1 - \sigma_s\right)\lambda_0}{\lambda_0 - 1}, \tag{6}$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{p_i(t)\varphi_i(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0 - 1)J_s(t)))}{p_s(t)\varphi_s(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0 - 1)J_s(t)))} = 0 \quad \text{для будь-якого } i \in \{1, \dots, l\} \setminus \{s\}, \tag{7}$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{p_i(t)\varphi_i(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0 - 1)J_s(t)(1 + \delta_i)))}{p_s(t)\varphi_s(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0 - 1)J_s(t)))} = 0 \quad \text{для будь-якого } \quad i \in \{l + 1, \dots, m\}, \tag{8}$$

де δ_i *— будь-які числа із деякого одностороннього околу нуля. Більш того, для кожного такого розв'язку мають місце асимптотичні зображення*

$$y(t) = H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0 - 1)J_s(t))[1 + o(1)] \text{при } t \uparrow \omega, \tag{9}$$

$$y'(t) = \frac{\lambda_0 H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0 - 1)J_s(t))}{(\lambda_0 - 1)\pi_\omega(t)}[1 + o(1)] \text{ при } t \uparrow \omega. \tag{10}$$

Теорема 2. *Нехай* $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{0; 1\right\}$ *і для деякого* $s \in \left\{1, \dots, l\right\}$ *виконується нерівність* $\sigma_s \neq 1$, *умови* (5)—(7) *і*

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{p_i(t)\varphi_i(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0 - 1)J_s(t)(1 + u)))}{p_s(t)\varphi_s(H_s^{-1}(\alpha_s(\lambda_0 - 1)J_s(t)))} = 0$$

для будь-якого $i \in \{l + 1, \dots, m\}$ *рівномірно по* $u \in [-\delta, \delta]$ *для деякого* $0 < \delta < 1$. *Нехай, крім того, має місце одна із двох умов*

$$\text{або} \quad \lambda_0 \neq -1, \quad \text{або} \quad \lambda_0 = -1 \quad \text{і} \quad \sigma_s < 1.$$

Тоді у диференціального рівняння (1) існують $P_\omega\left(Y_0, \lambda_0\right)$-розв'язки, які допускають асимптотичні зображення (9) і (10), причому таких розв'язків існує однопараметричне сімейство у випадку, коли $\lambda_0(1 - \sigma_s) < 0$ і двопараметричне — коли $\lambda_0(1 - \sigma_s) > 0$ і $\pi_\omega\left(t\right)(1 - \lambda_0^2) < 0$ при $t \in]a, \omega[$.

Список літератури

Maric, V. (2000). *Regular variation and differential equations* (Vol. 1726). Springer.

Евтухов, В. М., Клопот, А. М., (2014). Асимптотическое поведение решений обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка с правильно меняющимися нелинейностями. *Дифференц. уравнения. 50*(5), 584—600.

АБСТРАКТНАЯ ЗАДАЧА РИМАНА С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ, ДОПУСКАЮЩИМ ФАКТОРИЗАЦИЮ

А. Л. Комарницкий, Л. Н. Колмакова

Одесский национальный политехнический университет, Одесса, Украина

lyukol@mail.ru

Показано, что если оператор абстрактной задачи Римана допускает факторизацию специального вида, то для существования решений задачи необходимо выполнение конечного числа условий. Общее решение задачи и условия разрешимости получены в явном виде.

Ключевые слова: абстрактная задача Римана, факторизация, частные индексы.

Пусть L — банахово пространство, на котором задан линейный ограниченный инволютивный оператор S. Этот оператор порождает два проектора

$$P_{\pm} = \frac{1}{2}\left(I \pm S\right),\ I \text{ — единичный оператор.}$$

Пространство L раскладывается в прямую сумму образов этих проекторов:

$$L = L_{+} \oplus L_{-}.$$

Рассмотрим задачу о нахождении элементов $\varphi^{+} \in L_{+}$ и $\varphi^{-} \in L_{-}$, которые удовлетворяют условию:

$$\varphi^{+} = A\,\varphi^{-} + g, \tag{1}$$

где A — линейный ограниченный обратимый оператор, заданный на L, g — заданный элемент пространства L.

Задача (1) исследована в Комарницкий и Колмакова (2016а, 2016б) в случае специального вида оператора:

$$A = U = U_1^{\varkappa_1} U_2^{\varkappa_2} \dots U_n^{\varkappa_n},$$

где операторы U_j, $j = \overline{1,n}$ задаются с помощью специальных аксиом $\varkappa_j \in \mathbb{Z}$ — частные индексы.

Предположим, для определённости,

$$\varkappa_j > 0,\ \ j = \overline{1,m}\,,$$

$$\varkappa_j < 0,\ \ j = \overline{m+1,l}\,,$$

$$\varkappa_j = 0,\ \ j = \overline{l+1,n}\,.$$

Было доказано, что для существования решений задачи (1) необходимо выполнение $-\sum\limits_{j=m+1}^{l} \varkappa_j$ условий:

$$F_j^{(k)}\left(g^-\right)=0\,,\; j=\overline{m+1,l}\,,\;\; k=\overline{1,-\varkappa_j}\,,$$

где $F_j^{(k)}$ — линейные функционалы, заданные на пространстве L_- (Комарницкий & Колмакова, 2016a),

$$g^{\pm}=\pm P_{\pm}g.$$

И если эти условия выполнены, то общее решение задачи (1) зависит от $\sum\limits_{j=1}^{m}\varkappa_j$ произвольных постоянных и имеет вид:

$$\varphi^+=g^+ + \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{\varkappa_j-1}c_{jk}U_j^k h_j^+\,,$$

$$\varphi^-=U^{-1}g^- + \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{\varkappa_j-1}c_{jk}U_j^{-\varkappa_j+k} h_j^+\,,$$

c_{jk} — произвольные постоянные, $k=\overline{0,\varkappa_j-1}\,,\; j=\overline{1,m}\,,\; h_j^+\in L_+$ — элемент, присутствующий в аксиоматическом определении оператора U_j (Комарницкий & Колмакова, 2016a).

Предположим теперь, что произвольный обратимый оператор A допускает факторизацию, т.е. представим в виде:

$$A=X^+U\left(X^-\right)^{-1},$$

где X^+,X^- — обратимые линейные операторы, заданные на L и отображающие соответственно подпространства $L_{\pm}$ в себя.

Тогда задача (1) принимает вид:

$$\varphi^+=X^+U\left(X^-\right)^{-1}\cdot\varphi^- + g,$$

$$\left(X^+\right)^{-1}\varphi^+=U\left(X^-\right)^{-1}\cdot\varphi^- + \left(X^+\right)^{-1}\cdot g,$$

замена:

$$\psi^+=\left(X^+\right)^{-1}\cdot\varphi^+,$$

$$\psi^-=\left(X^-\right)^{-1}\cdot\varphi^-,$$

$$\left(X^+\right)^{-1}\cdot g=q.$$

Получаем:

$$\psi^+=U\cdot\psi^- + q \tag{2}$$

Данная задача рассмотрена в Комарницкий и Колмакова (2016a). Для ее разрешимости необходимо выполнение $-\sum\limits_{j=m+1}^{l} \varkappa_j$ условий разрешимости:

$$F_j^{(k)}\left(q^-\right) = 0,\ \ j = \overline{m+1, l},\ \ k = \overline{1, -\varkappa_j},$$

$$q^{\pm} = \pm P_{\pm} q.$$

Общее решение задачи (2) зависит от $\sum\limits_{j=1}^{m} \varkappa_j$ произвольных постоянных и имеет вид:

$$\psi^+ = q^+ + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=0}^{\varkappa_j - 1} c_{jk} U_j^k h_j^+,$$

$$\psi^- = U^{-1} q^- + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=0}^{\varkappa_j - 1} c_{jk} U_j^{-\varkappa_j + k} h_j^+.$$

Тогда:

$$\varphi^+ = X^+ \left(q^+ + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=0}^{\varkappa_j - 1} c_{jk} U_j^k h_j^+ \right),$$

$$\varphi^- = X^- \left(U^{-1} q^- + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=0}^{\varkappa_j - 1} c_{jk} U_j^{-\varkappa_j + k} h_j^+ \right)$$

— решение задачи (1).

Пусть теперь T является коммутативной подалгеброй с единицей алгебры линейных ограниченных операторов, заданных на L.

Пусть операторы $A, U_j \in T$, $j \in \overline{1, n}$. На алгебре задана экспоненциальная функция

$$\exp V = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{V^n}{n!}.$$

Элементы алгебры T, имеющие такой вид, называются логарифмируемыми. Обозначим множество логарифмируемых элементов $\exp\left(T\right)$. Это множество является группой относительно умножения. Если оператор

$$W = \exp V \in \exp\left(T\right),$$

то оператор V называется логарифмом оператора W:

$$V = \ln W.$$

Предположим, существует такой набор частных индексов $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_n$, что оператор $U^{-1} \cdot A \in \exp\left(T\right)$, тогда оператор A допускает факторизацию.

В алгебре T рассмотрим задачу по скачку:

$$\Psi^{+} - \Psi^{-} = \ln U^{-1} \cdot A .$$

Обозначим: $X^{\pm} = \exp \Psi^{\pm}$.

Элементы $X^{\pm}$ обратимы соответственно в алгебрах $T_{\pm}$-операторов, переводящих соответственно пространства $L_{\pm}$ в себя, причем

$$A = X^{+} U \left(X^{-} \right)^{-1}.$$

Список литературы

Комарницкий, А. Л., & Колмакова, Л. Н. (2016а). Абстрактная задача Римана с операторами специального вида. В *Матеріалах XII Міжнародної науково-практичної інтернет-конференції «Тенденції та перспективи розвитку науки і освіти в умовах глобалізації»*, Випуск 12, Переяслав-Хмельницький, 30—31 березня (с. 222—226).

Комарницкий, А. Л., & Колмакова, Л. Н. (2016б). Абстрактная задача Римана, обобщающая матричную краевую задачу. В *Матеріалах XVII Міжнародної наукової конференції імені академіка Михайла Кравчука*, Київ, 19—20 травня (Том 1, с. 150—151). Київ: НТУУ «КПІ».

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ РАДІАЦІЙНО-ІНДУКОВАНОЇ СЕГРЕГАЦІЇ В П'ЯТИКОМПОНЕНТНИХ КОНЦЕНТРОВАНИХ МЕТАЛЕВИХ СТОПАХ

О. В. Коропов

Інститут прикладної фізики НАН України, Суми, Україна

ipfmail@ipfcentr.sumy.ua

Сформульована система шести пов'язаних між собою нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних, яка описує радіаційно-індуковану сегрегацію в п'ятикомпонентних концентрованих металевих стопах. Стисло проаналізований квазістаціонарний (усталений) режим радіаційно-індукованої сегрегації.

Ключові слова: радіаційно-індукована сегрегація, п'ятикомпонентні металеві стопи, матеріали ядерних реакторів.

1. Вступ та вихідні рівняння. Важливим наслідком опромінювання металевих стопів у ядерних реакторах при підвищених температурах є просторовий перерозподіл атомів стопу у вихідному матеріалі (Was, 2007; Grandjean, Bellon, & Martin, 1994; Nastar & Martin, 1999). Це явище призводить до збагачення або збіднення деякими атомами областей навколо вільних поверхонь, дислокаційних ліній, пор, нанокластерів, меж зерен, міжфазних меж і має назву *радіаційно-індукованої сегрегації* (РІС). Особливо гостро проблема РІС, пов'язана з деградацією фізико-хімічних і механічних властивостей матеріалів, постає при розробці конструкційних матеріалів ядерних реакторів четвертого покоління (Buckthorpe, 2017). Такі матеріали повинні витримувати більш високі дози опромінювання і працювати при більш високих температурах у порівнянні з традиційними ядерними реакторами (Aitkaliyeva, He, Wen, Miller, Bai, & Allen, 2017). Теорія РІС розвинена переважно для двох- і трьохкомпонентних металевих стопів (Wiedersich, Okamoto, & Lam, 1979; Was, 2007). Такі стопи, наприклад, Zr-2,5%Nb, Ni-25%Cu, Fe-Cr-Ni, як правило, являються модельними при дослідженні РІС. Реальні стопи, використовувані в ядерній енергетиці, звичайно містять чотири, п'ять і більше компонентів, наприклад, спеціальні неіржавіючі сталі Fe-18Cr-Y_2O_3, Fe-Ni-Mn-Cr, Fe-Cr-W-Co (Zinkle, 2017), Cr-Ni-Mo-Nb-Si, Cr-Ni-Mo-Mn-Si та інш. (Воеводин & Неклюдов, 2006), стопи на основі Zr (Idrees, Yao, Sattari, Kirk, & Daymond, 2013; Zinkle, 2017; Воеводин & Неклюдов, 2006).

Далі будемо розглядати п'ятикомпонентний концентрований металевий стоп, що складається з атомів сорту A, B, C, D, E, які розподілені в матеріалі випадковим чином. Під дією опромінювання локальні концентрації точкових дефектів: вакансій $C_\upsilon \equiv C_\upsilon\left(\mathbf{r}, t\right)$ і міжвузловин $C_i \equiv C_i\left(\mathbf{r}, t\right)$ змінюються в часі у відповідності з рівняннями (Was, 2007; Ахиезер, Давыдов, 1985; Зеленский, Неклюдов, Черняева, 1988)

$$\frac{\partial C_\upsilon}{\partial t} = -\nabla \mathbf{J}_\upsilon + K_0 - R, \qquad \frac{\partial C_i}{\partial t} = -\nabla \mathbf{J}_i + K_0 - R, \tag{1}$$

де $\mathbf{J}_\upsilon$ і $\mathbf{J}_i$ — дифузійні потоки вакансій і міжвузловин відповідно, K_0 — швидкість генерації вакансій і міжвузловин під опромінюванням (вакансії і міжвузловини народжуються парами), $R = K_{i\upsilon}C_iC_\upsilon$ — швидкість рекомбінації вакансій і міжвузловин ($K_{i\upsilon} = const$). Рівняння дифузії для атомів стопу такі:

$$\frac{\partial C_{\mathrm{M}}}{\partial t} = -\nabla \mathbf{J}_{\mathrm{M}}, \qquad \mathrm{M} = \mathrm{A, B, C, D, E}, \tag{2}$$

$$\sum_{\mathrm{M}} C_{\mathrm{M}}\left(\mathbf{r}, t\right) = \mathcal{N}, \qquad \sum_{\mathrm{M}} \nabla C_{\mathrm{M}} = 0; \tag{3}$$

C_{M} і $\mathbf{J}_{\mathrm{M}}$ — концентрація і дифузійний потік атомів сорту M відповідно, $\mathcal{N}$ — повне число атомів в одиниці об'єму стопу, відносні концентрації $C_{\mathrm{M}}/\mathcal{N}$, взагалі кажучи, не малі.

2. Дифузійні потоки точкових дефектів та атомів. Дифузійний потік вакансій

$$\mathbf{J}_\upsilon = \sum_{\mathrm{M}} \mathbf{J}_\upsilon^{\mathrm{M}} = \sum_{\mathrm{M}} \left(D_{\mathrm{M}}^{\upsilon} \chi \nabla C_{\mathrm{M}} - D_{\upsilon}^{\mathrm{M}} \nabla C_\upsilon \right), \qquad \mathrm{M} = \mathrm{A, B, C, D, E}$$

з використанням співвідношень (3) може бути представленим у вигляді

$$\begin{gathered} \mathbf{J}_\upsilon = \left(d_{\mathrm{A}\upsilon} - d_{\mathrm{E}\upsilon}\right)\Omega C_\upsilon \chi \nabla C_{\mathrm{A}} + \left(d_{\mathrm{B}\upsilon} - d_{\mathrm{E}\upsilon}\right)\Omega C_\upsilon \chi \nabla C_{\mathrm{B}} + \\ + \left(d_{\mathrm{C}\upsilon} - d_{\mathrm{E}\upsilon}\right)\Omega C_\upsilon \chi \nabla C_{\mathrm{C}} + \left(d_{\mathrm{D}\upsilon} - d_{\mathrm{E}\upsilon}\right)\Omega C_\upsilon \chi \nabla C_{\mathrm{D}} - \mathfrak{D}_\upsilon \nabla C_\upsilon. \end{gathered} \tag{4}$$

Тут $\mathbf{J}_\upsilon^{\mathrm{M}}$ — парціальні дифузійні потоки вакансій через атоми сорту M, χ — термодинамічний фактор (Was, 2007),

$$D_{\mathrm{M}}^{\upsilon} = d_{\mathrm{M}\upsilon}\Omega C_\upsilon, \quad D_{\upsilon}^{\mathrm{M}} = d_{\mathrm{M}\upsilon}\Omega C_{\mathrm{M}}, \quad \mathfrak{D}_\upsilon = \sum_{\mathrm{M}} D_\upsilon^{\mathrm{M}} = \Omega \sum_{\mathrm{M}} d_{\mathrm{M}\upsilon} C_{\mathrm{M}},$$

$D_{\mathrm{M}}^{\upsilon}$ і $D_{\upsilon}^{\mathrm{M}}$ — парціальні коефіцієнти дифузії атомів сорту M через вакансії і вакансій через атоми сорту M відповідно, $d_{\mathrm{M}\upsilon}$ — сталі, не залежні від концентрацій (Was, 2007), $\Omega = 1/\mathcal{N}$ — середній об'єм, що припадає на один атом у стопі, $\mathfrak{D}_\upsilon$ — повний коефіцієнт дифузії вакансій.

Дифузійний потік міжвузловин

$$\mathbf{J}_i = \sum_{\mathrm{M}} \mathbf{J}_i^{\mathrm{M}} = \sum_{\mathrm{M}} \left(-D_{\mathrm{M}}^{i} \chi \nabla C_{\mathrm{M}} - D_{i}^{\mathrm{M}} \nabla C_i \right), \qquad \mathrm{M} = \mathrm{A, B, C, D, E}$$

подамо у вигляді

$$\begin{gathered} \mathbf{J}_i = -\left(d_{\mathrm{A}i} - d_{\mathrm{E}i}\right)\Omega C_i \chi \nabla C_{\mathrm{A}} - \left(d_{\mathrm{B}i} - d_{\mathrm{E}i}\right)\Omega C_i \chi \nabla C_{\mathrm{B}} - \\ - \left(d_{\mathrm{C}i} - d_{\mathrm{E}i}\right)\Omega C_i \chi \nabla C_{\mathrm{C}} - \left(d_{\mathrm{D}i} - d_{\mathrm{E}i}\right)\Omega C_i \chi \nabla C_{\mathrm{D}} - \mathfrak{D}_i \nabla C_i. \end{gathered} \tag{5}$$

Тут $\mathbf{J}_i^{\mathrm{M}}$ — парціальні дифузійні потоки міжвузловин через атоми сорту M,

$$D_{\mathrm{M}}^{i} = d_{\mathrm{M}i}\Omega C_i, \quad \mathrm{d}_{i}^{\mathrm{M}} = d_{\mathrm{M}i}\Omega C_{\mathrm{M}}, \quad \mathfrak{D}_i = \sum_{\mathrm{M}} D_i^{\mathrm{M}} = \Omega \sum_{\mathrm{M}} d_{\mathrm{M}i} C_{\mathrm{M}},$$

D_{M}^{i} і D_{i}^{M} — парціальні коефіцієнти дифузії атомів сорту M через міжвузловини і міжвузловин через атоми сорту M відповідно, $d_{\mathrm{M}i}$ — сталі, не залежні від концентрацій, $\mathfrak{D}_{i}$ — повний коефіцієнт дифузії міжвузловин.

Дифузійний потік атомів сорту M дорівнює

$$\mathbf{J}_{\mathrm{M}} = \mathbf{J}_{\mathrm{M}}^{\upsilon} + \mathbf{J}_{\mathrm{M}}^{i}, \quad \mathrm{M} = \mathrm{A, B, C, D, E},$$

де $\mathbf{J}_{\mathrm{M}}^{\upsilon}$ і $\mathbf{J}_{\mathrm{M}}^{i}$ — парціальні дифузійні потоки атомів сорту M через вакансії і міжвузловини відповідно:

$$\mathbf{J}_{\mathrm{M}}^{\upsilon} = -D_{\mathrm{M}}^{\upsilon}\chi\nabla C_{\mathrm{M}} + D_{\upsilon}^{\mathrm{M}}\nabla C_{\upsilon},$$

$$\mathbf{J}_{\mathrm{M}}^{i} = -D_{\mathrm{M}}^{i}\chi\nabla C_{\mathrm{M}} - D_{i}^{\mathrm{M}}\nabla C_{i}.$$

Остаточно одержимо

$$\mathbf{J}_{\mathrm{M}} = -\mathfrak{D}_{\mathrm{M}}\chi\nabla C_{\mathrm{M}} + \Omega C_{\mathrm{M}}\left(d_{\mathrm{M}\upsilon}\nabla C_{\upsilon} - d_{\mathrm{M}i}\nabla C_{i}\right), \tag{6}$$

де $\mathfrak{D}_{\mathrm{M}} = D_{\mathrm{M}}^{\upsilon} + D_{\mathrm{M}}^{i}$ — повний коефіцієнт дифузії атомів сорту M.

Із семи потоків $\mathbf{J}_{i}, \mathbf{J}_{\upsilon}, \mathbf{J}_{\mathrm{A}}, \mathbf{J}_{\mathrm{B}}, \mathbf{J}_{\mathrm{C}}, \mathbf{J}_{\mathrm{D}}, \mathbf{J}_{\mathrm{E}}$, представлених формулами (4)—(6), тільки шість є незалежними, оскільки потоки атомів і точкових дефектів (вакансій і міжвузловин) повинні задовольняти умові балансу

$$\mathbf{J}_{\mathrm{A}} + \mathbf{J}_{\mathrm{B}} + \mathbf{J}_{\mathrm{C}} + \mathbf{J}_{\mathrm{D}} + \mathbf{J}_{\mathrm{E}} = \mathbf{J}_{i} - \mathbf{J}_{\upsilon}. \tag{7}$$

Можна безпосередньо перевірити, що умова (7) дійсно виконується.

3. Одержані рівняння. Підстановка виразів для дифузійних потоків (4)—(6) у вихідні рівняння (1), (2) дає

$$\frac{\partial C_{\upsilon}}{\partial t} = -\nabla\left\{\Omega C_{\upsilon}\chi\begin{bmatrix}\left(d_{\mathrm{A}\upsilon} - d_{\mathrm{E}\upsilon}\right)\nabla C_{\mathrm{A}} + \left(d_{\mathrm{B}\upsilon} - d_{\mathrm{E}\upsilon}\right)\nabla C_{\mathrm{B}} + \\ +\left(d_{\mathrm{C}\upsilon} - d_{\mathrm{E}\upsilon}\right)\nabla C_{\mathrm{C}} + \left(d_{\mathrm{D}\upsilon} - d_{\mathrm{E}\upsilon}\right)\nabla C_{\mathrm{D}}\end{bmatrix} - \mathfrak{D}_{\upsilon}\nabla C_{\upsilon}\right\} + K_{0} - R, \tag{8}$$

$$\frac{\partial C_{i}}{\partial t} = \nabla\left\{\Omega C_{i}\chi\begin{bmatrix}\left(d_{\mathrm{A}i} - d_{\mathrm{E}i}\right)\nabla C_{\mathrm{A}} + \left(d_{\mathrm{B}i} - d_{\mathrm{E}i}\right)\nabla C_{\mathrm{B}} + \\ +\left(d_{\mathrm{C}i} - d_{\mathrm{E}i}\right)\nabla C_{\mathrm{C}} + \left(d_{\mathrm{D}i} - d_{\mathrm{E}i}\right)\nabla C_{\mathrm{D}}\end{bmatrix} + \mathfrak{D}_{i}\nabla C_{i}\right\} + K_{0} - R, \tag{9}$$

$$\frac{\partial C_{\mathrm{L}}}{\partial t} = \nabla\left[\mathfrak{D}_{\mathrm{L}}\chi\nabla C_{\mathrm{L}} + \Omega C_{\mathrm{L}}\left(d_{\mathrm{L}i}\nabla C_{i} - d_{\mathrm{L}\upsilon}\nabla C_{\upsilon}\right)\right], \qquad \mathrm{L} = \mathrm{A, B, C, D}. \tag{10}$$

Рівняння (8)—(10) являються системою шести пов’язаних між собою нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних, яка описує зміни у просторі й у часі концентрацій точкових дефектів (вакансій і міжвузловин), а також атомів у концентрованих п’ятикомпонентних стопах за умов опромінювання. У відповідності з умовою (3) з п’яти концентрацій атомів C_{M} достатньо знаходити чотири, наприклад $C_{\mathrm{A}}, C_{\mathrm{B}}, C_{\mathrm{C}}, C_{\mathrm{D}}$. При заданих відповідних початкових і граничних умовах система рівнянь (8)—(10) буде описувати процеси радіаційно-індукованої сегрегації в п’ятикомпонентних системах.

4. Квазістаціонарний режим. У квазістаціонарному (усталеному) режимі опромінювання стопу необхідно припустити (Was, 2007)

$$\mathbf{J}_{\mathrm{A}} = \mathbf{J}_{\mathrm{B}} = \mathbf{J}_{\mathrm{C}} = \mathbf{J}_{\mathrm{D}} = \mathbf{J}_{\mathrm{E}} = 0, \qquad \mathbf{J}_{i} = \mathbf{J}_{\upsilon}. \tag{11}$$

Із співвідношень (4)—(6) і (11) випливає

$$\nabla C_{\mathrm{M}} = \left(\frac{\Omega C_{\mathrm{M}}}{\chi \mathfrak{D}_{\mathrm{M}}}\right) \frac{d_{\mathrm{M}\upsilon} \sum\limits_{\mathrm{K} \neq \mathrm{M}} \dfrac{d_{\mathrm{K}i} C_{\mathrm{K}}}{\mathfrak{D}_{\mathrm{K}}} - d_{\mathrm{M}i} \sum\limits_{\mathrm{K} \neq \mathrm{M}} \dfrac{d_{\mathrm{K}\upsilon} C_{\mathrm{K}}}{\mathfrak{D}_{\mathrm{K}}}}{\sum\limits_{\mathrm{K}} \dfrac{d_{\mathrm{K}\upsilon} C_{\mathrm{K}}}{\mathfrak{D}_{\mathrm{K}}}} \nabla C_{i}, \tag{12}$$

$$\nabla C_{i} = \left(\sum_{\mathrm{K}} \frac{d_{\mathrm{K}\upsilon} C_{\mathrm{K}}}{\mathfrak{D}_{\mathrm{K}}} \Bigg/ \sum_{\mathrm{K}} \frac{d_{\mathrm{K}i} C_{\mathrm{K}}}{\mathfrak{D}_{\mathrm{K}}} \right) \nabla C_{\upsilon}. \tag{13}$$

Формула (13) свідчить, що знаки ∇C_i і ∇C_υ збігаються, тобто вектор ∇C_i спрямований в той же бік, що і ∇C_υ. Це, очевидно, означає, що як вакансії, так і міжвузловини, дифундують на одні і ті же витоки точкових дефектів. Формула (12) дає можливість стверджувати, що умова $\sum\limits_{\mathrm{M}} \nabla C_{\mathrm{M}} = 0$ виконується.

Одержані результати є складовою частиною наукової роботи №217-16 (договір №К-3-54/2016 на виконання наукової роботи) РК 0116U002993 «Дослідження радіаційних дефектів та радіаційно-індукованої сегрегації домішок у сплавах цирконію під дією опромінення іонами з використанням методів ядерного мікроаналізу» (науковий керівник — академік НАН України, професор Сторіжко В.Ю.)

Список літератури

Aitkaliyeva, A., He, L., Wen, H., Miller, B., Bai, X. M., & Allen, T. (2017). Irradiation effects in Generation IV nuclear reactor materials. Pascal Yvon (Ed.), In *Woodhead Publishing Series in Energy*: *N. 106. Structural Materials for Generation IV Nuclear Reactors* (p. 253–283). Amsterdam: Elsevier Ltd.

Buckthorpe, D. (2017). Introduction to Generation IV nuclear reactors. Pascal Yvon (Ed.), In *Woodhead Publishing Series in Energy: N.106. Structural Materials for Generation IV Nuclear Reactors* (p. 1–22). Amsterdam: Elsevier Ltd.

Grandjean, Y., Bellon, P., & Martin, G. (1994). Kinetic model for equilibrium and nonequilibrium segregation in concentrated alloys under irradiation. *Phys. Rev. B, 50*(6), 4228–4231.

Idrees, Y., Yao, Z., Sattari, M., Kirk, M.A., & Daymond, M.R. (2013). Irradiation induced microstructural changes in Zr-Excel alloy. *J. Nucl. Mater., 441*(1), 138–151.

Nastar, M., & Martin,G. (1999). Modelling nonequilibrium grain boundary segregation. *Material Science Forum, 294—296*, 83—90.

Was, G. S. (2007). *Fundamentals of Radiation Materials: Metals and Alloys.* Berlin: Springer-Verlag.

Wiedersich, H., Okamoto, P. R., & Lam, N. Q. (1979). A theory of radiation-induced segregation in concentrated alloys. *J. Nucl. Mater., 83*(1/2), 98–108.

Zinkle, S. J. (2017). Advanced irradiation-resistant materials for Generation IV nuclear reactors. Pascal Yvon (Ed.), In *Woodhead Publishing Series in Energy: N.106. Structural Materials for Generation IV Nuclear Reactors* (p. 568-594). Amsterdam: Elsevier Ltd.

Ахиезер, И. А., Давыдов, Л. Н. (1985). *Введение в теоретическую радиационную физику металлов и сплавов*. Киев: Наукова думка.

Воеводин, В. Н., & Неклюдов, И. М. (2006). Проблемы радиационной стойкости конструкционных материалов ядерной энергетики. *Вісник Харківського університету. Серія фізична «Ядра, частинки, поля»*, *4*(3), 3—22.

Воеводин, В. Н., & Неклюдов, И. М. (2006). *Эволюция структурно-фазового состояния и радиационная стойкость конструкционных материалов.* Киев: Наукова думка.

Зеленский, В. Ф., Неклюдов, И. М., & Черняева, Т. П. (1988). *Радиационные дефекты и распухание металлов*. Киев: Наукова думка.

УЗАГАЛЬНЕНЕ ВІДОКРЕМЛЕННЯ ЗМІННИХ У ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯННЯХ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ

Ю. С. Крутій

Одеська державна академія будівництва та архітектури, Одеса, Україна

yuriy.krutiy@mail.ru

Розглянуто диференціальні рівняння в частинних похідних для вимушених поздовжніх та поперечних гармонічних коливань стрижнів з урахуванням сил опору. На прикладі цих рівнянь розкрито суть запропонованого методу узагальненого розподілу змінних. Показано, що в тих випадках, коли відокремлення змінних за допомогою стандартного методу Фур'є неможливий, даний метод дозволяє перейти від рівнянь у частинних похідних до звичайних диференціальних рівнянь відносно нової невідомої комплексної функції.

Ключові слова: стрижень, довільні неперервні змінні параметри, вимушені гармонічні коливання, сили опору, диференціальні рівняння коливань, узагальнене відокремлення змінних.

Як відомо, проблема дослідження вимушених поздовжніх та поперечних гармонічних коливань стрижнів з урахуванням сил опору зводиться до розв'язання відповідних диференціальних рівнянь у частинних похідних. Вигляд цих рівнянь може бути різним, залежно від способу врахування внутрішнього та зовнішнього опорів. Однак для цілей даної статті вказана обставина не має принципового значення.

Заради визначеності для обох опорів припускаємо частотно-незалежне тертя. При цьому для врахування внутрішнього непружного опору матеріалу застосуємо скоректовану гіпотезу Кельвіна — Фойгта, а для врахування зовнішнього тертя скористаємось гіпотезою, згідно з якою сила опору пропорційна масі стрижня і швидкості. У такому випадку рівняння для поздовжніх та поперечних коливань стрижня, з довільною неперервною змінною жорсткістю й довільною неперервно розподіленою змінною погонною масою, відповідно матимуть вигляд (Василенко & Алексейчук, 2004):

$$m(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\nu\,\theta\, m(x)\frac{\partial u}{\partial t}-\left(1+\frac{\gamma}{\theta}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(E(x)F(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)=q(x)\sin\theta t; \qquad (1)$$

$$m(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\nu\,\theta\, m(x)\frac{\partial y}{\partial t}+\left(1+\frac{\gamma}{\theta}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(E(x)I(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)=q(x)\sin\theta t, \qquad (2)$$

де $u=u(x,t)$, $y=y(x,t)$ — поздовжнє та поперечне переміщення точки осі стрижня з координатою x у момент часу t;

$m(x)$ — інтенсивність розподіленої маси (погонна маса) стрижня;

$E(x)$ — модуль пружності матеріалу;

$F(x)$ — площа поперечного перерізу стрижня;

$I(x)$ — момент інерції поперечного перерізу стрижня;

$q(x)$ — неперервна амплітудна функція навантаження;

θ — частота змушувальної сили;

γ — безрозмірний коефіцієнт непружного опору матеріалу стрижня;

ν — безрозмірний коефіцієнт непружного опору середовища.

Для усталених вимушених гармонічних коливань без урахування опору, тобто коли $\gamma = \nu = 0$, фаза коливань збігається з фазою змушувального навантаження. У такому випадку кожне з рівнянь (1), (2) допускає відокремлення змінних за стандартною процедурою методу Фур'є, що приводить до двох звичайних диференціальних рівнянь відносно функції часу та амплітудної функції переміщення. При урахуванні сил опору фаза коливань уже не буде збігатися з фазою навантаження, що унеможливлює розподіл відокремлення в рівняннях (1), (2) за допомогою методу Фур'є.

Пропонується розв'язок рівнянь (1), (2) шукати з узагальненим розподілом змінних наступного виду:

$$u(x,t) = u_1(x)\sin\theta t + u_2(x)\cos\theta t; \tag{3}$$

$$y(x,t) = y_1(x)\sin\theta t + y_2(x)\cos\theta t, \tag{4}$$

де $u_j(x),\ y_j(x)\ (j = 1,2)$ — невідомі функції, які залежать тільки від змінної x. Тоді, підставляючи в рівняння (1), (2) замість невідомих функцій $u(x,t),\ y(x,t)$ їх значення (3), (4) і зібравши подібні при $\sin\theta t$ та $\cos\theta t$, будемо мати:

$$\Big[(E(x)F(x)\,u_1'(x))' + \theta^2 m(x)(u_1(x) + \nu\, u_2(x)) - \gamma(E(x)F(x)\,u_2'(x))' + q(x)\Big]\sin\theta t +$$
$$+\Big[(E(x)F(x)\,u_2'(x))' + \theta^2 m(x)(u_2(x) - \nu\, u_1(x)) + \gamma(E(x)F(x)\,u_1'(x))'\Big]\cos\theta t = 0;$$
$$\Big[(E(x)I(x)y_1''(x))'' - \theta^2 m(x)(y_1(x) + \nu y_2(x)) - \gamma(E(x)I(x)y_2''(x))'' - q(x)\Big]\sin\theta t +$$
$$+\Big[(E(x)I(x)y_2''(x))'' - \theta^2 m(x)(y_2(x) - \nu y_1(x)) + \gamma(E(x)I(x)y_1''(x))''\Big]\cos\theta t = 0.$$

Два останні рівняння мають задовольнятись для будь-яких значень часу. Зважаючи на лінійну незалежність тригонометричних функцій, цього можна досягти тільки прирівнявши до нуля множники при $\sin\theta t$ та $\cos\theta t$. У підсумку матимемо такі дві системи диференціальних рівнянь:

$$-\begin{pmatrix} 1 & -\gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (E(x)F(x)u_1'(x))' \\ (E(x)F(x)u_2'(x))' \end{pmatrix} = \theta^2 m(x)\begin{pmatrix} 1 & \nu \\ -\nu & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q(x) \\ 0 \end{pmatrix}; \tag{5}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (E(x)I(x)y_1''(x))'' \\ (E(x)I(x)y_2''(x))'' \end{pmatrix} = \theta^2 m(x)\begin{pmatrix} 1 & \nu \\ -\nu & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q(x) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Матриці, що фігурують у запису систем, одним і тим же перетворенням подібності зводяться до діагонального виду:

$$S^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -\gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}S = \begin{pmatrix} 1 + i\gamma & 0 \\ 0 & 1 - i\gamma \end{pmatrix};$$

$$S^{-1}\begin{pmatrix} 1 & \nu \\ -\nu & 1 \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} 1-i\nu & 0 \\ 0 & 1+i\nu \end{pmatrix},$$

де

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix},$$

i – уявна одиниця. Унаслідок цього після підстановок

$$\begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} U(x) \\ \overline{U(x)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} Y(x) \\ \overline{Y(x)} \end{pmatrix}$$

кожна із систем (5), (6) зводиться до двох самостійних рівнянь відносно нових невідомих комплексних функцій

$$U(x) = \frac{u_1(x) + iu_2(x)}{2}, \ \overline{U(x)} = \frac{u_1(x) - iu_2(x)}{2}, \tag{7}$$

$$Y(x) = \frac{y_1(x) + iy_2(x)}{2}, \ \overline{Y(x)} = \frac{y_1(x) - iy_2(x)}{2}, \tag{8}$$

де риска означає комплексне спряження.

Перші рівняння запишуться так:

$$(E(x)F(x)U'(x))' + \lambda^2 m(x)U(x) = -\frac{q(x)}{2(1+i\gamma)}; \tag{9}$$

$$(E(x)I(x)Y''(x))'' - \lambda^2 m(x)Y(x) = \frac{q(x)}{2(1+i\gamma)}, \tag{10}$$

де

$$\lambda^2 = \theta^2 \frac{1-i\nu}{1+i\gamma}.$$

При цьому другі рівняння будуть комплексним спряженням перших і тому розглядати їх окремо немає сенсу. При наявності розв’язків перших рівнянь $U(x)$ та $Y(x)$, розв’язками других будуть $\overline{U(x)}$ та $\overline{Y(x)}$.

Після розв’язання рівнянь (9), (10), згідно з формулами (7), (8) матимемо:

$$u_1(x) = 2\,\mathrm{Re}\,U(x),\ u_2(x) = 2\,\mathrm{Im}\,U(x);$$

$$y_1(x) = 2\,\mathrm{Re}\,Y(x),\ y_2(x) = 2\,\mathrm{Im}\,Y(x).$$

Тоді розв’язки вихідних рівнянь знаходимо за формулами (3), (4):

$$u(x,t) = 2(\,\mathrm{Re}\,U(x)\,\sin\theta t + \mathrm{Im}\,U(x)\,\cos\theta t);$$

$$y(x,t) = 2(\,\mathrm{Re}\,Y(x)\,\sin\theta t + \mathrm{Im}\,Y(x)\,\cos\theta t).$$

Наприкінці зауважмо, що в роботі Крутій (2016) побудовано точні розв’язки рівнянь (9), (10) при довільних неперервних змінних коефіцієнтах.

Список літератури

Василенко, М. В., & Алексейчук, О.М. (2004). *Теорія коливань і стійкості руху*. Київ: Вища школа.

Крутій, Ю. С. (2016) *Розробка методу розв'язання задач стійкості і коливань деформівних систем зі змінними неперервними параметрами.* (Дис. докт. техн. наук). Луцький національний технічний університет, Луцьк.

ЗАСТОСУВАННЯ В-СПЛАЙНІВ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧИ ПРО ДЕФОРМАЦІЮ НЕКОЛОВИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК ЗІ СКІСНИМИ КОНТУРАМИ

М. М. Крюков[1] , О. В. Ляшко[1] , О. М. Шутовський[2] , А. Ю. Андрейцев[3]

[1]Київська державна академія водного транспорту ім. Петра Конашевича-Сагайдачного, Київ, Україна

[2]Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ, Україна

[3]Державний економіко-технологічний університет транспорту, Київ, Україна

mmkryukov@ukr.net, olga_liashko@ukr.net, shutovsk@ukr.net

Дано розв'язання задачі про згин неколових циліндричних оболонок зі скісними контурами. Воно базується на параметризації поверхні циліндричної оболонки і зведенні двовимірної крайової задачі до одновимірної за допомогою методу сплайн-колокацій та розв'язання останньої стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації.

Ключові слова: деформація, тонкі неколові циліндричні оболонки, скісні контури, параметризація поверхні, періодичні B-сплайни, метод сплайн-колокацій.

Широке застосування тонких оболонок у різноманітних областях техніки стимулює розроблення ефективних методів розв'язання різних класів задач для дослідження їх напружено-деформованого стану. До теперішнього часу найбільш повно досліджено напружено-деформований стан оболонок канонічних форм. У багатьох важливих випадках елементи різних конструкцій є тонкими неколовими циліндричними оболонками зі складною конфігурацією контурів, зокрема, замкнені оболонки вздовж напрямної зі скісними контурами. Разом з тим, практично всі наближені аналітичні й чисельні методи розв'язання двовимірних задач теорії оболонок і пластин найбільш просто реалізуються, коли контури оболонки або пластини збігаються з координатними лініями на поверхні. Як правило, розглядаються прямокутні області інтегрування систем диференціальних рівнянь у частинних похідних. Для подолання труднощів, зв'язаних зі складною областю інтегрування, можна використовувати параметризацію поверхні (Корнишин, Паймушин, & Снигирев, 1989). У роботах Григоренко, Крюков та Холкина (1995), Крюков та Яковенко (2004) запропонована параметризація областей складних форм для пластин і колових циліндричних оболонок. Параметризація дозволяє перейти до такої системи координат, у якій область інтегрування двовимірної крайової задачі є прямокутником. Це приводить, з одного боку, до ускладнення вихідних диференціальних рівнянь, але, з іншого боку, дозволяє застосовувати апробовані ефективні методи. У розвиток цього пропонується використовувати параметризацію серединної поверхні тонкої неколової циліндричної оболонки, замкненої вздовж напрямної зі скісними контурами.

У даному повідомленні пропонується підхід до дослідження деформування тонких неколових циліндричних оболонок зі скісними контурами. Методика базується на переході до такої криволінійної системи координат, де область інтегрування є прямокутником, використанні методу сплайн-колокації вздовж напрямної й чисельному розв'язанні одномірної крайової задачі високого порядку методом ортогонального прогонки вздовж твірної.

Розглянемо ортотропну замкнену циліндричну оболонку неколового поперечного перерізу зі скісними контурами під дією поверхневого або контурного навантаження. За вихідні приймаємо співвідношення теорії тонких ортотропних оболонок змінної товщини у класичній постановці (Григоренко & Василенко, 1981). Уважаємо, що в кожній точці оболонки є три взаємноортогональні площини пружної симетрії. Тоді розв'язувальна система рівнянь має вид:

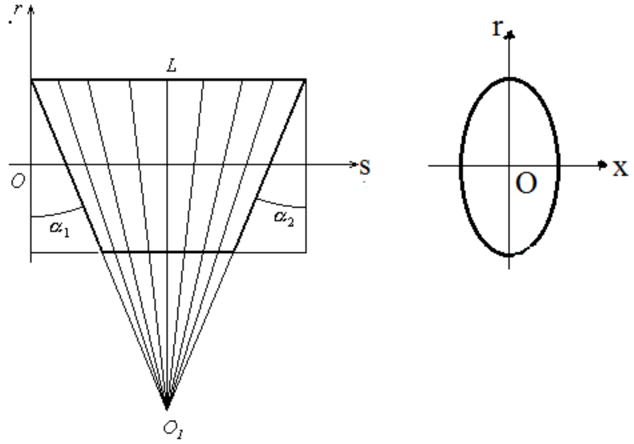
$$\frac{\partial \overline{Y}}{\partial s} = B_0\overline{Y} + B_1\frac{\partial \overline{Y}}{\partial \eta} + B_2\frac{\partial^2 \overline{N}}{\partial \eta^2} + B_3\frac{\partial^3 \overline{Y}}{\partial \eta^3} + B_4\frac{\partial^4 \overline{Y}}{\partial \eta^4} + \bar{g}_0, \qquad (1)$$

$$\overline{Y} = \left\{u,\, v,\, w,\, \vartheta_s,\, N_s,\, S,\, Q_s,\, M_s\right\},\ B_1 = \left\{b_{i,j}^{(p)}\left(s,t\right)\right\} \quad \left(i,j = \overline{1,8};\quad p = \overline{0,4}\right),$$

$$g_0 = \left\{\ g_1^{(0)}\left(s,\, t\right),\ \ldots,\ g_8^{(0)}\left(s,\, t\right)\ \right\}.$$

Тут серединна поверхня оболонки віднесена до криволінійної ортогональної системи координат s, η, де s — довжина дуги твірної, η —довжина дуги напрямної; $u,\ v,\ w,\ \vartheta_s$ — переміщення вздовж твірної, напрямної та нормалі до серединної поверхні і кут повороту нормального елемента; $N_s,\ S,\ Q_s,\ M_s$ — зусилля й момент. До цих рівнянь необхідно додати по чотири крайові умови на кожному контурі у відповідності до порядку системи.

Розглядаємо випадок, коли косі зрізи нахилені до поперечного перерізу оболонки під різними кутами α_1 і $\alpha_2\left(\alpha_1 \neq \alpha_2\right)$. Твірна задана в параметричному вигляді $r = r\left(t\right), x = x\left(t\right)\ \left(0 \le t \le 2\pi\right)$, де t — параметр.



Перейдімо в рівняннях (1) до нової криволінійної системи координат ξ ,ζ, яка пов'язана з попередньої наступними співвідношеннями:

$$\xi = \frac{L(s-(r(0)-r(t))\operatorname{tg}\alpha_1)}{L-(r(0)-r(t))(\operatorname{tg}\alpha_1+\operatorname{tg}\alpha_2)}\ , \zeta = t \tag{2}$$

Координатними лініями в цій системі є лінії $\zeta = \mathrm{const}$ — твірні циліндра, які зміщені і стиснуті в напрямі осі Os, а також лінії $\xi = \mathrm{const}$ — лінії перетину циліндричної поверхні й пучка площин, які перпендикулярні до площини rOs і проходять через точку O_1.

У новій системі координат ξ ,ζ двовимірна крайова задача вже розглядається е прямокутній області $\{0 \le \xi \le L; 0 \le \zeta \le 2\pi\}$.

Система рівнянь (1) у координатах ξ ,ζ, набуде вигляду:

$$\frac{\partial \overline{Y}}{\partial \xi} = C_0\overline{Y} + C_1\frac{\partial \overline{Y}}{\partial \zeta} + C_2\frac{\partial^2 \overline{Y}}{\partial \zeta^2} + C_3\frac{\partial^3 \overline{Y}}{\partial \zeta^3} + C_4\frac{\partial^4 \overline{Y}}{\partial \zeta^4} + \bar{f}_0 \tag{3}$$
$$\{0 \le \xi \le L; 0 \le \zeta \le 2\pi\}.$$

При цьому

$$\frac{\partial \overline{Y}}{\partial \eta} = \frac{\partial \overline{Y}}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial \eta} = \frac{1}{\gamma(\zeta)}\frac{\partial \overline{Y}}{\partial \zeta}, \frac{\partial \overline{Y}}{\partial s} = \frac{L}{L-(r(0)-r(v))(\operatorname{tg}\alpha_1+\operatorname{tg}\alpha_2)}\frac{\partial \overline{Y}}{\partial \xi},$$
$$\gamma(\zeta) = \sqrt{r'^2(\zeta) + x'^2(\zeta)}.$$

Відповідно до діючих на оболонку контурних й поверхневих навантажень та умов закріплення її контурів $\xi = 0$ і $\xi = L$, необхідно перетворити відповідні граничні умови.

Розв'язок крайової задачі будемо шукати у вигляді Григоренко та Крюков (1995), Григоренко та ін. (2002), Крюков (2009):

$$\{u(\xi,\zeta), v(\xi,\zeta), w(\xi,\zeta), \vartheta_s(\xi,\zeta), N_s(\xi,\zeta), S(\xi,\zeta), Q_s(\xi,\zeta), M_s(\xi,\zeta)\} =$$
$$= \sum_{i=0}^{N-1}\{u_i(\xi), v_i(\xi), w_i(\xi), \vartheta_{si}(\xi), N_{xi}(\xi), \hat{S}_i(\xi), Q_{si}(\xi), M_{si}(\xi)\}\psi_i(\zeta), \tag{4}$$

де $u_i(\xi), v_i(\xi), w_i(\xi), \vartheta_{si}(\xi), N_{xi}(\xi), \hat{S}_i(\xi), Q_{si}(\xi), M_{si}(\xi)$ $\left(i = \overline{0, N-1}\right)$ — невідомі функції, а $\psi_i(\zeta)$ $\left(i = \overline{0, N-1}, N > 6\right)$ — лінійні комбінації В-сплайнів 5-го степеня на рівномірній сітці точок

$$0 = \zeta_0 < \zeta_1 < \zeta_2 < ... < \zeta_N = 2\pi,$$

які задовольняють умови періодичності розв'язку [6]. У цьому випадку функції $\psi_i(\zeta)$ мають вигляд:

$$\Psi_0(\zeta) = 2B_5^0(\zeta);\ \Psi_1(\zeta) = 2B_5^1(\zeta);\ \Psi_2(\zeta) = 2B_5^2(\zeta);$$
$$\Psi_i(\zeta) = B_5^i(\zeta)\left(i = \overline{3,\ N-3}\right);\ \Psi_{N-2}(\zeta) = 2B_5^{N-2}(\zeta);$$
$$\Psi_{N-1}(\zeta) = 2B_5^{N-1}(\zeta).$$

Застосуємо метод колокацій і отримаємо наступну крайову задачу для системи звичайних диференціальних рівнянь у формі Коші, яка містить $8N$ рівнянь першого порядку:

$$\frac{d\,\overline{Z(\xi)}}{d\,\xi} = A\overline{Z(\xi)} + \overline{F(\xi)}, \tag{5}$$

де

$$\vec{Z}^T(\xi) = \{u_0,\, u_1,\, \ldots,\, u_{N-1}, v_0,\, v_1,\, \ldots,\, v_{N-1}, w_0,\, w_1,\, \ldots,\, w_{N-1},$$

$$\vartheta_{s0},\, \vartheta_{s1},\, \ldots,\, \vartheta_{sN-1}, \ldots, Q_{s0},\, Q_{s1},\, \ldots,\, Q_{sN-1}, M_{s0},\, M_{sx},\, \ldots,\, M_{sN-1}\}.$$

Крайові умови на скісних контурах $\xi = \mathrm{const}$ з урахуванням представлення розв'язку у вигляді (4) можна записати у вигляді

$$A_1\overline{Z}\left(0\right) = \overline{a}_1,\; A_2\overline{Z}\left(L\right) = \overline{a}_2. \tag{6}$$

Крайова задача (5), (6) розв'язується стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації (Григоренко & Василенко, 1981; Григоренко & Крюков, 1995).

Після розв'язання задачі (5), (6) шукані функції підставляємо відповідно до розв'язків (4), а потім за їх допомогою знаходимо всі фактори напруженодеформованого стану розглядуваних оболонок.

Список літератури

Григоренко, Я. М, & Василенко, А. Т. (1981). *Методы расчета оболочек*. (Т. 4. *Теория оболочек переменной жесткости*). Киев: Наукова думка.

Григоренко, Я. М., & Крюков, Н. Н. (1995). Решение задач теории пластин и оболочек с применением сплайн-функций (обзор). *Прикл. механика, 31*(6), 3—27.

Григоренко, Я. М., Шевченко, Ю. Н.,…, Крюков, Н. Н. и др. (2002). *Механика композитов*. (Т. 11. *Численные методы*). Киев: «А.С.К», 2002.

Григоренко, Я. М., Крюков, Н. Н., & Холкина, Н. С. (1995). Решение задач о напряженно-деформированном состоянии цилиндрических оболочек с косыми срезами на основе сплайн-апроксимации. *Прикл. механика, 31* (6), 3—27.

Крюков, М. М. (2009). Застосування В-сплайнів до розв'язання задач теорії пластин і оболонок. *Збірник наук. праць ДЕТУТ. Серія «Транспортні системи і технології», 14*, 106—112. Київ: ДЕТУТ.

Крюков, М. М. (2010). Застосування періодичних В-сплайнів до розв′язання задачі про згин кільцевих пластин змінної товщини в двох координатних напрямах. *Збірник наук. праць ДЕТУТ. Серія «Транспортні системи і технології», 17*, 166—171. Київ: ДЕТУТ.

Крюков, М. М., & Яковенко, Н. С. (2004). Дослідження згину кільцевих та секторіальних пластин змінної товщини на основі сплайн-апроксимації *Збірник наук. праць КУЕТТ. Серія «Транспортні системи і технології», 6*, 40—47. Київ: КУЕТТ.

Корнишин, М. С., Паймушин, В. Н., & Снигирев, В. Ф. (1989). *Вычислительная геометрия в задачах механики оболочек*. Москва: Наука.

КОЛЕБЛЕМОСТЬ И НЕ КОЛЕБЛЕМОСТЬ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

К. И. Кульгава
Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова, Одесса, Украина
kulkris69@gmail.com

Рассматриваются дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} + p\left(x\right)y = 0 \tag{1}$$

различных порядков, где $p(x)$ предполагается непрерывной на $\left[x_0, +\infty\right)$.

Была поставлена задача изучить явление колеблемости решений, при каких условиях она возникает, для каких уравнений она имеет место и т. д. В работе сформулированы и доказаны теоремы, которые показывают, когда решения уравнения колеблется или не колеблется в зависимости от порядка уравнения, и ряд вспомогательных лемм. Также доказан критерий колеблемости для уравнения n порядка. Были приведены примеры, иллюстрирующие некоторые свойства/

Теорема 1. *Пусть* $f\left(t,x,y\right)x \geq 0$ *для* $t \geq a$, $x,y \in \mathbb{R}$ *выполнено. Уравнение*

$$\ddot{u} + f\left(t,u,\dot{u}\right) = 0$$

является неколеблющимся тогда и только тогда, когда существуют числа $a_0 > a, \sigma \in \{-1,1\}$ *и дважды непрерывно дифференцируемая функция* $w : \left[a_0;+\infty\right) \to \mathbb{R}$ *такая, что*

$$\sigma w\left(t\right) > 0, \quad \sigma\left[\ddot{w}\left(t\right) + f\left(t, w\left(t\right), \dot{w}\left(t\right)\right)\right] \leq 0 \text{ для } t \geq a_0 .$$

Теорема 2. *Пусть* $0 \leq t^2 h\left(t\right) \leq 1$ *для* $t \geq a$, *предположим, что существует* $\sigma \in \left\{-1,1\right\}, n \in \mathbb{N}$ *и* $r > 0$ *достаточно большая константа такая, что*

$$\frac{g\left(x\right)}{x} \leq \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n}\left(\prod_{i=0}^{k}\ln_i x^2\right)^{-2}$$

для $\sigma x \geq r$.

Тогда уравнение $\ddot{u} + h\left(t\right)g\left(u\right) = 0$ строго не колеблется.

Определение. Скажем, что решения уравнения (1) *обладают свойством А*, если любое из них либо колеблется, либо монотонно стремится к нулю. В случае $p\left(x\right) \geq 0$ и четного n это свойство означает, что все решения колеблются.

Теорема 3 (критерий колеблемости для уравнения n порядка).

1. *Если* $\int^{\infty} px^{n-2}dx = \infty$ и $p \geq 0$, *то решения уравнения* (1) *обладают*

свойством А.

2. *Если* $\int^{\infty} |p| x^{n-1} dx < \infty$, *то решения уравнения* (1) *неколеблющиеся.*

3. *Если* $\int^{\infty} p x^{n-2} dx = -\infty, p \leq 0,$ *то при* n *четном существует фундаментальная система, состоящая из двух неколеблющихся решений (одно из которых стремится к* $+\infty$, *а другое к нулю) и* $(n-2)$ *колеблющихся решений, а при* n *нечетном существует фундаментальная система решений, состоящая из одного неколеблющегося, стремящегося к* $+\infty$ *решения и* $(n-1)$*-го колеблющегося решения.*

Список литературы

Partsvania, N., & Dosla, Z. (2010). Oscillatory properties of second order nonlinear differential equations. *Rocky Mountain J. Math.*, *40* (2), 445–470.

Егоров, А. И. (2005). *Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями* (2-е изд., испр.). Москва: ФИЗМАТЛИТ.

Євтухов, В. М. (1994). Об условиях колеблемости и неколеблемости решений одного полулинейного дифференциального уравнения. *Український математичний журнал*, *46*(7), 833—841.

Кигурадзе, И. Т., & Чантурия, Т. А. (1990). *Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных диффренциальных уравнений*. Москва: Наука.

Кондратьев, В. А. (1958). О колеблемости решений уравнений третьего и четвертого порядка. *Доклады Академии наук*, *118*(1), 23—24.

О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ С ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ В ПРОСТРАНСТВЕ ФУНКЦИЙ НА ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

И. Ф. Курбыко, С. В. Левизов

Владимирский государственный университет, Владимир, Россия

levizov@rambler.ru

Построен класс псевдодифференциальных операторов (ПДО) с символом, зависящим от двух аргументов, обратимых в пространстве непрерывных комплекснозначных функций на бесконечномерном гильбертовом пространстве. Получены достаточные условия однозначной разрешимости задачи Коши для эволюционных уравнений с ПДО в правой части.

Ключевые слова: псевдодифференциальные операторы, преобразование Фурье, эволюционные уравнения, задача Коши.

К настоящему времени научная литература накопила значительное количество работ, посвященных исследованиям дифференциальных, а также псевдодифференциальных уравнений в пространствах мер и функций на бесконечномерном пространстве. Многие методы и результаты исследований таких уравнений с бесконечномерными операторами существенно отличаются от конечномерных. Эти отличия связаны с тем, что в бесконечномерном пространстве отсутствует мера Лебега. В частности, уравнения, сопряженные к дифференциальным уравнениям относительно функций, оказываются уравнениями относительно мер. Фактически на данное обстоятельство впервые обратил внимание Фомин (1968), указавший, что понятие распределения в смысле Шварца в бесконечномерном пространстве расщепляется. Меры на таком пространстве нельзя отождествить с обобщенными функциями. Поэтому появляются два вида распределений: обобщенные функции — линейные непрерывные функционалы на основном пространстве гладких мер M и обобщенные меры — линейные непрерывные функционалы на основном пространстве гладких функций Z. Эти идеи были развиты в работах О. Г. Смолянова и его учеников, (см. в этой связи Смолянов (1982), Курбыко (1987, 2014), Kurbyko и Levizov (2005) и имеющуюся там библиографию),

В настоящей работе построен класс псевдодифференциальных операторов (ПДО) $H(x,D)$ с символом, зависящим от двух аргументов. Операторы $H(x,D)$ заданы в пространстве $\Phi(H)$ непрерывных комплекснозначных функций f на бесконечномерном гильбертовом пространстве $H = H_1 \oplus H_2$ ($H_1 \oplus H_2$ — прямая сумма гильбертовых пространств H_1 и H_2) таких, что при любом фиксированном $x \in H_1$ функция $f_x(y) = f(x \oplus y)$ принадлежит пространству основных функций Z на H_2, то есть является преобразованием Фурье некоторой финитной меры μ, бесконечно дифференцируемой по подпространству

$H_0 \subset H_2$. Пространство $\Phi(H)$ наделяется слабейшей топологией, в которой непрерывны все отображения

$$R_x : \Phi(H) \to M, f \to F^{-1}[f_x],\ x \in H_1;\ M = F^{-1}[Z].$$

Так как пространство основных мер M хаусдорфово и семейство отображений $\left\{R_x\right\}_{x \in H_1}$ разделяет точки в $\Phi(H)$, то $\Phi(H)$ — хаусдорфовое топологическое пространство. Доказано, что операторы $H(x,D) : \Phi(H) \to \Phi(H)$ являются изоморфизмами пространства $\Phi(H)$, более широкого, чем пространство гладких функций Z, где определены ПДО $A\left(x,D\right)$ и $A\left(D,y\right)$ (Kurbyko & Levizov, 2005). Получены достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши для эволюционных уравнений с ПДО $H(x,D)$ в правой части. Построены примеры дифференциальных операторов с переменными коэффициентами, которые относятся к классу ПДО $H(x,D)$, причём задача Коши для эволюционных уравнений с такими операторами также однозначно разрешима в пространстве $\Phi(H)$. В статье используется терминология, в основном, работ (Kurbyko & Levizov, 2005; Курбыко, 2014).

Ниже определяется класс функций L, которому принадлежат символы ПДО $H(x,D)$. L есть векторное пространство всех непрерывных функций $h : H_1 \times H_2 \to C^1$ таких, что для каждого фиксированного $x \in H_1$ функция $h_x \in W^\infty$, где $h_x(y) = h(x,y)$ для всех $(x,y) \in H_1 \times H_2$. Здесь W^∞ — векторное пространство всех непрерывных функций $g : H \to \mathbb{R}$, бесконечно дифференцируемых по Фреше, ограниченных на ограниченных множествах $E \subset H$, и таких, что

$$\sup_{x \in E, \left\|h^n\right\| \le 1} \left|d_{h^n} g(x)\right| \prec +\infty \text{ для любого } n \in \mathbb{N}.$$

Определение. *Псевдодифференциальным* оператором с символом $h \in L$ в пространстве функций $\Phi(H)$ называется отображение $H(x,D) : \Phi(H) \to \Phi(H)$, определённое для всех $f \in \Phi(H)$ и $z = x \oplus y \in H$ равенством

$$H(x,D)f(z) = F[h_x F^{-1}[f_x]](y) \tag{1}$$

Здесь $F : M \to Z$ — оператор Фурье такой, что для всех $m \in M$,

$$F[m](x) = \int_H e^{i(x,y)} dm(y),$$

где (x,y) — скалярное произведение в H; оператор $F^{-1} : Z \to M$ — обратное преобразование Фурье. Так как для любого фиксированного $x \in H_1$ функция $f_x \in Z$, то мера $F^{-1}[f_x] \in M$ и произведение функции h_x на меру $F^{-1}[f_x]$ также принадлежит M. Поэтому оператор $H(x,D)$ корректно определён равенством (1).

Теорема 1. *Решение* $f:[0;+\infty)\to\Phi(H)$ *задачи Коши*

$$f'(t)=H(x,D)f(t), f(0)=f_0 \tag{2}$$

существует и единственно для всякого $f_0\in\Phi(H)$.

Для доказательства теоремы 1 достаточно показать, используя преобразование Фурье по переменной $y\in H_2$, что функция

$$f(t)(x\oplus y)=F[\exp\{\mathrm{th}_x\}F^{-1}[f_{0x}]](y),$$

где $f_{0x}(y)=f_0(x\oplus y)$, является единственным решением задачи (2).

Пусть $H_1(x,D)$ — ПДО с символом $h_1\in L$,

$$h_1(x,y)=\alpha(x)(b_1(x,y)+b_2(x,y)),$$

где функции $b_1(x,y)$ и $b_2(x,y)$ принимают неотрицательные значения и при любом фиксированном $x\in H_1$ функции $b_{1x}(y)=b_1(x,y)$ и $b_{2x}(y)=b_2(x,y)$ принадлежат классу W^{∞}. Сформулируем следующие условия:

(u1) существуют $C\succ 0$ и $\beta\succ 0$ такие, что для всех $y\in H_2$ выполняется неравенство $b(y)\geq C\left\|y\right\|^{\beta}$;

(u2) множество $\left\{y\in H: b(y)\leq 1\right\}$ H_0 — конечномерно ограничено (Курбыко, 1987) и существует $l\succ 0$ такое, что $b(\varepsilon y)=\varepsilon^{l}b(y)$ для всех $y\in H$ и $\varepsilon\succ 0$.

Теорема 2. *Если при любом фиксированном* $x\in H_1$ *функция* $b_{1x}(y)=b_1(x,y)$ *удовлетворяет одному из условий* (u1) *или* (u2), *тогда*:

1) *отображение* $H_1(x,D):\Phi(H)\to\Phi(H)$ — *изоморфизм пространства* $\Phi(H)$;

2) *при всех* ϕ *и* $f_0\in\Phi(H)$ *задача Коши для эволюционного уравнения*

$$f'(t)=H_1(x,D)f(t)+\phi, f(0)=f_0$$

в пространстве $\Phi(H)$ *имеет единственное решение*.

Доказательство теоремы 2 опирается на результаты из Курбыко (1987).

Пример. Пусть $H(x,D):\Phi(H)\to\Phi(H)$ — ПДО с символом $h\in L$, $h: H_1\times H_2\to R_+$; Δ_B — дифференциальный оператор с символом

$$b_1(y)=\left(By,y\right),$$

где $B: H_2\to H_2$ — линейный непрерывный оператор. В этом случае множество

$$\left\{y\in H_2:\left(By,y\right)\leq 1\right\}$$

H_0-конечномерно ограничено. Кроме того, для любого $\varepsilon\succ 0$ справедливо

$$b_1(\varepsilon y) = \varepsilon^2 b_1(y),$$

то есть функция $b_1(y)$ удовлетворяет условию (u2). Положим

$$h_{11}(x,y) = b_1(y) + h(x,y).$$

Тогда для оператора

$$H_{11}(x,D) = \Delta_B + H(x,D)$$

с символом $h_{11}(x,y)$ решение уравнения

$$H_{11}(x,D)f = g$$

существует и единственно в $\Phi(H)$.

Список литературы

Kurbyko, I. F., & Levizov, S. V. (2005) On the invertibility of infinite-dimensional pseudodifferential operators. *Journal of Mathematical Sciences, 126*(6), 1607–1613.

Курбыко, И. Ф. (1987) Об эволюционных уравнениях с бесконечномерными псевдодифференциальными операторами. *Дифференц.уравнения, 27*(11), 1892—1901.

Курбыко, И. Ф., & Левизов, С. В. (2014) О задаче Коши для эволюционных уравнений с псевдодифференциальными операторами в бесконечномерном пространстве. В *Материалах Пятнадцатой международной научной конференции им. акад. М. Кравчука,* Киев, 15—17 мая (Т. 1., с. 183—185). Киев: НТУУ «КПИ».

Смолянов, О. Г. (1982) Бесконечномерные псевдодифференциальные операторы и квантование по Шрёдингеру. *ДАН СССР, 263*, 558—562.

Фомин, С. В. (1968) Обобщённые функции бесконечного числа переменных и их преобразования Фурье. *УМН, 23*(2), 215—216.

ПРО ЗАДАЧУ КОШІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ ТИПУ ШИЛОВА З КОЕФІЦІЄНТАМИ ОБМЕЖЕНОЇ ГЛАДКОСТІ

В. А. Літовченко, Г. М. Унгурян

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

vladlit4@mail.ru, galuna_unguryan@ukr.net

Побудовано розширення просторів типу S шляхом доповнення їх елементами обмеженої гладкості, які мають характерні властивості поведінки в околі нескінченно віддалених точок. У цих просторах для одного класу параболічних систем зі змінними коефіцієнтами скінченної гладкості, що охоплює клас Шилова, установлено коректну розв'язність задачі Коші.

Ключові слова: простори типу S, параболічні системи, задача Коші, коректна розв'язність.

Як відомо, параболічні за Шиловим системи рівнянь із частинними похідними параболічно нестійкі до зміни своїх коефіцієнтів (Хоу-синь, 1960). У зв'язку з цим, розвиток теорії задачі Коші для таких систем відбувався переважно лише у випадку сталих або залежних тільки від часу коефіцієнтів. Тому природним на сьогодні видається бажання розвинення цієї теорії для систем Шилова зі змінними коефіцієнтами. Причому одним із шляхів такого розвитку може бути метод, що полягає в описі нового класу параболічно стійких систем до зміни певної частини своїх коефіцієнтів, який повністю охоплював би клас Шилова, з подальшою розробкою нових чи адаптацією до нього добре відомих (класичних) методів дослідження параболічно стійких систем зі змінними коефіцієнтами.

Я. І. Житомирський (1959) запропонував цікавий підхід до розширення класу параболічних за Шиловим систем, означивши новий клас параболічно стійких систем до зміни молодших коефіцієнтів, які він назвав параболічними системами типу Шилова зі змінними коефіцієнтами. Цей клас гармонічно доповнює клас Петровського систем зі змінними коефіцієнтами й повністю охоплює клас параболічних за Шиловим систем.

Параболічні системи типу Шилова порядку p мають структуру

$$\begin{gathered}\partial_t u(t;x) = \{P_0(t;i\partial_x) + P_1(t,x;i\partial_x)\}u(t;x),\\ (t;x) \in \Pi_{(0;T]} = \{t \in (0;T], x \in \mathbb{R}^n\},\end{gathered} \tag{1}$$

у якій $u := \mathrm{col}(u_1,\ldots,u_m)$, а $P_0(t;i\partial_x)$ і $P_1(t,x;i\partial_x)$ — матричні диференціальні вирази порядків відповідно p й p_1, коефіцієнти яких можуть залежать від часу t, а в P_1 — ще й від просторової змінної x. При цьому система

$$\partial_t u(t;x) = P_0(t;i\partial_x)u(t;x), \quad (t;x) \in \Pi_{(0;T]}, \tag{2}$$

є на множині $\Pi_{[0;T]}$ параболічною за Шиловим з показником параболічності h,

$0 < h \le p$, родом μ та зведеним порядком p_0 (Гельфанд & Шилов, 1958), а p_1 задовольняє наступні умови:

$$(A_1) \qquad 0 \le p_1 < h - n\left(1 - \frac{h\mu}{p_0}\right) - (m-1)(p-h), \ \ 0 \le \mu;$$

$$(A_2) \qquad 0 \le p_1 < h - n(1-\mu) - (m-1)(p-h), \ \ \mu < 0.$$

Для систем (1) Я. І. Житомирський у випадку, коли коефіцієнти диференціального виразу P_0 є сталими, а коефіцієнти виразу P_1 є обмеженими й залежними лише від x диференційовними до певного порядку функціями, методом послідовних наближень установив коректну розв’язність задачі Коші в класі гладких обмежених початкових функцій.

Подальше дослідження задачі Коші для параболічних систем типу Шилова зі змінними коефіцієнтами потребує побудови фундаментального розв’язку задачі Коші (ФРЗК) та всебічного його вивчення.

Для систем (1) з невід’ємним родом μ та обмеженими неперервними за t й нескінченно диференційовими за x коефіцієнтами у статті Літовченко та Довжицька (2010) побудовано ФРЗК та досліджено його основні властивості. Ці результати дозволили в працях Litovchenko та Dovzhytska (2012), Литовченко та Довжицкая (2014), Довжицька (2014) розвинути теорію задачі Коші для таких систем у просторах типу S (Гельфанд & Шилов, 1958), зокрема, установити коректну розв’язність задачі Коші з узагальненими початковими даними типу ультрарозподілів Жевре, одержати форму зображення класичних розв’язків з узагальненими граничними значеннями на початковій гіперплощині, дослідити властивості локалізації й стабілізації розв’язків, а також описати множини узагальнених початкових функцій, для яких відповідні розв’язки є елементами простору S Л. Шварца, або того чи іншого простору типу S І. М. Гельфанда й Г. Є. Шилова

Задля поширення цих результатів на системи (1) з коефіцієнтами вже обмеженої гладкості, у статтях Літовченко та Унгурян (2017), Litovchenko and Unguryan (2017) з’ясовуються умови мінімальної гладкості їх коефіцієнтів стосовно змінної x, за яких існує класичний ФРЗК, та досліджуються його основні властивості.

З огляду на результати, одержані в цих статтях, дамо таке означення.

Означення. Система (1) *належить до класу* $\mathrm{PSh}^{\alpha_*}_{\mu \ge 0}$, $\alpha_* \ge 0$, якщо вона є параболічною типу Шилова системою з родом $\mu \ge 0$, а її коефіцієнти неперервні за змінною t рівномірно стосовно просторової змінної x, неперервно диференційовні за x до порядку α_* включно й обмежені разом зі своїми похідними комплекснозначні функції в шарі $\Pi_{[0;T]}$.

Прикладом системи (1) при $m = n = 1$ із класу $\mathrm{PSh}^{\alpha_*}_{\mu \ge 0}$ з $\alpha_* = 3$ є рівняння

$$\partial_t u(t;x) = \left\{ t^2 \partial_x^3 + \partial_x^2 - \sqrt{t}\partial_x + \frac{t\sqrt[3]{x^{10}}}{(1+x^2)^2} \right\} u(t;x), t \in (0;T], x \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Відповідним параболічним за Шиловим рівнянням є

$$\partial_t u(t;x) = \left\{ t^2 \partial_x^3 + \partial_x^2 - \sqrt{t}\partial_x \right\} u(t;x), t \in (0;T], x \in \mathbb{R},$$

для якого $p = p_0 = 3$, $h = 2$, а $\mu \geq 0$.

Зазначимо, що рівняння (3) не належить до класу рівнянь, параболічних за Петровським, ні до класу рівнянь, параболічних за Шиловим.

Далі мова йтиме про коректну розв'язність задачі Коші для систем (1) із класу $\mathrm{PSh}_{\mu \geq 0}^{\alpha_*}$. Тут середовищем дослідження слугуватимуть спеціальні аналоги просторів типу S, що одержуються в наслідок розширення останніх доповненням їх елементами обмеженої гладкості з характерними властивостями поведінки в околі нескінченно віддалених точок.

Означимо ці простори. Для цього фіксуємо довільно $\alpha > 0$, $a > 0$ та $m \in \mathbb{N}$ і покладаємо

$$M_p(x) := e^{a(1-1/p)\|x\|^{1/\alpha}}, x \in \mathbb{R}^n, p \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

а також, $p(k) := p$, якщо $p < k$ і $p(k) := k$ при $p \geq k$, для $\{p,k\} \subset \mathbb{N}$.

Через $S_{\alpha,a:m}$ позначимо сукупність усіх неперервно диференційовних до порядку m на $\mathbb{R}^n$ функцій $\varphi(\cdot)$, для яких вирази $M_p(x)\partial^q \varphi(x)$, $|q| \leq m$, $p > 1$, обмежені на $\mathbb{R}^n$. Сукупність $S_{\alpha,a:m}$ із системою півнорм

$$\|\varphi\|_{p:m} := \sup_{x, |q| \leq p(m)} \{M_p(x) \mid \partial^q \varphi(x) \mid\}, \ p > 1,$$

є повним зліченно нормованим простором.

При $a > b > 0$ простір $S_{\alpha,a:m}$ є частиною простору $S_{\alpha,b:m}$ і кожна збіжна в $S_{\alpha,a:m}$ послідовність $\{\varphi_\nu, \nu \in \mathbb{N}\}$ збігається також у $S_{\alpha,b:m}$: $S_{\alpha,a:m} \subset S_{\alpha,b:m}$. Покладемо за означенням

$$S_{\alpha:m} := \bigcup_{a>0} S_{\alpha,a:m}.$$

Мають місце такі компактні вкладення: $S_{\alpha:m+1} \subset S_{\alpha:m}$ $(\forall m \in \mathbb{N})$. Очевидно також, що $S_{\alpha:m} \subset S_{\beta:m}$, $\alpha < \beta$, причому це вкладення є неперервним.

При $m = \infty$ простір $S_{\alpha,a:\infty}$ збігається з відповідним простором $S_{\alpha,a}$ з Гельфанд и Шилов (1958), тому справджується топологічна рівність

$$S_{\alpha:\infty} = S_\alpha, \quad (4)$$

у якій S_α відомий простір типу S Гельфанда и Шилова (1958).

Далі, через W' позначатимемо топологічно спряжений простір з W, а через $\mathbb{W}$ — векторний аналог простору W.

Правильні наступні неперервні вкладення:

$$S_\alpha \subset S_{\alpha:m} \subset S'_{\alpha:m} \subset S'_\alpha \ (\forall m \in \mathbb{N}).$$

Задачею Коші для параболічної типу Шилова системи (1) у просторі $\mathbb{S}'_\alpha$ назвемо задачу, яка полягає у знаходженні регулярного розв'язку u цієї системи, який задовольняє задану початкову умову

$$u\Big|_{t=\tau} = f, \ f \in \mathbb{S}'_{\alpha:m} \subset \mathbb{S}'_\alpha,$$

у сенсі слабкої збіжності в просторі $\mathbb{S}'_\alpha$, тобто

$$\left\langle u, \varphi \right\rangle \xrightarrow[t \to \tau + 0]{} \left\langle f, \varphi \right\rangle \ (\forall \varphi \in \mathbb{S}_\alpha)$$

(тут дужками $<,>$ позначено дію узагальненої функції на основну).

Позначемо через $Z(t, x; \tau, \xi)$ ФРЗК для системи (1).

Основний результат сформулюємо у вигляді наступного твердження.

Теорема. *Нехай* (1) *— система з класу* $\mathrm{PSh}^{\alpha_*}_{\mu \ge 0}$ *з індексом* α_* *таким, що* $\alpha_* \ge p - p_1 + \gamma$ *і* $\alpha_* > n + (p - h)(m - 1) + \gamma$ *, а у випадку, коли* $p_1 \ge h(1 - \mu / p_0)$, *то* $\alpha_* \ge p - p_1 + \gamma$. *Тоді якщо* $f \in \mathbb{S}'_{\beta:\alpha_*}$, $\beta \ge 1 - \mu / p_0$, *то відповідна задача Коші для (1) у просторі* $\mathbb{S}'_\beta$, *є розв'язною при* $\gamma = 0$, *і коректно розв'язною при* $\gamma = p_1$ *причому, її розв'язок* u *визначається формулою*

$$u(t; x) = \left\langle f, Z(t, x; \tau, \cdot) \right\rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n, 0 \le \tau < t \le T.$$

На завершення зазначимо, що при $\alpha_* = \infty$ клас $\mathrm{PSh}^{\alpha_*}_{\mu \ge 0}$ збігається із класом $\mathrm{PSh}^{\infty}_{\mu \ge 0}$, означеним у Довжицька (2014), і, з огляду на співвідношення (4), твердження про коректну розв'язність задачі Коші для систем із $\mathrm{PSh}^{\infty}_{\mu \ge 0}$, установлене в Litovchenko та Dovzhytska (2012), Довжицька (2014) стає прямим наслідком сформульованої тут теореми. Крім цього, ці результати є новими також і для параболічних за Петровським систем зі змінними коефіцієнтами обмеженої гладкості.

Список літератури

Litovchenko, V. A., & Dovzhytska, I. M. (2012). Cauchy problem for a class parabolic systems of Shilov type with variable coefficients. *Cent. Eur. J. Math.*, *10*(3), 1084—1102.

Litovchenko, V. A., & Unguryan, G. M. (2017). Parabolic systems of Shilov-type with coefficients of bounded smoothness and nonnegative genus. *Carpathian Mathematical Publications*, *9*(1), 72—85.

Гельфанд, И. М., & Шилов, Г. Е. (1958). *Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений*. Москва: Физматгиз.

Гельфанд, И. М., & Шилов, Г. Е. (1958). *Пространства основных и обобщенных функций*. Москва: Физматгиз.

Довжицька, І. М. (2014). *Задача Коші для параболічних систем типу Шилова із змінними коефіцієнтами та невід'ємним родом*. (Дис. канд. фіз.-мат. наук). Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці.

Житомирский, Я. И. (1959). Задача Коши для некоторых типов параболических по Г. Е. Шилову систем линейных уравнений в частных производных с непрерывными коэффициентами. *Известия АН СССР. Сер. матем.*, *23*, 925—932.

Литовченко, В. А, & Довжицкая, И. М. (2014). Стабилизация решений параболических систем типа Шилова с неотрицательным родом. *Сибирский математический журнал*, *55*(2), 341—349.

Літовченко, В. А, & Довжицька, І. М. (2010). Фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші для одного класу параболічних систем типу Шилова із змінними коефіцієнтами. *Український математичний вісник*, *7*(4), 516—552.

Літовченко, В. А, & Унгурян, Г. М. (2017). Фундаментальний розв'язок задачі Коші для параболічних систем типу Шилова з коефіцієнтами обмеженої гладкості. *Укр. мат. журн.*, *69*(3), 348—364.

Хоу-синь, У. (1960). Об определении параболичности систем уравнений в частных производных. *Успехи математических наук*, *15*(6), 157—161.

ПРО ЗАДАЧУ КОШІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ІЗ ДРОБОВОЮ ПОХІДНОЮ

М. І. Матійчук, В. М. Лучко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

vmluchko@gmail.com

Установлюється зв'язок між функціями Гріна задачі Коші для параболічних псевдодиференціальних рівнянь вищого порядку й відповідних рівнянь із дробовою похідною.

Ключові слова: псевдодиференціальне рівняння, дробова похідна, функція Гріна, задача Коші.

Задачі із дробовими похідними були предметом дослідження багатьох вітчизняних і зарубіжних математиків, зокрема в Вірченко та Рибак (2007) проаналізовано більше двохсот праць. Також тепер проводяться глибокі дослідження задач з псевдодиференціальними операторами.

Розглядається задача Коші для псевдодиференціального рівняння вищого порядку m за змінною t

$$\frac{\partial^m u(t,x)}{\partial t^m} = \mathcal{F}^{-1}_{\sigma\to x}\left(\sum_{\gamma k_0+|\nu|=m\gamma} a_{k_0\nu}(\sigma) D_t^{k_0} V(t,\sigma)\right) + f(t,x) \equiv$$

$$\equiv Au(t,x) + f(t,x), \tag{1}$$

$$D_t^{k-1} u(t,x)\Big|_{t=0} = \varphi_k(x),\ k = \overline{1,m}, \tag{2}$$

$$V(t,\sigma) = \mathcal{F}_{x\to\sigma} u(t,x), x \in \mathbb{R}^n, t \in (0,T].$$

$\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1}$ — перетворення Фур'є, $a_{k_0\nu}(\sigma)$ — символ оператора A, $\gamma \geq 1$.

Нехай α з інтервалу $m-1<\alpha\leq m$. Розглядається поруч з (1), (2) задача для рівняння з похідною Капуто

$$D_t^\alpha u_1(t,x) \equiv \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^t \frac{u_1^{(m)}(\tau,x)\,d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}} = Au_1(t,x) + f(t,x). \tag{3}$$

Припускаємо, що рівняння (1) параболічне, тобто корені характеристичного рівняння

$$\lambda^m - \sum_{\gamma k_0+|\nu|=m\gamma} a_{k_0\nu}(\sigma)\lambda^{k_0} = 0$$

задовольняють нерівність

$$\mathrm{Re}\lambda(\sigma) \leq -\delta_0|\sigma|^\gamma,$$

причому $a_{k_0\nu} \in \mathcal{C}^{(N)}(\mathbb{R}^n)$ і

$$\left|D_\sigma^l a_{k_0\nu}(\sigma)\right| \le c_N \left|\sigma\right|^{\nu-|l|},\ N \ge 2n+\gamma+1,$$

$a_{k_0\nu}(\sigma)$ — однорідні степеня ν.

Розв’язок задачі Коші (1), (2) визначається формулою

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{m}\int_{\mathbb{R}^n} G_k(t,x-\xi)\varphi_k(\xi)d\xi + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_k(t-\tau,x-\xi)f(\tau,\xi)d\xi, \quad (4)$$

де для компонент $(G_1,\ldots,G_m,G)$ правильні нерівності (Luchko, 2012)

$$\begin{aligned} \left|G_i(t,x)\right| &\le ct^i\left(t^{\frac{1}{\gamma}} + |x|\right)^{-n-\gamma}, i=\overline{1,m}, \\ \left|G(t,x)\right| &\le ct^m\left(t^{\frac{1}{\gamma}} + |x|\right)^{-n-\gamma}. \end{aligned} \quad (5)$$

Для випадку $m=1$ для задачі Коші із дробовими похідними (Матійчук, 2016)

$$D_t^\alpha u_1(t,x) \equiv \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{u_1'(\tau,x)d\tau}{(t-\tau)^\alpha} = \mathcal{F}^{-1}\left[P(\sigma)\mathcal{F}u\right] + f_1(t,x), \quad (6)$$

$$u(t,x)\Big|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad (7)$$

одержано зображення розв’язку у вигляді (4), де

$$G_1^{(\alpha)}(t,x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}p^{\alpha-1}dp\int_0^\infty e^{-p^\alpha\tau}G_0(\tau,x)d\tau,$$

$$G^{(\alpha)}(t,x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt}dp\int_0^\infty e^{-p^\alpha\tau}G_0(\tau,x)d\tau,$$

а $G_0(t,x)$ функція Гріна задачі Коші для (1)

$$G_0(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\sigma x - \mathrm{P}(\sigma)t}d\sigma.$$

За допомогою нерівностей (5) оцінюються компоненти $G_1^{(\alpha)}, G^{(\alpha)}$ і розв’язок задачі (6), (7).

Список літератури

Luchko, V. M. (2012). Cauchy problem for a parabolic pseudodifferential higher-order equation with pulse action. *J. Math. Sci.*, *185*(6), 755–777.

Вірченко, Н. О., & Рибак, В. Я. (2007). *Основи дробового інтегро-диференціювання*. Київ: ТОВ «Задруга».

Матійчук, М. І. (2016). Про зв’язок між фундаментальними розв’язками параболічних рівнянь і рівнянь з дробовими похідними. *Буковинський математичний журнал*, *4*(3—4), 101—114.

КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

О. В. Махней

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ, Україна

oleksandr.makhnei@pu.if.ua

Запропоновано схему розв’язування мішаної задачі за загальних крайових умов для рівняння теплопровідності з коефіцієнтом, який є узагальненою похідною функції обмеженої варіації. Отримані результати можна використовувати для дослідження процесу теплопередачі в багатошаровій плиті.

Ключові слова: крайова задача, квазіпохідна, власні функції.

Крайові задачі для диференціальних рівнянь теплопровідності із гладкими коефіцієнтами вивчено досить добре (див., наприклад, Тихонов та Самарский (1977)). Однак, під час моделювання процесів передачі тепла часто виникають крайові задачі з кусково-неперервними коефіцієнтами або коефіцієнтами, які є узагальненими похідними від розривних функцій. Такі задачі вже почали вивчатись у роботах Тацій, Власій та Стасюк (2014), Тацій, Пазен та Ушак (2015).

Розглянемо крайову задачу для диференціального рівняння теплопровідності: знайти розв’язок $T(x,t)$ рівняння

$$a(x)\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x)\frac{\partial T}{\partial x}\right) \tag{1}$$

із крайовими умовами

$$\begin{cases} p_{11}T(0,t)+p_{12}T_x^{[1]}(0,t)+q_{11}T(l,t)+q_{12}T_x^{[1]}(l,t)=\psi_1(t), \\ p_{21}T(0,t)+p_{22}T_x^{[1]}(0,t)+q_{21}T(l,t)+q_{22}T_x^{[1]}(l,t)=\psi_2(t) \end{cases} \tag{2}$$

за початкової умови

$$T(x,0)=\varphi(x), \tag{3}$$

якщо $a(x)=b'(x),\ b(x)$ — неперервна справа неспадна дійсна функція обмеженої варіації на проміжку $[0,l],\ \lambda(x)>0,\ \lambda^{-1}(x)$ — обмежена і вимірна функція на проміжку $[0,l]$, функція $\varphi(x)$ — неперервна на відрізку $[0,l]$, функції $\psi_1(t)$ і $\psi_2(t)$ — неперервно диференційовні для $t\ge 0,\ p_{ij},\ q_{ij},\ i,j=1,2,$ — дійсні числа, а

$$T_x^{[1]}(x,t)\overset{df}{=}\lambda(x)\frac{\partial T}{\partial x}$$

— квазіпохідна. Штрихом у формулі $a(x)=b'(x)$ позначено узагальнене диференціювання, а тому $a(x)$ — міра, тобто узагальнена функція нульового порядку над простором неперервних фінітних функцій (Халанай & Векслер, 1971).

Розв’язок задачі (1)—(3) шукаємо методом редукції у вигляді суми двох функцій:

$$T(x,t) = u(x,t) + v(x,t).$$

Функція $u(x,t)$ є розв'язком крайової квазістаціонарної задачі:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x)\frac{\partial T}{\partial x}\right) = 0,$$

$$\begin{cases} p_{11}u(0,t) + p_{12}u_x^{[1]}(0,t) + q_{11}u(l,t) + q_{12}u_x^{[1]}(l,t) = \psi_1(t), \\ p_{21}u(0,t) + p_{22}u_x^{[1]}(0,t) + q_{21}u(l,t) + q_{22}u_x^{[1]}(l,t) = \psi_2(t), \end{cases}$$

яка отримується з задачі (1)—(3), якщо t вважати параметром.

Функцію $u(x,t)$ можна обчислити як першу координату вектора $\overline{u} = (u, u^{[1]})^T$ за формулою

$$\overline{u}(x,t) = B(x,0)\cdot(P + Q\cdot B(l,0))^{-1}\cdot\overline{\Gamma}(t),$$

де

$$B(x,s) = \begin{pmatrix} 1 & \sigma(x,s) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma(x,s) = \int_s^x \frac{dt}{\lambda(t)},$$

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}, \quad \overline{\Gamma}(t) = \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{pmatrix}.$$

Функцію $v(x,t)$, що є розв'язком мішаної задачі

$$a(x)\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x)\frac{\partial v}{\partial x}\right) - a(x)\frac{\partial u}{\partial t},$$

$$\begin{cases} p_{11}v(0,t) + p_{12}v_x^{[1]}(0,t) + q_{11}v(l,t) + q_{12}v_x^{[1]}(l,t) = 0, \\ p_{21}v(0,t) + p_{22}v_x^{[1]}(0,t) + q_{21}v(l,t) + q_{22}v_x^{[1]}(l,t) = 0, \end{cases}$$

$$v(x,0) = \tilde{\varphi}(x), \quad \tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - u(x,0),$$

шукаємо у вигляді ряду

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(t)X_k(\omega_k, x).$$

Якщо цей ряд збігається рівномірно й рівномірно збігаються ряди, отримані з нього почленним диференціюванням за змінними x і t, то функцію $v(x,t)$ можна знайти за формулою

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\varphi_k e^{-\omega_k t} - \int_0^t d_k(s)e^{\omega_k(s-t)}ds\right)X_k(\omega_k, x),$$

де $X_k(\omega_k, x)$ — власні функції задачі на власні значення

$$(\lambda(x)X'(x))' + \omega a(x)X(x) = 0,$$

$$\begin{cases} p_{11}X(0) + p_{12}X^{[1]}(0) + q_{11}X(l) + q_{12}X^{[1]}(l) = 0, \\ p_{21}X(0) + p_{22}X^{[1]}(0) + q_{21}X(l) + q_{22}X^{[1]}(l) = 0, \end{cases}$$

відповідні власним значенням ω_k, а φ_k, $d_k(t)$ — коефіцієнти розвинення функцій $\tilde{\varphi}(x)$ і $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ за власними функціями $X_k(\omega_k, x)$:

$$\varphi_k = \frac{1}{\|X_k\|} \int_0^l \tilde{\varphi}(x) X_k(\omega_k, x) db(x),$$

$$d_k(t) = \frac{1}{\|X_k\|} \int_0^l \frac{\partial u}{\partial t} X_k(\omega_k, x) db(x),$$

$$\|X_k\| = \int_0^l X_k^2(\omega_k, x) db(x).$$

Список літератури

Тихонов, А. Н., & Самарский, А. А. (1977). *Уравнения математической физики* (5-е изд.). Москва: Наука.

Тацій, Р. М., Власій, О. О., & Стасюк, М. Ф. (2014). Загальна перша крайова задача для рівняння теплопровідності з кусково-змінними коефіцієнтами. *Вісник національного університету «Львівська політехніка». Фізико-математичні науки*, *804*, 64—69.

Тацій, Р. М., Пазен, О. Ю., & Ушак, Т. І. (2015). Загальна третя крайова задача для рівняння теплопровідності з кусково-сталими коефіцієнтами та внутрішніми джерелами тепла. *Пожежна безпека*, *27*, 135—141.

Халанай, А., & Векслер, Д. (1971). *Качественная теория импульсных систем*. Москва: Мир.

НЕЛИНЕЙНАЯ ОБРАТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ БУССИНЕСКА ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ

Я. Т.Мегралиев, Ф. Х. Ализаде

Бакинский государственный университет, Баку, Азербайджан

yashar_aze@mail.ru, farxad@gmail.com

В работе исследована одна обратная краевая задача для одного уравнения Буссинеска четвертого порядка с нелокальными условиями. Сначала исходная задача сводится к эквивалентной задаче, для которой доказывается теорема существования и единственности решения. Далее, пользуясь этими фактами доказываются существование и единственность классического решения исходной задачи.

Ключевые слова: обратная задача, уравнения Буссинеска, существование, единственность, классического решения.

В последнее время уделяется большое внимание изучению различных эволюционных уравнений, описывающих волновые процессы в средах с дисперсией. Одним из них является уравнение Буссинеска (Boussinesq, 1872), описывающее распространение длинных волн на мелкой воде. Это уравнение интересно как с физической, так и с математической точки зрения.

Известно немало случаев, когда потребности практики приводят и задачам определения коэффициентов или правой части дифференциального уравнения по некоторым известным данным от его решения. Такие задачи получили название *обратных задач* математической физики. Обратные задачи представляют собой активно развивающийся раздел современной математики.

В предлагаемой статье рассмотрена обратная краевая задача с нелокальными условиями для уравнения Буссинеска четвёртого порядка.

В прямоугольнике

$$D_T = \{(x,t):\ 0 \le x \le 1, \quad 0 \le t \le T\}$$

рассмотрим уравнение [1]

$$u_{tt}(x,t) - 2\alpha u_{txx}(x,t) + \beta u_{xxxx}(x,t) = a(t)u(x,t) + f(x,t) \tag{1}$$

и поставим для него обратную краевую задачу с нелокальными начальными условиями

$$u(x,0) + \int_0^T p(t)u(x,t)dt = \phi(x),$$

$$u_t(x,0) + \delta u(x,T) = \psi(x)\ (0 \le x \le 1), \tag{2}$$

граничными условиями

$$u(0,t) = u(1,t) = u_{xx}(0,t) = u_{xx}(1,t) = 0\ \ (0 \le t \le T) \tag{3}$$

и дополнительным нелокальным интегральным условием

$$\int_0^1 g(x)u(x,t)dx = h(t) \ (0 \le t \le T), \tag{4}$$

где $\alpha > 0, \beta > \alpha^2, \delta \ge 0$ — заданные числа, $f(x,t)$, $p(t), \phi(x)$, $\psi(x)$, $g(x)$, $h(t)$ — заданные функции, а $u(x,t)$ и $a(t)$ — искомые функции.

Определение. Под *классическим решением* задачи (1)—(4) понимаем пару $\{u(x,t), a(t)\}$ функций $u(x,t)$ и $a(t)$, обладающих следующими свойствами:

а) $u(x,t), u_x(x,t), u_{xx}(x,t), u_{xxx}(x,t), u_{xxxx}(x,t)$,

$u_t(x,t), u_{tx}(x,t), u_{txx}(x,t), u_{tt}(x,t) \in C(D_T)$;

б) функция $a(t)$ непрерывна на $[0,T]$;

в) уравнение (1) и условия (2)—(4) удовлетворяются в обычном смысле.

Наряду с обратной краевой задачей (1)—(4) рассмотрим следующую вспомогательную обратную краевую задачу:

Требуется определить пару $\{u(x,t),\, a(t)\}$ функций $u(x,t), a(t)$, обладающих свойствами а) и б) определения классического решения задачи (1)—(4), из соотношений (1)—(3),

$$h''(t) - 2\alpha\int_0^1 g(x)u_{txx}(x,t)dx + \beta\int_0^1 g(x)u_{xxxx}(x,t)dx =$$

$$= a(t)h(t) + \int_0^1 g(x)f(x,t)dx \quad (0 \le t \le T). \tag{5}$$

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть* $\phi(x)$, $\psi(x)$, $g(x) \in C[0,1], p(t) \in C[0,T]$, $h(t) \in C^2[0,T]$, $h(t) \ne 0 \ (0 \le t \le T)$, $f(x,t) \in C(D_T)$ *и выполняются условия согласования*

$$\int_0^1 g(x)\phi(x)dx = h(0) + \int_0^T p(t)h(t)dt,$$

$$\int_0^1 g(x)\psi(x)dx = h'(0) + \delta h(T).$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

А. Каждое классическое решение $\{u(x,t), a(t)\}$ *задачи* (1)—(4) *является и решением задачи* (1)—(3), (5);

Б. Каждое решение $\{u(x,t), a(t)\}$ *задачи* (1)—(3), (5), *такое, что*

$$\left(\frac{\delta T}{1+\delta T}\left(\|p(t)\|_{C[0,T]} + T\|a(t)\|_{C[0,T]}\right) + \|p(t)\|_{C[0,T]} + \frac{T}{2}\|a(t)\|_{C[0,T]}\right)T < 1$$

является классическим решением (1)—(4).

Предположим, что данные задачи (1)—(3), (5) удовлетворяют следующим условиям:

1) $\phi(x) \in C^4[0,1]$, $\phi^{(5)}(x) \in L_2(0,1)$,

$$\phi(0) = \phi(1) = \phi''(0) = \phi''(1) = \phi^{(4)}(0) = \phi^{(4)}(1) = 0.$$

2) $\psi(x) \in C^2[0,1]$, $\psi^{(3)}(x) \in L_2(0,1)$, $\psi(0) = \psi(1) = \psi''(0) = \psi''(1)) = 0$;

3) $f(x,t)$, $f_x(x,t)$, $f_{xx}(x,t) \in C(D_T)$, $f_{xxx}(x,t) \in L_2(D_T)$,

$f_x(0,t) = 0, f_x(0,t)f_x(0,t)f_x(0,t)f_x(0,t)f_x(0,t)f_x(1,t) = 0\,(0 \le t \le T)$;

4) $g(x) \in C[0,1], p(t) \in C[0,T]$, $h(t) \in C^2[0,T]$, $h(t) \ne 0$ $(0 \le t \le T)$;

5) $\alpha \ge 0, \delta \ge 0, \beta - \alpha^2 > 0, \sqrt{\beta - \alpha^2}\pi^2 > \delta e^{-\alpha\pi^2 T}$.

Можно доказать следующую теорему:

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* 1)—5).

Тогда при достаточно малых значениях T *задача* (1)—(3), (5) *имеет единственное решение.*

Теорема 3. *Пусть выполняются все условия теоремы 2 и*

$$\int_0^1 g(x)\phi(x)dx = h(0) + \int_0^T p(t)h(t)dt,$$

$$\int_0^1 g(x)\psi(x)dx = h'(0) + \delta h(T),$$

$$\left(\frac{\delta T}{1+\delta T}\left(\left\|p(t)\right\|_{C[0,T]} + T(A(T)+2)\right) + \left\|p(t)\right\|_{C[0,T]} + \frac{T}{2}(A(T)+2)\right)T < 1.$$

Тогда при достаточно малых значениях T *задача* (1)—(4) *имеет единственное классическое решение.*

Список литературы

Boussinesq, J. (1872). Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, *17*, 55–108.

ОБЧИСЛЕННЯ КОМПОНЕНТ СИЛИ ДЛЯ ТОНКОГО КРИЛА У СТАЦІОНАРНОМУ РЕЖИМІ

М. В. Ногін

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ, Україна

nvnogin@gmail.com

Робота присвячена обчисленню компонент вектора сили, у тому числі підсмоктувальної сили, які діють на тонкий профіль, що рухається в потоці ідеальної рідини у стаціонарному режимі. Як приклад розглянуто спрощення методу О. І. Некрасова розв’язання задачі про безциркуляційне обтікання пластини.

Ключові слова: ідеальна рідина, стаціонарний режим, тонкий профіль, циркуляція, комплексна швидкість, теорема Жуковського в малому, кут атаки.

Дослідження процесів руху нескінченно тонкого плоского профілю в потоці потенціальної або ідеальної рідини, як у стаціонарному, так і в нестаціонарному режимах присвячена велика кількість робіт, зокрема (Седов, 1966; Некрасов, 1947; Ногин, 2016). розглянемо обтікання такого профілю з «малим радіусом» кола передньої кромки, швидкість руху може стати настільки великою, що тиск буде набувати від’ємних значень. Більш того, якщо спрямувати радіус до нуля, тоді від’ємні значення швидкості прямують до нескінченності, відповідно площа елементарної ділянки спереду прямує до нуля. У цьому граничному випадку на крило діє підсмоктувальна сила (рис. 1)

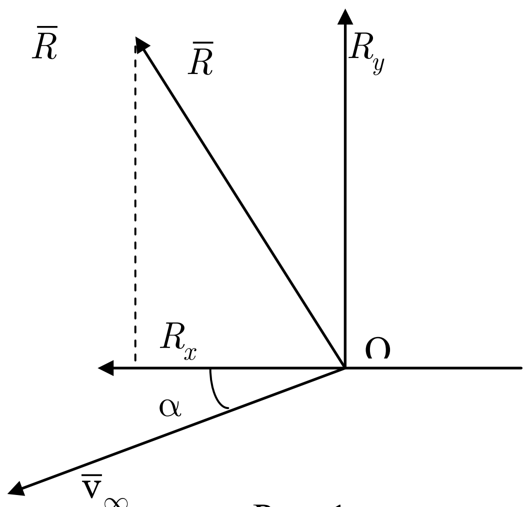


Рис. 1

У відповідності з теоремою Жуковського «в малому» визначається лише перепад тиску. далі, за теоремою про зміну кількості рідини (в комплексній формі) до контуру $C \cup L$ (Седов, 1966; Некрасов, 1947)

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\int_C \rho e^{i\theta} ds + P, \tag{1}$$

де R — кількість руху рідини в області D, обмеженої контуром $L \cup C$.

Через потенціал швидкості, для нестисливої рідини

$$R = \rho \iint_D \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dxdy = -i\rho \oint_{C \cup L} \varphi dz \qquad (2)$$

Запишемо також рівняння Коші — Лагранжа в рухомій системі координат

$$p - p_\infty = -\rho \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \overline{\mathrm{v}}_{\bar{i}} \nabla \varphi + \tfrac{1}{2} \left(\nabla \varphi \right)^2 \right], \qquad (3)$$

і далі, зокрема

$$\int_C \rho e^{i\theta} i \rho e^{i\theta} d\theta = -i\rho \int_C \overline{v}_l \cdot \nabla \varphi dz + \tfrac{i}{2} \beta \int_C \left(\nabla \varphi \right)^2 dz \qquad (4)$$

З урахуванням (2)—(4), після перетворень і результатів Некрасов (1947) одержано вираз для підсмоктувальної сили, через комплексну швидкість

$$P = -\tfrac{i}{2} \rho \int_C \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz + i\rho \int_{£} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dz - i\rho \int_C \left(\overline{\mathrm{v}}_{\bar{i}} \nabla \varphi \right) dz$$

причому, якщо $\varepsilon \to 0$, то підсмоктувальна сила

$$Q = -\pi \rho \lim_{r \to 0} \left\{ z \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 \right\}.$$

Автор висловлює подяку чл.-кор. НАН України Г. О. Воропаєву за допомогу в написанні роботи.

Список літератури

Некрасов, А. И. (1947). *Теория крыла в нестационарном потоке*. Москва: Изд-во АН СССР.

Ногин, Н. В. (2016). Стационарный процесс обтекания тонкого профиля потоком идеальной жидкости. У *Матеріалах П’ятої міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті»*, Київ, 29—30 грудня 2016 року (с. 87—88). Київ: НТУУ «КПІ».

Седов, Л. И. (1966). *Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики*. Москва: Наука.

МЕТОД ДИФЕРІНТЕГРУВАННЯ ГРАНИЧНИХ УМОВ ФРАКТАЛЬНО-ГО ТИПУ В ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦІЇ

В. М. Онуфрієнко, Т. І. Слюсарова, Л. М. Онуфрієнко
Запорізький національний технічний університет, Запоріжжя, Україна
onufr@zntu.edu.ua, slyus7641@ukrpost.ua, lonufr@zntu.edu.ua

Диферінтегруванням граничних умов фрактального типу виведено рівняння для пласких задач теорії дифракції на фракталах. Проаналізовано умови зведення задач з різною поляризацією поля до диферінтегральних рівнянь Фредгольма першого роду. Досліджено відповідність цих рівнянь класичним за нульових значень скейлінгових показників.

Ключові слова: диферінтеграл, фрактал, граничні умови фрактального типу, інтегральне рівняння Фредгольма першого порядку.

Для постановки й розв’язування задач математичної теорії дифракції електромагнітних хвиль на пласких поверхнях використовується запропонований Ґрінбергом метод виводу інтегральних рівнянь (Захаров & Пименов, 1982). Спираючись на схему цього методу, розглянемо далі питання про виведення рівнянь у термінах диферінтегралів для непласких фрактально конфігурованих циліндричних поверхонь.

Для множин відомі результати опису їх ортогонального проектування на підпростори з нижчою розмірністю. У випадку фракталів існує можливість інтегродиференціального визначення α-міри Хаусдорфа $H^{(\alpha)}(F)$ фрактального носія F заряду (струму) через застосування відображення у вигляді ортогонального проектування фрактала на діаметр розглядуваної множини.

Розгляд інтегродиференціальної моделі для опису розподілів зарядів (струмів) на фрактальному носієві F у випадку скінченної α-енергії дозволяє стверджувати: F має розмірність, що принаймні дорівнює α. Нормований α-потенціал розподілу заряду(струму) $\mathrm{j}(x)$ існує у вигляді

$$\Phi^{(\alpha)}(x) = \gamma(\alpha)\int_X \frac{d\mathrm{j}(x')}{\left|x-x'\right|^{\alpha}} = {}_xD^{\alpha}_{x'}\mathrm{j},$$

де $\gamma(\alpha) = 1 / \Gamma(1-\alpha)$. Очевидно, що значення $\alpha = 1$ відповідає означенню класичного потенціалу електричного заряду (для масового розподілу — ньютонового гравітаційного потенціалу) (Онуфрієнко & Куземко, 2014).

Подальший розгляд проблеми та побудова строгого розв’язку задачі дифракції хвиль на фрактальній поверхні S (зі скейлінгом α_2) базується на

— рівняннях Максвела та Гельмгольца, записаних у диферінтегральних α-формах (Onufriyenko, 2004) та визначення диферінтегральних α-потенціалів типу

$$\vec{A}^{(\alpha)} = \frac{\mu}{4\pi}\int_S \frac{\vec{j}^{(\alpha_1)}e^{-ikL}}{L}d^{\alpha_2}S,$$

що задовольняють однорідне рівняння Гельмгольца

$$\nabla^2 \vec{A}^{(\alpha)} + k^2 \vec{A}^{(\alpha)} = 0$$

поза S та враховують фрактальну щільність струмів (зі скейлінгом α_1), наведених на цій поверхні, (L — відстань від елемента $\mathrm{d}^{\alpha_2}\,\mathrm{S}$ до точки спостереження) та зв'язані умовою калібрування

$$\mathrm{div}\vec{\mathrm{A}}^{(\alpha)} + i\omega b \Psi^{(\alpha)} = 0;$$

— запис виразів для компонент поля $\vec{\mathrm{E}}$ через α-потенціали

$$\vec{\mathrm{E}}^{(\alpha)} = -\mathrm{grad}\,\Psi^{(\alpha)} - i\omega\,\vec{\mathrm{A}}^{(\alpha)};$$

— формулювання диферінтегрального рівняння з використанням граничних умов типу Діріхле — Неймана для тангенціальних складових

$$\left[\vec{\mathrm{n}}_0, \vec{\mathrm{E}}^{(\alpha)}(M)\right] = -\left[\vec{\mathrm{n}}_0, \mathrm{E}^{0(\alpha)}(M)\right], \quad M \in S, \tag{1}$$

де $\vec{\mathrm{n}}_0$ — орт нормалі до поверхні S; M — точка, де визначається поле; $\mathrm{E}^{0(\alpha)}(M)$ та $\mathrm{E}^{(\alpha)}(M)$ відповідно первинне (задане) та вторинне (шукане) поля.

Для S, фрактально провідної незамкнутої циліндричної поверхні з напрямним контуром Γ (з елементом $d^{\alpha_2}\,\mathrm{l}$ на ньому) та необмежено протяжної вздовж твірних, введемо систему координат x, y, z так, щоб вісь Oz була паралельна твірним.

Якщо первинне поле не залежить від змінної z, векторний потенціал $\vec{A}$ визначається через щільність струмів $\vec{\mathrm{j}}^{(\alpha_1)}$, наведених на поверхні S, як

$$\vec{A}^{(\alpha)}\left(x, y\right) = -\frac{i\mu}{4}\int\limits_{\Gamma} \vec{j}^{(\alpha_1)}\left(\mathrm{l}\right) H_0^{(2)}\left(kL\right) d^{(\alpha_2)}\,\mathrm{l}, \tag{2}$$

де $H_0^{(2)}\left(kL\right)$ — функція Ханкеля другого роду нульового порядку; $d^{(\alpha_2)}\,\mathrm{l}$ — диферінтегральний елемент контуру Γ.

Розв'язування двовимірної задачі такого типу, як і у класичному випадку [1], зводимо до розгляду двох незалежних окремих задач для так званих E- та H-поляризованих первісних полів.

Для E-поляризованих первісних полів на поверхні S розглядаються вектори наведених поздовжніх електричних струмів густиною

$$\vec{j}^{(\alpha_1)} = \vec{z}^0 j^{(\alpha_1)}\left(t\right), \ \alpha \le t \le \beta. \tag{3}$$

У розглядуваному випадку $\mathrm{div}\ \vec{A}^{(\alpha)} = 0$, то з (1)—(3) безпосередньо випливає інтегральне рівняння

$$\frac{\omega\mu}{4}\int\limits_{\alpha}^{\beta} j^{(\alpha_1)}\left(t\right) H_0^{(2)}\left(kL_0\left(\tau, t\right)\right)\sqrt{\left(\xi'\left(t\right)\right)^2 + \left(\eta'\left(t\right)\right)^2}\, d^{(\alpha_2)}t = \mathrm{E}_z^{0(\alpha)}\left(\tau\right), \tag{4}$$

де

$$L_0(\tau,t) = L\big|_\Gamma = \sqrt{\left(\xi(\tau)-\xi(t)\right)^2 + \left(\eta(\tau)-\eta(t)\right)^2},$$

$\mathrm{E}_z^{0(\alpha)}(\tau)$ — поздовжня складова напруженості первісного електричного поля в точці $M_0 \in \Gamma$.

Таким чином ми звели двовимірну задачу дифракції E-поляризованого поля на ідеальній фрактально провідній незамкнутій циліндричній поверхні S до розв’язування інтегрального рівняння Фредгольма 1-го роду (4) для довільної форми циліндричної поверхні S із фрактальним розподілом (струмів) зарядів.

Нехай для H-поляризованих первісних полів поверхня S збігається з частиною поверхні $q = q_0$ ортогональної системи координат q, τ, z. На контурі Γ змінна q має стале значення $q = q_0$, $\alpha \le \tau \le \beta$. Коефіцієнти Ламе h_q, h_τ можуть бути функціями

$$h_q(q,\tau), h_\tau(q,\tau), \text{ а } h_z \equiv 1.$$

Под дією H- поляризованого поля на поверхні S наводяться електричні струми, перпендикулярні твірним поверхні S (осі z), густини

$$\vec{j}^{(\alpha_1)} = \vec{t}^{\,0} j^{(\alpha_1)}(t),\ \alpha \le t \le \beta, \tag{5}$$

де $\vec{t}^{\,0}$ — орт дотичної до контуру Γ в точці M.

Напруженість вторинного електричного поля у цьому випадку визначається через векторний $\vec{A}^{(\alpha)}$ і скалярний $\Psi^{(\alpha)}$ потенціали з виконанням умов калібрування.

Векторный потенциал $\vec{A}^{(\alpha)}$ визначається через густину струму $j^{(\alpha_1)}(t)$ залежністю, що аналогічна (4), яку можна записати як

$$\vec{A}^{(\alpha)} = -\frac{i\mu}{4}\int_\alpha^\beta \vec{t}^{\,0} j^{(\alpha_1)}(t)\, g_1(q,\tau,t)\, d^{(\alpha_2)}t, \tag{6}$$

де

$$g_1(q,\tau,t) = H_0^{(2)}\left(kL(q,\tau,t)\right) h_\tau(q_0,t),$$

$$L(q,\tau,t) = \sqrt{\left(x(q,\tau)-x(q_0,t)\right)^2 + \left(y(q,\tau)-y(q_0,t)\right)^2},\ L(q_0,\tau,t) = L(\tau,t).$$

Для розглядуваного випадку (на відмінність від E-поляризації)

$$\operatorname{div}\ \vec{A}^{(\alpha)} \ne 0,$$

отже безпосереднім застосуванням умов (1) та зв’язку між векторами поля і потенціалами одержуємо не диферінтегральне, а інтегро-диферінтегральне рівняння для функції $j^{(\alpha_1)}(t)$.

З урахуванням умови калібрування граничні умови записуються у вигляді

$$\widehat{\mathrm{A}}_{\tau}^{(\alpha)}(\tau) = -\frac{i}{\omega}\mathrm{E}_{\tau}^{0(\alpha)}(\tau) + \frac{i}{\omega\widehat{h}_{\tau}(\tau)}\frac{d\Psi^{(\alpha)}(\tau)}{d\tau}, \qquad (7)$$

$$\widehat{A}_{\tau}^{(\alpha)}(\tau) = A_{\tau}^{(\alpha)}(q_0,\tau),\ \widehat{h}_{\tau}(\tau) = h_{\tau}(q_0,\tau)$$

і т. д. означає, що функція обчислюється в точці $M_0 \in \Gamma$, де $\alpha \le \tau \le \beta$.

Отже, векторний потенціал набуває виду

$$\widehat{A}_{\tau}^{(\alpha)}(\tau) = -\frac{i\mu}{4}\int_{\alpha}^{\beta} j^{(\alpha_1)}(t)\, g_1(q_0,\tau,t)\left(\vec{\tau}^{\,0},\vec{t}^{\,0}\right)d^{(\alpha_2)}t, \qquad (8)$$

де $\vec{\tau}^{\,0}$ — орт дотичної до контуру Γ в точці $M_0 = M_0(q_0,\tau)$, а скалярний добуток $\left(\vec{\tau}^{\,0},\vec{t}^{\,0}\right)$ є функцією від τ, t.

Для відомих функцій $\Psi^{(\alpha)}$ рівняння (8) з урахуванням (7) розглядається як диферінтегральне рівняння для функції $j^{(\alpha_1)}$. Як і у класичному випадку, функцію $\Psi^{(\alpha)}$ можна визначити незалежно від $j^{(\alpha_1)}$ тільки для пласких поверхонь, але існує можливість визначення її та похідної, що входить у вираз граничних умов, у вигляді інтеграла від $j^{(\alpha_1)}$.

Таким чином, двовимірну задачу дифракції H-поляризованої електромагнітної хвилі на ідеально провідній незамкнутій циліндричній поверхні S зведено до диферінтегрального рівняння Фредгольма 1-го роду. Ядро такого рівняння є ядром того ж типу, що виникає в умовах постановки задачі з E-поляризованим полем.

Порівнянням одержаних диферінтегральних рівнянь Фредгольма 1-го роду за нульових значень скейлінгових показників підтверджується збіг їх з класичним нефрактальним випадком граничних умов задач дифракції.

Список літератури

Onufriyenko, V. M. (2004). Differinegral $\alpha - \varpi$-forms of charges and currents distribution on the fractal artificial media. In *Mathematical Methods in Electromagnetic Theory*, DNU (p. 438–440). Dnepropetrovsk: DNU.

Захаров, Е. В., & Пименов, Ю.В. (1982). *Численный анализ дифракции радиоволн*. Москва: Радио и связь.

Онуфрієнко, В. М., & Куземко, А. В. (2014). Фрактальний шар зарядів у граничній задачі як узагальнення простого та подвійного шарів. У *Матеріалах П'ятнадцятої Міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті»*, НТУУ «КПІ», Київ, 15—17 травня (Т. 1, Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування, с. 235). Київ: НТУУ «КПІ».

ПРО ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНУ ДИХОТОМІЮ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

З. П. Ординська

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ, Україна

Вивчаються умови неперервної залежності від параметрів підпросторів на які представляють евклідовий простір $\mathbb{R}_n$ в е-дихотомічній системі диференціальних рівнянь.

Ключові слова: експоненціальна дихотомія, інваріантний тор, фундаментальна матриця системи.

Питання існування інваріантних торів, дослідження умов їх зберігання при малих збуреннях у різноманітних системах диференціальних рівнянь, динамічних системах, системах диференціальних рівнянь з параметрами, що повільно змінюються та інших глибоко вивчались у роботах, поданих у списку літератури, які привели до появи цілого ряду досліджень у цьому напрямку.

Розглянемо систему лінійних диференціальних рівнянь з параметрами $p(p_1,...p_m)$

$$\dot{x} = A(t,p)x, \tag{1}$$

де $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $x(x_1,...x_n)$, $A(t,p)$ — матрична функція, неперервна за всіма аргументами t,p, $t \in \mathbb{R}$, $p \in K \subset \mathbb{R}^m$, обмежена, $\left\|A(t,p)\right\| \le K = \text{const} < \infty$ (K — однозв'язна компактна множина з m- вимірного евклідового простору).

Нехай при кожному фіксованому $p \in K$ система (1) є е-дихотомічна, тобто евклідовий простір $\mathbb{R}^n$ представляється у вигляді прямої суми двох підпросторів $E^+(p)$ і $E^-(p)$, що залежать від параметрів p таких, що

$$\left\|\Omega_0^t(p)x^+\right\| \le K_1(p)\left\|\Omega_0^\tau(p)x^+\right\|\exp\left\{-\gamma(p)(t-\tau)\right\},\ t \ge \tau,\ x^+ \in E^+(p),$$
$$\left\|\Omega_0^t(p)x^-\right\| \le K_1(p)\left\|\Omega_0^\tau(p)x^-\right\|\exp\left\{\gamma(p)(t-\tau)\right\},\ t \le \tau,\ x^- \in E^-(p) \tag{2}$$

де $\Omega_0^t(p)$ — нормальна фундаментальна матриця розв'язків системи рівнянь (1), $\Omega_0^0(p) = I$, $I - n$-вимірна одинична матриця, $K_1(p) > 0, \gamma(p) > 0$.

Виникає питання: чи неперервно залежать від параметрів $p \subset K$ підпростори $E^+(p)$ і $E^-(p)$? Чи можливо вибрати додатні сталі $K_1(p)$ й $\gamma(p)$ в наведених оцінках незалежними від p? Відповідь на ці питання дає

Теорема. *Нехай система рівнянь* (1) *при кожному фіксованому значенні параметра* $p \in K$ *е-дихотомічна і для неперервної матричної функції* $A(t,p)$ *виконується умова*

$$\left\|A(t,p) - A(t,\overline{p})\right\| \le \mu\left(\left\|p - \overline{p}\right\|\right)$$

при всіх p *і*

$$\overline{p} \in K \left\| p - \overline{p} \right\| \leq d,$$

де d *— деяка фіксована стала,* $\mu(u)$ *— визначена на відрізку* $[0, d]$ *неперервна функція,* $\mu(0) = 0$.

Тоді підпростори $E^{+}(p)$ *і* $E^{-}(p)$ *неперервно залежать від параметра* $p \in K$ *і додатні сталі* $K_1(p)$ *й* $\gamma(p)$ *в оцінках* (2) *можна вибирати незалежним від параметрів* p.

Список літератури

Ордынская, З. П., & Кулик, В. Л. (1984). Об экспоненциальной дихотомичности систем дифферециальных уранений. *Сибирский математический журнал*, *24*(3), 128—135.

Плисс, В. А. (1977). Равномерно ограниченные решения линейных систем дифференциальных уравнений. *Дифференциальные уравнения*, *13*(5), 883—891.

Самойленко, А. М. (1977). Инвариантные тороидальные многообразия систем с медленно меняющимися переменными. В *Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний* (с. 181—191). Киев: Наукова думка.

Самойленко, А. М., & Кулик, В. Л. (1978). О непрерывности функции Грина задачи об инвариантном торе. *Укр. мат. журн.*, *30*(6), 779—788.

Самойленко, А. М., & Кулик, В. Л. (1979). Экспоненциальная дихотомия инвариантного тора динамических систем. *Дифференциальные уравнения*, *15*(8), 1434—1443.

РАССЕЯНИЕ ПОЛЯ ВЕРТИКАЛЬНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ДИПОЛЯ СПИРАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ СФЕРОЙ С НАГРУЗКОЙ

В. А. Резуненко

Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина, Харьков, Украина

varezunenko@yahoo.com

Методом регуляризации матричного оператора решена задача рассеяния поля электрического диполя спирально проводящей сферой с нагрузкой.

Ключевые слова: диполь, спиральная сфера, нагрузка, метод регуляризации.

В настоящее время численно-аналитические методы регуляризации решения теоретических и прикладных задач находят широкое применение.

В данной работе построен алгоритм решения задачи электродинамики и антенной техники о рассеянии поля диполя сферой с нагрузкой. Получена эффективно разрешимая система алгебраических уравнений второго рода.

Разместим начало декартовой и сферической систем координат в центр спирально проводящей полой сферы радиуса $r = a$. На оси OZ вне сферы поместим вертикальный электрический диполь на расстоянии b от начала системы координат, $b > a$. В качестве нагрузки на сферу рассмотрим однополостной бесконечный идеально проводящий конус. Вершину конуса поместим в начало декартовой и сферической систем координат. Пусть ось OZ является осью симметрии конуса. Полярный угол θ раскрыва конуса полагаем равным γ $(0 < \gamma < \pi)$. Сфера и конус рассеивают электрическое $\vec{E}^{(0)}$ и магнитное поле $\vec{H}^{(0)}$ диполя. Возникают вторичные поля $\vec{E}^{(1)}, \vec{H}^{(1)}$ внутри сферы и $\vec{E}^{(2)}$, $\vec{H}^{(2)}$ вне сферы. На поверхности спирально проводящей сферы возникают электрические токи. Токи проходят только по линиям, направленным под углом β к меридианам на поверхности сферы. В других направлениях токи не проходят.

Требуется найти полное поле, рассеянное сферой и конусом. Полные поля вне поверхностей сферы и нагрузки должны удовлетворять уравнениям Максвелла, материальным уравнениям, условию конечности энергии

$$W = \int_G (\varepsilon\left|\vec{E}\right|^2 + \mu\left|\vec{H}\right|^2) dxdydz < \infty$$

в любой ограниченной области G пространства (ε и μ — материальные параметры среды), исчезать на бесконечности при $r \to \infty$ согласно условию Зоммерфельда, и удовлетворять граничным условиям спиральной проводимости на сфере и условиям идеальной проводимости на нагрузке. Граничные условия подробно запишем в сферической системе координат:

1) на поверхности сферы:

$$(H_\varphi^{(2)} + H_\varphi^{(0)} - H_\varphi^{(1)})(\operatorname{tg}\beta) + (H_\theta^{(2)} - H_\theta^{(1)}) = 0,\ E_\theta^{(1)} = E_\theta^{(0)} + E_\theta^{(2)},$$

$$E_\varphi^{(2)} = E_\varphi^{(1)},\; E_\theta^{(1)} + E_\varphi^{(1)}(\operatorname{tg}\beta) = 0\,; \tag{1}$$

2) на поверхности нагрузки:

$$(\vec{E}^{(2)} + \vec{E}^{(0)} - \vec{E}^{(1)}) \cdot \vec{n} = 0\,, \tag{2}$$

где верхние индексы $(0),(1),(2)$ относятся соответственно к полю источника, к полю внутри сферы $(r < a)$, к полю вне сферы $(r > a)$; $\vec{n}$ — внешняя нормаль к поверхности нагрузки. В такой постановке задача имеет единственное решение. Для решения задачи будем использовать скалярные потенциалы Дебая (U — электрический и V — магнитный), которые удовлетворяют уравнению Гельмгольца $\Delta U + k^2 U = 0$, где k — волновое число. Разделим переменные в уравнении Гельмгольца в сферической системе координат. Рассмотрим три соответствующие спектральные задачи, затем представим все потенциалы рядами Фурье. Удовлетворение граничных условий на нагрузке (2) требует подбора для рядов Фурье специальных функций и вещественного спектрального параметра v_n так, чтобы v_n были решениями трансцендентного уравнения (см. список литературы):

$$P_{v_n}(\cos\gamma) = 0,\;\; n = 1{,}2.,3,\ldots, \tag{3}$$

где $P_{\nu_n}(\cos\theta)$ — функции Лежандра первого рода v_n-й степени нулевого порядка аргумента $\cos\gamma$, а также подбор параметра μ_n так, чтобы μ_n были решениями другого трансцендентного уравнения

$$P^1_{\mu_n}(\cos\gamma) = 0\,, n = 1{,}2.,3,\ldots, \tag{4}$$

где $P^1_{\nu_n}(\cos\gamma)$ — присоединенные функции Лежандра первого рода v_n-й степени первого порядка аргумента $\cos\gamma$. Корни уравнений (3) v_n и (4) μ_n—простые и не совпадающие для любого $n \geq 1$. Запишем ряд Фурье для электрического потенциала Дебая $U^{(0)}$ диполя, используя функцию Грина уравнения Гельмгольца в сферической системе координат, учтя наличие нагрузки:

$$U^{(0)} = \sum_{n=1}^{\infty} F_\nu(n) M_n P_{\nu_n}(\cos\theta)[\psi_{\nu_n}(kr)\xi_{\nu_n}(kb)] \,/\, (kr),\, r < b\,; \tag{5}$$

$$F_\nu(n) = (2\nu_n + 1),\; M_n = \left\{(kb)^3 \sin\gamma \frac{\partial}{\partial\nu} P_\nu(\cos\gamma)\Big|_{\nu=\nu_n} \; P^1_{\nu_n}(\cos\gamma)\right\}^{-1},$$

где $\psi_{\nu_n}(kr)$, $\xi_{\nu_n}(kb)$ — сферические функции Бесселя 1 рода и соответственно Ханкеля третьего рода в обозначениях Дебая. Магнитный потенциал диполя $V^{(0)}$ — по определению равен нулю. Искомые вторичные потенциалы запишем в виде рядов Фурье (5). Так, электрический потенциал $U^{(2)}$ и магнитный потенциал $V^{(2)}$ вне сферы ищем в таком виде:

$$\left.\begin{matrix} U^{(2)} \\ V^{(2)} \end{matrix}\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{cases} F_{\nu}(n) C_n P_{\nu_n}(\cos\theta)\xi_{\nu_n}(kr)] \,/\, (kr), \;\; F_{\nu}(n) = (2\nu_n + 1), \\ F_{\mu}(n) D_n P_{\mu_n}(\cos\theta)[\xi_{\mu_n}(kr)] \,/\, (kr), \;\; F_{\mu}(n) = (2\mu_n + 1), \end{cases} \quad r > a, \quad (6)$$

где коэффициенты C_n, D_n требуется найти. Для потенциалов $U^{(1)}$, $V^{(1)}$ внутри сферы $(r < a)$ в рядах вида (6) искомые коэффициенты обозначаем соответственно A_n, B_n, а функции Ханкеля заменяем функциями Бесселя. Последовательности коэффициентов A_n, B_n, C_n, D_n, $n \geq 1$, ищем в гильбертовых пространствах $\tilde{l}_2$ с различными весами, обеспечивающими выполнение условия конечности интеграла энергии W. Сначала метод регуляризации матричного оператора задачи применим для поиска коэффициентов C_n, $n \geq 1$. При этом построим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений второго рода (БСЛАУ-II). Используем граничные условия (1), и в (1) подставляем представление компонент полей через потенциалы Дебая. Учтя (5), (6), после линейных преобразований получаем систему парных функциональных уравнений (7), (8), связывающих все искомые коэффициенты A_n, B_n, C_n и D_n:

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_{\mu}(n)\Big[D_n \xi^1_{\mu_n}(ka) - B_n \psi^1_{\mu_n}(ka)\Big] P^1_{\mu_n}(\cos\theta) + (ika)(\operatorname{tg}\gamma) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} F_{\nu}(m)[C_m \xi_{\nu_m}(ka) + M_n \psi_{\nu_m}(ka)\xi^1_{\nu_n}(kb) - A_m \psi_{\nu_m}(ka)] P_{\nu_m}(\cos\theta) = 0, \quad (7)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} B_m F^1_{\nu}(m) \psi_{\nu_m}(ka) \,/\, \xi^1_{\nu_m}(ka) P_{\nu_m}(\cos\theta) +$$

$$+ (ika)(\operatorname{tg}\gamma) \sum_{n=1}^{\infty} F^1_{v}(n)\{A_n \,/\, \xi^1_{\nu_n}(ka) - M_n \xi^1_{\nu_n}(kb)\} P_{\nu_n}(\cos\theta) = 0, \theta \in [0, \gamma], \quad (8)$$

где у функций $\psi^1_{\nu_n}(ka)$, $\xi^1_{\nu_n}(ka)$ верхний индекс 1 обозначает дифференцирование по аргументу (ka). Система (7), (8) является системой 1-го рода и неэффективна для прямого решения проблемы. К ней применим интегральные преобразования и учтём ортогональность функций Лежандра

$$J^{(\mu)}_{n,k} = \int_0^{\gamma} P^1_{\mu_n}(\cos\theta) P^1_{\mu_k}(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\mu_n(\mu_n + 1)}{-2\mu_n - 1} \sin\gamma P_{\mu_n}(\cos\gamma) \dfrac{\partial}{\partial\mu} P^1_{\mu}(\cos\gamma)\Big|_{\mu=\mu_n}, & n = k, \\ 0, & n \neq k. \end{cases} \quad (9)$$

Затем из системы (7), (8), исключим коэффициенты A_n, B_n, D_n с помощью решения вспомогательной системы линейных уравнений 4-го порядка для каждого значения $n \geq 1$. После этого введём параметр малости и выполним подстановку

$$x_n = C_n \,/\, \xi^1_{\nu_n}(ka),\ n \geq 1. \tag{10}$$

В результате получим БСЛАУ-II с компактным оператором T_1 в пространстве l_2 и правым столбцом $B^{(1)}$ из l_2: $X = T_1 X + B^{(1)}$, где $X = (x_1, x_2, x_3, ...)^T$ — отыскиваемый вектор; x_n — введены в (10). Эта система эффективно разрешима аналитически и численно в l_2. Для поиска коэффициентов A_n, B_n, D_n получаем новые несвязанные БСЛАУ-II, аналогичные системе для поиска коэффициентов C_n, $n \geq 1$. Разработанный подход к решению задачи рассеяния допускает обобщение на другие структуры и другие источники полей.

Список литературы

Rezunenko, V. A. (2015). The field diffraction of current ring on a spiral conductive sphere with a hole. In *Proceedings X International Conference on Antenna Theory and Techniques ICATT'2015*, Kharkiv, 21—24 April, 2007 (p. 129–131). Kharkiv: IEEE, KhNURE.

Rezunenko, V. A., Roshchupkin, S.V., & Radchenko, E. I. (2007). Diffraction field of the vertical dipole from sphere with aperture, screening by the dielectical layer. In *Proceedings VI International Conference ICATT'2007*, SNTU, Sevastopol (p. 128–130), Sevastopol: IEEE, SNTU.

Rezunenko, V. A., Vyazmitinov, I. A., Udyanskaya, L.V., & Shestopalov, V. P. (1994). Antennas characteristics of spherical reflector which is working at regime of Helmholtz resonance excitation In *Proc. of International scientific-technical conference Contemporary Radiolocation*, Kyiv (pp. 72–76).

Вязьмитинов, И. А., Вязьмитинова, С. С., & Резуненко, В. А. (1989). Расчёт потенциалов электронно-оптических систем с разгруженным сферическим катодом. *Радиотехника: Всеукр. межвед. научно- техн. сб., 90*, 130—133.

Резуненко, В. А. (2006). Интегральное уравнение задачи электростатики для сферического сегмента и диэлектрического закругления конуса. *Вісник Харківського національного університету ім. В. Н. Каразина. Серія «Математика, прикладна математика і механіка»*, (749), 50—56.

Резуненко, В. А. (2008). Потенциал сферического сегмента внутри сферического слоя с круговым отверстием. *Вісник Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна. «Радіофізика та електроніка»*, (834), 120—126.

Резуненко, В. А. (2009). Дифракция плоской акустической волны на сфере с круговым отверстием. *Вісник Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна. Серія «Математика, прикладна математика і механіка»*, (850), 71—77.

ВЗАЄМОДІЯ ПРУЖНИХ ПЛОСКИХ ХВИЛЬ У НАНОКОМПОЗИТНИХ МАТЕРІАЛАХ. ДОСЛІДЖЕННЯ МЕТОДОМ ПОВІЛЬНО ЗМІННИХ АМПЛІТУД

К. В. Савельєва[1], О. Г. Дашко[1], Я. В. Симчук[2]

[1]*Інститут механіки ім. С. П.Тимошенка НАН України, Київ, Україна*

[2]*Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ, Україна*

katerina1971s@gmail.com

Предметом доповіді є результати дослідження взаємодії гармонічних плоских хвиль при їх поширенні в нанокомпозтних матеріалах, модельованих гіперпружним матеріалом Мурнагана. Дослідження проводилося методом ван дер Поля (повільно змінних амплітуд) для квдратично та кубічно нелінійних хвиль.

Ключові слова: нелінійність, гіперпружний матеріал, потенціал Мурнагана, гармонічні хвилі, плоскі хвилі, метод ван дер Поля, схема самоперемикання, нанокомпозитні матеріали.

Досліджується взаємодія гармонічних плоских хвиль при їх поширенні в нелінійному гіперпружному матеріалі, деформування якого описується нелінійним потенціалом Мурнагана (Murnaghan, 1951).

$$W=\frac{1}{2}(\lambda+2\mu)\left(u_{1,1}\right)^2+\frac{1}{2}\mu\left[\left(u_{2,1}\right)^2+\left(u_{3,1}\right)^2\right]+$$

$$+\left(\mu+\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{3}A+B+\frac{1}{3}C\right)\left(u_{1,1}\right)^3+\frac{1}{2}(\lambda+B)u_{1,1}\left[\left(u_{2,1}\right)^2+\left(u_{3,1}\right)^2\right]+$$

$$+\frac{1}{8}(\lambda+2\mu+A+2B)\left[\left(u_{1,1}\right)^2+\left(u_{2,1}\right)^2+\left(u_{3,1}\right)^2\right]^2$$

$$+\frac{1}{8}(3A+10B+4C)\left(u_{1,1}\right)^2\left[\left(u_{1,1}\right)^2+\left(u_{2,1}\right)^2+\left(u_{3,1}\right)^2\right],$$

де $\vec{u}=\vec{u}(x,t)$ — вектор переміщень, λ,μ — пружні сталі Ламе, A,B,C — сталі Мурнагана. Таке представлення потенціала дозволяє врахувати квадратичну і кубічну нелінійності (Рущицький & Цурпал, 1998; Rushchitsky & Savelyeva, 2006; Гузь, Рущицкий, & Гузь, 2010). Система нелінійних хвильових рівнянь для плоских хвиль, у такому випадку, має вигляд

$$u_{1,tt}-(\lambda+2\mu)u_{1,xx}=N_1u_{1,xx}u_{1,x}+N_2\left(u_{2,xx}u_{2,x}+u_{3,xx}u_{3,x}\right)+$$

$$+N_3u_{1,xx}\left(u_{1,x}\right)^2+N_4\left(u_{2,xx}u_{2,x}u_{1,x}+u_{3,xx}u_{3,x}u_{1,x}\right);$$

$$u_{2,tt}-\mu u_{2,xx}=N_2\left(u_{2,xx}u_{1,x}+u_{1,xx}u_{2,x}\right)+N_4u_{2,xx}\left(u_{2,x}\right)^2+$$

$$+N_5u_{2,xx}\left(u_{1,x}\right)^2+N_6u_{2,xx}\left(u_{3,x}\right)^2;$$

$$u_{3,tt} - \mu u_{3,xx} = N_2\left(u_{3,xx}u_{1,x} + u_{1,xx}u_{3,x}\right) + N_4 u_{3,xx}\left(u_{3,x}\right)^2 +$$
$$+N_5 u_{3,xx}\left(u_{1,x}\right)^2 + N_6 u_{3,xx}\left(u_{2,x}\right)^2.$$

Таким чином, залежність вектора переміщень від однієї просторової змінної x дозволяє записати повну систему нелінійних хвильових рівнянь для плоских хвиль, що поширюються вздовж осі x, у рамках урахування квадратичної і кубічної нелінійностей.

Дослідження проводилося на підставі зазначених рівнянь методом ван дер Поля (повільно змінних амплітуд), традиційним для теоретичного аналізу, згідно зі схемою самоперемикання. Цей метод, що зазвичай використовують для розв'язання хвильових задач нелінійної оптики, фізики плазми та радіофізики, є також застосовним для дослідження ефектів хвильової взаємодії в пружних середовищах (Рущицький & Цурпал, 1998; Rushchitsky & Savelyeva, 2006).

Для двох випадків двохвильової взаємодії: поздовжніх хвиль та поперечних хвиль різної поляризації — отримані еволюційні і укорочені рівняння, а також, при виконанні умов частотного і фазового синхронізму, співвідношення Менлі — Рова (рівняння балансу енергії). Таким чином, описаний механізм самоперемикання зазначених хвиль і перепомповування енергії між ними.

Для п'яти типів нанокомпозитних матеріалів (Гузь, Рущицкий, & Гузь, 2010) представлені результати чисельного аналізу, а саме графіки залежності амплітуд досліджуваних хвиль від пройденої хвилею відстані, при фіксованому значенні змінної t, для різних варіантів завдання початкових амплітуд.

Список літератури

Murnaghan, F. D. (1951). *Finite deformations in an elastic*. New York: Wiley.

Rushchitsky, J. J., & Savelyeva, E. V. (2006). Interaction of signal and power cubically nonlinear elastic transverse plane waves. In *Proceedings of the Int. Workshop "Waves and flows"*, Kyiv (pp. 140–145).

Гузь, А. Н., Рущицкий, Я. Я., & Гузь, И. А. (2010). *Введение в механику нанокомпозитов*. Киев: Академпериодика.

Рущицький, Я. Я., & Цурпал, С. І. (1998). *Хвилі в матеріалах з мікроструктурою*. Київ: Інститут механіки НАНУ ім. С. П. Тимошенка.

ЗАДАЧА ГРУПОВОЇ КЛАСИФІКАЦІЇ КОНФОРМНО ІНВАРІАНТНИХ НЕЛІНІЙНИХ БАГАТОВИМІРНИХ РІВНЯНЬ

М. І. Сєров, Н. В. Ічанська

Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка, Полтава, Україна

mserov4@gmail.com, Ichanska2016@gmail.com

У даній роботі вивчено клас еволюційних n-вимірних рівнянь. Для багатовимірних еволюційних нелінійних рівнянь проведена групова класифкація. Запропоновані рівняння мають широкі симетрійні властивості і тому можуть бути використані в якості математичних моделей для описання реальних фізичних процесів. Знання максимальних алгебр інваріантності даних рівнянь дає можливість їх інтегрування, дозволяє генерувати нові розв'язки з відомих та ін.

Ключові слова: багатовимірні нелінійні еволюційні рівняння, конфоромно інваріантні рівняння, максимальна алгебра інваріантності.

Інтегрування диференціальних рівнянь з частинними похідними тісно пов'язане з їх груповими властивостями. Основи групового аналізу диференціальних рівнянь було закладено ще С. Лі (1883, 1884, 1888, 1890, 1893). Продовження розвитку ідей С. Лі в сучасному формулюванні було запропоноване Л. В. Овсянніковим (1959, 1978, 1982). Пряма задача групової класифікації диференціальних рівнянь з частинними похідними є одною з найважливіших та, безумовно, актуальних задач якісної теорії диференціальних рівнянь та математичної фізики (див., наприклад, роботи Heredero та Olver (1996), Nikitin та Wiltshire (2001), Cherniha (1995), Zhdanov та Lahno (1999), Жданов та Лагно (2000) та ін.).

У даній роботі для рівнянь вигляду

$$\Delta\ u = F(u, u_0) \tag{1}$$

розв'язано задачу групової класифікації. Тут і далі $u = u(x_0, \vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $u_0 = \dfrac{\partial u}{\partial x_0}$, Δ — оператор Лапласа, F — довільна гладка функція.

До рівнянь з класу (1) приводять задачі опису процесів тепло- та масообміну, механіки суцільного середовища, теорії фільтрації, росту популяцій, фізики моря для опису розподілу коливань температури та солоності моря у глибину тощо.

Авторами в роботі Сєров та Ічанська (2016) проведено повний опис багатовимірних еволюційних рівнянь з класу (1), які є інваріантними відносно конформної алгебри:

$$\langle \partial_0,\ \partial_{\mathrm{a}},\ \mathrm{J}_{\mathrm{ab}} = x_b\partial_a - x_a\partial_b,\ \mathrm{D} = x_a\partial_a - (k_1 u + k_2)\partial_u,\ \mathrm{K}_{\mathrm{a}} = 2x_a D - \vec{x}^2\partial_a \rangle,$$

де $a = 1, 2, \ldots n$, $b = 1, 2, \ldots n$, k_1 та k_2 — довільні сталі. Зокрема доведено, що:

1) *максимальною локальною групою* $G'^{\sim}$ *точкових перетворень еквівалентності рівняння* (1) *є група, що породжується інфінітезимальним оператором:*

$$E = (C_0x_0 + d_0)\partial_0 + (C_{ab}x_b + Ax_a + d_a)\partial_a + (C_1u + C_2)\partial_u + (C_1 - 2A)F\partial_F,$$

де $C_0, d_0, C_{ab} = -C_{ba}, A, d_a, C_1, C_2$ *— довільні сталі*;

2) *крім неперервних перетворень еквівалентності клас рівнянь* (1) *також допускає наступні дискретні та додаткові перетворення:*

$$x_0 \to x_0,\ x_a \to -x_a,\ u \to u,\ \ F \to -F;$$

$$x_0 \to x_0,\ x_a \to x_a,\ u \to -u,\ \ F \to -F \text{ та}$$

$$x_0 \to \frac{1}{\lambda_0 k} e^{\lambda_0 k x_0},\ u \to e^{\lambda_0 x_0} u;\ x_0 \to \frac{-1}{\lambda_0} e^{-\lambda_0 x_0},\ u \to u - \lambda_0 x_0;$$

3) *у класі рівнянь* (1) *з точністю до перетворень еквівалентності* $G'^{\sim}$ *конформно інваріантними є наступні рівняння:*

$$\Delta u = e^u f(u_0),\ n = 2 \qquad \textit{та} \qquad \Delta u = u^{\frac{n+2}{n-2}} f\left(\frac{u_0}{u}\right),\ n \neq 2. \qquad (2)$$

Відомо, що груповий аналіз одного рівняння виявляється груповим аналізом цілого класу рівнянь, які отримуються з даного рівняння локальною заміною змінних і мають ізоморфні групи симетрії. Усі наші міркування будемо викладати з точністю до вказаних вище неперервних, дискретних та додаткових перетворень еквівалентності.

Розглянемо задачу: знайти максимальні алгебри інваріантності (МАІ) конформно інваріантних рівнянь (2). Групову класифікацію проведімо в залежності від значень параметра n, далі δ_{ab} — символ Кронекера.

Використовуючи класичні результати Лі щодо диференціальних інваріантів груп перетворень, доведено наступні твердження.

Теорема 1. *Клас нелінійних багатовимірних рівнянь:*

$$\Delta u = u^{\frac{n+2}{n-2}} f\left(\frac{u_0}{u}\right) \qquad (3)$$

у випадку $n \neq 2$ *має наступну основну алгебру інваріантності*

$$A_1^{bas} = \langle \partial_0, \partial_a, J_{ab} = x_b\partial_a - x_a\partial_b, D = 2x_a\partial_a + (2-n)u\partial_u, K_a = 2x_aD - \vec{x}^2\partial_a \rangle.$$

Теорема 2. *З точністю до перетворень з* $G^{\sim}$ *для класу рівнянь* (3) *при* $n \neq 2$ *існує лише п'ять випадків розширення максимальної в сенсі Лі алгебри інваріантності (нижче наведено нееквівалентні рівняння з цього класу та їх МАІ):*

$$\Delta u = \lambda e^{\frac{u_0}{u}} u^{\frac{n+2}{n-2}}:$$

$$A_1 = \langle A_1^{bas},\ Q_1 = e^{\frac{4x_0}{2-n}} u\partial_u \rangle;$$

$$\Delta u = \lambda \left(\frac{u_0}{u}\right)^k u^{\frac{n+2}{n-2}}:$$

$$A_2 = \langle A_1^{bas},\ Q_2 = x_0\partial_0 + \frac{2-n}{4}ku\partial_u\rangle, \quad k \neq \frac{n+2}{n-2};$$

$$\Delta u = \lambda\ u_0^{\frac{n+2}{n-2}}:$$

$$A_3 = \langle A_1^{bas},\ Q_3 = x_0\partial_0 + \frac{2+n}{4}u\partial_u,\ Q^{\infty} = \beta(\vec{x})\partial_u\rangle;$$

$$\Delta u = \lambda\left(\frac{u_0}{u} + m\right)^k\ u^{\frac{n+2}{n-2}}:$$

$$A_4 = \langle A_1^{bas},\ Q_4 = e^{\frac{4mx_0}{k(2-n)}}(\partial_0 - mu\partial_u)\rangle,\ k \neq \frac{n+2}{n-2},\ m \neq 0,\ k \neq 0;$$

$$\Delta u = \lambda\cdot(u_0 + mu)^{\frac{n+2}{n-2}}:$$

$$A_5 = \langle A_1^{bas},\ Q_5 = e^{-\frac{4mx_0}{2+n}}(\partial_0 - mu\partial_u),\ Q^{\infty} = e^{-mx_0}\beta(\vec{x})\partial_u\rangle.$$

Тут і далі f — довільна гладка функція своїх аргументів, $\beta(\vec{x})$ — довільна гладка функція, що задовольняє рівняння $\Delta\beta = 0$, λ, $m \neq 0$, $k \neq 0$ — сталі.

Теорема 3. *Нескінченна алгебра, базисні оператори якої породжуються інфінітезимальним оператором* $X^{bas} = d_0\partial_0 + \xi^a(\vec{x})\partial_a - 2\xi_1^1\partial_u$, *а функції* ξ^a *задовольняють рівняння* $\xi_b^a + \xi_a^b = 2\delta_{ab}\xi_1^1$, $\Delta\xi^a = 0$, *є основною алгеброю інваріантності класу* (1+2)-*вимірних рівнянь*

$$\Delta u = e^u f(u_0). \tag{4}$$

Тут і далі $f(u_0)$ — довільна гладка функція.

Теорема 4. *З точністю до перетворень з* $G^{\sim}$ *для класу* (1+2)-*вимірних рівнянь* (4) *існує три випадки розширення максимальної в сенсі Лі алгебри інваріантності (нижче наведено нееквівалентні рівняння з цього класу та їх інфінітезимальні оператори, які породжують максимальні алгебри інваріантності цих рівнянь):*

$$\Delta u = \lambda\cdot e^{u+mu_0}:$$

$$X_1 = (-mC_1e^{-\frac{1}{m}x_0} + d_0)\partial_0 + \xi^a(\vec{x})\partial_a +$$
$$+\left[C_1e^{-\frac{1}{m}x_0}u + \left(\frac{1}{m}\beta_1(\vec{x})x_0 + \beta_2(\vec{x})\right)e^{-\frac{1}{m}x_0} - 2\xi_1^1\right]\partial_u;$$

$$\Delta u = \lambda(u_0 + m)^k e^u:$$

$$X_2 = (-\frac{kC_1}{m}e^{-\frac{m}{k}x_0} + d_0)\partial_0 + \xi^a(\vec{x})\partial_a + [kC_1e^{-\frac{m}{k}x_0} - 2\xi_1^1]\partial_u;$$

$$\Delta u = \lambda u_0^k e^u :$$

$$X_3 = (C_1 x_0 + d_0)\partial_0 + \xi^a(\vec{x})\partial_a + [kC_1 - 2\xi_1^1]\partial_u .$$

Тут $m \neq 0$, $k \neq 0$, $\lambda \neq 0$, C_1, d_0 — довільні сталі, β_1, β_2 — довільні гладкі функції такі, що $\Delta\beta_1 = 0$, $\Delta\beta_2 = 0$.

У роботі вивчено клас еволюційних n-вимірних рівнянь (1). Для рівнянь, що є інваріантними відносно прямої суми операторів зсуву по часу та алгебри Евкліда $AE(n)$, що розширена операторами масштабних та конформних перетворень проведена повна групова класифікція.

Запропоновані рівняння мають широкі симетрійні властивості й тому можуть бути використані в якості математичних моделей для описання реальних фізичних процесів.

Знання максимальних алгебр інваріантності даних рівнянь дає можливість їх інтегрування, дозволяє генерувати нові розв’язки з відомих та ін.

Список літератури

Basarab-Horwath, P., Lahno, V., & Zhdanov, R. (2001). The structure of Lie algebras and the classification problem for partial differential equations. *Acta Applicandae Mathematica*, *69*(1), 43–94.

Cherniha, R. M. (1995). Galilean-invariant nonlinear PDEs and their exact solutions. *J. Nonlin. Math. Phys.*, *2*(3–4), 374–383.

Heredero, R. H., & Olver, P. J. (1996). Classification of invariant wave equations. *J. Math. Phys.*, *37*(12), 6414–6438.

Lie, S. (1883). Klassification und Integration von gewöhnlichen Differential-gleichungen zwischen *x, y*, die eine Gruppe von Transformationen gestatten. *Arch. Math. Naturv.*, *9*, 371–393.

Lie, S. (1884). Über Differentialinvarianten. *Mathematische Annalen*, *24*(4), 537–578.

Lie, S. (1893). *Vorlesungen über continuierliche Gruppen mit geometrischen und anderen Anwendungen*. Leipzig: Teubner.

Lie, S., & Engel, F. (1888, 1890, 1893). *Teorie der Transformationsgruppen*. (Bd. 1–3). Leipzig:Teubner.

Nikitin, A. G., & Wiltshire, R. J. (2001). System of reaction-diffusion equations and their symmetry properties. *J. Math. Phys.*, *42*(4), 1666–1688.

Ovsiannikov, L. V. (1982). *Group analysis of differential equations*. New York: Academic Press.

Zhdanov, R. Z., & Lahno, V. I. (1999). Group classification of heat conductivity equations with a nonlinear source. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, *32*(42), 7405–7418.

Жданов, Р. З., & Лагно, В. І. (2000). Групова класифікація рівнянь теплопровідності з нелінійним джерелом. *Доповіді НАН України*, (3), 12–16.

Овсянников, Л. В. (1959). Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности. *Доклады АН СССР*, *125*(3), 492—495.

Овсянников, Л. В. (1978). *Групповой анализ дифференциальных уравнений*. Москва: Наука.

Сєров, М. І., & Ічанська, Н. В. (2016). Про конформну інваріантність нелінійних еволюційних багатовимірних рівнянь. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Математика Механіка*, (36), 35—40.

НЕЛОКАЛЬНА РЕДУКЦІЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ КОНВЕКЦІЇ-ДИФУЗІЇ

М. І. Сєров, О. М. Омелян
Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка, Полтава, Україна
aomelyan@ukr.net, mserov4@gmail.com

У даній роботі побудовано неліївські анзаци та одержано редуковані системи для системи рівнянь конвекції-дифузії.

Ключові слова: система рівнянь конвекції-дифузії, нелокальні перетворення, анзац, редукована система.

Вступ. Одним з ефективних методів знаходження точних розв’язків систем рівнянь математичної фізики є метод С. Лі (див. Овсянников (1978), Фущич та ін. (1989), Olver (1986)). Однак кількість розв’язків диференціальних рівнянь з частинними похідними (ДРЧП), які вдається знайти за методом Лі, обмежена кількістю операторів їх ліївських симетрій. Починаючи з 90-х років ХХ ст. для знаходження неліївських розв’язків рівнянь математичої фізики було застосовано нелокальні перетворення (див. роботи Фущич та ін. (1992), Fuschich et al. (1992), Сєров та ін. (2004), Tychynin та Petrova (2011)).

У даній роботі застосуємо нелокальні перетворення для редукції системи рівнянь конвекції-дифузії, яка має важливі практичні застосування, зокрема, для моделювання очищення забрудненої рідини при проходженні через багатошарові фільтри (див., наприклад, Чапля Є. та ін. (2011), Чернуха та ін. (2012), для моделювання забруднення навколишнього середовища (Васькін та ін., 2015) тощо.

Розглянемо систему рівнянь конвекції-дифузії вигляду:

$$U_t = \partial_x[F(U)U_x + G(U)], \quad (1)$$

де

$$U = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix},\ F(U) = \begin{pmatrix} f^{11} & f^{12} \\ f^{21} & f^{22} \end{pmatrix},\ G(U) = \begin{pmatrix} g^1 \\ g^2 \end{pmatrix},\ f^{ab} = f^{ab}(U),\ g^a = g^a(U)$$

— довільні гладкі функції, $a,b = \overline{1,2}$.

У роботі Омелян та Сєрова (2016) було показано, що наступні перетворення є нелокальними перетвореннями еквівалентності системи (1):

$$t = t, \quad x = x, \quad u^a = v^a_x, \tag{2}$$

де $v^a = v^a(t,x)$, $a = \overline{1;2}$ — нові залежні змінні;

$$t = x_0, \quad x = w^1, \quad v^1 = x_1, \quad v^2 = w^2, \tag{3}$$

де x_0, x_1 — нові незалежні змінні, $w^a = w^a(x_0, x_1)$, $a = \overline{1;2}$ — нові залежні змінні;

$$x_0 = x_0, \quad x_1 = x_1, \quad w_1^1 = z^1, \quad w_1^2 = z^2, \tag{4}$$

де $z^a = z^a(x_0, x_1)$, $a = \overline{1;2}$ — нові залежні змінні.

В результаті проведених досліджень розв'язана задача знаходження нелокальних анзаців нелінійної системи рівнянь конвекції-дифузії вигляду

$$\begin{aligned} z_0^1 &= \partial_1\left[\frac{\lambda}{(z^1)^2} z_1^1 - \gamma_1\right], \\ z_0^2 &= \partial_1\left[-\frac{k\lambda}{(z^1)^3} z_1^1 + \frac{\lambda}{(z^1)^2} z_1^2 + \frac{\gamma_2}{z^1}\right], \end{aligned} \tag{5}$$

та її редукції до системи звичайних диференціальних рівнянь.

1. Симетрійні властивості систем рівнянь конвекції-дифузії. Дослідивши симетрійні властивості системи рівнянь (5), можна сформулювати наступну теорему.

Теорема 1. *Максимальною алгеброю інваріантності нелінійної системи рівнянь конвекції-дифузії* (5) *є алгебра Лі з базисними генераторами*

$$A_1 = \langle \partial_0, \quad \partial_1, \quad D = x_1\partial_1 - z^1\partial_{z^1}, \quad Q_1 = x_1 z^1 \partial_{z^2}, \quad Q_2 = z^1\partial_{z^2}, \; Q_3 = \partial_{z^2}\rangle. \tag{6}$$

Дана теорема доводиться стандартним методом Лі (див., наприклад, Овсянников (1978), Фущич та ін. (1989), Olver (1986)).

Оператори алгебри (6) надають дуже обмежені можливості для редукції системи (5) та побудови її точних розв'язків за методом Лі.

Для розширення можливостей проведення редукції системи (5) використаємо нелокальні перетворення (2—4).

Подіявши на систему (5) послідовно перетвореннями (4—2), одержимо наступну систему

$$U_t = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ k\lambda & \lambda \end{pmatrix} U_{xx} + \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 \\ \gamma_2 & \gamma_1 \end{pmatrix} U_x, \tag{7}$$

де $k, \lambda, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$.

Теорема. 2. *Максимальна алгебра інваріантності лінійної системи рівнянь конвекції-дифузії* (7) *складається з наступних операторів*:

$$A_2 = \langle \partial_t, \partial_x, G = t\partial_x - \frac{1}{2\lambda}(x + \gamma_1 t)Q_1 + \frac{1}{2\lambda}(k(x + \gamma_1 t) - \gamma_2 t)Q_2,. \tag{8}$$

$$Q_1 = u^1\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2}, Q_2 = u^1\partial_{u^2}, X^1 = \beta^1\partial_{u^1}, X^2 = \beta^2\partial_{u^2},$$

$$D = 2t\partial_t + x\partial_x - \left[\frac{\gamma_1}{2\lambda}(x + \gamma_1 t) + \frac{1}{2}\right]Q_1 + \frac{1}{2\lambda}(k\gamma_1(x + \gamma_1 t) - \gamma_2(x + 2\gamma_1 t))Q_2,$$

$$\Pi = t^2\partial_t + tx\partial_x - \frac{1}{4\lambda}[(x + \gamma_1 t)^2 + 2\lambda t]Q_1 + \frac{1}{4\lambda}[k(x + \gamma_1 t)^2 - 2\gamma_2 t(x + \gamma_1 t)]Q_2\rangle,$$

причому функції β^a, $a = \overline{1;2}$, є довільними розв'язками системи (7).

З теорем 1, 2 випливає, що подіявши перетвореннями (4—2) на систему (5), ми отримали систему (7) з розширеною максимальною алгеброю інваріантності. Використаємо цей факт для знаходження додаткових (неліїівських) анзаців та редукції нелінійної системи (5).

2. Ліївські анзаци системи рівнянь конвекції-дифузії (7). Наведемо деякі з нееквівалентних анзаців, побудованих за алгеброю (8):

$$u^1 = e^{-\frac{\gamma_1}{4\lambda}(2x+\gamma_1 t)} t^{k_2} \phi^1(\omega),$$
$$u^2 = e^{-\frac{\gamma_1}{4\lambda}(2x+\gamma_1 t)} t^{k_2} \left[\tfrac{1}{4\lambda}(\gamma_1(k\gamma_1 - 2\gamma_2)t + 2(k\gamma_1 - \gamma_2)x + k_3 \ln t)\phi^1(\omega) + \phi^2(\omega)\right], \quad (9)$$
$$\omega = t^{-\frac{1}{2}} x;$$

$$u^1 = e^{A(t,x)} \phi^1(\omega),$$
$$u^2 = e^{A(t,x)}[-\tfrac{k}{2k_0\lambda}(\tfrac{1}{3k_0} t^3 - \tfrac{1}{2k}(\gamma_2 - k\gamma_1)t^2 + tx + \tfrac{2\lambda k_2}{k} t)\phi^1(\omega) + \phi^2(\omega)], \quad (10)$$
$$\omega = t^2 + 2k_0 x,$$

де $A(t,x) = \frac{1}{2k_0\lambda}(\frac{1}{3k_0} t^3 + \frac{\gamma_1}{2} t^2 + tx - 2\lambda k_1 t)$;

$$u^1 = e^{D(t,x)}(t^2+1)^{-\frac{1}{4}} \phi^1(\omega),$$
$$u^2 = e^{D(t,x)}(t^2+1)^{-\frac{1}{4}}[\tfrac{1}{4\lambda}(\gamma_1(k\gamma_1 - 2\gamma_2)t + 2(k\gamma_1 - \gamma_2)x + \frac{kx^2 t}{t^2+1} +$$
$$+(4\lambda k_2 - \gamma_1(k\gamma_1 - 2\gamma_2))\operatorname{arctg} t)\phi^1(\omega) + \phi^2(\omega)], \quad (11)$$
$$\omega = (t^2+1)^{-\frac{1}{2}} x,$$

де

$$D(t,x) = -\tfrac{1}{4\lambda}[\gamma_1^2 t + 2\gamma_1 x + \frac{x^2 t}{t^2+1} - (4\lambda k_1 + \gamma_1^2)\operatorname{arctg} t].$$

Причому у формулах (9-11) k_1, k_2, k_3 — довільні сталі, $k_0 \neq 0$.

3. Нелокальні анзаци системи рівнянь конвекції-дифузії (5). Подіявши перетвореннями (2—4) на кожен з нееквіалентних анзаців (9—11), одержано відповідно наступні нелокальні анзаци нелінійної системи (5):

$$z^1 = e^{\frac{\gamma_1}{4\lambda}(2\tau + \gamma_1 x_0)} x_0^{-k_2} (\phi^1(\omega))^{-1},$$
$$z^2 = (\phi^1(\omega))^{-1}\phi^2(\omega) + \tfrac{1}{2\lambda}(k\gamma_1 - \gamma_2)\tau + \tfrac{\gamma_1}{4\lambda}(k\gamma_1 - 2\gamma_2)x_0 + k_3 \ln x_0, \quad (12)$$
$$\omega = t^{-\frac{1}{2}} \tau;$$

$$
\begin{aligned}
&z^1 = e^{-A(x_0,\tau)}(\phi^1(\omega))^{-1},\\
&z^2 = (\phi^1(\omega))^{-1}\phi^2(\omega) - \tfrac{k}{2k_0\lambda}(\tfrac{1}{3k_0}x_0^3 - \tfrac{1}{2k}(\gamma_2 - k\gamma_1)x_0^2 + t\tau + \tfrac{2\lambda k_2}{k}x_0),\\
&\omega = x_0^2 + 2k_0\tau,
\end{aligned} \tag{13}
$$

де

$$
A(t,x) = \tfrac{1}{2k_0\lambda}(\tfrac{1}{3k_0}x_0^3 + \tfrac{\gamma_1}{2}x_0^2 + x_0\tau - 2\lambda k_1 x_0);
$$

$$
\begin{aligned}
&z^1 = (x_0^2+1)^{\frac{1}{4}}e^{D(x_0,\tau)}(\phi^1(\omega))^{-1},\\
&z^2 = \tfrac{1}{4\lambda}[\gamma_1(k\gamma_1 - 2\gamma_2)x_0 + 2(k\gamma_1 - \gamma_2)\tau +\\
&+\frac{kx_0\tau^2}{x_0^2+1} + (4\lambda k_2 - \gamma_1(k\gamma_1 - 2\gamma_2))\operatorname{arctg} x_0] + (\phi^1(\omega))^{-1}\cdot\phi^2(\omega),\\
&\omega = (x_0^2+1)^{-\frac{1}{2}}\tau,
\end{aligned} \tag{14}
$$

де

$$
D(x_0,\tau) = \tfrac{1}{4\lambda}[\gamma_1^2 x_0 + 2\gamma_1\tau + \frac{x_0\tau^2}{x_0^2+1} - (4\lambda k_1 + \gamma_1^2)\operatorname{arctg} x_0],
$$

причому у формулах (12—14)

$$
\tau = \int z^1 dx_1.
$$

Анзаци (12—14) редукують нелінійну систему (5) до наступних систем звичайних диференціальних рівнянь:

$$
\begin{cases}
\lambda\ddot{\phi}^1 + \tfrac{1}{2}\omega\dot{\phi}^1 - k_2\phi^1 = 0,\\
\lambda\ddot{\phi}^2 + \tfrac{1}{2}\omega\dot{\phi}^2 - k_2\phi^2 - \tfrac{k_2}{2}\omega\dot{\phi}^1 - (kk_2 - k_3)\phi^1 = 0;
\end{cases} \tag{15}
$$

$$
\begin{cases}
\ddot{\phi}^1 + \tfrac{\gamma_1}{2k_0\lambda}\omega\dot{\phi}^1 + \left(\tfrac{k_1}{4k_0^3\lambda} - \tfrac{\omega}{16k_0^4\lambda^2}\right)\phi^1 = 0,\\
\ddot{\phi}^2 + \tfrac{\gamma_1}{2k_0\lambda}\dot{\phi}^2 - \left(\tfrac{k_1}{4k_0^3\lambda} - \tfrac{\omega}{16k_0^4\lambda^2}\right)\phi^2 - \tfrac{\gamma_2 - k\gamma_1}{2k_0\lambda}\omega\dot{\phi}^1 + \left(\tfrac{\omega}{8k_0^4\lambda^2} + \tfrac{k_2 - kk_1}{4k_0^3\lambda}\right)\phi^1 = 0;
\end{cases} \tag{16}
$$

$$
\begin{cases}
\ddot{\phi}^1 + \left(\tfrac{\omega^2}{4\lambda^2} - \tfrac{\gamma_1^2}{4\lambda^2} - \tfrac{k_1}{\lambda}\right)\phi^1 = 0,\\
\ddot{\phi}^2 + \left(\tfrac{\omega^2}{4\lambda^2} - \tfrac{\gamma_1^2}{4\lambda^2} - \tfrac{k_1}{\lambda}\right)\phi^2 + \left(-\tfrac{k}{2\lambda^2}\omega^2 + k\left(\tfrac{\gamma_1^2}{2\lambda^2} + \tfrac{k_1}{\lambda}\right) - \tfrac{\gamma_1\gamma_2}{2\lambda^2} - \tfrac{k_2}{\lambda}\right)\phi^1 = 0.
\end{cases} \tag{17}
$$

Підставивши розв'язки систем (15—17) у відповідні анзаци (12—14), можна одержати розв'язки нелінійної системи (5).

Список літератури

Fuschich, W. I., Serov, M. I., Tychynin, V. A., & Amerov, T. K. (1992). On non-local symmetry of nonlinear heat equation. *Доклады АН Украины*, (11), 27–33.

Olver, P. (1986). *Applications of Lie groups to differential equations*. New York: Springer-Verlag.

Tychynin, V. A., & Petrova, O. V. (2011). Nonlocal symmetries and formulae for generation of solutions for a class of diffusion-convection equations. *J. Math. Anal. Appl*, *382*(1), 20–33.

Васькін, Р. А., Соляник, В. О., & Васькіна, І. В. (2015). Моделювання розподілу концентрації викидів від автотранспорту у просторі. *Journal of Engineering Sciences*, *2*(2), G1-G5.

Овсянников, Л. В. (1978). *Групповой анализ дифференциальных уравнений*. Москва: Наука.

Омелян, О. М., & Сєрова, М. М. (2016). Лінеаризація систем нелінійних рівнянь конвекції-дифузії за допомогою нелокальних перетворень. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки,* (13), 131—143.

Сєров, М. І., & Омелян, О. М. (2012). *Симетрійні властивості системи нелінійних рівнянь хемотаксису*. Полтава: ПолтНТУ.

Сєров, М. І., Омелян, О. М., & Черніга, Р. М. (2004). Лінеаризація систем нелінійних рівнянь дифузії за допомогою нелокальних перетворень. *Доповіді НАН України*, (10), 39—45.

Фущич, В. И., Серов, Н. И., & Амеров, Т. К. (1992). О нелокальных анзацах одного нелинейного одномерного уравненя теплопроводности. *Доклады АН Украины,* (1), 26—30.

Фущич, В. И., Штелень, В. М., & Серов, Н. И. (1989). *Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики*. Київ: Наукова думка.

Чапля, Є., Чернуха, О., & Дмитрук, В. (2011). Математичне моделювання стаціонарних процесів конвективно-дифузійного масопереносу у бінарних періодичних структурах. *Доповіді НАН України,* (7), 46—51.

Чернуха, О., Гончарук, В., & Дмитрук, В. (2012). *Математичні моделі стаціонарних процесів конвективної дифузії в регулярних структурах. Задачі термодифузії та методи їх розв'язку: колект. моногр.* В. П. Ляшенко (Ред.) (с. 91—109). Кременчук : Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського,

КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ СЕПАРАТНОЇ СИСТЕМИ З ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЕЙЛЕРА Й КОНТОРОВИЧА — ЛЄБЄДЄВА ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Л. М. Трасковецька[1], Г. Я. Стопень[2]

[1]*Національна академія Державної прикордонної служби України імені Богдана Хмельницького, Хмельницький, Україна*

[2]*Хмельницький національний університет, Хмельницький, Україна*

tlm5@email.ua

Для модифікованих функцій побудуємо на множині

$$I_2^{+} = \left\{ r : r \in \left(0, R_1\right) \cup (R_1, R_2) \bigcup (R_2, \infty) \right\}$$

обмежений розв'язок сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь Ейлера — (Конторовича — Лєбєдєва) із двома точками спряження

$$\begin{gathered}
\left(r^2 \frac{d^2}{dr^2} + \left(2a_1 + 1\right) r \frac{d}{dr} + \alpha_1^2 - q_1^2\right) u_1(r) = -g_1(r),\ r \in \left(0, R_1\right), \\
\left(r^2 \frac{d^2}{dr^2} + \left(2a_2 + 1\right) r \frac{d}{dr} + \alpha_2^2 - q_2^2\right) u_2(r) = -g_2(r),\ r \in \left(R_1, R_2\right), \\
\left(r^2 \frac{d^2}{dr^2} + \left(2a_3 + 1\right) \frac{d}{dr} + \alpha_3^2 - \lambda^2 r^2 - q_3^2\right) u_3(r) = -g_3(r),\ r \in \left(R_3, \infty\right)
\end{gathered} \tag{1}$$

за умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^k\right) u_k(r) - \left(\alpha_{j2}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^k\right) u_{k+1}(r)\right]\Bigg|_{r = R_k} = \omega_{jk};\ j, k = 1,2 \tag{2}$$

Наявність фундаментальної системи розв'язків дозволяє побудувати загальний розв'язок крайової задачі (1) , (2) методом функцій Коші (Степанов, 1959)

$$\begin{aligned}
u_j(r) = \sum_{m,k=1}^{2} R_{\nu,\alpha_1;mk}^{(\alpha)j}(r,q)\omega_{mk} &+ \int_0^{R_1} W_{\nu,\alpha_1;j1}(r,\rho,q) g_1(\rho)\rho^{2\alpha_1 - 1} d\rho + \\
&+ \int_{R_1}^{R_2} W_{\nu,\alpha_1;j2}(r,\rho,q) g_2(\rho)\rho^{2\alpha_2 - 1} d\rho + \\
&+ \int_{R_3}^{\infty} W_{\nu,\alpha_1;j3}(r,\rho,q) g_3(\rho)\rho^{2\alpha_3 - 1} d\rho,\ j = \overline{1,3}
\end{aligned} \tag{3}$$

у структурі якого згідно з Степанов (1959), Ленюк та Міхалевська (2002) беруть участь функції Гріна

$$R_{\nu,\alpha_1;mk}^{(\alpha)j}(r,q)=\frac{B_{(\alpha);k}(q)}{\Delta_{\nu,\alpha_1}^{(\alpha)}(q)}r^{-\alpha_1+q_m}$$

і система функцій впливу

$$W_{\nu,\alpha_1;j1}(r,\rho,q)=\frac{1}{2q_j\Delta_{\nu,\alpha_1}^{(\alpha)}(q)}\times$$

$$\times\begin{cases} r^{-\alpha_1+q_1}\left[B_{(\alpha);2}(q)\psi_{\alpha_1;11}(q,\rho)-B_{(\alpha);1}(q)\psi_{\alpha_1;21}(q,\rho)\right], & 0<r<\rho<R_1 \\ \rho^{-\alpha_1+q_1}\left[B_{(\alpha);2}(q)\psi_{\alpha_1;11}(q,r)-B_{(\alpha);1}(q)\psi_{\alpha_1;21}(q,r)\right], & 0<\rho<r<R_1 \end{cases},$$

$$W_{\nu,\alpha_1;j2}(r,\rho,q)=\frac{1}{2q_j\Delta_{\nu,\alpha_1}^{(\alpha)}(q)}\begin{cases} \vartheta_{(\alpha);1}(r,q)\vartheta_{(\alpha);2}(\rho,q), & R_1<r<\rho<R_2 \\ \vartheta_{(\alpha);1}(\rho,q)\vartheta_{(\alpha);2}(r,q), & R_1<\rho<r<R_2 \end{cases},$$

породжені неоднорідністю умов спряження.

При виконанні умов

$$\alpha_{jm}^k\geq 0,\ \beta_{jm}^k\geq 0,\ \ q_j\geq 0,\ j=\overline{1,3}$$

на коефіцієнти крайової задачі (1), (2) її розв’язок (3) єдиний.

Одержаний у роботі результат без залучення нових ідей розповсюджується на випадок будь-якого скінченного числа точок спряження.

Список літератури

Ленюк, М. П., & Міхалевська, Г. І. (2002). *Інтегральні перетворення типу Конторовича — Лєбєдєва*. Чернівці: Прут.

Степанов, В. В. (1959). *Курс дифференциальных уранений*. Москва: Физматгиз.

ТИПИ ЦИКЛІВ ОДНОГО КЛАСУ ОДНОВИМІРНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Ю. В. Федоренко, В. В. Федоренко
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
juliamfed@gmail.com

Описано співіснування та взаємне розташування циклів деяких типів динамічних систем породжених розривними відображеннями інтервалу в себе, графік яких має тільки дві гілки монотонності, причому обидві зростаючі.

Ключові слова: хаотична динамічна система, цикл, тип циклу, зсув Бернуллі.

Основною задачею теорії динамічних систем є встановлення допустимих типів траєкторій системи та опис взаємозв'язків між різними типами траєкторій. У доповіді розглядаються періодичні траєкторії, а в якості взаємозв'язків між ними досліджується співіснування періодичних траєкторій та їх взаємне розташування у фазовому просторі системи. Задача співіснування траєкторій різних типів особливо актуальна для динамічних систем з хаотичною поведінкою, тобто систем з додатною топологічною ентропією, бо такі системи можуть мати широкий спектр траєкторій з різною асимптотичною поведінкою, наприклад, періодичні траєкторії, гомоклінічні траєкторії, усюди щільні у фазовому просторі системи траєкторії. У той час, як динамічні системи з регулярною поведінкою траєкторій (системи з нульовою топологічною ентропією) мають досить вузький спектр асимптотичної поведінки траєкторій, наприклад, усі траєкторії системи можуть прямувати до однієї нерухомої точки.

Співіснування періодичних траєкторій різних періодів одновимірних динамічних систем було описано О. М. Шарковським (1964). Інтенсивні дослідження цього питання протягом останніх 50-ти років (див., наприклад, монографії та підручники у списку літератури) привели до створення нового напряму в теорії динамічних систем — комбінаторної динаміки.

Нагадаємо необхідні означення для формулювання теореми Шарковського.

Нехай $f \in C^0(I,I)$ — неперервне відображення замкненого інтервалу $I=[0;1]$ у себе. Позначимо через f^i, $i \in \mathbb{N}$, i-ту ітерацію відображення f, а f^0 — тотожне відображення. Точка $x \in I$ називається *періодичною* відображення f, якщо існує число i таке, що $f^i(x)=x$.

Число $n=\min\{i \in \mathbb{N} \mid f^i(x)=x\}$ називається *період*ом точки x.

Послідовність $(f^i(x),\ i \geq 0)$, де x — періодична точка періоду n, називається періодичною траєкторією періоду n відображення f, а множина $\{f^i(x),\ i \geq 0\}$ — циклом періоду n відображення f.

Теорема Шарковського. *Якщо* $f \in C^0(I,I)$ *має цикл періоду* n*, то воно між мінімальною та максимальною точками цього циклу має також і цикл періоду* n' *такого, що* $n' \lhd n$*, де*

$$1 \lhd 2 \lhd 2^2 \lhd 2^3 \lhd \ldots \lhd 2^2 \cdot 5 \lhd 2^2 \cdot 3 \lhd \ldots \lhd 2 \cdot 5 \lhd 2 \cdot 3 \lhd \ldots \lhd 9 \lhd 7 \lhd 5 \lhd 3.$$

Більше того, для будь-якого n існує неперервне відображення, що має цикл періоду n і не має циклу періоду n'', якщо $n \lhd n''$.

У теоремі Шарковського цикли неперервного відображення класифікуються за періодами, але відображення може мати різні цикли деякого фіксованого періоду. Тому, крім класифікації циклів за періодами, природно розглянути їх більш детальну класифікацію, а саме, за типами — циклічними перестановками. Природність такої класифікації випливає з того, що обмеження відображення на цикл є циклічною перестановкою, тобто обмеження відображення на цикл є взаємно однозначним відображенням на себе скінченої множини точок циклу і не містить власних інваріантних підмножин.

Відомо, що множина всіх циклічних перестановок з відношенням порядку, що відповідає за співіснування циклів різних типів не є лінійно впорядкованою, а є лише частково впорядкованою і тому опис співіснування типів циклів дуже складний. Проте існують підмножини циклічних перестановок які є лінійно впорядкованими, як типи циклів, що співіснують. Як приклад, розгляньмо множину всіх типів циклів, так званого *тент-відображення*

$$x \quad \mapsto \quad \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1/2, \\ 2(1-x), & 1/2 < x \le 1, \end{cases}$$

яку позначимо Σ. Відомо, якщо відображення $f \in C^0(I,I)$ має цикл типу $\pi \in \Sigma$, якому відповідає цикл B тент-відображення, то воно має й цикл будь-якого типу, який має тент-відображення на інтервалі $[\min\{x \in B\}, \max\{x \in B\}]$.

Важливою особливістю тент-відображення є те, що його графік має дві гілки монотонності. Якщо графік відображення $f \in C^0(I,I)$ має тільки одну гілку монотонності, тобто є монотонним, то таке відображення не є хаотичним і має дуже вузький спектр циклів — цикли періодів 1 і 2. Хаотичні відображення $f \in C^0(I,I)$ завжди мають не менше, ніж дві гілки монотонності.

Доповідь присвячена властивостям циклів розривних відображень інтервалу, графік яких має дві гілки монотонності, причому обидві зростаючі й порівнянню зі згаданими вище властивостями циклів неперервних відображень інтервалу в себе.

Почнімо з класичного відображення, а саме, раціонального повороту кола. Кожна точка кола є періодичною і всі точки мають один і той же період. Наступна лема описує типи циклів відображення еквівалентного (топологічно спряженого) повороту кола з числом обертання p/q.

Лема 1. Тип будь-якого циклу відображення

$$x \mapsto \begin{cases} x + p / q, & 0 \le x < 1 - p / q, \\ x + p / q - 1, & 1 - p / q \le x < 1 \end{cases}$$

інтервалу $[0;1)$ на себе має вигляд

$$\pi_{(p,q)}(i) = \begin{cases} i + p, & 1 \le i \le q - p, \\ x + p - q, & q - p < i < q, \end{cases}$$

де p,q — натуральні числа, $p < q$ і дріб p / q є нескорочуваний.

Відмітимо, що відображення з леми 1, як і тент-відображення має тільки дві гілки монотонності, але обидві зростаючі, а також, що й тент-відображення має цикли типу $\pi_{(p,q)}$, якщо $p = 1$.

Цикли типу $\pi_{(p,q)}$ зустрічаються і в іншому класичному відображенні, але, на відміну від раціонального повороту кола, уже в хаотичному, так званному, *зсуві Бернуллі*, яке відображає стандартну множину Кантора K на себе за формулою

$$x \mapsto \begin{cases} 3x, & [0;1 / 2] \cap K, \\ 3x - 2, & [1 / 2;1] \cap K. \end{cases}$$

Лема 2. Зсув Бернуллі має цикл будь-якого типу $\pi_{(p,q)}$.

Крім циклів типу $\pi_{(p,q)}$, зсув Бернуллі має також багато циклів періоду q інших типів. Наприклад, якщо q є простим числом, то зсув Бернуллі, має $\dfrac{2^q - 2}{q}$ різних циклів періоду q, а не $q - 1$ циклів, як це гарантовано лемою 2.

Розгляньмо клас розривних відображень, який, зокрема, містить зсув Бернуллі, та складається з відображень g з такими властивостями:

1) g відображає інтервал $I = [0;1]$ на себе;

2) $g(0) = 0$;

3) існує точка a, де $0 < a < 1$, така що g неперервне монотонно зростаюче відображення на інтервалі $[0;a]$ таке, що $g(x) > x$ при $x \in (0;a]$;

4) існує точка b, де $a < b < 1$ така, що при $g(x) = 1$ при $x \in [a;b)$;

5) g неперервне монотонно зростаюче відображення на інтервалі $[b;1]$ таке, що $g(x) < x$ при $x \in [b;1]$.

Клас таких відображень позначимо через $R(I;I)$ й опишімо співіснування циклів типу $\pi_{(p,q)}$ та їх взаємне розташування для відображень з цього класу.

Теорема 1. *Якщо відображення* $g \in R(I;I)$ *має цикл типу* $\pi_{(1,q)}$, *то воно має і цикл типу* $\pi_{(1,q+1)}$ *при цьому обмеження відображення на цикли цих типів еквівалентне перестановці*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & 2q-1 & 2q & 2q+1 \\ 2 & 4 & \dots & i+2 & \dots & 2q+1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Наслідок 1. Якщо відображення $g \in R(I;I)$ має цикл типу $\pi_{(1,q)}$, то воно має і цикл типу $\pi_{(1,q')}$ для будь-якого $q' > q$.

Теорема 2. *Якщо відображення* $g \in R(I;I)$ *має цикл типу* $\pi_{(q,q+1)}$, *то воно має і цикл типу* $\pi_{(q-1,q)}$ *при цьому обмеження відображення на цикли цих типів еквівалентне перестановці*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & i & \dots & 2q & 2q+1 \\ 2q-1 & 2q+1 & 1 & \dots & i-2 & \dots & 2q-2 & 2q \end{pmatrix}.$$

Теорема 3. *Якщо відображення* $g \in R(I;I)$ *має цикл типу* $\pi_{(q,q+1)}$, *то воно має і цикл типу* $\pi_{(1,q)}$ *при цьому обмеження відображення на цикли цих типів еквівалентне перестановці*

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & i & \dots & q-2 & q-1 & q & q+1 & q+2 & q+3 & \dots & i & \dots & 2q+1 \\ 2 & \dots & i+1 & \dots & q-1 & q+1 & 2q+1 & 1 & q & q+2 & \dots & i-1 & \dots & 2q \end{pmatrix}.$$

Наслідок 2. Якщо відображення $g \in R(I;I)$ має цикл типу $\pi_{(q,q+1)}$, то воно має і цикл типу $\pi_{(q',q'+1)}$ для будь-якого $2 \le q' < q$, а також цикл типу $\pi_{(1,q'')}$ для будь-якого q''.

Список літератури

Alseda, L., Llibre, J., & Misiurewicz, M. (1993). *Combinatorial dynamics and entropy in dimension one*. Singapore: World Scientific.

Devaney, R. L. (1992). *A first course in chaotic dynamical systems: Theory and experiment*. New York: Westview Press.

Каток, А.Б., & Хасселблат, Б. (1999). *Введение в современную теорию динамических систем*. Москва: Факториал.

Шарковский, А. Н. (1964). Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя. *Український математичний журнал*, *16*(1), 61—71.

Шарковский, А. Н. (2013). *Аттракторы траекторий и их бассейны*. Киев: Наукова думка.

Шарковский, А. Н., Коляда, С. Ф., Сивак, А. Г., & Федоренко, В. В. (1989). *Динамика одномерных отображений*. Киев: Наукова думка.

ПРО ТРЕТЮ КРАЙОВУ ЗАДАЧУ ДЕФОРМУВАННЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНОГО ШАРУ З ЕЛІПТИЧНИМ ОТВОРОМ ПРИ ЧИСТОМУ ЗСУВІ НА НЕСКІНЧЕННОСТІ

І. Ю. Хома[1], О. Г. Дашко[1], Т. М. Прощенко[2]

[1]*Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна*

[2]*Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна*

t.proshchenko@gmail.com

Викладено метод побудови розв’язку задачі про напружений стан трансверсально-ізотропного шару, послабленого еліптичним отвором. На поверхні отвору задані нульові значення нормального переміщення й дотичних напружень, тобто однорідні умови третьої крайової задачі теорії пружності, а на нескінченності шар знаходиться під дією постійних зсувних напружень. В основу розв’язку задачі покладено метод розкладу шуканих функцій в ряди Фур’є за поліномами Лежандра (Векуа, 1965; Khoma, 2000) сумісно з методом збурення форми границі (Гузь, 1962).

Ключові слова: трансверсально-ізотропний шар, напружений стан, еліптичний отвір.

Нехай шар товщиною $2h$ $(h = \mathrm{const})$, віднесений до декартової системи координат x_i $(i = 1,2,3)$, займає область $\Omega = S \times \left[-h, h\right]$ тривимірного простору $\mathbb{R}^3$. Уважатимемо, що x_1, x_2 належать серединній площині S, яка зливається із площиною ізотропії шару, а $x_3 \in \left[-h, h\right]$. Представимо компоненти вектора переміщень $u_j\left(x_1, x_2, x_3\right)$ і тензора напружень $\sigma_{ij}\left(x_1, x_2, x_3\right)$ у вигляді скінченного ряду Фур’є за поліномами Лежандра $P_k(\xi)$ координати товщини $\xi = x_3 / h$, тобто

$$\left\{u_j\left(x_1, x_2, x_3\right), \sigma_{ij}\left(x_1, x_2, x_3\right)\right\} = \sum_{k=0}^{N}\left\{u_j^{(k)}\left(x\right), \sigma_{ij}^{(k)}\left(x\right)\right\}P_k\left(\xi\right), \tag{1}$$

де $x = (x_1, x_2) \in S$; $u_j^{(k)}\left(x\right)$, $\sigma_{ij}^{(k)}\left(x\right)$ — коефіцієнти розкладу; N — натуральне число, яке вважатимемо парним $N = 2n$ $(n = 0,1,... < \infty)$.

Відносно коефіцієнтів розкладу, як функцій двох незалежних змінних, отримуємо систему диференціальних рівнянь і відповідні граничні умови стосовно симетричного і кососиметричного (відносно S) деформування шару. Так, при симетричному деформуванні система рівнянь має вигляд

$$c_{60}\Delta u_\alpha^{(2k)} + \left(c_{12} + c_{66}\right)\partial_\alpha e^{(2k)} + \left(4k+1\right)h^{-1}\sum_{s=1}^{n}\left(\lambda_{2s-1}^{(k)}\partial_\alpha u_3^{(2s-1)} - c_{44}h^{-1}\beta_{2s}^{(k)}u_\alpha^{(2s)}\right) = 0$$

$$(\alpha = 1,2; k = \overline{0,n}),$$

$$c_{44}\Delta u_3^{(2k-1)} + \left(4k-1\right)h^{-1}\sum_{s=0}^{n}\left(\lambda_{2s}^{\prime(k)}e^{(2s)} - c_{33}h^{-1}\alpha_{2s-1}^{(k)}u_3^{(2s-1)}\right) = 0 \ (k = 1,n), \tag{2}$$

де c_{11}, c_{12},…, c_{66} — пружні сталі матеріалу; Δ — оператор Лапласа; $\partial_\alpha = \partial / \partial x_\alpha$; $e^{(2k)} = \partial_1 u_1^{(2k)} + \partial_2 \overline{u}_2^{(2k)}$;

$$\lambda_{2s-1}^{(k)} = \begin{cases} -c_{44}, 1 \le s \le k; \\ c_{13}, k < s \le n \end{cases}, \ \lambda_{2s}^{\prime(k)} = \begin{cases} -c_{13}, 0 \le s < k; \\ c_{44}, k \le s \le n \end{cases};$$

$\alpha_{2s-1}^{(k)}$, $\beta_{2s}^{(k)}$ — абсолютні сталі,

$$\alpha_{2s-1}^{(k)} = \begin{cases} s\left(2s-1\right), 1 \le s \le k; \\ k\left(2k-1\right), k \le s \le n \end{cases}, \ \beta_{2s}^{(k)} = \begin{cases} s\left(2s+1\right), 1 \le s \le k; \\ k\left(2k+1\right), k \le s \le n \end{cases}.$$

Загальний аналітичний розв’язок системи (2) в комплексній формі представляється таким чином (Khoma, 2000)

$$c_{66} u_+^{(0)} = \varkappa \varphi\left(z\right) - z\overline{\varphi'\left(z\right)} - \overline{\psi\left(z\right)} + h \sum_{l=1}^{N} a_l^{(0)} \partial_{\overline{z}} V_l;$$

$$c_{66} u_+^{(2k)} = \mu_*^{(2k)} h^2 \overline{\varphi''(z)} + h \sum_{l=1}^{N} a_l^{(2k)} \partial_{\overline{z}} V_l + ih \sum_{s=1}^{n} b_s^{(2k)} \partial_{\overline{z}} W_s; \ u_+^{(2k)} = u_1^{(2k)} + i u_2^{(2k)}; \quad (3)$$

$$c_{66} u_3^{(1)} = -\varkappa_1 h \left[\varphi'\left(z\right) + \overline{\varphi'\left(z\right)}\right] + \sum_{l=1}^{N} c_l^{(1)} V_l; \quad c_{66} u_3^{(2k-1)} = \sum_{l=1}^{N} c_l^{(2k-1)} V_l \ \left(k = \overline{1, n}\right),$$

де $\varphi\left(z\right)$, $\psi\left(z\right)$ — довільні голоморфні функції комплексної змінної $z = x_1 + i x_2$; V_l і W_s — метагармонічні функції, що задовольняють рівнянням

$$\Delta V_l - k_l h^{-2} V_l = 0 \ \left(l = \overline{1, N}\right); \ \ \Delta W_s - t_s h^{-2} W_s = 0 \ \left(s = \overline{1, n}\right), \quad (4)$$

у яких параметрами k_l і t_s є корені відповідних характеристичних рівнянь; $\varkappa$, $\varkappa_1$, $\mu_*^{(2)} = \varkappa_2$, $\mu_*^{(2k)} = 0 \ \left(k > 1\right)$, $a_l^{(2k)}$, $b_s^{(2k)}$, $c_l^{(2k-1)}$ — безрозмірні константи. Складові напружень $\sigma_{ij}^{(m)}$ згідно з розв’язком (3) виражаються формулами

$$\sigma_{11}^{(0)} + \sigma_{22}^{(0)} = 4\left[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}\right] + 2h^{-1} \sum_{l} d_l^{(0)} V_l;$$

$$\sigma_{11}^{(0)} - \sigma_{22}^{(0)} + 2i\sigma_{12}^{(0)} = -4\left[z\overline{\varphi''(z)} + \overline{\psi'(z)}\right] + 4h \sum_{l=1}^{N} a_l^{(0)} \partial_{\overline{z}}^2 V_l;$$

$$\sigma_{11}^{(2k)} + \sigma_{22}^{(2k)} = 2h^{-1} \sum_{l=1}^{N} d_l^{(2k)} V_l; \quad \sigma_{33}^{(2k)} = h^{-1} \sum_{l=1}^{N} d_{3l}^{(2k)} V_l \ \left(k = \overline{1, n}\right); \quad (5)$$

$$\sigma_{11}^{(2k)} - \sigma_{22}^{(2k)} + 2i\sigma_{12}^{(2k)} = 4\mu_*^{(2k)} h^2 \overline{\varphi'''(z)} + 4h \sum_{l=1}^{N} a_l^{(2k)} \partial_{\overline{z}}^2 V_l + 4ih \sum_{s=1}^{n} b_s^{(2k)} \partial_{\overline{z}}^2 W_s;$$

$$\sigma_{13}^{(2k-1)} + i\sigma_{23}^{(2k-1)} = 2\sum_{l=1}^{N} p_l^{(2k-1)} \partial_{\bar z} V_l + 2i\sum_{s=1}^{n} q_s^{(2k-1)} \partial_{\bar z} W_s \quad \left(k = \overline{1, n}\right).$$

Запровадьмо полярну систему координат r, θ і скористаємося формулами перетворення

$$\begin{aligned} &\sigma_{rr}^{(2k)} - \sigma_{\theta\theta}^{(2k)} - 2i\sigma_{r\theta}^{(2k)} = e^{2i\theta}\left(\sigma_{11}^{(2k)} - \sigma_{22}^{(2k)} - 2i\sigma_{12}^{(2k)}\right); \\ &\sigma_{rr}^{(2k)} + \sigma_{\theta\theta}^{(2k)} = \sigma_{11}^{(2k)} + \sigma_{22}^{(2k)};\ u_r^{(2k)} - iu_\theta^{(2k)} = e^{i\theta}\overline{u}_+^{(2k)}; \\ &\sigma_{r3}^{(2k-1)} - i\sigma_{\theta 3}^{(2k-1)} = e^{i\theta}\left(\sigma_{13}^{(2k-1)} - i\sigma_{23}^{(2k-1)} - 2i\sigma_{12}^{(2k)}\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Звідси отримуємо вирази для граничних умов на контурі кругового отвору. Зокрема, для третьої крайової задачі маємо

$$\begin{aligned} &c_{66}u_r^{(2k)} = \mathrm{Re}\left(c_{66}\overline{u}_+^{(2k)} e^{i\theta}\right), \quad \sigma_{r3}^{(2k-1)} = \mathrm{Re}\left[e^{i\theta}\left(\sigma_{13}^{(2k-1)} - i\sigma_{23}^{(2k-1)}\right)\right]; \\ &2\sigma_{r\theta}^{(2k)} = \mathrm{Im}\left[e^{2i\theta}\left(\sigma_{11}^{(2k)} - \sigma_{22}^{(2k)} - 2i\sigma_{12}^{(2k)}\right)\right]. \end{aligned} \tag{7}$$

Нехай шар ослаблений отвором $\partial\Omega = L \times \left[-h, h\right]$, крива L якого на площині S незначно відрізняється від круга радіуса R і описується рівняннями

$$x_1 = R\left(\cos\theta + \varepsilon\cos m\theta\right), \quad x_2 = R\left(\sin\theta - \varepsilon\sin m\theta\right), \tag{8}$$

в яких m — натуральне число, ε — малий параметр. При відповідних значеннях m і ε отримуємо отвори різної форми: еліптичного, квадратного і трикутного із закругленими кутами. Так, для еліптичного отвору $m = 1$, $\varepsilon = \left(a - b\right)\big/\left(a + b\right)$, $R = \left(a + b\right)\big/2$, де a і b — півосі еліпса.

Функція, яка конформно відображає зовнішню область одиничного круга на нескінченну область, обмежену кривою (8), задається формулою

$$z = x + iy = R^{-1}\omega\left(\zeta\right) = \zeta + \varepsilon f\left(\zeta\right). \tag{9}$$

Тут $x = x_1\big/R$, $y = x_2\big/R$, $z = re^{i\theta}$, $\zeta = \rho e^{i\vartheta}$, $f(\zeta) = \zeta^{-m}$; x і y — безрозмірні декартові координати, ρ і ϑ — ортогональні криволінійні координати.

Оскільки криволінійна система координат (ρ, ϑ, ξ) повернута на деякий кут β відносно полярної (r, θ, x_3) навколо спільної осі $\xi = h^{-1}x_3$, то мають місце аналогічні до (6) формули перетворення

$$\begin{aligned} &\sigma_{\rho\rho}^{(2k)} - \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(2k)} - 2i\sigma_{\rho\vartheta}^{(2k)} = e^{2i\beta}\left(\sigma_{rr}^{(2k)} - \sigma_{\theta\theta}^{(2k)} - 2i\sigma_{r\theta}^{(2k)}\right), \\ &\sigma_{\rho\rho}^{(2k)} + \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(2k)} = \sigma_{rr}^{(2k)} - \sigma_{\theta\theta}^{(2k)},\ u_\rho^{(2k)} - iu_\vartheta^{(2k)} = e^{i\beta}\left(u_r^{(2k)} - iu_\theta^{(2k)}\right), \\ &\sigma_{\rho\xi}^{(2k-1)} - i\sigma_{\vartheta\xi}^{(2k-1)} = e^{i\beta}\left(\sigma_{r3}^{(2k-1)} - i\sigma_{\theta 3}^{(2k-1)} - 2i\sigma_{r\theta}^{(2k)}\right), \end{aligned} \tag{10}$$

де $\sigma_{i'j'}^{(m)} = \sigma_{i'j'}^{(m)}\left(\rho, \vartheta\right)$ $\left(i', j' = \rho, \vartheta, \xi\right)$, $\sigma_{ij}^{(m)} = \sigma_{ij}^{(m)}\left(r, \theta\right)$ $\left(i, j = r, \theta, 3\right)$. Згідно з конформним відображенням (9), зв'язок між змінними r, θ і ρ, ϑ, а також значення експоненти $e^{i\beta}$ визначаються формулами (Гузь, 1962)

$$r=\left|\omega(\zeta)\right|,\ B=\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{Im}\omega(\zeta)}{\operatorname{Re}\omega(\zeta)},\ e^{i\beta}=\frac{\zeta}{|\zeta|}\frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|}\frac{\overline{\omega(\zeta)}}{|\omega(\zeta)|}. \tag{11}$$

Ураховуючи те, що основні рівняння (4) у змінних ρ,ϑ будуть складними і знайти їх точний аналітичний розв'язок з відокремленими змінними не можливо, то розв'язок задачі шукатимемо у вигляді рядів за додатними степенями малого параметра ε. Отже, шляхом розкладання правої і лівої частини співвідношень (10) у згадані ряди й прирівнюванням виразів при однакових степенях параметра ε, матимемо такі рівності

$$\sigma_{\rho\rho}^{(2k,\tau)}-\sigma_{\vartheta\vartheta}^{(2k,\tau)}-2i\sigma_{\rho\vartheta}^{(2k,\tau)}=\sum_{j=0}^{\tau}\Lambda_2^{(\tau-j)}\left(\sigma_{rr}^{(2k,j)}-\sigma_{\theta\theta}^{(2k,j)}-2i\sigma_{r\theta}^{(2k,j)}\right),$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{(2k,\tau)}+\sigma_{\vartheta\vartheta}^{(2k,\tau)}=\sum_{j=0}^{\tau}\Lambda_1^{(\tau-j)}\left(\sigma_{rr}^{(2k,j)}+\sigma_{\theta\theta}^{(2k,j)}-2i\sigma_{r\theta}^{(2k,j)}\right),$$

$$u_{\rho}^{(2k,\tau)}-iu_{\vartheta}^{(2k,\tau)}=\sum_{j=0}^{\tau}\Lambda_3^{(\tau-j)}\left(u_{r}^{(2k,j)}-iu_{\theta}^{(2k,j)}\right), \tag{12}$$

$$\sigma_{\rho\xi}^{(2k-1,\tau)}-i\sigma_{\vartheta\xi}^{(2k-1,\tau)}=\sum_{j=0}^{\tau}\Lambda_3^{(\tau-j)}\left(\sigma_{r3}^{(2k-1,j)}-i\sigma_{\theta3}^{(2k-1,j)}\right),$$

де $\Lambda_p^{(l)}$ — оператори вигляду

$$\Lambda_p^{(0)}=1\ (p=1,2,3),\ \Lambda_1^{(1)}=L_1,\ \Lambda_2^{(1)}=L_1+2iq_1,\ \Lambda_3^{(1)}=L_1+iq_1,$$

$$2\Lambda_1^{(2)}=L_2,\ 2\Lambda_2^{(2)}=L_2-4q_1^2+4i(q_1L_1+q_2),\ 2\Lambda_3^{(2)}=L_2-q_1^2+i(q_1L_1+q_2),$$

причому

$$L_1=f(\zeta)\partial_\zeta+\overline{f(\zeta)}\partial_{\bar\zeta},\ L_2=f^2(\zeta)\partial_\zeta^2+2f(\zeta)\overline{f(\zeta)}\partial_\zeta\partial_{\bar\zeta}+\overline{f^2(\zeta)}\partial_{\bar\zeta}^2,$$

$$q_1=\frac{1}{\rho^2}\operatorname{Im}\left[\zeta\overline{f(\zeta)}+\zeta\bar\zeta f'(\zeta)\right],\ q_2=\frac{1}{2\rho^4}\operatorname{Im}\left[\bar\zeta^{2}f^2(\zeta)+\zeta^2\bar\zeta^{2}f'^2(\zeta)\right].$$

Звідси отримуємо вирази для граничних умов, які записуються так само, як і для шару із круговим отвором. Отже, у кожному з наближень приходимо до розв'язання задачі для кругового отвору.

Список літератури

Khoma, I. Yu. (2000). Representation of the solution of the equilibrium equations for non-thin transversely isotropic plates. *Journal of Mathematical Sciences, 101*(6), 3577–3584.

Векуа, И. Н. (1965). Теория тонких пологих оболочек переменной толщины. *Тр. Тбилис. матем. ин-та., 30*, 3—103.

Гузь, О. М. (1962). Про наближений метод визначення концентрації напружень навколо криволінійних отворів в оболонках. *Прикл. механіка, 8*(6), 605—612.

ДОСЛІДЖЕННЯ ШВИДКОЗМІННИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ДВОЧЛЕННИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З НЕЛІНІЙНОСТЯМИ РІЗНИХ ТИПІВ

О. О. Чепок

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, Одеса, Україна

olachepok@ukr.net

Установлюються асимптотичні зображення швидко змінних розв'язків, а також їх похідних, для диференціальних рівнянь другого порядку із швидко та правильно змінними нелінійностями у правій частині.

Ключові слова: асимптотичні зображення, розв'язки, правильно змінна функція, швидко змінна функція.

Розглядається диференціальне рівняння

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi_0(y)\varphi_1(y'), \tag{1}$$

де $\alpha_0 \in \{-1,1\}$, $p : [a,\omega[\to]0,+\infty[$, $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \to]0,+\infty[$ $(i = 0,1)$ — неперервні функції, $\Delta_{Y_i} = [y_i^0, Y_i[$ або $\Delta_{Y_i} =]Y_i, y_i^0]$, $Y_i \in \{0,+\infty\}$. При $Y_i = +\infty$ $(Y_i = -\infty)$ вважаємо, що $y_i^0 > 0$ $(y_i^0 < 0)$ відповідно. Крім того вважається, що функція $\varphi_1(z)$ є правильно змінною функцією (Bingham, Goldie, & Teugels, 1987) при $z \to Y_1$ $(z \in \Delta_{Y_1})$ порядку σ_1, а функція $\varphi_0(z)$ двічі неперервно диференційована на Δ_{Y_0} та задовольняє умови

$$\varphi_0' \neq 0 \text{ на } \Delta_{Y_0}, \ \lim_{\substack{z\to Y_0\\ z\in\Delta_{Y_0}}} \varphi_0(z) \in \{0;+\infty\}, \ \lim_{\substack{z\to Y_0\\ z\in\Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi_0(z)\varphi_0''(z)}{(\varphi_0'(z))^2} = 1.$$

Розв'язок y рівняння (1) називається $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$-*розв'язком*, якщо

$$y^{(i)} : [t_0,\omega[\to \Delta_{Y_i}, \quad \lim_{t\uparrow\omega} y^{(i)}(t) = Y_i \ (i = 0,1), \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)} = 1.$$

За рахунок вищевказаного означення, такі розв'язки є швидкозмінними функціями при $t \uparrow \omega$ (Bingham, Goldie, & Teugels, 1987).

Для формулювання отриманих результатів сформулюємо

Означення. Говоритимемо, що функція $\varphi_1(z)$ рівняння (1) *задовольняє умові*, якщо для будь-якої неперервно диференційованої функції $L : \Delta_{Y_1} \to]0,+\infty[$ такої, що

$$\lim_{\substack{z\to Y_1\\ z\in\Delta_{Y_1}}} \frac{zL'(z)}{L(z)} = 0,$$

має місце співвідношення

$\theta_1(zL(z)) = \theta_1(z)(1+o(1))$ при $z \to Y_1 \quad \left(z \in \Delta_{Y_1}\right)$, де $\theta_1(z) = \varphi_1(z)\left|z\right|^{-\sigma_1}$.

Запровадьмо наступні позначення:

$$\theta_1(z) = \varphi_1(z)\left|z\right|^{-\sigma_1},$$

$$I(t) = \int_{A_\omega}^{t} (p(\tau))^{\frac{1}{2-\sigma_1}} d\tau,\ A_\omega = \begin{cases} b, & \int_b^\omega p^{\frac{1}{2-\sigma_1}}(\tau)d\tau = +\infty; \\ \omega, & \int_b^\omega p^{\frac{1}{2-\sigma_1}}(\tau)d\tau < +\infty. \end{cases}$$

$$\Phi(y) = \int_{B_\omega}^{y} \frac{\operatorname{sign} y_1^0}{(\varphi_0(s)\left|s\right|)^{\frac{1}{2-\sigma_1}}} ds,\ B_\omega = \begin{cases} y_0^0, & \int_{y_0^0}^{Y_0} \frac{\operatorname{sign} y_1^0}{(\varphi_0(s)\left|s\right|)^{\frac{1}{2\text{-}\sigma_1}}} ds = \pm\infty, \\ Y_0, & \int_{y_0^0}^{Y_0} \frac{\operatorname{sign} y_1^0}{(\varphi_0(s)\left|s\right|)^{\frac{1}{2-\sigma_1}}} ds = \text{const}. \end{cases}$$

$$I_0(t) = \int_{A_\omega^0}^{t} (\Phi^{-1}(I(\tau))d\tau, \quad A_\omega^0 = \begin{cases} b, & \int_b^\omega (\Phi^{-1}(I(\tau))d\tau = +\infty; \\ \omega, & \int_b^\omega (\Phi^{-1}(I(\tau))d\tau < +\infty. \end{cases}$$

$$I_1(t) = -\int_{A}^{t} \frac{I}{I_0} d\tau, \quad A_1 = \begin{cases} b, & -\int_b^\omega \frac{I}{I_0} d\tau = +\infty; \\ \omega, & -\int_b^\omega \frac{I}{I_0} d\tau < +\infty. \end{cases}$$

$$\Phi_1(y) = \int_{B_1}^{y} \Phi(s)ds,\ B_1 = \begin{cases} y_0^0, & \int_{y_0^0}^{Y_0} \Phi(s)ds = \pm\infty, \\ Y_0, & \int_{y_0^0}^{Y_0} \Phi(s)ds = \text{const}, \end{cases} \quad Z_1 = \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \Phi_1(y).$$

Зауважмо, що $b \in [a;\omega[$ обирається так, щоб $\left(-\frac{1}{I_0(t)}\right) \in \Delta_{Y_0}$.

Теорема. *Нехай* $\sigma_1 \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, *функції* θ_1 *та* Φ^{-1} *задовольняють умову* S (Евтухов, 1998),

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{y\left(\dfrac{\Phi_1'(y)}{\Phi_1(y)}\right)'}{\dfrac{\Phi_1'(y)}{\Phi_1(y)}} = \gamma_0 \qquad \gamma_0 \in \mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$$

та існує скінченна та нескінченна границя

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\left(\dfrac{I_1(t)}{I_1'(t)}\right)''\left(\dfrac{I_1(t)}{I_1'(t)}\right)}{\left(\left(\dfrac{I_1(t)}{I_1'(t)}\right)'\right)^2}.$$

Тоді для існування у рівняння (1) $P_\omega(Y_0,Y_1,1)$ *-розв'язків необхідно, а якщо*

$$\left(\sigma_1-2\right)y_0^0 I(t)I_1(t)>0 \text{ при } t\in[a;\omega[,$$

то й достатньо виконання умов

$$\lim_{t\uparrow\omega}\Phi_1^{-1}(I_1(t))=Y_0,\quad y_0^0\alpha_0>0,\quad \lim_{t\uparrow\omega}I_1(t)=Z_1$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\Phi_1'(\Phi^{-1}{}_1(I_1(t)))}{I_0(t)I_1'(t)}=-1;\quad \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\left(\dfrac{I_1(t)}{I_1'(t)}\right)''\left(\dfrac{I_1(t)}{I_1'(t)}\right)}{\left(\left(\dfrac{I_1(t)}{I_1'(t)}\right)'\right)^2}=1;$$

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{I_1(t)I'(t)\left|\theta_1\left(-\dfrac{1}{I_0(t)}\right)\right|^{\frac{1}{2-\sigma_1}}}{\Phi_1'(\Phi^{-1}{}_1(I_1(t)))I_1'(t)}=1;$$

Більш того, такі розв'язки мають такі асимптотичні зображення при $t\uparrow\omega$

$$\Phi_1(y(t))=I_1(t)[1+o(1)],\quad \frac{y'(t)\Phi_1'(y(t))}{\Phi_1(y(t))}=\frac{I_1'(t)}{I_1(t)}[1+o(1)].$$

Таким чином, установлені необхідні та достатні умови існування в рівняння (1) $P_\omega\left(Y_0,Y_1,1\right)$-розв'язків, а також знайдені асимптотичні зображення при $t\uparrow\omega$ для таких розв'язків та їх похідних.

Список літератури

Bingham, N. H., Goldie, C. M., & Teugels, J. L. (1987). *Regular variation: Encyclopedia of mathematics and its applications*. Cambridge: Cambridge university press.

Евтухов, В. М. (1998). *Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений* (Дис. докт. физ.-мат. наук). Киев.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НА ЧЕТВЕРТОЙ ФАЗЕ ПРОХОЖДЕНИЯ ВАГОНОМ СТЫКОВОЙ НЕРОВНОСТИ

В. П. Шпачук, А. А. Чупрынин, Т. А. Супрун

Харьковский национальный университет городского хозяйства им. А. Н. Бекетова, Харьков, Украина

v.p.shpachuk@gmail.com

Исследовано динамическое взаимодействие рельсового пути и вагона в момент прохождения стыковой неровности на четвертой фазе движения. Предложена модель транспортного механического комплекса «вагон — рельсовый путь».

Ключевые слова: вагон, рельсовый путь, стыковая неровность, фаза движения, многопролетная балка, жесткость балки, упругие опоры.

Срок службы подвижного состава и верхнего строения пути зависит от совместной работы всех их элементов, механических, конструктивных и геометрических характеристик, условий эксплуатации. Наиболее слабым звеном механической системы «вагон — рельсовый путь» являются изолированные стыковые неровности. При прохождении зоны стыка имеет место четыре фазы движения вагона, которые соответствуют номеру колесных пар транспортного средства. Рассмотрены особенности динамического взаимодействия на четвертой фазе движения. В большинстве работ исследования ограничены первой, реже — второй и третьей фазами. Это исключает возможность создания обобщенного научного подхода к проблеме механического взаимодействия в системе и снижает эффективность практического использования полученных результатов.

Для определения прогибов принимающего рельса под первой шпалою использован метод статическо-динамического многофакторного анализа. Он включает этап определения высоты ступени стыка при статическом нагружении с учетом фаз движения и этап динамичного расчета взаимодействия подвижного состава и пути. Эти задачи связаны между собой расчетом ударного взаимодействия колеса и принимающего рельса, а найденная величина ступени позволяет определить ударный импульс и послеударную скорость при переходе на принимающий рельс (Шпачук, Далека, & Коваленко, 2005; Шпачук, Чупринін, Гарбуз, & Супрун, 2016), что является начальными условиями задачи колебаний рассматриваемой системы.

При исследовании динамического взаимодействия приняты следующие допущения (Шпачук и др., 2016): колебания колесной пары и рельса происходят в безотрывном режиме (т. к. масса вагона намного больше массы колеса); прогибы рельса реализуются без нарушения однородности балластного слоя (т.к. рассматриваются деформация на этапе прогибов только «вниз»).

Дифференциальные уравнения механической системы (Тимошенко & Гудьер, 1975; Бабаков, 1968):

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^4 w(t,x)}{\partial x^4}+\dfrac{\rho F}{EJ}\cdot\dfrac{\partial^2 w(t,x)}{\partial t^2}= \\
=\dfrac{c_1(y_2-w(t,l'))\delta(l')}{EJ}+\dfrac{b_1}{EJ}\left(\dfrac{\partial y_2}{\partial t}-\dfrac{\partial w(t,l')}{\partial t}\right)\delta(l')-\sum\limits_{i=1}^{23}\dfrac{b_2}{EJ}\dfrac{\partial w(t,l_i)}{\partial t}\delta(x-l_i)- \\
-\sum\limits_{i=1}^{23}\dfrac{c_2 w(t,l_i)\delta(x-l_i)}{EJ}-\dfrac{m_1}{EJ}\dfrac{\partial^2 w(t,l')\delta(l')}{\partial t^2}+\dfrac{P_0 w(t,l')\delta(l')}{EJ}; \\
m_2\dfrac{\partial^2 y_2}{\partial t^2}+c_1(y_2-w(t,l'))+b_1\left(\dfrac{\partial y_2}{\partial t}-\dfrac{\partial w(t,l')}{\partial t}\right)=0,
\end{cases}
\qquad (1)
$$

где w, y_2 — обобщенные координаты; $m_{1,2}$, $c_{1,2}$, $b_{1,2}$, P_0, E, J, ρ, F, l', l_i — механические и геометрические параметры анализируемой системы; $\delta(x)$ — импульсная функция.

Решение системы (1) выполняется с применением метода Фурье разделения переменных и теории операционного исчисления Лапласа — Карсона (Шпачук и др., 2015, 2016). Решение задачи о свободных колебаниях сводится к суперпозиции собственных форм. В результате прогиб принимающего рельса с учетом подрессоренной массы вагона и ненулевых начальных условий, которые обусловлены статическим прогибом рельса и рассчитанной послеударной скоростью, определится:

$$
w(t,x)=\sum_{s=1}^{5} z^s(x)e^{-b_s t}D_s\sin\omega_s t,
$$

где D_s — коэффициенты, находится из условия ортогональности форм колебаний; $z^s(x)$, ω_s — собственные формы и частоты колебаний системы; b_s — коэффициент диссипации соответствующей формы.

Анализ полученных результатов показывает, что изменение загрузки вагона в диапазоне $m=\left[2125\div 3814\right]$кг при скорости движения $V_x=15$ м/с приводит к изменению прогиба принимающего рельса под первой шпалою в диапазоне $y=\left[4{,}292\div 8{,}184\right]$мм, то есть к его росту в 1,907 раза. А увеличение скорости движения вагона в диапазоне $V_x=\left[1\div 15\right]$м/с при загрузке вагона $m=3814$ кг приводит к изменению величины прогиба в диапазоне $y=\left[4{,}708\div 8{,}184\right]$мм — то есть к его росту в 1,738 раза.

Список литературы

Бабаков, И. М. (1968). *Теория колебаний*. Москва: Наука

Тимошенко, С. П., & Гудьер, Д. Ж. (1975). *Теория упругости*. Москва: Наука.

Шпачук, В. П., Чупринін, О. О., Гарбуз, А. О., & Супрун, Т. О. (2016). Особливості динамічної взаємодії на четвертій фазі проходження вагоном стикової нерівності. *Збірник наукових праць УкрДУЗТ*, (165), 167—173.

Шпачук, В. П., Далека, В. Х., & Коваленко, А. В. (2005). *Стикова динаміка трамвая*. Харків: ХНАМГ.

II

АЛГЕБРА.
ГЕОМЕТРІЯ.
МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

VARIANTS OF RECTANGULAR BANDS WITH AN IDENTITY

O. O. Desiateryk
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine
sasha.desyaterik@gmail.com

In this paper we consider the rectangular band with adjoined identity. We studied variants of this semigroup.

Keywords: semigroup, variant, sandwich operation, rectangular band.

Let $(S,\cdot)$ be a semigroup. For any element $a \in (S,\cdot)$ we may define a new operation $*_a$ by

$$x *_a y = x \cdot a \cdot y$$

where $x, y \in S$. Under this operation the set S is again a semigroup, we denote it $(S, *_a)$ and call it *variant* of S.

The study of variants was initiated in monograph Lyapin (1960). Variants of arbitrary semigroups has been studied by various authors.

Variants of commutative bands with zero are already studied in Desiateryk (2015). In this paper we consider non-commutative bands. We call a semigroup S *rectangular band* if $x \cdot y \cdot x = x$ for all $x, y \in S$.

We will need the next

Theorem 1 (1Howie, 2003). *Let S be a semigroup. Then the following conditions are equivalent:*

(1) S is a rectangular band;

(2) every element of S is idempotent, and $x \cdot y \cdot z = x \cdot z$ for all $x, y, z \in S$;

(3) S is isomorphic to a semigroup of the form $X \times Y$, where X and Y are non-empty sets, and where multiplication is given by

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1, y_2).$$

The next Theorem is direct corollary of the Theorem 1.

Theorem 2.2 *Let S be a rectangular band and $(x_i, y_i) \in S$ is arbitrary element. Then all variants $(S, *_{(x_i,y_i)})$ are isomorphic to initial rectangular band S.*

The rectangular band S has no identity element. We consider a rectangular band with adjoined identity. We define

$$1 \cdot (x_i, y_j) = (x_i, y_j) \cdot 1 = (x_i, y_j) \text{ for all } (x_i, y_j) \in S, \text{ and } 1 \cdot 1 = 1.$$

We will denote by S^1 a rectangular band S with adjoined identity 1.

Proposition 1.3 *Let x_i be arbitrary but fixed element in X, and $y_k, y_v \in Y$ are arbitrary elements. Then variants $(S^1, *_{(x_i,y_k)})$ and $(S^1, *_{(x_i,y_v)})$ are isomorphic.*

Proposition 2.4 *Let* y_i *be arbitrary but fixed element in* Y *, and* $x_k, x_v \in X$ *are arbitrary elements. Then variants* $(S^1, *_{(x_k, y_i)})$ *and* $(S^1, *_{(x_v, y_i)})$ *are isomorphic.*

Theorem 3.5 *All variants of the rectangular band with adjoined identity are isomorphic.*

References

Desiateryk, O. O. (2015). Variants of commutative bands with zero. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics*, (4), 15–20.

Howie, J. M. (2003). *Fundamentals of semigroup theory*. New York: Oxford University Press.

Liapin, E. S. (1960). *Polugrupy [Semigroups]*. Moskva: FIZMATGIZ. (in Russian)

SOME TRIBONACCI IDENTITIES USING TOEPLITZ–HESSENBERG DETERMINANTS

T. P. Goy

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, Ukraine

tarasgoy@yahoo.com

We investigate some families of Toeplitz–Hessenberg determinants the entries of which are Tribonacci numbers with successive, even, and odd subscripts.

Keywords: Tribonacci sequence, Toeplitz–Hessenberg matrix.

Among the several generalizations of Fibonacci numbers, one of the best known is the *Tribonacci sequence* $\{T_n\}_{n\ge 0}$ (Koshy, 2001). This is defined by the recurrence

$$T_{n+1} = T_n + T_{n-1} + T_{n-2},$$

with initial values $T_0 = 0$ and $T_1 = T_2 = 1$.

Many authors studied the Tribonacci sequence and its various properties (Choi & Jo, 2015; Feng, 2011; Tan & Wen, 2007; Zatorsky & Goy, 2016).

A Toeplitz–Hessenberg matrix is an $n \times n$ matrix of the form

$$M_n(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_1 & a_0 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 \end{pmatrix},$$

where $a_0 \ne 0$ and $a_k \ne 0$ for at least one $a_k \ne 0$.

Lemma (Merca, 2013). *Let n be a positive integer. Then*

$$\det(M_n) = \sum_{s_1 + 2s_2 + \cdots + ns_n = n} (-a_0)^{n-(s_1+s_2+\cdots+s_n)} p(s) a_1^{s_1} a_2^{s_2} \cdots a_n^{s_n}, \tag{1}$$

where the summation is over nonnegative integers satisfying $s_1 + 2s_2 + \cdots + ns_n = n$, and

$$p(s) = \frac{(s_1 + s_2 + \cdots + s_n)!}{s_1!\, s_2! \cdots s_n!}$$

is the multinomial coefficient.

Proposition 1. *The following formulas hold*:

$$\det(1, T_0, T_1, \ldots, T_{n-1}) = (-1)^{n-1} F_{n-2}, \qquad n \ge 2,$$

$$\det(1, T_1, T_2, \ldots, T_n) = (-1)^{n-1} \sum_{i=0}^{\lfloor (n-2)/3 \rfloor} \binom{n-2i-2}{i}, \qquad n \ge 2,$$

$$\det(1, T_1, T_3, \ldots, T_{2n-1}) = (-1)^{n-1} \lfloor 4 \cdot 3^{n-3} \rfloor, \qquad n \ge 1,$$

$$\det(1,T_3,T_4,\ldots,T_{n+2}) = (-1)^{n-1}\left\lfloor 3/(n+1)\right\rfloor, \qquad n \ge 2,$$

$$\det(1,T_3,T_5,\ldots,T_{2n+1}) = (-2)^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1} 2^{-i-\lfloor i/2\rfloor}\binom{n-i-1}{\lfloor i/2\rfloor}, \qquad n \ge 1,$$

$$\det(1,T_4,T_6,\ldots,T_{2n+2}) = (-1)^{n-1}\left(4-\lfloor 2/n\rfloor\right), \qquad n \ge 1,$$

$$\det(1,T_4,T_5,\ldots,T_{n+3}) = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2\rfloor+1} (-1)^i \binom{n-i}{i}, \qquad n \ge 2,$$

where

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

is the binomial coefficient, F_n *is the* n^{th} *Fibonacci number,* $\lfloor\cdot\rfloor$ *is the floor function.*

Using Formula (1) for determinants in Proposition 1, we obtain the following Tribonacci identities.

Proposition 2. *The following formulas hold*:

$$\sum_{s_1+2s_n+\cdots+ns_n=n} (-1)^{s_1+s_2+\cdots+s_n+1} p(s) T_0^{s_1}T_1^{s_2}\cdots T_{n-1}^{s_n} = F_{n-2}, \qquad n \ge 2,$$

$$\sum_{s_1+2s_n+\cdots+ns_n=n} (-1)^{s_1+s_2+\cdots+s_n+1} p(s) T_1^{s_1}T_2^{s_2}\cdots T_n^{s_n} = \sum_{i=0}^{\lfloor (n-2)/3\rfloor}\binom{n-2i-2}{i}, \quad n \ge 2,$$

$$\sum_{s_1+2s_n+\cdots+ns_n=n} (-1)^{s_1+s_2+\cdots+s_n+1} p(s) T_1^{s_1}T_3^{s_2}\cdots T_{2n-1}^{s_n} = \left\lfloor 4\cdot 3^{n-3}\right\rfloor, \qquad n \ge 1,$$

$$\sum_{s_1+2s_n+\cdots+ns_n=n} p(s)(-1)^{s_1+s_2+\cdots+s_n+1} T_3^{s_1}T_4^{s_2}\cdots T_{n+2}^{s_n} = \left\lfloor \frac{3}{n+1}\right\rfloor, \qquad n \ge 2,$$

$$\sum_{s_1+2s_n+\cdots+ns_n=n} (-1)^{s_1+s_2+\cdots+s_n+1} p(s) T_3^{s_1}T_5^{s_2}\cdots T_{2n+1}^{s_n} =$$

$$= 2^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1} 2^{-i-\lfloor i/2\rfloor}\binom{n-i-1}{\lfloor i/2\rfloor}, \quad n \ge 1,$$

$$\sum_{s_1+2s_n+\cdots+ns_n=n} p(s)(-1)^{s_1+s_2+\cdots+s_n+1} T_4^{s_1}T_6^{s_2}\cdots T_{2n+2}^{s_n} = 4-\lfloor 2/n\rfloor, \qquad n \ge 1,$$

$$\sum_{s_1+2s_n+\cdots+ns_n=n} p(s)(-1)^{s_1+s_2+\cdots+s_n} T_4^{s_1}T_5^{s_2}\cdots T_{n+3}^{s_n} = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2\rfloor+1} (-1)^{n+i}\binom{n-i}{i}, n \ge 2,$$

where the summation is over nonnegative integers satisfying

$$s_1 + 2s_2 + \cdots + ns_n = n.$$

References

Choi, E., Jo, J. (2015). Identities involving Tribonacci numbers. *J. Chungcheong Math. Soc.*, *28*(1), 39–51.

Feng, J. (2011). Hessenberg matrices on Fibonacci and Tribonacci numbers. *Ars Combin.*, *127*, 117–124.

Koshy, T. (2001). *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications.* New York: Wiley–Interscience.

Merca, M. (2013). A note on the determinant of a Toeplitz–Hessenberg matrix. *Spec. Matrices*, *1*, 10–16.

Tan, B., Wen, Z.-Y. (2007). Some properties of the Tribonacci sequence. *Eur. J. Combinat.*, *28*, 1703–1719.

Zatorsky, R., Goy, T. (2016). Parapermanents of triangular matrices and some general theorems on number sequences. *J. Integer Seq.*, *19*, Article 16.2.2.

ON EQUIVALENCE OF DIFFERENT DEFINITIONS OF G-MONOGENIC MAPPINGS

Tetyana Kuzmenko
Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine
kuzmenko.ts15@gmail.com

For G-monogenic mappings taking values in the algebra of complex quaternion the equivalence of different definitions was established.

Keywords: algebra of complex quaternions, G-monogenic mapping, H-monogenic mapping.

Let $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ be the quaternion algebra over the field of complex numbers $\mathbb{C}$, whose basis consists of the elements $1, I, J, K$ satisfying the multiplication rules:

$$I^2 = J^2 = K^2 = -1, \quad IJ = -JI = K, \quad JK = -KJ = I, \quad KI = -IK = J.$$

In the algebra $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ there exists another basis $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ such that multiplication table in a new basis can be represented as

$\cdot$	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	0	e_3	0
e_2	0	e_2	0	e_4
e_3	0	e_3	0	e_1
e_4	e_4	0	e_2	0

The unit of the algebra can be decomposed as $1 = e_1 + e_2$.

Consider linear functionals $f_1 : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ and $f_2 : \mathbb{H}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ putting

$$f_1(e_1) = f_1(e_3) = 1, \qquad f_1(e_2) = f_1(e_4) = 0,$$
$$f_2(e_2) = f_2(e_4) = 1, \qquad f_2(e_1) = f_2(e_3) = 0.$$

Let us consider the vectors

$$i_1 = e_1 + e_2, \quad i_2 = a_1 e_1 + a_2 e_2, \quad i_3 = b_1 e_1 + b_2 e_2,$$

where $a_k, b_k \in \mathbb{C}, k = 1, 2$, which are linearly independent over the $\mathbb{R}$.

We consider the linear span

$$E_3 := \{\zeta = x i_1 + y i_2 + z i_3 : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

generated by the vectors i_1, i_2, i_3 over the field $\mathbb{R}$. It is obvious, that

$$\xi_1 := f_1(\zeta) = x + y a_1 + z b_1, \qquad \xi_2 := f_2(\zeta) = x + y a_2 + z b_2.$$

Note that the points $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ corresponding to the noninvertible elements

$$\zeta = x i_1 + y i_2 + z i_3$$

of the algebra $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ form the straight lines:

$$L^1: x + y\,\mathrm{Re}\,a_1 + z\,\mathrm{Re}\,b_1 = 0, \qquad y\,\mathrm{Im}\,a_1 + z\,\mathrm{Im}\,b_1 = 0,$$

$$L^2: x + y\,\mathrm{Re}a_2 + z\,\mathrm{Re}\,b_2 = 0, \qquad y\,\mathrm{Im}a_2 + z\,\mathrm{Im}\,b_2 = 0.$$

A set $S \subset \mathbb{R}^3$ is associated with the set

$$S_\zeta := \{\zeta = xi_1 + yi_2 + zi_3 : (x, y, z) \in S\}$$

in E_3. Let Ω_ζ be a domain in E_3.

A continuous mapping $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H} \trianglelefteq \mathbb{C} \ntriangleright$ (or $\hat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H} \trianglelefteq \mathbb{C} \ntriangleright$) is *right-$G$-monogenic* (or *left-$G$-monogenic*) in a domain $\Omega_\zeta \subset E_3$, if Φ (or $\hat{\Phi}$) is differentiable in the sense of the Gâteaux at every point of Ω_ζ, i. e. for every $\zeta \in \Omega_\zeta$ there exists an element $\Phi'(\zeta) \in \mathbb{H} \trianglelefteq \mathbb{C} \ntriangleright$ (or $\hat{\Phi}'(\zeta) \in \mathbb{H} \trianglelefteq \mathbb{C} \ntriangleright$) such that

$$\lim_{\varepsilon \to 0+0} (\Phi(\zeta + \varepsilon h) - \Phi(\zeta))\varepsilon^{-1} = h\Phi'(\zeta) \quad \forall h \in E_3$$

$$(\text{or } \lim_{\varepsilon \to 0+0} \left(\hat{\Phi}(\zeta + \varepsilon h) - \hat{\Phi}(\zeta)\right)\varepsilon^{-1} = \hat{\Phi}'(\zeta)h \quad \forall h \in E_3).$$

A continuous mapping $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H} \trianglelefteq \mathbb{C} \ntriangleright$ of the form

$$\Phi(\zeta) = \sum_{k=1}^{4} U_k(x, y, z)e_k. \tag{1}$$

is called *H-monogenic* in a domain $\Omega_\zeta \subset E_3$ if Φ is differentiable in the sense of Hausdorff at every point $\zeta \in \Omega_\zeta$, i. e. components of the mapping have partial derivatives of the first order with respect to the variables x, y, z, and a formal differential of the mapping

$$d\Phi := \sum_{k=1}^{4} \left(\frac{\partial U_k}{\partial x} dx + \frac{\partial U_k}{\partial y} dy + \frac{\partial U_k}{\partial z} dz \right) e_k$$

is a linear homogeneous function of the differential $d\zeta$, i. e.

$$d\Phi = \sum_{s=1}^{16} A_s d\zeta B_s,$$

where A_s, B_s are certain $\mathbb{H} \trianglelefteq \mathbb{C} \ntriangleright$ — valued functions.

The value

$$\Phi'_H(\zeta) := \sum_{s=1}^{16} A_s B_s,$$

is called *the Hausdorff derivative* of the mapping Φ at the point ζ.

H-monogenic mapping Φ, whose differential is represented as $d\Phi = d\zeta \Phi'_H(\zeta)$ is called *right-H-monogenic*, and H-monogenic mapping $\hat{\Phi}$, whose differential is represented as $d\hat{\Phi} = \hat{\Phi}'_H(\zeta)d\zeta$ is called *left-H-monogenic* in a domain Ω_ζ.

In the papers Shpakivskyi and Kuzmenko (2016a, 2016b, 2017), Kuzmenko (2015) were proved different equivalent definitions of G-monogenic mappings in a domain Ω_ζ. The following statement is a theorem about the equivalence of different definitions of G-monogenic mappings in the algebra $\mathbb{H} \trianglelefteq \mathbb{C} \ntrianglerighteq$.

Theorem. *A mapping $\Phi : \Omega_\zeta \to \mathbb{H} \trianglelefteq \mathbb{C} \ntrianglerighteq$ (or $\hat{\Phi} : \Omega_\zeta \to \mathbb{H} \trianglelefteq \mathbb{C} \ntrianglerighteq$) is right-$G$-monogenic (or left-$G$-monogenic) in a domain $\Omega_\zeta \subset E_3$ if and only if one of the following conditions is satisfied:*

(I) *components $U_k : \Omega \to \mathbb{C}$ of the expansion (1) are $\mathbb{R}$-differentiable in the domain Ω and conditions*

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = i_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = i_3 \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

$$(\text{or} \quad \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial y} = \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial x} i_2, \qquad \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial z} = \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial x} i_3)$$

are satisfied in the domain Ω_ζ;

(II) *components $U_k : \Omega \to \mathbb{C}$ of the expansion (1) are $\mathbb{R}$-differentiable in the domain Ω and the mapping Φ (or $\hat{\Phi}$) is right-H-monogenic (or left-H-monogenic) in the domain Ω_ζ.*

If $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$, then the mapping Φ is right-G-monogenic (or $\hat{\Phi}$ is left-G-monogenic) if and only if one of the following conditions is satisfied:

(III) *for every point $\zeta_0 \in \Omega_\zeta$ there exists a neighborhood, in which the mapping Φ (or $\hat{\Phi}$) is expressed as the sum of the power series*

$$\Phi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} (\zeta - \zeta_0)^n p_n, \qquad p_n \in \mathbb{H} \trianglelefteq \mathbb{C} \ntrianglerighteq$$

$$(or \quad \hat{\Phi}(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{p}_n (\zeta - \zeta_0)^n, \qquad \hat{p}_n \in \mathbb{H} \trianglelefteq \mathbb{C} \ntrianglerighteq);$$

(IV) *the mapping Φ (or $\hat{\Phi}$) is continuous in Ω_ζ and satisfies the equality*

$$\int_{\Delta_\zeta} d\zeta \Phi(\zeta) = 0$$

$$(or \quad \int_{\Delta_\zeta} \widehat{\Phi}(\zeta) d\zeta = 0)$$

for every triangle Δ_ζ such that $\overline{\Delta_\zeta} \subset \Omega_\zeta$.

If $f_1(E_3) = f_2(E_3) = \mathbb{C}$ *and in addition the domain* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *is convex in the direction of the straight lines* L^1, L^2, *then the mapping* Φ *is right-*G*-monogenic (or* $\hat{\Phi}$ *is left-*G*-monogenic) if and only if, when*

(V) *there exist unique holomorphic in the domain* D_1 *functions* F_1, F_3 *(or* $\hat{F}_1, \hat{F}_4$*) of the variable* ξ_1 *and unique holomorphic in the domain* D_2 *functions* F_2, F_4 *(or* $\hat{F}_2, \hat{F}_3$*) of the variable* ξ_2 *such that the mapping* Φ *(or* $\hat{\Phi}$*) is expressed in the form*

$$\Phi(\zeta) = F_1(\xi_1)e_1 + F_2(\xi_2)e_2 + F_3(\xi_1)e_3 + F_4(\xi_2)e_4$$
$$(or \quad \hat{\Phi}(\zeta) = \hat{F}_1(\xi_1)e_1 + \hat{F}_2(\xi_2)e_2 + \hat{F}_3(\xi_2)e_3 + \hat{F}_4(\xi_1)e_4).$$

References

Kuzmenko, T. S. (2015). Power and Laurent series in the algebra of complex quaternion. *Zb. Pr. Inst. Mat. NAN Ukr.*, *12*(3), 164–174 (Ukrainian).

Shpakivskyi, V. S., & Kuzmenko, T. S. (2016a). On one class of quaternionic mappings. *Ukr. Math. J.*, *68*(1), 127–143.

Shpakivskyi, V. S., & Kuzmenko, T. S. (2016b). Integral theorems for the quaternionic G-monogenic mappings. *An. St. Univ. Ovidius Constanta*, *24*(2), 271–281.

Shpakivskyi, V. S., & Kuzmenko, T. S. (2017). On monogenic mappings of a quaternionic variable. *Journal of Mathematical Sciences*, *221*(5), 712–726.

ABOUT FUNCTIONS DETERMINED AS TRANSFORMATIONS FROM W^2 TO Q-REPRESENTATION

Victoria Voloshyna
National pedagogical Drahomanov university, Kyiv, Ukraine
wictorria@gmail.com

In this short article we describe the main properties of W^n-representation, including the case of $n = 2$. Our main goal is to show main properties of few functions determined as transformations from W^2-representation of unit square to Q-representation of points from unit interval (Voloshyna, 2016).

Keywords: s-adic number representation, W^n-representation.

One of the reasons for further studying the W^n-representation of unit hypercube I^n is to discover new properties of functions determined as transformations from W^r to W^{n-r}-representation of unit hypercubes I^r and I^{n-r} responsively. Due to fractal faithfulness of special families of cylinders of W^n-representation we would like to receive more information about fractal properties of graphs of this type of functions.

1. Construction of W^n-representation. At the zero step of algorithm we have the unit n-dimensional hypercube $I^n = [0,1]^n$. W^n-representation of I^n can be received using next steps of those one (Voloshyna, 2016).

1. Let us divide the I^n into r parts which are closed in R^n and their interiors don't intersect. Lebesgue measure of new sets $\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_{r-1}$ is $q_0, q_1, \dots, q_{r-1}$ respectively.

2. Each set Δ_i is divided analogically into parts $\Delta_{i0}, \dots, \Delta_{i[r-1]}$. The proportion of participles' measures remains invariant. After the second stage process continues and each set $\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_k}$ is divided using the same rule.

If $k \to \infty$ then the Lebesgue measure of $\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_k}$ must converge to zero.

As we can see W^2-represantation of unit square is a special case of such representation. The main task for W^2-represantation was to help us describe a new kind of Jessen–Wintner type random variables (Jessen & Wintner, 1935) and to enlight main properties of their distributions (Voloshyna, 2016). Now we would like to find applications of our constuction at fractal geometry.

2. Functions of transformation. Firstly let us to define function of transformation W^n to W^m-representation.

Definition 1.1 Function of transformation from W^n to W^m-representation is a functional mapping which gives for each $x = \Delta^{W^n}_{\alpha_1 \dots \alpha_k \dots}$ a unique $y = \Delta^{W^m}_{y(\alpha_1) \dots y(\alpha_k) \dots}$.

Remark.2 For uniqueness of such mapping we will consider only the representation of $x \in E^n$ in which vector $(\alpha_1,...,\alpha_k,...)$ is minimal.

Definition 2. 3 Function of transformation from W^n- to Q-representation is a functional mapping which gives for each $x = \Delta^{W^n}_{\alpha_1...\alpha_k...}$ a unique $y = \Delta^{Q}_{y(\alpha_1)...y(\alpha_k)...}$.

We received new results for the graphs of functions of transformation from W^2 to Q-representation.

Theorem 1.4 *The graph of function of transformation from simple quadrate W^2-representation (Voloshyna, 2017) to s-adic number representation is a fractal set with dimension*

$$\frac{\log 4}{\log 16} = 0{,}5.$$

Theorem 2.5 *The graph of function of transformation from simple quadrate W^2-representation (Voloshyna, 2017) to s-adic number representation is nowhere connected set.*

Theorem 3.6 *The graph of function of transformation from connected quadrate W^2-representation (Voloshyna, 2017) to s-adic number representation is nowhere connected set.*

References

Jessen, B., & Wintner, A. (1935). Distribution function a Riemann Zeta-function. *Trans. Amer. Math. Soc., 38, 48–88.*

Voloshyna, V. (2016). *Properties and applications of W^n-representation of points from unit hypercube*. Manuscript in preparation for TIMS

Voloshyna, V. (2017). *Properties of the functions determined as transformations from W^2 to Q-representation*. Manuscript in preparation for SFME.

ПРО ОДНУ НЕРІВНІСТЬ ДЛЯ МОДУЛІВ НЕПЕРЕРВНОСТІ ДРОБОВОГО ПОРЯДКУ, ПОРОДЖЕНИХ ПІВГРУПОЮ ОПЕРАТОРІВ

С. І. Безкрила[1], О. Н. Нестеренко[2], А. В. Чайковський[2]

[1]*Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ, Україна*

[2]*Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна*

sveti1988@gmail.com, NesterenkoON@ukr.net

Отримано нову нерівність для дробових модулів неперервності, породжених півгрупою операторів.

Ключові слова: нерівність, модуль неперервності дробового порядку, півгрупа операторів.

Нехай X — лінійний простір, $\{T_h : h \geq 0\}$ — однопараметрична сім'я лінійних операторів $T_h : X \to X$, $h \geq 0$, яка утворює півгрупу, тобто $T_0 = I$ — одиничний оператор і $T_{h_1+h_2} = T_{h_1}T_{h_2}$ для довільних $h_1 \geq 0$ і $h_2 \geq 0$. Нехай також існує лінійна множина $Y \subset X$, на якій запроваджено норму $\|\cdot\|$, відносно якої простір Y є банаховим, причому для всіх $f \in X$ і $h \geq 0$ справедливе включення $(T_h - I)f \in Y$ і $\|T_h f - f\| \to 0$, $h \to 0$. Припустимо також, що для кожного $h \geq 0$ звуження оператора T_h на простір Y, яке ми позначимо $\tilde{T}_h$, є неперервним оператором і його норма $\|\tilde{T}_h\| \leq 1$.

Якщо $X = Y$ — банахів простір, то за наведених припущень півгрупа $\{T_h : h \geq 0\}$ називається *стискуючою півгрупою класу* (C_0). При цьому для числа $\alpha > 0$ функція

$$\omega_\alpha(f,t) := \sup_{h\in[0,t]} \left\|(I - T_h)^\alpha f\right\|, t \geq 0, \tag{1}$$

де

$$(I - T_h)^\alpha f := \sum_{j=0}^{\infty} C_\alpha^j (-1) T_h^j f$$

і

$$C_\alpha^0 := 1, C_\alpha^j := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-j+1)}{j!}, j \geq 1,$$

називається *модулем неперервності* елемента $f \in Y$ порядку $\alpha > 0$, породженим півгрупою $\{T_h : h \geq 0\}$.

За припущень першого абзацу, якщо $f \in X$, то елемент

$$g := (I - T_h)f \in Y;$$

при цьому для $\alpha > 1$ має місце рівність

$$\left(I-T_h\right)^{\alpha} g=\left(I-T_h\right)^{\alpha-1}\left(I-T_h\right)g\,.$$

Оскільки $\left\|\tilde{T}_h\right\| \leq 1$ і ряд

$$\sum_{j=0}^{\infty} C_{\alpha}^{j}$$

збігається абсолютно при $\alpha > 0$, то при $\alpha \geq 1$ і $f \in X$ елемент $\left(I-T_h\right)^{\alpha} f \in Y$ коректно визначений. Тому формула (1) визначає модуль неперервності порядку $\alpha \geq 1$ елемента f, породжений півгрупою $\{T_h : h \geq 0\}$ і за припущень першого абзацу (коли, узагалі кажучи, $X \neq Y$).

Теорема. *Нехай виконується одна з умов:*

1) $X = Y$ *— банахів простір,* $\left\{T_h : h \geq 0\right\}$ *— стискуюча півгрупа класу* $\left(C_0\right)$, $\alpha \geq 3$*;*

2) *справедливі припущення, зроблені в першому абзаці даної роботи,* $\alpha \geq 4$. *Тоді якщо* $f \in X$, $n \in \mathbb{N}$, $t > 0$*, то*

$$2\omega_{\alpha}\left(f,nt\right) \leq \omega_{\alpha}\left(f,\left(n+1\right)t\right)+\omega_{\alpha}\left(f,\left(n-1\right)t\right)+C_n\omega_{\alpha}\left(f,t\right),$$

де $C_n > 0$ *— стала, що не залежить від* f*, причому* $C_n = O\left(n^{\alpha-3/2}\right)$, $n \to \infty$.

Ця теорема узагальнює результати робіт Конягин (2010), Безкрила, Нестеренко та Чайковський (2012, 2014, 2016). Зокрема, С. В. Конягін (2010) встановив, що якщо $f \in UC(\mathbb{R})$, $0 \leq t \leq T$, то

$$2\omega_2(f,T) \leq \omega_2(f,T+t)+\omega_2(f,T-t)+2\omega_2(f,t).$$

Авторами у працях Безкрила, Нестеренко та Чайковський (2012, 2014) доведено, що якщо $f \in UC(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$, $t > 0$, то

$$2\omega_3\left(f,nt\right) \leq \omega_3\left(f,\left(n+1\right)t\right)+\omega_3\left(f,\left(n-1\right)t\right)+6n\omega_3\left(f,t\right),$$

$$2\omega_4\left(f,nt\right) \leq \omega_4\left(f,\left(n+1\right)t\right)+\omega_4\left(f,\left(n-1\right)t\right)+\left(12n^2+2\right)\omega_4\left(f,t\right).$$

У роботі Bezkryla, Nesterenko and Chaikovs'kyi (2016) авторами отримано, що якщо X — лінійний простір, $f \in X$, $n \in \mathbb{N}$, $t > 0$, то

$$2\omega_k\left(f,nt\right) \leq \omega_k\left(f,\left(n+1\right)t\right)+\omega_k\left(f,\left(n-1\right)t\right)+2\left(2^k-1\right)n^{k-2}\omega_k\left(f,t\right).$$

Список літератури

Bezkryla, S. I., Nesterenko, O. N., & Chaikovs'kyi, A. V. (2016). On high orders moduli of continuity generated by semigroups of operators. *Jaen J. Approx.*, *8*(2), 183–190.

Безкрила, С. І., Нестеренко, О. Н., & Чайковський, А. В. (2012). Про четвертий модуль неперервності. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки, 13*(1), 45—50.

Безкрила, С. І., Нестеренко, О. Н., & Чайковський, А. В. (2014). Про треті модулі неперервності. *Укр. мат. журн.*, *66*(10), 1420—1424.

Конягин, С. В. (2010). О вторых модулях непрерывности. *Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова*, *269*, 150—152.

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ НА СИММЕТРИЧЕСКИЕ И РИЧЧИ СИММЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

В. Е. Березовский[1], Й. Микеш[2], П. Пешка[2]

[1] *Уманский национальный университет садоводства, Умань, Украина*

[2] *Университет Палацкого, Оломоуц, Чешская Республика*

berez.volod@rambler.ru, josef.mikes@upol.cz, patrik_peska@seznam.cz

В данной работе основные уравнения геодезических отображений пространств аффинной связности на симметрические и Риччи симметрические пространства получены в виде замкнутой системы типа Коши в ковариантных производных. Найдены условия их интегрируемости. Установлено количество существенных параметров, от которых зависит общее решение таких систем.

Ключевые слова: геодезические отображения, пространства аффинной связности, Риччи симметрические пространства

Напомним некоторые понятия теории геодезических отображений. Кривую, определенную в пространстве аффинной связности A_n, называют *геодезической линией*, если ее касательный вектор параллен вдоль нее.

Отображение $f : A_n \to \bar{A}_n$ называют *геодезическим*, если при этом отображении все геодезические линии пространства A_n переходят в геодезические линии пространства $\bar{A}_n$.

Известно (Berezovski, Bácsó, & Mikeš, 2015; Berezovski, Mikeš, & Peška, 2017), что для того чтобы отображение f пространства A_n на пространство $\bar{A}_n$ было геодезическим, необходимо и достаточно, чтобы в общей по отображению системе координат $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ выполнялось условие

$$P_{ij}^h(x) = \delta_i^h \psi_j(x) + \delta_j^h \psi_i(x),$$

где $P_{ij}^h(x) = \bar{\Gamma}_{ij}^h(x) - \Gamma_{ij}^h(x)$ — тензор деформации связностей при диффеоморфизме f, Γ_{ij}^h и $\bar{\Gamma}_{ij}^h$ — компоненты объектов аффинной связности пространств A_n и $\bar{A}_n$ соответственно, δ_i^h — символы Кронекера, $\psi_i(x)$ — некоторый ковектор.

Геодезическое отображение называют *нетривиальным*, если $\psi_i(x) \not\equiv 0$. Очевидно, что любое пространство аффинной связности A_n допускает нетривиальное геодезическое отображение на некоторое другое пространство аффинной связности $\bar{A}_n$. Подобное предположение вообще говоря не верно в отношении геодезических отображений римановых пространств на римановы пространства. В частности, были выделены римановы пространства, не допускающие нетривиальные геодезические отображения на римановы пространства (Berezovski et al., 2015, 2017).

Нами доказано в Mikeš, Berezovski at al (2015), что основные уравнения пространств аффинной связности на римановы пространства сводятся к замкнутой системе типа Коши в ковариантных производных. Основные уравнения геодезических отображений эквиаффинных пространств на римановы пространства сведены к замкнутой линейной системе уравнений типа Коши в ковариантных производных.

Пространство аффинной связности $\overline{A}_n$ называют *симметрическим*, если тензор Римана в этом пространстве абсолютно параллелен (Berezovski et al., 2015, 2017). Симметрические пространства характеризуются условиями $\overline{R}^h_{ijk|m} = 0$, где «|» обозначает ковариантную производную по связности пространства $\overline{A}_n$.

Пространство аффинной связности $\overline{A}_n$ называют *Риччи симметрическим*, если тензор Риччи в этом пространстве абсолютно параллелен. Риччи симметрические пространства характеризуются условиями $\overline{R}_{ij|m} = 0$.

Имеет место

Теорема 1. *Для того чтобы пространство аффинной связности* A_n *допускало геодезическое отображение на симметрическое пространство* $\overline{A}_n$, *необходимо и достаточно, чтобы в этом пространстве существовало решение замкнутой смешанной системы уравнений типа Коши в ковариантных производных относительно неизвестных функций* $\overline{R}^h_{ijk}(x)$ *и* $\psi_i(x)$

$$
\begin{aligned}
\overline{R}^h_{ijk,m} &= 2\psi_m\overline{R}^h_{ijk} + \psi_i\overline{R}^h_{mjk} + \psi_j\overline{R}^h_{imk} + \psi_k\overline{R}^h_{ijm} - \delta^h_m\psi_\alpha\overline{R}^\alpha_{ijk},\\
\psi_{i,j} &= \frac{1}{n-1}(\overline{R}_{ij} - R_{ij}) + \psi_i\psi_j - \frac{1}{n^2-1}(\overline{R}_{[ij]} - R_{[ij]}),\\
&\qquad \overline{R}^h_{ijk} + \overline{R}^h_{ikj} = 0\text{è}\overline{R}^h_{ijk} + \overline{R}^h_{jki} + \overline{R}^h_{kij} = 0,
\end{aligned}
$$

где запятая обозначает ковариантное дифференцирование по связности пространства A_n, $\overline{R}^h_{ijk}$ — тензор Римана пространства $\overline{A}_n$, R_{ij} и $\overline{R}_{ij}$ — тензоры Риччи пространств A_n и $\overline{A}_n$ соответственно, квадратными скобками обозначаем альтернирование по указанным индексам.

Теорема 2. *Для того чтобы пространство аффинной связности* A_n *допускало геодезическое отображение на Риччи симметрическое пространство* $\overline{A}_n$, *необходимо и достаточно, чтобы в этом пространстве существовало решение замкнутой системы уравнений типа Коши в ковариантных производных относительно неизвестных функций* $\overline{R}_{ij}(x)$ *и* $\psi_i(x)$

$$\overline{R}_{ij,m} = 2\psi_m \overline{R}_{ij} + \psi_i \overline{R}_{mj} + \psi_j \overline{R}_{im},$$

$$\psi_{i,j} = \frac{1}{n-1}(\overline{R}_{ij} - R_{ij}) + \psi_i \psi_j - \frac{1}{n^2-1}(\overline{R}_{[ij]} - R_{[ij]}).$$

Найдены условия интегрируемости указанных систем уравнений типа Коши. Установлены количества существенных параметров, от которых зависят их общие решения.

Список литературы

Berezovski, V. E., Bácsó, S. & Mikeš, J. (2015). Almost geodesic mappings of affinely connected spaces that preserve the riemannian curvature. *Ann. Math. Informat.*, *45*, 3–10.

Berezovski, V. E., Mikeš, J. & Peška, P. (2017). Geodesic mappings of manifolds with affine connection onto symmetric manifolds. In *18th Int. Conf. on Geometry, Integrability and Quantization*, Varna, June 3–8, 2016 (p. 99–104). Sofia: Avangard Prima.

Mikeš, J., Berezovski, V. E. & at al (2015). *Differential geometry of special mappings*. Olomouc: Palacky University Press.

Mikeš, J., Vanžurová, A. & Hinterleitner I. (2009) *Geodesic mappings and some generalizations*. Olomouc: Palacky University Press.

Mikeš, J., Berezovski, V. E., Stepanova, E. & Chudà, H. (2016). Geodesic mappings and their generalizations. *J. Math. Sci. (New York)*, *217*, 607–623.

ЗБІЖНІСТЬ ЗА ВІДРІЗКАМИ ТА ТЕОРЕМИ ТАУБЕРОВОГО ТИПУ ДЛЯ ІТЕРАЦІЙ МАТРИЧНИХ МЕТОДІВ ПІДСУМОВУВАННЯ РЯДІВ

М. М. Білоцький

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ, Україна

mikbil@ukr.net, mykmykbil@gmail.com

Теореми тауберового типу, відомі для методів Чезаро та Гельдера, узагальнюються на ітерації матричних методів підсумовування, середні яких визначаються нескінченними регулярними нормальними матрицями з класу $\mathbf{\Delta}_S$ близькому до матриць до класу матриць зважених середніх Рісса.

Ключові слова: теореми тауберового типу, матричний метод підсумовування, регулярні нормальні матриці, збіжність за відрізками, ітерації.

Дослідження є продовженням досліджень, поданих у статтях Билоцкий (1977, 1989) та пов'язане з ними.

Нехай $A = (a_{mn})$ — регулярна нормальна матриця і

$$T_m = \sum_{n=0}^{m} a_{mn} S_n \ \ \forall m \in \mathbb{N}_0$$

для послідовності

$$S = \{S_n\} := \{S_n : S_n \in \mathbb{C} \ \forall n \in \mathbb{N}_0\},$$

де $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Послідовність $S = \{S_n\}$ називатимемо:

1) A-*обмеженою* (коротко, $S_n = O(1)\ (A)\ (n \to \infty)$), якщо $T_m = O(1)\ (m \to \infty)$;

2) A-*збіжною* до числа L (коротко, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = L(A)$ або $S_n \to L(A)\ (n \to \infty)$), якщо $T_m \to L\ (m \to \infty)$.

У випадку A-збіжності до числа L матриця визначає метод підсумовування з частинними сумами $S = \{S_n\}$ (Харди, 1951; Барон, 1977). Множини $\mathbb{A}_m$ і $\mathbb{A}_c$ всіх A-обмежених і всіх A-збіжних послідовностей, відповідно, є банаховими просторами послідовностей $S = \{S_n\}$ з нормою

$$\|S\|_A := \sup_{m \in \mathbb{N}_0} |T_m|,$$

у яких збіжність за нормою приводить до збіжності по координатам. У подальшому:

$\mathbf{\Delta}$ — клас регулярних нормальних матриць із невід'ємними елементами, тобто матриць з елементами

$$a_{mn} \geq 0 (0 \leq n < m),\ a_{nn} > 0,\ a_{mn} = 0 (n > m),$$

де $m \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}_0$;

$\mathbf{\Delta}_0$ — клас регулярних нормальних матриць, для яких

$$0 \le a_{mk} \le a_{nk}\left(0 \le k \le n \le m\right),$$

де $k \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{N}_0$, і $a_{nn} \to 0 \ (n \to \infty)$;

$\mathbf{\Delta}_S$ — клас матриць, які є підмножиною класу $\mathbf{\Delta}_0$, для яких

$$a_{mn} > 0, a_{mk}\left(a_{nk}\right)^{-1} \ge a_{mk+1}\left(a_{nk+1}\right)^{-1},$$

$$\sum_{l=0}^{n} a_{ml} \le \lambda_{mn} a_{mn}\left(a_{nn}\right)^{-1}\left(0 \le k \le n \le m\right), \lambda_{mn} \ge 0,$$

де $k \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{N}_0$ і $\overline{\lim\limits_{n\to\infty, m-n\to\infty}} \lambda_{mn} < +\infty$;

$\mathbb{B}_A$ — множина всіх послідовностей $S = \left\{S_n\right\} \in \mathbb{A}_m$, обмежених за відрізками у просторі $\mathbb{A}_m$, тобто таких, що послідовність $\left\|S^r\right\|_A$ обмежена, де

$$S^r = \left\{S_0, S_1, \ldots, S_r, 0, 0, \ldots\right\} \ \forall r \in \mathbb{N}_0;$$

$\mathbb{S}_A$ — множина всіх послідовностей $S = \left\{S_n\right\} \in \mathbb{A}_c$, збіжних за відрізками у просторі $\mathbb{A}_c$, тобто таких, що

$$\left\|S_c^r - S\right\|_A \to 0\left(r \to \infty\right),$$

де, при $S_n \to L(A) \ (n \to \infty), S_c^r = \left\{S_0, S_1, \ldots, S_r, L, L, \ldots\right\} \ \forall r \in \mathbb{N}_0$.

Відомі теореми тауберового типу для методів підсумовування Чезаро $\left(\mathrm{C}, k\right)$ (Харди, 1951, с. 156—157, 5), методів підсумовування Гельдера $\left(\mathrm{H}, k\right)$ (Харди, 1951, с. 133, с. 156—157, 6, 10) для $k \ge 1$. У роботі Михалин и Тесленко (1977) доведено одну властивість ітерацій зважених середніх арифметичних, з якої доведені раніше теореми легко дістати. Пропонується перенесення деяких теорем тауберового типу на ітерації матричних методів підсумовування, у яких матриці, що визначають відповідні методи підсумовування, належать класу $\mathbf{\Delta}_S$.

Для послідовності $S = \left\{S_n\right\}$ і послідовності матриць

$$A_\beta = \left(a_{mn}^{(\beta)}\right) \in \mathbf{\Delta} \ \forall \beta \in \mathbb{N}$$

визначимо середні

$$T_m^{(0)} := S_m, \ \ T_m^{(\beta)} := \sum_{k=0}^{m} a_{mk}^{(\beta)} T_k^{(\beta-1)} \ \forall \beta \in \mathbb{N} \ \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

Якщо $T_m^{(\beta)} \to L\ (m \to \infty)$ (або $T_m^{(\beta)} = O(1)\ (m \to \infty)$ для деякого $\beta \in \mathbb{N}_0$, то будемо писати $\lim_{n\to\infty} S_n = L\left(A_\beta\right)$ (відповідно, $S_n = O(1)\ (A_\beta)\ (n \to \infty)$.

Теорема. *Нехай* $A_\beta = \left(a_{mn}^{(\beta)}\right) \in \mathbf{\Delta}_S\ \forall\beta \in \mathbb{N}$

$$0 < \sum_{k=n+1}^{m} a_{mk}^{(\beta)} \to 0\left(n \to \infty\right), \text{ коли } 0 < \sum_{k=n+1}^{m-1} a_{m-1k}^{(\beta-1)} \to 0\left(n \to \infty\right)\ \forall\beta \in \mathbb{N},$$

а послідовність $S = \left\{S_n\right\}$ *така, що виконується одна з умов:*

1) $\lim_{n\to\infty}\left(S_m - S_n\right) = 0$, *коли* $0 < \sum_{k=n+1}^{m-1} a_{m-1k}^{(1)} \to 0\ (n \to \infty)$;

2) $S_n \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}_0$ *і* $\underline{\lim}_{n\to 0}\left(S_m - S_n\right) = 0$, *коли* $0 < \sum_{k=n+1}^{m-1} a_{m-1k}^{(1)} \to 0\left(n \to \infty\right)$.

Якщо $S_n = O(1)\ (A_{\beta_0})\ (n \to \infty)$ *для деякого* $\beta_0 \geq 1$ *(або* $\lim_{n\to\infty} S_n = L(A_{\beta_0})$ *для деякого* $\beta_0 \geq 1$), *тоді* $S_n = O(1)\ (n \to \infty)$ *(відповідно,* $\lim_{n\to\infty} S_n = L$).

Список літератури

Bosanquet, L. S. (1966). An inequality for sequence transformations. *Mathematika*, *13*(1), 26–41.

Jurkat, W., & Peyerimhoff, A. (1951). Mittelwertsätze bei Matrix- und Integraltransformationen. *Mathematische Zeitschrift*, *55*(1), 92–108.

Барон, С. А. (1977). *Введение в теорию суммирования рядов*. Таллин: Валгус.

Билоцкий, Н. Н. (1977). Сходимость по отрезкам и теоремы тауберового типа. В *Приближённые методы математического анализа* (с. 73—81). Киев: КГПИ.

Билоцкий, Н. Н. (1989). Сходимость по отрезкам и теоремы о выпуклости. *Укр. мат. журн.*, *41*(10), 1407—1411.

Давыдов, Н. А. (1956). Об одном свойстве методов Чезаро суммирования рядов. *Математический сборник*, *38*(4), 506—524.

Давыдов, Н. А. (1977). Теоремы тауберового типа для итераций методов взвешенных арифметических средних. *Укр. мат. журн.*, *29*(3), 298—305.

Кук, Р. (1960). *Бесконечные матрицы и пространства последовательностей*. Москва: Изд-во физ. мат. лит-ры.

Михалин, Г. А. (1978). Теоремы типа Лительвуда для $\left(H, p_n, \alpha\right)$ и $\left(C, p_n, \alpha\right)$ методов суммирования. В *Приближённые методы математического анализа* (с. 3—11). Киев: КГПИ.

Михалин, Г. А., & Тесленко, Л. А. (1977). Об одном свойстве одного класса $\left(R, p_n, \alpha\right)$ методов суммирования рядов и теоремы тауберового типа. *Укр. мат. журн.*, *29*(2), 194—203.

Реймерс, Э. (1961). Сходимость по отрезкам и умножение суммируемых рядов. *Учёные записки Тартуского ун-та*, (102), 73—81.

Харди, Г. (1951). *Расходящиеся ряды*. Москва: Изд-во иностранной литературы.

ПОВЕРХНОСТНЫЕ МЕРЫ НА БАНАХОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ С РАВНОМЕРНОЙ СТРУКТУРОЙ

Ю. В. Богданский, Е. В Моравецкая
КПИ им. Игоря Сикорского, Киев, Украина
ketketty@gmail.com

Предлагается метод построения ассоциированных мер на поверхностях конечной коразмерности, вложенных в банаховы многообразия с равномерной структурой.

Ключевые слова: банахово многообразие, борелевская мера, вложенная поверхность, поверхностная мера.

Одним из ключевых вопросов бесконечномерного анализа является проблема построения поверхностных мер на вложенных в бесконечномерное пространство поверхностях. Существуют различные подходы к решению указанной задачи (Скороход, 1975; Угланов, 1998; Uglanov, 2000; Bogachev, 1990; Пугачев, 2008). В данной работе рассматривается принципиально иная конструкция, предложенная Богданским (2012) для замкнутой поверхности коразмерности 1. Предложенный метод применим не только для поверхностей, вложенных в линейное пространство, но и в нелинейное многообразие. В работе рассматривается класс банаховых многообразий с ограниченной структурой, который естественно возникает стохастической дифференциальной геометрии (Далецкий & Белопольская, 1989).

Банаховы многообразия с равномерной структурой. Пусть M — связное хаусдорфово банахово многообразие класса C^2 с модельным вещественным пространством E.

Атлас $\Omega = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ на M называется *ограниченным*, если существует число $K > 0$ такое, что отображение склейки $F_{\beta\alpha} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ для каждой пары карт атласа удовлетворяет условию:

$$(x \in \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)) \Rightarrow \left(\left\|F'_{\beta\alpha}(x)\right\| \leqslant K, \left\|F''_{\beta\alpha}(x)\right\| \leqslant K\right).$$

Ограниченные атласы Ω_1 и Ω_2 называются *эквивалентными*, если $\Omega_1 \cup \Omega_2$ снова является ограниченным атласом. Класс эквивалентных ограниченных атласов задает ограниченную структуру (класса C^2) на M.

Пусть (M_1, Ω_1) и (M_2, Ω_2) — два банаховых многообразия с ограниченными атласами. Отображение $f : M_1 \to M_2$ класса C^2 называется *ограниченным морфизмом*, если существует число $C > 0$ такое, что для любой пары карт $(U, \varphi) \in \Omega_1$ и $(V, \psi) \in \Omega_2$ выполнено условие:

$$(p \in U, f(p) \in V) \Rightarrow \left(\left\|(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})^{(k)}(\varphi(p))\right\| \leqslant C, k = 1,2\right).$$

Естественным образом определен ограниченный изоморфизм.

На многообразии с ограниченным атласом (M,Ω) корректно задание ограниченного тензорного поля T класса C^1 (в дальнейшем такие тензорные поля будем называть тензорными полями класса $C_b^1(M)$). Предполагается существование числа $C>0$, ограничивающего сверху норму главной части T_α каждого локального представления тензора T вместе с нормой ее производной:

$$((U_\alpha,\varphi_\alpha)\in\Omega; x\in\varphi_\alpha(U_\alpha)) \Rightarrow \left(\left\|T_\alpha(x)\right\|\leqslant C; \left\|T_{\alpha'}(x)\right\|\leqslant C\right).$$

Ограниченный атлас Ω называется равномерным, если существует такое число $r>0$, что для любой точки $p\in M$ существует карта $(U,\varphi)\in\Omega$, для которой $\varphi(U)$ содержит шар в E с центром $\varphi(p)$ радиуса r.

Задание на M ограниченного атласа позволяет ввести на M метрику, согласованную с исходной топологией (Богданский, 2012). Метрика, порожденная равномерным атласом превращает M в полное метрическое пространство.

Вложенная поверхность конечной коразмерности и трансверсальные наборы векторных полей. Пусть M — банахово многообразие с ограниченным атласом Ω.

Определение 1. Подмножество $S\subset M$ назовем (*вложенной*) *поверхностью в* M *коразмерности* m, если существует многообразие N с ограниченной структурой, модельным пространством которого является подпространство E_1 в E коразмерности m, открытая окрестность V нуля $\vec{0}\in\mathbb{R}^m$ и ограниченный изоморфизм $g: N\times V\to U\subset M$ на открытое подмножество U в M, при котором $g(N\times\{\vec{0}\})=S$.

Для $\varepsilon>0$ положим:

$$S_{-\varepsilon}=\{x\in S \mid \rho(x,M\setminus U)\geqslant\varepsilon\}.$$

Тогда существует такое $\alpha>0$, что $S_{-\varepsilon}\neq\varnothing$ для $\varepsilon\in(0,\alpha)$. Очевидно, что $(S_{-\varepsilon})_\varepsilon\subset U$ (здесь и в дальнейшем A_ε — ε-окрестность множества A). При этом для любого $\varepsilon>0$ множество $S_{-\varepsilon}$ замкнуто в M.

Определение 2. Пусть S — поверхность в M коразмерности m; ω — дифференциальная m-форма класса C_b^1, определенная на U (или на большем открытом подмножестве в M). Пусть для любой точки $x\in S$ пространство T_xS является ассоциированным подпространством внешней формы $\omega(x)$ в пространстве T_xM. Дополнительно предполагаем условие: существует $\alpha>0$ такое, что для каждого $\varepsilon\in(0,\alpha)$ существует $\delta>0$, для которого для любых $x\in S_{-\varepsilon}$ и карты $(U,\varphi)\in\Omega$ в точке x (т. е. $x\in U$) для представления ω в этой карте имеет место неравенство $\left\|\omega_\varphi(\varphi(x))\right\|\geqslant\delta$. Тогда форму ω назовем *ассоциированной формой* поверхности S.

Определение 3. Набор определенных на U (или на большем открытом подмножестве в M) векторных полей $\vec{Z}\{Z_1, Z_2 \ldots, Z_m\}$ класса C_b^1 назовем *строго трансверсальным к* S, если существует $\alpha > 0$ такое, что для каждого $\varepsilon \in (0, \alpha)$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого $x \in S_{-\varepsilon}$ имеет место неравенство:

$$\left|\omega(\vec{Z})(x)\right| \geqslant \delta .$$

Нетрудно проверить, что условие ассоциированной m-формы поверхности S и условие строгой трансверсальности набора векторных полей не изменится при переходе к эквивалентному ограниченному атласу, а поэтому определяется лишь выбором ограниченной структуры. Кроме того, определение строгой трансверсальности не зависит от выбора ассоциированной формы ω поверхности S. Оказывается, также, что для любой поверхности S можно построить соответствующую ей ассоциированную форму и строго трансверсальный к S набор попарно коммутирующих векторных полей (класса $C_b^1(U)$).

Обозначим через $\Phi_t^X = \Phi^X(t;\cdot)$ — (локальный) поток векторного поля X и положим: $\Phi_{\vec{t}}^{\vec{Z}} := \Phi_{t_1}^{Z_1} \Phi_{t_2}^{Z_2} \ldots \Phi_{t_m}^{Z_m}$ (здесь $\vec{t} = (t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{R}^m$). При этом

$$\Phi_{\vec{t}+\vec{s}}^{\vec{Z}} = \Phi_{\vec{t}}^{\vec{Z}} \Phi_{\vec{s}}^{\vec{Z}} = \Phi_{\vec{s}}^{\vec{Z}} \Phi_{\vec{t}}^{\vec{Z}} .$$

Положим также

$$\Phi_{\vec{t}}^{\vec{Z}} A := \{\Phi_{\vec{t}}^{\vec{Z}} \mid x \in A\}, \Phi_W^{\vec{Z}} A := \{\Phi_{\vec{t}}^{\vec{Z}} \mid \vec{t} \in W, x \in A\}.$$

Через B_r и $\overline{B}_r$ будем обозначать соответственно открытый и замкнутый шары с центром в нуле радиуса r в $\mathbb{R}^m$.

Ассоциированные поверхностные меры. Пусть S — вложенная в M поверхность коразмерности $m, g : N \times V \to U \subset M$ — соответствующий изоморфизм, $\vec{Z}$ — строго трансверсальный к S набор попарно коммутирующих векторных полей класса $C_b^1(U)$. Пусть μ — конечная борелевская мера, определенная на M. Поскольку $S_{-1/n} \nearrow S$, для построения ассоциированной меры на S достаточно построить согласованные между собой меры на $S_{-\varepsilon}$ при достаточно малых положительных $\varepsilon \in (0, \alpha)$.

Можно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $p > 0$ такое, что отображение

$$\Psi = \Phi\big|_{S_{-\varepsilon} \times B_p} : S_{-\varepsilon} \times B_p \to \Phi_{\overline{B}_p}^{\vec{Z}} S_{-\varepsilon}$$

— гомеоморфизм $S_{-\varepsilon} \times \overline{B}_p$ на замкнутое подмножество многообразия M. Поэтому $\Phi_B^{\vec{Z}} A \in \mathcal{B}(U) \subset \mathcal{B}(M))$, если $A \in \mathcal{B}\left(S_{-\varepsilon}\right)$, $B \in \mathcal{B}\left(B_p\right)$. Тогда с каждым борелевским множеством $A \in B\left(S_{-\varepsilon}\right)$ связываем меру w_A на $\mathcal{B}\left(B_p\right)$:

$$w_A(B) = w_A^{\vec{X}}(B) = \mu(\Phi_B^{\vec{Z}} A).$$

Пусть λ_m — мера Лебега на $\mathbb{R}^m$. Если для каждого $A \in \mathcal{B}(S_{-\varepsilon})$ существует

$$\frac{dw_A}{d\lambda_m}(\vec{0}) := \lim_{r\to 0} \frac{w_A(B_r)}{\lambda_m(B_r)}, \tag{1}$$

то функция множеств $\mathcal{B}(S_{-\varepsilon}) \ni A \mapsto \dfrac{dw_A}{d\lambda_m}(\vec{0})$ является конечной борелевской мерой на $S_{-\varepsilon}$, которую будем обозначать через $\sigma_{\vec{Z}}$. Значение $\sigma_{\vec{Z}}(A)$ не зависит от $\varepsilon > 0$ и мера $\sigma_{\vec{Z}}$ корректно продолжается на $\mathcal{B}(S)$.

Определение 4. Меру $\sigma_{\vec{Z}} = \sigma_{\vec{Z}}[\mu]$ назовем *поверхностной мерой первого типа* на S (порожденной семейством полей $\vec{Z}$).

Достаточное условие, при котором для достаточно малых $\varepsilon > 0$ для всех $A \in \mathcal{B}(S_{-\varepsilon})$ существует предел, определенный формулой (1), обеспечивается дифференцируемостью меры μ вдоль векторных полей из набора $\vec{Z}$ (дифференцируемость μ вдоль поля X предполагает существование для каждого борелевского множества $A \in \mathcal{B}(M)$ предела

$$d_X\mu(A) = \lim\nolimits_{t\to 0} \frac{1}{t}(\mu(\Phi_t A) - \mu(A)),$$

откуда следует, что $d_X\mu$ является конечной борелевской мерой):

Теорема 1. *Пусть векторные поля из набора* $\vec{Z} = \{Z_1, \dots, Z_m\}$ *являются полными, и при этом отображение*

$$\Phi : S \times \mathbb{R}^m \ni (x, \vec{t}) \mapsto \Phi_{\vec{t}}^{\vec{Z}} x \in \Phi_{\mathbb{R}^m}^{\vec{Z}} S$$

взаимно однозначно; μ *— конечная борелевская мера на* M. *Тогда если для любого монотонно возрастающего набора натуральных чисел* $1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_s \leqslant m$ $(s \in \{1, 2, \dots, m\})$ *существует* $d_{Z_{k_1}} d_{Z_{k_2}} \dots d_{Z_{k_s}} \mu$ *(на области определения векторных полей из набора* $\vec{Z}$*), то для каждого* $\varepsilon > 0$ *и* $A \in \mathcal{B}(S_{-\varepsilon})$ *существует предел, определенный формулой* (1).

Условимся тройку $(S, \vec{Z}, \mu)$, удовлетворяющую условиям теоремы 1, называть *согласованной.*

Пусть функция f класса C_b^1 является первым интегралом векторных полей Z_k системы $\vec{Z}$ в некоторой окрестности $S_{-\varepsilon}$. Тогда можно показать, что для согласованной тройки $(S,\vec{Z},\mu)$ тройки $(S,f\vec{Z},\mu)$ и $(S,\vec{Z},f\cdot\mu)$ также согласованы и при этом выполнены равенства:

$$\sigma_{f\vec{Z}}[\mu] = f^m \cdot \sigma_{\vec{Z}}[\mu], \qquad \sigma_{f\vec{Z}}[\mu] = f^m \cdot \sigma_{\vec{Z}}[\mu]$$

Основным результатом работы является

Теорема 2. *Пусть на* M *задан равномерный атлас* Ω; ω *— ассоциированная* m*-форма поверхности* S, *вложенной в* M*; тройки* $(S,\vec{Y},\mu)$ *и* $(S,\vec{Z},\mu)$ *согласованы. Пусть*

$$\left|\omega(\vec{Z})\right|\Big|_S = \left|\omega(\vec{Y})\right|\Big|_S.$$

Тогда $\sigma_{\vec{Y}} = \sigma_{\vec{Z}}$.

Таким образом, корректно вводится следующее

Определение 5. *Поверхностной мерой второго типа* на S, индуцированной мерой μ и ассоциированной формой ω, назовем меру

$$\mu_\omega = \frac{1}{|\,\omega(\vec{Z})\,||_S}\cdot\sigma_{\vec{Z}},$$

где $\vec{Z}$ — строго трансверсальный к S набор попарно коммутирующих векторных полей класса $C_b^1(M)$, для которого тройка $(S,\vec{Z},\mu)$ согласована.

Список литературы

Bogachev, V. I. (1990). Smooth measures, the Malliavin calculus and approximation in infinite dimensional spaces. *Acta Universitatis Carolinae. Mathematica et Physica*, *31*(2), 9–23.

Uglanov, A. V. (2000). *Integration on infinite-dimensional surfaces and its applications*. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ.

Богданский, Ю. В. (2012). Банаховы многообразия с ограниченной структурой и формула Гаусса-Остроградского. *Украинский математический журнал*, *64*(10), 1299—1313.

Далецкий, Ю. Л., & Белопольская, Я. И. (1989). *Стохастические уравнения и дифференциальная геометрия*. Киев: Вища школа.

Пугачев, О. В. (2008). Емкости и поверхностные меры в локально выпуклых пространствах. *Теория вероятностей и ее применения*, *53*(1), 178—188.

Скороход, А. В. (1975). *Интегрирование в гильбертовом пространстве*. Москва: Наука.

Угланов, А. В. (1998). Поверхностные интегралы в пространствах Фреше. *Математический сборник*, *189*(11), 139—157.

МУЛЬТИПЛІКАТОРИ У ПРОСТОРАХ ХАРДІ ТА В ДІЙСНИХ ПРОСТОРАХ ХАРДІ

М. А. Веремій[1], П. В. Задерей[1], М. В. Гаєвський[2]
[1]*Київський національний університет технологій та дизайну, Київ, Україна*
[2]*Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені Володимира Винниченка, Кропивницький, Україна*
[1]zadereypv@ukr.net, [2]mgaevskij@gmail.com

У роботі наведено умови на послідовність Λ була мультиплікатором, що діє у просторах Харді та дійсних просторах Харді.
Ключові слова: мультиплікатор, простори Харді, дійсні простори Харді.

Користуватимемося такими позначеннями: $D = \left\{ z \in C \mid \left| z \right| < 1 \right\}$ — одиничний круг, $H_p(D), p \geq 1$ — клас функцій Харді з нормою

$$\left\| f \right\|_{H_p} = \sup_{0<r<1} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \left| f(re^{it}) \right| dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

L_p — простір сумовних у степені p 2π-періодичних функцій.

Відомо, що кожна функція з класу Харді на одиничному колі $T = \left\{ z \in C \mid \left| z \right| = 1 \right\}$ має сумовні недотичні граничні значення.

Означимо тепер *дійсний клас Харді* $\operatorname{Re} H_p, p \geq 1$ — це простір функцій $F(x)$, що є граничними значеннями дійсних частин функцій $f \in H_p(D)$

$$F(t) = \lim_{r \to 1} \operatorname{Re} f(re^{it}) \text{ майже скрізь для } t \in (0, 2\pi].$$

Як відомо, простір $\operatorname{Re} H_p \subset L_p$ є банаховим з нормою

$$\left\| F \right\|_{\operatorname{Re} H_p} = \left\| F \right\|_{L_p} + \left\| \tilde{F} \right\|_{L_p},$$

де $\tilde{F}$ — функція спряжена до F (Кашин & Саакян, 1999).

Нехай

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, z \in D$$

— ряд Тейлора функції $f \in H_p(D)$ та

$$F(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kt + b_k \sin kt \right)$$

— ряд Фур'є функції $F \in \operatorname{Re} H_p$.

Числову послідовність $\Lambda = \{\lambda_k\}, k = 0,1,2,\ldots$ називають *мультиплікатором* з H_p в H_p, якщо для довільної $f \in H_p$ ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k c_k z^k, z \in D$$

є рядом Тейлора функції $\Lambda f \in H_p(D)$ (Тригуб, 1997).

Аналогічно, послідовність $\Lambda = \{\lambda_k\}, k = 0,1,2,\ldots$ називається *мультиплікатором* з $\operatorname{Re} H_p$ в $\operatorname{Re} H_p$, якщо для $F \in \operatorname{Re} H_p$ ряд

$$\frac{\lambda_0 a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \left(a_k \cos kt + b_k \sin kt \right)$$

є рядом Фур'є деякої функції $\Lambda F \in \operatorname{Re} H_p$ (Степанець, 2002).

Справедливі наступні теореми:

Теорема 1. *Нехай* $\Lambda = \{\lambda_k\}, k = 0,1,2,\ldots$ *та* $f \in H_1(D)$, *причому*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, z \in D.$$

Для того, щоб послідовність Λ *була мультиплікатором з* H_1 *в* H_1 *необхідно і достатньо, щоб існував такий розклад* $\lambda_k = \alpha_k + \beta_k, k \in N$ *і така стала* $\gamma > 0$, *що*

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k c_k z^k \right\|_{H_1} \le \gamma \|f\|_{H_1} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\lambda_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt \right) \right| dt < \infty.$$

Теорема 2. *Нехай* $\Lambda = \{\lambda_k\}, k = 0,1,2,\ldots$ *та* $F \in \operatorname{Re} H_1(D)$, *причому*

$$F(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kt + b_k \sin kt \right).$$

Для того, щоб послідовність Λ *була мультиплікатором з* $\operatorname{Re} H_1$ *в* $\operatorname{Re} H_1$ *необхідно й достатньо, щоб існував такий розклад* $\lambda_k = \alpha_k + \beta_k, k \in \mathbb{N}$ *і така стала* $\gamma > 0$, *що*

$$\left\| \frac{\lambda_0 a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \left(a_k \cos kt + b_k \sin kt \right) \right\|_{\operatorname{Re} H_1} \le$$

$$\le \gamma \|F\|_{\operatorname{Re} H_1} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\lambda_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt \right) \right| dt < \infty.$$

Список літератури

Кашин, Б. С., & Саакян, А. А. (1999). *Ортогональные ряды*. Москва: Наука.

Степанец, А. И. (2002). Методы теории приближений (Ч. I.). Киев: Ин-т математики НАН Украины.

Тригуб, Р. М. (1997). Мультипликаторы в пространствах Харди $H_p(D_m)$ при $p \in (0,1]$ и аппроксимативные свойства методов суммирования степенных рядов. *Математический сборник*, *188*(4), 145—160

ПРО n-ЛІНІЙНЕ ВІДОБРАЖЕННЯ В ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ

О. С. Гаврилів

Національний університет «Львівська політехніка», Львів, Україна

orest1951@i.ua

Роглядається структура n-лінійних відображень на основі теорії визначника. Граничний перехід $n \to \infty$ не роглядається, але визначник може бути нескінченновимірним.

Ключові слова: відображення, гільбертів простір, функціонал.

Розглянемо гільбертів дійснозначний сепарабельний простір H. Нехай P_s є s-вимірний ортопроектор з H в s-вимірний евклідів простір H_s, $P_s H \equiv H_s$. Множина ортопроекторів P_s частково впорядкована тим, що $P_{s-1}H \supset P_s H$, тобто можна вважати $P_{s-1} < P_s$.

Якщо скалярний добуток в H векторів $\overline{x}$, $\overline{y}$ позначаємо $\left\langle \overline{x}, \overline{y} \right\rangle$, то скалярний добуток в H_s є

$$P_s \left\langle \overline{x}, \overline{y} \right\rangle = \left\langle P_s \overline{x}, P_s \overline{y} \right\rangle = \left\langle \left(x_1, x_2, \ldots, x_s, 0, \ldots\right), \left(y_1, y_2, \ldots, y_s, 0, \ldots\right) \right\rangle, \quad (1)$$

де $\overline{x} = \left(x_1, x_2, \ldots, x_s, \ldots\right)$, $\overline{y} = \left(y_1, y_2, \ldots, y_s, \ldots\right)$, і скалярний добуток у гільбертовому просторі H цілковито окреслює скалярний добуток в евклідовому $P_s H$, з використанням (1).

n-лінійне відображення є означеним в H_s (Гаврилів, 2016) як визначник

$$A\left(\overline{b}_1, \overline{b}_2, \ldots, \overline{b}_{s-n-1}; \overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n\right) = \begin{vmatrix} \overline{e}_1 & \overline{e}_2 & \ldots & \overline{e}_s \\ b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1s} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{s-n-11} & b_{s-n-12} & \ldots & b_{s-n-1s} \\ a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1s} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{ns} \end{vmatrix}, \quad (2)$$

яке розглядаєм по векторах $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$; $\overline{a}_i \in H_s$, $i = \overline{1, n}$. Тут $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_s$ — базис в H_s;

$$\left|\overline{e}_i\right| = \sqrt{\left\langle e_i, e_i \right\rangle} = 1, \quad i = \overline{1, s}.$$

Природньо, вектори $\overline{b}_i$, $i = \overline{1, s-n-1}$ відіграють роль активного буфера.

Лінійність за змінними $\overline{a}_i$, $i = \overline{1,n}$ є очевидною.

n-лінійне відображення в гільбертовому просторі H одержуємо за рахунок граничного переходу, коли $P_s \to I$ тотожного сильно по деякій направленій частково впорядкованій множині ортопроекторів у гільбертовому сепарабельному просторі H.

Паралельно цій збіжності можна розглядати збіжність за ймовірністю на ймовірностному просторі Ω, визначуваному через узгоджену сім'ю ймовірностних мір, пов'язаних з базисом $\overline{e}_m$, $m = \overline{1,\infty}$ гільбертового простору H (Го, 1979).

При цьому граничному переході визначник (2) s-го порядку в евклідовому просторі H_s перейде в визначник нескінченного порядку

$$A\left(\overline{b}_1,\overline{b}_2,\ldots,\overline{b}_{s-n-1};\ldots;\overline{a}_1,\overline{a}_2,\ldots,\overline{a}_n\right) = \begin{vmatrix} \overline{e}_1 & \overline{e}_2 & \ldots & \overline{e}_s & \ldots \\ b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1s} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{s-n-11} & b_{s-n-12} & \ldots & b_{s-n-1s} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1s} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{ns} & \ldots \end{vmatrix}, \quad (3)$$

який розкриваємо за алгоритмом (Гаврилів, 2007), тобто

$$A\left(\overline{b}_1,\overline{b}_2,\ldots,\overline{b}_{s-n-1};\ldots;\overline{a}_1,\overline{a}_2,\ldots,\overline{a}_n\right) =$$

$$= \prod_{m=1}^{\infty}\left(1 - \lambda_m\left(I - A\left(\overline{b}_1,\overline{b}_2,\ldots,\overline{b}_{s-n-1};\ldots;\overline{a}_1,\overline{a}_2,\ldots,\overline{a}_n\right)\right)\right),$$

де $\lambda_m\left(I - A\left(\overline{b}_1,\overline{b}_2,\ldots,\overline{b}_{s-n-1};\ldots;\overline{a}_1,\overline{a}_2,\ldots,\overline{a}_n\right)\right)$ є власними числами оператора

$$\left(I - A\left(\overline{b}_1,\overline{b}_2,\ldots,\overline{b}_{s-n-1};\ldots;\overline{a}_1,\overline{a}_2,\ldots,\overline{a}_n\right)\right),\ m = \overline{1,\infty}$$

Природньо, $A\left(\overline{b}_1,\overline{b}_2,\ldots,\overline{b}_{s-n-1};\overline{a}_1,\overline{a}_2,\ldots,\overline{a}_n\right)$ згідно з (3) є неперервним функціоналом (Крейн, 1972).

Належно враховуємо Гаврилів (2016).

Список літератури

Гаврилів, О. С. (2007). *Постава щодо нечітких та випадкових визначників*. Львів: ФОП Сорока С.В.

Гаврилів, О. С. (2016). Про структуру n-лінійних відображень. У Матеріали XVII Міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука, 19—20 травня 2016 р., Київ. (Т. 2., с. 74—75). Київ: НТУУ «КПІ».

Го, Х.-С. (1979). *Гауссовские меры в банаховых пространствах*. Москва: Мир.

Крейн, С. Г. (Ред.) (1972). *Функциональный анализ*. Москва: Наука.

КРИТЕРІЙ ДИФЕРЕНЦІЙОВНОСТІ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ НА ТОПОЛОГІЧНО МАСИВНИХ МНОЖИНАХ

С. В. Горленко

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

У статті узагальнено доведену раніше автором теорему про неперервність багатозначного відображення на множині другої категорії.

Ключові слова: теорема Бера, множина другої категорії, множина моногенності, неперервність багатозначного відображення, Q-відносна множина моногенності.

Відомо, що диференційовність у деякій точці функції однієї дійсної змінної рівносильна існуванню скінченної похідної в цій точці. Тому існування скінченної похідної також беруть за означення диференційовної функції.

Диференційовна в точці функція кількох дійсних змінних необхідно має скінченні частинні похідні в цій точці, але їх існування вже не забезпечує диференційовність функції (Фихтенгольц, 1966, п. 178). Додатковою умовою, яка все ж таки забезпечує диференційовність, є неперервність частинних похідних.

Виникає питання: чи не буде сильнішою умова існування частинних похідних уже не в одній точці, а в деякій масивній у тому чи іншому сенсі множині $E \subset D$, достатньою для диференціовності функції на цій множині?

Відповідь на це питання для множин масивних у метричному сенсі дає відома теорема Степанова (Stepanoff, 1925): для того, щоб неперервна дійсна функція $y = f(\overline{x})$, задана в області $D \subset \mathbb{R}^n$, була диференційовна майже всюди в D необхідно й достатньо, щоб

$$\overline{\lim_{\overline{x}\to\overline{x}_0}} \frac{\left|f(\overline{x}) - f(\overline{x}_0)\right|}{\left|\overline{x} - \overline{x}_0\right|} < \infty$$

майже для всіх $\overline{x}_0 \in D$.

Як бачимо, одного існування частинних похідних, навіть для множини E повної міри, не достатньо.

Нехай тепер $E \subset D$ — множина масивна в топологічному сенсі, тобто E — множина не першої категорії в D (не є зліченним об'єднанням ніде не щільних у D множин). Позначимо через $\mathfrak{M}_{x_i}(f, \overline{x})$ частинні похідні множини функції f у точці $\overline{x}$ за аргументом x_i (тобто множини всіх її похідних чисел за аргументом x_i).

У роботі Горленко (1974) доведено, що відображення $\Phi_f : \overline{x} \to \mathfrak{M}_{x_i}(f)$ неперервне на множині другої категорії в D. Ця обставина і є пом'якшенням умови неперервності частинних похідних та дозволяє встановити наступний результат.

Теорема (критерій диференційовності неперервної функції на множині другої категорії). *Для того, щоб неперервна в області* $D \subset \mathbb{R}^n$ *функція була диференційовна на множині другої категорії необхідно й достатньо, щоб у точках множини другої категорії існували частинні похідні цієї функції.*

Отже, на множинах другої категорії необхідна умова диференційовності функції — умова існування частинних похідних і є достатньою.

Список літератури

Stepanoff, W. (1925). Sur les conditions de l'existence de la differentielle totale. *Математический сборник*, *32*(3), 511—527.

Горленко, С. В. (1974). Обобщение теоремы о точках непрерывности производной и его приложение в теории аналитических функций. *Десятая математическая школа*. Киев: Изд. Ин-та математики АН УССР, 260—269.

Фихтенгольц, Г. М. (1966). *Курс диференциального и интегрального исчисления*. (Т. 1). Москва: Наука.

ПРО СТОХАСТИЧНЕ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ В АНАЛІЗІ БІЛОГО ШУМУ ЛЕВІ

М. М. Дирів[1], М. О. Качановський[2]

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ, Україна

Інститут математики НАН України, Київ, Україна

mashadyriv@ukr.net, nkachano@gmail.com

Ми розглядаємо та вивчаємо обмежені та необмежені оператори стохастичного диференціювання на просторах параметризованого регулярного оснащення простору квадратично інтегровних за мірою білого шуму Леві функцій. Це дає можливість розширити на аналіз білого шуму Леві відповідні результати класичного гауссівського аналізу білого шуму.

Ключові слова: процес Леві, властивість хаотичного розкладу, розширений стохастичний інтеграл, стохастична похідна Хіди, оператор стохастичного диференціювання.

Так званий *гауссівський аналіз білого шуму*, тобто пов’язаний з гауссівськими випадковими процесами аналіз на просторах основних, квадратично інтегровних за гауссівською мірою й узагальнених функцій нескінченої кількості змінних (Hida et al., 1993), має численні застосування в сучасній математиці. Однак у багатьох задачах стохастичного аналізу, математичної фізики та функціонального аналізу природним чином виникають не лише гауссівські випадкові процеси, тому існує необхідність у побудові аналогів аналізу білого шуму для негауссівських процесів і відповідних ймовірнісних мір.

Одними з тих, що найбільш широко вивчаються і застосовуються зараз, є так звані *процеси Леві* (випадкові процеси зі стаціонарними незалежними приростами, див. детальніше, наприклад, Bertoin (1996)). Головною проблемою при побудові аналізу білого шуму Леві є відсутність у процесів Леві (крім вінерівського та пуассонівського) так званої *властивості хаотичного розкладу* (ВХР), тобто можливості представити довільну квадратично інтегровну випадкову величину у вигляді ряду з повторних стохастичних інтегралів за процесом Леві від невипадкових функцій. Зауважимо, що ВХР грає ключову роль при побудові гауссівського аналізу білого шуму. Зокрема, вона використовується для побудови розширених стохастичних інтегралів, стохастичних похідних і операторів стохастичного диференціювання.

Існують різні підходи до побудови аналізу білого шуму Леві, які ґрунтуються на різних аналогах ВХР. Зокрема, Є. В. Литвинов (Lytvynov, 2003) запропонував розкладати квадратично інтегровні за мірою білого шуму Леві функції (випадкові величини) у ряди зі спеціальним чином побудованих ортогональних функцій, подібно до розкладу за поліномами Ерміта в гауссівському аналізі. Цей підхід на сьогодні є одним з найбільш цікавих та перспективних з точки зору застосувань. Отже, розбудова аналізу білого шуму Леві з використанням щойно згаданого підходу є важливою та актуальною задачею.

Нехай відтепер L — процес Леві без гауссівської частини і зносу. У роботі Kachanovsky (2013) побудовані розширений стохастичний інтеграл Скорохода по L і відповідна стохастична похідна Хіди в термінах литвинівського узагальненя ВХР на просторі квадратично інтегровних випадкових величин (L^2); установлено деякі властивості цих операторів; і показано, що розширені стохастичні інтеграли, побудовані з використанням литвинівського та ітовського (Itô, 1956) узагальнень ВХР (див., наприклад, Di Nunno, Øksendal та Proske (2009)), рівні. У роботах Kachanovsky (2013) і Dyriv та Kachanovsky (2013) стохастичні інтеграл і похідна були побудовані на просторах основних і узагальнених функцій з оснащень (L^2), це дає можливість розширити коло можливих застосувань цих операторів (зокрема, тепер можна визначити стохастичний інтеграл і стохастичну похідну як лінійні *неперервні* оператори).

Разом із згаданими операторами, природньо запровадити й вивчати так звані *оператори стохастичного диференціювання* в аналізі білого шуму Леві, за аналогією з гауссівським аналізом (Ustunel, 1995; Benth, 1999). Ці оператори тісно пов'язані з розширеним стохастичним інтегралом та зі стохастичною похідною Хіди і можуть, зокрема, використовуватись для вивчення властивостей стохастичного інтеграла та властивостей розв'язків стохастичних рівнянь з нелінійностями віківського типу.

Ми вивчаємо обмежені та необмежені оператори стохастичного диференціювання в аналізі білого шуму Леві. Точніше, розглядаємо ці оператори на просторах так званого параметризованого регулярного оснащення простору квадратично інтегровних за мірою білого шуму Леві функцій, використовуючи литвинівське узагальнення ВХР. Це дає можливість розширити на аналіз білого шуму Леві та поглибити відповідні результати класичного гауссівського аналізу білого шуму.

Список літератури

Benth, F. E. (1999). The Gross derivative and generalized random variables. *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, 2*(03), 381–396.

Bertoin, J. (1996). *Lévy processes.* Cambridge: Cambridge University Press.

Di Nunno, G., Øksendal, B. K., & Proske, F. (2009). *Malliavin calculus for Lévy processes with applications to finance*. Berlin: Springer.

Dyriv, M. M., & Kachanovsky, N. A. (2013). *Stochastic integrals with respect to a Lévy process and stochastic derivatives on spaces of regular test and generalized function*, Наукові вісті НТУУ «КПІ», (4), 27—30.

Hida, T., Kuo, H. H., Potthoff, J., & Streit, L. (1993). *White noise: an infinite dimensional calculus*. Dordrecht: Kluwer.

Itô, K. (1956). Spectral type of the shift transformation of differential processes with stationary increments. *Trans. Am. Math. Soc., 81*, 253–263.

Kachanovsky, N. A. (2013). Extended stochastic integrals with respect to a Levy process on spaces of generalized functions. *Mathematical Bulletin of Taras Shevchenko Scientific Society, 10,* 169–188.

Kachanovsky, N. A. (2013). On extended stochastic integrals with respect to Levy processes. *Carpatian Mathematical Publications, 2,* 256–278.

Lytvynov, E. W. (2003). Orthogonal decompositions for Lévy processes with an application to the gamma, Pascal, and Meixner processes. *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, 6*(01), 73–102.
Ustunel, A. S. (1995). An Introduction to Analysis on Wiener Space. In *Lect. Notes in Math.* (Vol. 1610). Berlin: Springer-Verlag.

МНОГООБРАЗИЯ ЗЕЙФЕРТА КАК ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ КВАЗИКРИСТАЛЛОВ С ДИЭДРАЛЬНОЙ И ИКОСАЭДРАЛЬНОЙ СИММЕТРИЯМИ

А. А. Дышлис[1], С. М. Покась[2], А. С. Прохода[1]

[1]*Днипровский национальный университет имени Олеся Гончара, Днепр, Украина*

[2]*Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова, Одесса, Украина*

pokas@onu.edu.ua

Показано, что геометрическими моделями квазикристаллов могут служить многообразия Зейферта.

Ключевые слова: топология; эйлерова характеристика; род поверхности; фундаментальная группа поверхности; многообразие Зейферта.

Согласно схеме Тёрстона топология многообразия определяет его геометрическую структуру по образцу той или иной геометрии, более того, она ограничивает его возможные геометрии. Тёрстон (2001) дает определение модельной геометрии и показывает, что существует 8 модельных трехмерных геометрий, доказывает, что двумерных геометрии 3, а именно, евклидова плоскость E^2, единичная сфера S^2 в трехмерном евклидовом пространстве и гиперболическая плоскость H^2. Тёрстон (2001) отмечает, что топология замкнутой поверхности определяет инварианты — эйлерову характеристику χ и род, причем, кажется невероятным, что одно число χ позволяет зная его, а также зная ориентируема поверхность или нет можно определить что это за поверхность. Формулы

$$\chi = 2 — 2p — q,$$

где p — род ориентируемой поверхности, q — род неориентируемой поверхности, $\chi(S^2) = 2$, а также

$$F = pT^2 \# qRP^2,\ F \# S^2 = F,$$

где F — замкнутая поверхность, T^2 — тор, RP^2 — проективная плоскость. Данные формулы известные более 100 лет несут столько же информации, что и формула

$$e^{2\pi i} = —1 \text{ или } E = mc^2.$$

Эти результаты были использованы в работах лауреатов Нобелевской премии по физике Майкла Костерлица, Дэйвиду Таулесса и Данкана Холдейна (за 2016 год) с формулировкой «За теоретические открытия топологических фазовых переходов и топологических фаз материи». Эти работы показали, что двумерная физика сильно отличается от трехмерной, в частности они привели к созданию топологических изоляторов.

В настоящей работе в предположении, что переход от классических кристаллов к квазикристаллам определяется топологическими инвариантами. Показывается, что многообразия Зейферта могут служить геометрическими моделями квазикристаллов. Приведем определение многообразия Зейферта в той форме как оно изложено в Скотт (1986).

Определение. *Многообразием* (*слоением*) *Зейферта* называется трехмерное многообразие M вместе с разбиением его на попарно непересекающиеся окружностями (слоями) такими, что у каждой окружности есть окрестность в M, которая является объединением слоев и изоморфна слоенному полноторию или слоенной сплошной бутылке Клейна.

Теперь мы можем привести полученный нами результат исходя из того, что род поверхности является инвариантом ее фундаментальной группы.

Пусть M многообразие Зейферта с базой — сфера и тремя особыми слоями. Обозначим через $G(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ натуральные числа ≥ 2, группу с кодом (копредставлением)

$$G(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \left\{a_1, a_2, a_3 \mid a_1^{\alpha_1} = a_2^{\alpha_2} = a_3^{\alpha_3} = a_1\, a_2\, a_3 = 1\right\}$$

Предположим, что многообразие триангулируемо, а в вершинах разбиения расположены атомы, составляющие кристаллическое множество атомов геометрии (определение кристаллического множества атомов геометрии приведено в Дышлис и Покась (2017).

Многообразие Зейферта с введенной в нем Римановой метрикой будет геометрической моделью квазикристалла с диэдральной группой симметрии, в случае если тройка чисел группы $G(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ имеет вид: $G(2, 2, n)$ $n \geq 2$, симметрия будет икосаэдрической в случае группы $G(2, 3, 5)$, порядки соответствующих групп будут равны $2n$ и 120. Эти многообразия имеющие геометрическую структуру по образцу геометрии S^2 являются моделями эндофуллеренов. В силу принципа двойственности между сферической и гиперболической геометриями соответствует модели квазикристаллов с бесконечной фундаментальной группой. В случае конечной фундаментальной группы в Матвеев и Фоменко (1991) приведено доказательство теоремы: группа $G(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ тогда и только тогда, когда тройка чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ исключительна. Отметим, что тройка чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ называется исключительной, если $1/\alpha_1+1/\alpha_2+1/\alpha_3>1$. В случае если тройка чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ не исключительна, то есть $1/\alpha_1+1/\alpha_2+1/\alpha_3\leq 1$, то многообразие Зейферта неприводимо. Такие многообразия служат геометрическими моделями квазикристаллов обладающих геометрическими структурами по образцу евклидовой геометрии или геометрии Лобачевского.

Список литературы

Дышлис, А. А., & Покась, С. М. (2017). *Геометрия Лобачевского и ее применение в математике и кристаллографии.* Ламберт.

Матвеев, С. В., & Фоменко, А. Т. (1991). *Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии.* Москва: Изд-во МГУ.

Скотт, П. (1986). *Геометрии на трехмерных многообразиях.* Москва: Мир.

Тёрстон, У. (2001). *Трехмерная геометрия и топология*. Москва: МЦНМО.

ПРО АСИМПТОТИКУ ІНТЕГРАЛА ВІД МОДУЛЯ ФУНКЦІЇ, ЗАДАНОЇ РЯДОМ ФУР'Є

Н. М. Задерей, П. В. Задерей, В. В. Бовсуновська
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ, Україна
zadereypv@ukr.net

Установлено асимптотичну рівність для інтеграла від модуля функції, заданої тригонометричним рядом з коефіцієнтами, що задовольняють умови Фоміна.
Ключові слова: ряд Фур'є, умови інтегровності тригонометричних рядів, асимптотична рівність.

Нехай задано ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikt}, \quad c_k \in \mathbb{C} \tag{1}$$

коефіцієнти якого задовольняють умови

$$c_k \to 0, \quad k \to \infty, \tag{2}$$

$\exists\, p > 1$ таке, що

$$F_p(c) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k+1} \sum_{l=k}^{\infty} \left| \Delta c_l \right|^p \right)^{1/p} < \infty, \quad \Delta c_l := c_l - c_{l+1}, \tag{3}$$

а також збігається ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left| c_k \right|}{k} < \infty. \tag{4}$$

Умови (2)–(4) будемо називати *умовами Фоміна*, оскільки ці умови були встановлені ним у роботі Фомин (1978) при вивченні умов інтегровності тригонометричних рядів з дійсними коефіцієнтами.

Множину сумовних 2π-періодичних функцій з рядом Фур'є виду (1), тобто $c_{-k} = 0$ при $k \in \mathbb{N}$, позначатимемо через L_+. При виконанні умов (2)—(4) ряд (1) буде рядом Фур'є функції $f \in L_+$ і справедлива оцінка (див. Фомин (1978))

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikt} \right| dt \le K F_p(c). \tag{5}$$

Тут, і надалі, K — абсолютна стала, можливо, не одна й та сама в різних формулах.

Якщо коефіцієнти ряду (1) задовольняють умови (2)—(4) і існують такі числа A_k, що

$$\left|\Delta c_k\right| \le A_k,\ \forall\ k = 0,1,2...$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\left|\Delta A_k\right| < \infty,$$

то рівномірно відносно $m = 0,1...$ справедлива асимптотична рівність (Задерей, Веремій, & Гаєвський, 2017)

$$\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikt}\right| dt =$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left|c_k\right| + \left|c_{m-k} - c_{m+k}\right|\right) I_{m,k}(c) + 2\sum_{k=2m+1}^{\infty}\frac{\left|c_k\right|}{k} + O\left(T_m\left(A\right)\right), \qquad (6)$$

де

$$I_{m,k}(c) := \int_0^{\pi/2}\sqrt{1 - 4\frac{\left|c_k\right|\left|c_{m-k} - c_{m+k}\right|}{\left(\left|c_k\right| + \left|c_{m-k} - c_{m+k}\right|\right)^2}\sin^2 t\, dt},$$

$$T_m\left(A\right) := \sum_{k=0}^{m}(k+1)\left|\Delta A_k\right| + \sum_{k=m+1}^{\infty}(k-m+1)\left|\Delta A_k\right|,\ \Delta A_k = A_k - A_{k+1}.$$

Оскільки виконано оцінку (Теляковский (1964))

$$F_p(c) \le KT_m(A),$$

але є приклади, коли обернена нерівність не виконується, то має сенс одержати асимптотичну рівність типу (6) із залишковим членом меншим ніж $T_m(A)$.

Теорема. *Якщо коефіцієти ряду (1) задовольняють умови Фоміна* (2)—(4), *то рівномірно відносно* $m = 0,1,...$ *справедлива асимптотична рівність*

$$\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikt}\right| dt = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left|c_k\right| + \left|c_{m-k} - c_{m+k}\right|\right) I_{m,k}(c) + 2\sum_{k=2m+1}^{\infty}\frac{\left|c_k\right|}{k} +$$

$$+O\left(F_p\left(c\right) + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1}\sum_{l=k}^{\infty}\left|\Delta c_{m+k}\right|^p\right)^{1/p}\right).$$

Список літератури

Задерей, П. В., Веремій, М. А., & Гаєвський, М. В. (2017). Оцінка інтеграла від модуля степеневого ряду на одиничному колі. У *Тези доповідей Всеукраїнської наукової конференції «Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу», Ворохта, 22—25 лютого 2017 р.*

Теляковский, С. А. (1964). Условия интегрируемости тригонометрических рядов и их приложения к изучению линейных методов суммирования рядов Фурье. *Изв. АН СССР. Серия Математика*, *28*(6), 1209—1236.

Фомин, Г. А. (1978). Об одном классе тригонометрических рядов. *Математические заметки*, *23*(2), 213—222.

ЗВИЧАЙНІ ВАГОВІ ФУНКЦІЇ ДОПУСТИМИХ САГАЙДАКІВ

О. В. Зеленський[1], В. М. Дармосюк[2], О. Г. Семенів[2]

[1]*Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, Кам'янець-Подільський, Україна*

[2]*Миколаївський національний університет імені В. О. Сухомлинського, Миколаїв, Україна*

zelik82@mail.ru, darmosiuk@gmail.com, semeniv.valentina@yandex.ua

У роботі знайдені допустимі сагайдаки, для яких не існує звичайних вагових функцій. Показано, що існують допустимі сагайдаки, у яких для довільної допустимої вагової функції вага хоча б однієї стрілки більше ніж одиниця. Виділено класи сагайдаків зі звичайними ваговими функціями та доведено, що всі допустимі сагайдаки з чотирма вершинами мають звичайні вагові функції.

Ключові слова: допустимий сагайдак, вагова функція, матриця показників.

Один з аспектів теорії кілець є вивчення властивостей кілець за допомогою теорії графів. Кожний черепичний порядок повністю визначається своєю матрицею показників і дискретно нормованим кільцем [1]. Багато властивостей таких кілець повністю визначаються їх матрицями показників [2, 3], зокрема, сагайдаки таких кілець [1]. Порівняно недавно матриці показників стали окремим об'єктом вивчення. У [4] доводиться нежорсткість допустимого сагайдака, який має хоча б одну петлю. У [5] розглядаються вагові функції, які визначають допустимі сагайдаки. З їх появою з'явилося більше можливостей для дослідження допустимих сагайдаків. Опис деяких класів жорстких сагайдаків започатковано в [6]. У [7] знайдено властивості одиничних циклів та одиничних сагайдаків, зокрема знайдено обмеження для елементів матриці показників одиничного сагайдака. У [8] досліджуються цикли допустимих сагайдаків.

Означення 1 [1, с. 353]. *Матриця* $\mathcal{E}=(\alpha_{ij})$, *для якої виконуються наступні умови:*

1) $\alpha_{ij}+\alpha_{jk}\geqslant\alpha_{ik}$ для всіх $i,\ j,\ k=1,\ldots,n$,

2) $\alpha_{ii}=0$ для всіх $i=1,\ldots,n$,

називається *матрицею показників*.

Матриця показників, для якої виконується умова

3) $\alpha_{ij}+\alpha_{ji}\geqslant 1$ для всіх $i,j\in\{1,\ldots,n\}$ $(i\neq j)$

називається *зведеною матрицею показників*.

Нехай $\mathcal{E}=(\alpha_{ij})$ — зведена матриця показників. Введемо матриці

$$\mathcal{E}^{(1)}=(\beta_{ij})=\mathcal{E}+E_n\in M_n(\mathbb{Z}),$$

де E_n — одинична матриця, та

$$\mathcal{E}^{(2)}=(\gamma_{ij})\in M_n(\mathbb{Z})\colon\ \gamma_{ij}=\min_k\{\beta_{ik}+\beta_{kj}\}.$$

Означення 2 [1, с. 357]. *Сагайдаком* зведеної матриці показників $Q = Q(\mathcal{E})$ називається сагайдак, матриця суміжності якого задається формулою $[Q] = \mathcal{E}^{(2)} - \mathcal{E}^{(1)}$.

Означення 3 [1]. Зведені матриці показників E_1 і E_2 називають *еквівалентними,* якщо одну можна одержати з іншої за допомогою елементарних перетворень двох типів:

1) відняти ціле число t від елементів i-го рядка і додати його до елементів i-го стовпця;

2) поміняти місцями два рядки і два стовпці з такими ж номерами.

Означення 4 [1, с. 357]. Сагайдак Q називається *допустимим*, якщо існує зведена матриця показників $\mathcal{E}$, така що $Q(\mathcal{E}) = Q$.

Означення 5 [5]. Сагайдак $Q = (VQ, AQ)$ називають *зваженим,* якщо визначена функція $\omega\colon AQ \to \mathbb{R}$. Функцію ω називають *ваговою*, а її значення на стрілці — *вагою стрілки*.

Сума ваг усіх стрілок шляху називають *вагою шляху*.

Теорема 1 [3]. Якщо $\mathcal{E}$ — зведена матриця показників, $Q = Q(\mathcal{E})$-сагайдак матриці показників, то матриця $[Q]$ є $(0,1)$-матрицею суміжності сильно зв'язного сагайдака.

Теорема 2 [5]. *Сильно зв'язний сагайдак $Q = (VQ, AQ)$ допустимий тоді й тільки тоді, коли існує вагова функція $\omega : AQ \to \mathbb{N} \cup \varnothing$, яка задовольняє такі умови:*

1) *вага стрілки з точки i в точку j менша за вагу шляху з точки i в точку j довжини $l \geq 2$;*

2) *вага петлі в точці i менша за вагу будь-якого циклу, що проходить через точку i, довжиною $l \geq 2$;*

3) *вага будь-якого циклу більша або дорівнює* 1;

4) *вага петлі дорівнює* 1;

5) *через кожну точку без петлі проходить цикл довжиною $l \geq 2$, вага якого дорівнює* 1.

Зауваження 1. Згідно з умовами (4) та (5) через кожну точку допустимого сагайдака проходить цикл ваги 1.

Означення 6 [5]. Вагову функцію, яка задовольняє всі умови теореми 1, називатимемо *допустимою ваговою функцією.*

За сагайдаком Q й допустимою ваговою функцією ω можна побудувати матрицю показників $\mathcal{E} = (\alpha_{ij}) \in M_n(Z)$ таким чином: якщо сагайдак Q містить стрілку σ_{ij}, то $\alpha_{ij} = \omega(\sigma_{ij})$, у протилежному випадку α_{ij} дорівнює вазі найлегшого шляху з вершини v_i у вершину v_j.

Означення 7 [6]. Допустимий сагайдак Q називають *жорстким*, якщо існує з точністю до еквівалентності єдина зведена матриця показників $\mathcal{E}$ така, що $Q(\mathcal{E}) = Q$.

Означення 8 [6]. Простий цикл у сагайдаку $Q = (VQ, AQ)$, вага якого дорівнює 1, будемо називати *одиничним.*

Твердження 1 [7]. У допустимому сагайдаку $Q = (VQ, AQ)$ між вершинами одиничного циклу не існує інших стрілок окрім стрілок цього циклу.

Твердження 2 [7]. Допустимий сагайдак Q не може містити двох стрілок (v_i, v_a) та (v_j, v_a), де вершини v_i, v_j належать одному одиничному циклу.

Твердження 3 [7]. Допустимий сагайдак $Q = (VQ, AQ)$, не може містити стрілки $(v_a, v_i), (v_a, v_j)$, де вершини v_i, v_j належать деякому одиничному циклу.

Означення 9. Допустима вагова функція називається *звичайною*, якщо вага всіх стрілок не перевищує одиницю.

Теорема 3 [8]. *Нехай Q допустимий сагайдак, σ_{uv} — стрілка сагайдака Q, Q^* сагайдак, який утворюється з Q видаленням стрілки σ_{uv}. Сагайдак Q^* є допустимим, якщо виконуються умови:*

1) *у Q існує шлях з вершини u у вершину v, відмінний від стрілки σ_{uv};*

2) *існує вагова функція ω, для якої Q допустимий сагайдак і стрілка σ_{uv} не належить одиничному циклу.*

У наступних твердженнях виділимо класи сагайдаків, для яких завжди існують звичайні вагові функції.

Твердження 4. Якщо сагайдак Q має петлі в усіх вершинах, то для сагайдака Q існує звичайна вагова функція.

Твердження 5. Якщо сагайдак $Q = Q(E)$, $Q = (VQ, AQ)$ має єдиний одиничний цикл, то для сагайдака Q існує звичайна вагова функція.

Лема 1. У допустимому сагайдаку $Q = (VQ, AQ)$, $VQ = \{1, 2, 3, 4\}$ без петель, у якого довжина всіх одиничних циклів дорівнює два і не існує вершини через яку проходять усі одиничні цикли, можна вибрати два одиничних цикли, які складаються з різних вершин.

Лема 2. Для допустимого сагайдака з чотирма вершинами без петель існує звичайна вагова функція.

Теорема 4. *Для довільного допустимого сагайдака Q з чотирма вершинами існує звичайна вагова функція.*

Теорема 5. *Існують допустимі сагайдаки, для яких не існує звичайних вагових функцій.*

Список літератури

1. Hazewinkel, M., Gubareni, N., & Kirichenko, V. V. (2004). *Algebras, rings and modules* (Vol. 1). Dordrecht: Kluwer Academic Publisheers.
2. Hazewinkel, M., Gubareni, N., & Kirichenko, V. V. (2007). *Algebras, rings and modules* (Vol. 2). Dordrecht: Kluwer Academic Publisheers.
3. Kirichenko, V. V., Zelensky, A. V., & Zhuravlev, V. N. (2005). Exponent matrices and tiled orders over discrete valuation rings. *International Journal of Algebra and Computation*, *15*(05–06), 997–1012.
4. Зеленський, О. В. (2007). Жорсткі сагайдаки зведених матриць показників. *Вісн. Київ. ун-ту. Сер: Фіз.-мат. науки*, (3), 27—31.
5. Журавлев, В. Н. (2008). Допустимые колчаны. *Фундамент. и прикл. математика*, *14*(7), С. 121—128.
6. Кириченко, В. В., Журавлёв, В. Н., & Цыгановская, И. Н. (2006). О жестких колчанах. *Фундамент. и прикл. математика*, *12*(8), 105—120.
7. Журавльов, В. М., Зеленський, О. В., & Дармосюк, В. М. (2012). Одиничні сагайдаки матриць показників. *Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки*, (4), 27—31.
8. Зеленський, О. В. (2014). Цикли допустимих сагайдаків. *Математичні студії*, *42*(1), 3—8.

ПОБУДОВА ПРАВИЛЬНИХ РАЦІОНАЛЬНИХ КОЛОКАНТ ФУНКЦІЙ У ЯВНОМУ ВИГЛЯДІ

О. Ф. Калайда
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
aleksei_kalaida@comcast.net

Раціональні колоканти у вигляді частки многочленів будуються методом невизначених коефіцієнтів і лише в одному випадку це подається у явному вигляді через обернені розділені різниці функції та ланцюговий дріб (Березин & Жидков, 1959). Явний вигляд раціональних так званих *неповних* і *напівнеявних повних* раціональних колокант із простими та двократними вузлами у вигляді частки многочленів Лагранжа побудовано у статтях Калайди (2000, 2008, 2015а, 2015б). Тут пропонується ще один метод побудови правильних явних неповних раціональних колокант із простими вузлами також у вигляді частки многочленів Лагранжа.

Перш за відмітимо, що просту неповну раціональну колоканту можна подати у вигляді

$$R_{nn}(x;f) = \frac{L_n(x;f;a)}{L_n(x;1;a)},\ L_n(x;f;a) = \sum_{j=0, j\neq k}^{n} f_j \omega_{nj}(x) + f_k a \omega_{nk}(x), \qquad (1)$$

де значення параметра a задовольняє явно визначувану, наприклад, умову ($\overline{x} \neq x_j$) $R_{nn}(\overline{x};f) = \overline{f} = f(\overline{x})$. Очевидно, колоканта (1) являється колокантою в $n+2$ вузлах.

Відмітимо, далі, що многочлен Лагранжа функції f

$$L_n(x;f;x_0,...,x_n) = \sum_{j=0}^{n} \omega_{nj}(x) f_j,\ f_j = f(x_j),$$

можна подати у вигляді суми

$$L_n(x;f) = \hat{L}_n(x;f;x_0,...,x_k) + \breve{L}_n(x;f;x_{k+1},...,x_n) \qquad (2)$$

многочленів з тими ж базисними функціями $x \mapsto \omega_{nj}(x)$, кожен з яких наближає функцію за відповідно вказаними в (2) вузлах x_j.

Розглянемо тепер з урахуванням (2) раціональну колоканту

$$R_{n,m}(x;f) = \frac{L_n(x;f;x_0,...,x_n)}{\hat{L}_m(x;1;x_0,...,x_n) + \breve{L}_m(x;\phi;x_{n+1},...,x_m)},\ m > n. \qquad (3)$$

За своєю структурою вона являється колокантою в перших $n+1$ простих вузлах x_j, $j = \overline{0, n}$. Звідси випливає, що

$$\tilde{R}_{nm}(x;f) = \frac{L_n(x;f;x_0,...,x_n)}{\hat{L}_m(x;1;x_0,...,x_n)} \qquad (4)$$

теж являється неповною раціональною колокантою функції f за тими ж простими вузлами $x_j,\ j=\overline{0,n}$.

У другому доданку у знаменнику рівності (3) функція ϕ невідома. Визначимо її так, щоб колоканта (3) стала колокантою функції f також і у вузлах

$$x_i,\ i=\overline{n+1,m}.$$

Легко переконатись, що ця умова виконуватиметься при

$$\phi=\frac{L_n(x;f;x_0,...,x_n)}{f(x)},\ f(x_i)\neq 0,\ i=\overline{n+1,m}.$$

Якщо ж у деяких із цих вузлів f має прості полюси ($1\ /\ f(x_i)=0$), то відповідні доданки в колоканті (3) будуть відсутні й це означатиме, що дана колоканта апроксимує функцію і в околі її простих полюсів. Зокрема, це означає, що колоканта (4) апроксимує функцію в околі її полюсів

$$x_i,\ i=\overline{n+1,m}.$$

Розгляньмо питання про похибку (залишковий член) апроксимації функцій колокантами (3). Оскільки, за побудовою, похибка

$$r_m(x)=f(x)-R_{nm}(x;f)$$

має $m+1$ простих нулів $x_j,\ j=\overline{0,\ m}$, то твірна для неї функція

$$x\mapsto F(t,\overline{x})=r_m(t)\omega(\vec{x})-r_m(\overline{x})\omega(t),\ \forall\overline{x}\neq x_j\Rightarrow F(\overline{x},\overline{x})=0,$$

має ті ж самі нулі $x_j,\ j=\overline{0,\ m}$, а також ще один простий нуль $\overline{x}$, тобто всього $m+2$ простих нулів; ω — довільна $(m+1)$ разів неперервно диференційовна функція із простими нулями $x_j,\ j=\overline{0,m}$, (наприклад,

$$\omega(t)=(t-x_0)...(t-x_m)).$$

Тому за наслідком з теореми Ролля (між двома нулями (а також між однознаковими полюсами) неперервно диференційовної функції міститься принаймні один нуль її похідної) послідовно дістаємо рівність

$$F^{(m+1)}(\zeta,\overline{x})=0,\ \zeta\in(a,b)=(\min x_j,\max x_j),$$

так що остаточно при умові, що $f\in C^{(m+1)}(a,\ b)$, маємо шуканий вираз для залишкового члена колоканти (3)

$$r_m(x)=\omega(x)\frac{r_m^{(m+1)}(\zeta)}{\omega^{(m+1)}(\zeta)}\ \left(r_m(x)=\omega(x)\frac{r_m^{(m+1)}(\zeta)}{(m+1)!}\right).$$

Список літератури

Березин, И. С., & Жидков, Н. П. (1959). *Методы вычислений*. (Ч. 1). Москва: Физматлит.

Калайда, О. Ф. (2000). *Чисельні методи*. Київ: ВПЦ «Київський університет».

Калайда, О. Ф. (2008). Побудова повної раціональної колоканти методом вичерпування. У *Матеріалах XII Міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука* (Т. 1., с. 634). Київ: НТУУ «КПІ».

Калайда, О. Ф. (2015а). Про побудову повних раціональних колокант функцій. У *Матеріалах XVI Міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука* (Т. 2, с. 116). Київ: НТУУ «КПІ».

Калайда, О. Ф. (2015б). Побудова симетричних двосторонніх раціональних колокант з дво-кратними вузлами. У *Матеріалах XVI Міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука* (Т. 2, с. 114—115). Київ: НТУУ «КПІ».

ПОБУДОВА ЯВНИХ РАЦІОНАЛЬНИХ ДВОСТОРОННІХ КОЛОКАНТ ІЗ ДВОКРАТНИМИ ВУЗЛАМИ

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

aleksei_kalaida@comcast.net

У статті Калайди (2015) наведено побудову раціональних двосторонніх колокант із двократними вузлами функцій за допомогою многочленів типу Лагранжа з параметрами. При цьому завдяки властивостям базисних функцій згаданих многочленів (базисних функцій Лагранжа) відносно відповідних значень параметрів утворюється все-таки лінійна система алгебричних рівнянь (без таких властивостей система була б нелінійною, як і відповідна система при традиційній побудові таких колокант у вигляді частки алгебричних многочленів з невідомими коефіцієнтами методом невизначених коефіцієнтів). Тут будуються простіші, явні, двосторонні колоканти із двократними вузлами, тобто такі, відповідні значення згаданих параметрів яких визначаються явно (відносно них згадана система рівнянь є система з діагональною матрицею).

Розглянемо при $n > 1$ раціональні функції $\hat{R}_{2n}$, $\breve{R}_{2n}$,

$$\hat{R}_{2n}(x;f;a) = \frac{\hat{L}_{2n}(x;f;a)}{\hat{L}_{2n}(x;1;a)}, \breve{R}_{2n}(x;f;b) = \frac{\breve{L}_{2n}(x;f;b)}{\breve{L}_{2n}(x;1;b)}, \qquad (1)$$

$$\hat{L}_{2n}(x;f;a) = \omega_{n0}(x)f_0 + \sum_{j=1}^{n}\omega_{nj}^2(x)f_j,\ \breve{L}_{2n}(x;f;a) = \omega_{n0}(x)f_0 + \sum_{i=0}^{n-1}\omega_{ni}^2(x)f_j$$

— многочлени типу Лагранжа з параметрами (при $n = 1$ явні двосторонні колоканти (1) утворюються і за схемою статті Калайди (2015), тобто, замість квадратів функцій ω_j використовуються самі функції), ω_k $-$базисні функції Лагранжа (тобто такі, що $\omega_k(x_i) = \delta_{ki}$, δ_{ki} — символ Кронеккера), $f_j = f(x_j)$. Легко переконатись, що

$$\hat{R}_{2n}(x_j;f;a) = f_j,\ \breve{R}_{2n}(x_j;f;a) = f_j,\ j = \overline{0, n+1}.$$

Отже, при довільних значеннях параметрів a_j, b_j в (1) маємо для функції f колоканти із простими вузлами.

Для побудови колокант (1) із двократними вузлами (відповідно, вузлами $x_1, ..., x_n$ та $x_0, ..., x_{n-1}$) визначимо значення параметрів a_j, b_j з умов двократності n з $n+1$ вузлів x_j, тобто, відповідно, з рівнянь

$$\hat{R}'_{2n}(x_i f;a) = f'_i, i = \overline{1, n}, \breve{R}'(x_k;f;b) = f'_k, k = \overline{0, n-1}. \qquad (2)$$

У результаті з урахуванням (1) з (2) дістаємо прості явні вирази

$$a_j = \frac{\hat{\omega}_{n0}(x_j)(f_0 - f_j)}{f_j'},\ j = \overline{1, n},\ b_i = \frac{\breve{\omega}_{ni}(x_i)(f_n - f_i)}{f_i'},\ i = \overline{0, n-1},\ f_k' \neq 0. \quad (3)$$

Таким чином, ми дістали явні раціональні колоканти з n двократними вузлами.

Розглянемо питання про похибку (залишковий член) колокації функцій побудованими колокантами (1). Оскільки похибки

$$\hat{r}(x) = f(x) - \hat{R}_{2n}(x; f; a),\ \breve{r}(x) = f(x) - \breve{R}_{2n}(x; f; b)$$

мають $2n+1$ нулів (з урахуванням, відповідно, кратності вузлів), то відповідні їм твірні функції $\hat{F}$, $\breve{F}$,

$$\hat{F}(t, \overline{x}) = \hat{r}(t)\hat{\omega}(\overline{x}) - \hat{r}(\overline{x})\hat{\omega}(t),\ \breve{F}(t, \overline{x}) = \breve{r}(t)\breve{\omega}(\overline{x}) - \breve{r}(\overline{x})\breve{\omega}(t),$$

де $\hat{\omega}, \breve{\omega}$ — функції, відповідно, з тими ж самими нулями тієї ж кратності (так звані *буферні функції* (Калайда, 2000), мають ті ж самі нулі відповідної кратності (як-от

$$\hat{\omega}(x) = (x - x_0)\prod_{k=1}^{n}(x - x_k)^2,\ \breve{\omega}(x) = (x - x_n)\prod_{m=0}^{n-1}(x - x_m)^2\,), \quad (4)$$

а також, за побудовою, нуль $\overline{x}$ ($\forall \overline{x} \neq x_j,\ j = \overline{0, n}$), тобто всього $2n+2$ нулів. Тому при умові $f, \hat{\omega}_j, \breve{\omega}_j \in C^{2n+1}(c, d)$, $c = \min x_j$, $d = \max x_j$, за наслідком з теореми Ролля

$$\exists \zeta, \xi \in (c, d) \Rightarrow \hat{F}^{(2n+1)}(\zeta) = 0,\ \breve{F}^{(2n+1)}(\xi) = 0,$$

дістаємо рівності

$$\hat{r}(x) = \hat{\omega}(x)\frac{\hat{r}^{(2n+1)}(\zeta)}{\hat{\omega}^{(2n+1)}(\zeta)},\ \breve{r}(x) = \breve{\omega}(x)\frac{\breve{r}^{(2n+1)}(\xi)}{\breve{\omega}^{(2n+1)}(\xi)} \quad (5)$$

(при алгебричних функціях (4) у знаменнику тут матимемо традиційно $(2n+1)!$**)**.

З (5) випливає, що для двосторонності колокант (1), (3) достатньо: упорядкована система вузлів та знакосталість виразу $\hat{r}^{(2n+1)}(x)\breve{r}^{(2n+1)}(x)$.

Зрозуміло, що в наведених побудовах можна використовувати лише частину значень (2) параметрів a_j, b_j. У результаті цього матимемо раціональні колоканти лише з частиною можливих двократних вузлів. При цьому відповідно зміниться вигляд колокант (1) (для простих вузлів, замість квадратів базисних функцій, доцільні самі функції), а також відповідно зміняться буферні функції та вигляд залишкових членів (5).

На завершення зробимо ще одне зауваження. А саме, як видно з (1), колокантами із простими вузлами являються колоканти з базисними функціями в довільних степенях (при додатніх показниках степенів — неперервні колоканти, при цілих додатніх показниках — гладкі колоканти, при показниках, більших одиниці, — колоканти, які можна зробити колокантами із двократними вузлами).

Нарешті, слід відмітити, що дані побудови придатні й у випадку суперпозиції функцій багатьох змінних виду $\sigma \mapsto F(\sigma(X))$ з монотонною функцією σ. Для цього в них необхідно лише замінити змінну x на змінну σ.

Список літератури

Калайда, О. Ф. (2000). *Чисельні методи*. Київ: ВПЦ «Київський університет».

Калайда, О. Ф. (2015). Побудова симетричних двосторонніх раціональних колокант з двократними вузлами. У *Матеріалах XVI Міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука* (Т. 2, с. 114—115). Київ: НТУУ «КПІ».

ПРО ОДНЕ УЗАГАЛЬНЕННЯ МНОГОЧЛЕНІВ С. БЕРНШТЕЙНА

О. Ф. Калайда
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
aleksei_kalaida@comcast.net

Як відомо, многочлен С. Бернштейна

$$B_n(x;f) = H^{-n}\sum_{j=0}^{n} f_j C_n^j (x-a)^j (b-x)^{n-j},\ f_j = f\left(\frac{jH}{n}\right),\ x \in [a,b],\ H = b-a, \quad (1)$$

збігається зі значеннями f_j апроксимованої функції лише у граничних вузлах $x_0 = a,\ x_n = b$ (а також точно представляє лише елементарні базисні елементи

$$(x-a)^0 = 1, (x-a),$$

а отже, і лінійну функцію, причому, зауважмо, останнє правильно лише при

$$f = f\left(\frac{jH}{n}\right)$$

Багато інших нових відомостей про многочлен (1) наведено у статті Калайда (2005)). Таким чином, многочлен (1) можна трактувати як двоцентрову колоканту апроксимованої функції f. Отже, зрозуміло, її залишковий член є (як і залишковий член лінійного многочлена Лагранжа

$$L_1(x;\, f) = B_1(x;\, f))\ r(x) = \frac{(x-a)(x-b)f''(c)}{2!},\ c \in (a,b).$$

Тут дається узагальнення многочлена (1) як багатоцентрового многочлена такого ж типу. А саме, легко переконатись, що базисні функції многочлена (1)

$$x \mapsto b_{nj}(x) = C_n^j (x-a)^j (b-x)^{n-j}$$

є відповідні члени многочлена $(B_1(x;1))^n$, а сам многочлен являється многочленом

$$\tilde{B}_n(x;f) = (B_1(x;f^{1/n}))^n = H^{-n}\sum_{j=0}^{n} C_n^j (x-a)^j (b-x)^{n-j} f_0^{j/n} f_n^{n-j/n} \quad (2)$$

після заміни $f_0^{j/n} f_n^{n-j/n}$ на f_j. Принагідно зауважмо, що многочлен (2) теж являється колокантою функції у вузлах $x_0 = a,\ x_n = b,$ а отже, певною апроксимантою функції на всьому відрізку. З рівності вигляду (2)

$$(\alpha^{1/n} - \beta^{1/n})^n \geq 0$$

при $n = 2m$ дістаємо уточнення відомої нерівності (при $m = 1$) між середнім арифметичним та середнім геометричним для додатних величин α, β :

$$\frac{\alpha+\beta}{2} \geq 2^{-1}\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j-1}C_n^j\alpha^{j/n}\beta^{n-j/n}.$$

Оскільки базисні функції ω_{nj} многочлена Лагранжа $L_n(x;f)$ мають ту властивість, що їх сума рівна одиниці (він, до того ж, точно подає елементарні базисні степеневі функції), то узагальненням многочлена (1) є многочлен

$$B_{nk}(x;f) = (L_n(x;f))^k.$$

Список літератури

Калайда, О. Ф. (2005). Про многочлени С. Бернштейна. *Вісник Київського ун-ту. Серія: фізико-математичні науки*, (3), 113—117.

ПРО ЗАЛИШКОВИЙ ЧЛЕН КОЛОКАНТ ФУНКЦІЙ ІЗ ПРОПУСКАМИ КВАНТІВ ІНФОРМАЦІЇ У ВУЗЛАХ КОЛОКАЦІЇ

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

aleksei_kalaida@comcast.net

Часто, наприклад, при чисельному розв'язуванні крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь вищого порядку, як-от лінійна крайова задача

$$y^{\mathrm{IV}} + p(x)y = f(x),\, x \in (a,b), y(a) = a_1,\, y''(a) = a_2,\, y(b) = b_1,\, y''(b) = b_2,$$

або коли інформація без пропусків у вузлах не задана, доцільно використовувати наближення у вигляді колоканти типу Маркова — Ерміта шуканої функції з пропусками квантів інформації (значень функції та її похідних) у вузлах колокації (у даному прикладі можна, звичайно використати й колоканту без пропусків, наприклад, многочлен Маркова — Ерміта з невідомими $y'(a),\, y'(b)$). Колоканти із пропусками квантів інформації у вузлах колокації побудовано методом вичерпування в роботах Калайда (2000, 2015а, 2015б), а спеціальні без пропусків квантів інформації для чисельного розв'язування крайових задач для диференціальних рівнянь вищого порядку — в Калайда та Придатченко (1982). Рекурентний алгоритм побудови колокант (без пропусків квантів інформації у вузлах колокації) з кратними вузлами побудовано в Калайда (2009).

Залишковий член (похибка апроксимації) у випадку колокант без пропусків квантів інформації у вузлах традиційно визначається за допомогою наслідку з теореми Ролля. Зрозуміло, що й у загальному випадку визначати залишковий член колоканти теж можна в тих випадках, коли можна скористатись наслідком з теореми Ролля. Тут вивчається питання про умови, коли залишковий член колокант із пропусками квантів інформації апроксимованої функції у вузлах все-таки можна визначити за допомогою згаданого наслідку з теореми Ролля.

Перш за все відмітимо, що колоканти із пропусками квантів інформації у вузлах колокації не завжди існують. Приклад наведено в Калайда (2000). Наведемо ще один переконливий приклад. Многочленну колоканту (як без пропусків, так і з пропусками квантів інформації) можна будувати у вигляді многочлена елементарних базисних функцій методом невизначених коефіцієнтів. У результаті відносно шуканих коефіцієнтів дістанемо лінійну алгебричну систему рівнянь. Оскільки шукана колоканта має бути єдиною, то матриця згаданої лінійної системи рівнянь мусить бути визначеною й невиродженою (як-от у випадку многочлена Лагранжа — матриця Вандермонда). У випадку колоканти з одним кратним вузлом — многочлена Тейлора — ця матриця одинична. Отже, у випадку колоканти лише з одним вузлом пропусків квантів інформації у вузлі бути не може — згадана одинична матриця матиме пропуски елементів діагоналі, тобто не буде визначеною.

Відмітимо, що задана інформація про апроксимовану функцію у вузлах колокації еквівалентна інформації про нулі залишкового члена колоканти. Тому достатньо переконатись, що за даними нулями залишкового члена його вигляд можна визначити за допомогою традиційної схеми з використанням відповідної твірної для нього функції та згаданого наслідку з теореми Ролля. При цьому нулі залишкового члена після пропуску (пропущені нулі) теж можуть бути кратними (відповідно кратності вузлів колокації після пропусків інформації).

Отже, нехай у вузлі x_0 задано значення f_0 апроксимованої функції f. Тоді залишковий член $r(x) = f(x) - \mathrm{K}(x)$ ($\mathrm{K}(x)$ – колоканта функції) має один простий нуль x_0. Тому твірна функція F,

$$F(t, x) = r(t)\omega(x) - r(x)\omega(t),$$

де ω — так звана *буферна* функція (має ті ж нулі тієї або більшої кратності, що й залишковий член, має два прості нулі x_0, x. Отже, за наслідком з теореми Ролля між цими нулями існує принаймні один нуль (на більше не розраховуємо) похідної $F_t'(t, x)$. Таким чином, щоб просунутись у визначенні залишкового члена колоканти, потрібен ще один нуль або твірної функції, або її похідної, тобто або нуль x_1 залишкового члена, або його похідної (останнє означає наявність пропуску кванта інформації про функцію в даному вузлі — замість її значення f_1, у цьому вузлі задано значення f_1' її похідної). Наведемо приклад. Побудувати алгебричну колоканту $\mathrm{K}(x)$ (типу многочлена Тейлора) за значеннями

$$f_j^{(j)} = f^{(j)}(x_j),\ j = \overline{0, n}.$$

Таку колоканту за методом невизначених коефіцієнтів можна покласти у вигляді

$$\mathrm{K}(x) = f_0 + \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j (x - x_0)^j}{j!},$$

де, як легко переконатись, невідомі коефіцієнти a_j визначаються рекурентно (з системи із трикутною з одиничною діагоналлю, а отже, невиродженою матрицею)

$$a_{n-j} = f_{n-j}^{(n-j)} - a_{n+1-j}(x_{n-j} - x_0) - a_{n+2-j}\frac{(x_{n-j} - x_0)^2}{2!} - \dots - a_n \frac{(x_{n-j} - x_0)^j}{j!},$$

$$a_n = f_n^{(n)},\ j = \overline{1, n-1}.$$

Легко також переконатись, що залишковий член цієї колоканти із пропусками має вигляд

$$r(x) = \omega(x)\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},\ c \in (\min x_j, \max x_j),\ j = \overline{0,n}$$

(залишковий член у формі Лагранжа, як у випадках многочлена Тейлора та многочлена Лагранжа), якщо функція ω має ті ж самі прості нулі, що й залишковий член. Якщо така функція існує, то й чинна наведена рівність для залишкового члена. Можна, звичайно, дану функцію вибирати у вигляді алгебричного многочлена не мінімального порядку. Наприклад, можна покласти

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)^2 ... (x - x_n)^{n+1}.$$

Тоді залишковий член, відповідно, матиме вигляд

$$r(x) = \frac{r^{(n+1)}(\zeta)\omega(x)}{\omega^{(n+1)}(\zeta)},\ \zeta \in (\min x_j, \max x_j),\ j = \overline{0,n}.$$

Дану функцію у вигляді алгебричного многочлена мінімального порядку (на одиницю більшого від порядку алгебричної колоканти) можна будувати тим же методом, що й колоканту — методом невизначених коефіцієнтів. Покладемо (з точністю до масштабного множника, тут він рівний одиниці)

$$\omega(x) = (x - x_0) + b_1\frac{(x - x_0)^2}{2!} + ... + b_n\frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Як бачимо, $\omega(x_0) = 0$. Далі з умов колокації $\omega^{(i)}(x_i) = 0,\ i = \overline{1,n},$ дістаємо лінійну неоднорідну алгебричну систему

$$b_1 + b_2(x_1 - x_0) + ... + b_n\frac{(x_1 - x_0)^{n-1}}{n!} = -\frac{1}{x_1 - x_0},$$

$$b_{i-1} + b_i(x_i - x_0) + ... + b_n\frac{(x_i - x_0)^{n-i}}{(n-i)!} = 0,\ i = \overline{2,n},$$

з матрицею Хессенберга. Її легко розв’язувати методом виключення знизу догори: визначивши передостанні коефіцієнти системи через останній (прямий хід методу Гаусса) та з першого рівняння останній коефіцієнт, а потім решту коефіцієнтів (зворотний хід методу Гаусса). А в даному випадку завдяки її специфічності систему можна розв’язати ще простіше і встановити умови відмінності від нуля її визначника. Справді, систему рівнянь з матрицею Хессенберга легко звести до системи із трикутною матрицею, а отже, легко переконатись в її невиродженості (виродженості).

Може бути, що колоканта із пропусками квантів інформації у вузлах колокації існує і єдина, але визначити вигляд залишкового члена за допомогою наслідку з теореми Ролля неможливо. Ось приклад. Побудувати колоканту за значеннями у вузлах x_0, x_1, x_2, відповідно, $f_0, f_1'', f_2^{\mathrm{IV}}$. Шукана, наприклад, алгебрична колоканта існує, єдина і має вигляд

$$\mathrm{K}(x) = f_0 + \left(f_1'' - f_2^{\mathrm{IV}} \frac{(x_1 - x_0)^2}{2} \right) \frac{(x - x_0)^2}{2!} + f_2^{\mathrm{IV}} \frac{(x - x_0)^4}{4!}.$$

Але залишковий член тут визначити за допомогою наслідку з теореми Ролля не можна (наведені вище умови для цього тут не виконуються).

Відмітимо, що при встановленні вигляду залишкового члена формули Тейлора в посібниках з математичного аналізу (Фихтенгольц, 1951; Ляшко, Боярчук, Гай, & Калайда, 1987) допускаються одна неточність та одна некоректність. Неточність полягає у тому, що при доведенні відповідної теореми про залишковий член запроваджують множник, оголошений сталою, хоча потім виявляється, що він є функція (така ж неточність є і при встановленні вигляду залишкового члена інших колокант без пропусків квантів інформації про функцію у вузлах колокації, наприклад, залишкового члена многочлена Лагранжа, який, до того ж, при визначенні залишкового члена формул чисельного диференціювання на його основі ще й диференціюється (Березин & Жидков, 1959)). А некоректність полягає у тому, що вигляд залишкового члена прогнозується і включається в твірну функцію. Насправді ж коректно запроваджувати таку твірну функцію, як-от наведена вище, з якої за наслідком з теореми Ролля залишковий член випливав би сам собою (див. Калайда (2015)).

На завершення побудуємо верхню оцінку суми знакосталих рядів Тейлора. При побудові многочлена Тейлора методом невизначених коефіцієнтів для останнього коефіцієнта дістаємо рівність $a_n = f^{(n)}(x)$. Отже, його можна покладати як параметр. З огляду на знакосталість ряду можемо покласти $a_n = S(x)$. Це дає нерівність

$$S(x) \le S_n(x) + S(x) \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!},$$

звідки маємо просту оцінку

$$S(x) \le \frac{S_n(x)}{1 - \dfrac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}}.$$

Список літератури

Березин, И. С., & Жидков, Н. П. (1959). *Методы вычислений*. (Ч. 1). Москва: Гостехиздат.

Калайда, А. Ф., & Придатченко, Ю. В. (1982). Обобщенные аппроксимации коллокационного типа и матричные алгоритмы численного дифференцирования. *Вычисл. и прикл. матем.*, *48*, 15—23.

Калайда, О. Ф. (2000). *Чисельні методи*. Київ: ВПЦ «Київський університет».

Калайда, О. Ф. (2009). Про один простий алгоритм побудови многочленів Маркова — Ерміта. У *Матеріалах III Міжнародної конференції «Обчислювальна та прикладна математика», присвяченої пам'яті академіка НАН України Івана Івановича Ляшка*, Київ, 11—12 вересня 2009 р. (с. 39). Київ: Київський університет.

Калайда, О. Ф. (2015). Як викладати тему «Теореми про середнє для неперервних та диференційовних функцій». У *Матеріалах XVI Міжнародної наукової конференція ім. акад. М. Кравчука* (Т. 3, с. 172—176). Київ: НТУУ «КПІ».

Калайда, О. Ф. (2015а). Колоканти з пропусками горизонталів інформації. У *Матеріалах XVI Міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука* (Т. 2, с. 111—112). Київ: НТУУ «КПІ».

Калайда, О. Ф. (2015б). Колоканти з пропусками за значеннями функції та її похідної. *Матеріалах XVI Міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука* (Т. 2., с. 113). Київ: НТУУ «КПІ».

Ляшко, И. И., Боярчук, А. К., Гай, Я. Г., & Калайда, А. Ф. (1987). *Математический анализ*. (Ч. 1). Киев: Вища школа.

Фихтенгольц, Г. М. (1951). *Курс дифференциального и инотегрального исчисления*. (Т. 1). Москва: Гостехиздат.

ПРО ДИЗ'ЮНКТНЕ ОБ'ЄДНАННЯ М-ГРАФІВ

С. О. Козеренко
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
kozerenko@univ.kiev.ua

Нехай $f:[0,1]\to[0,1]$ неперервне відображення та $x\in[0,1]$ його n-періодична точка. Нехай також

$$orb_f(x)=\{x,f(x),\dots,f^{n-1}(x)\}$$

орбіта точки x, а

$$orb_f(x)=\{x_1<\dots<x_n\}$$

її природній порядок. Розгляньмо орграф $G_f(x)$ із множиною вершин $\{1,\dots,n-1\}$ та множиною дуг

$$\{(i,j):\min\{f(x_i),f(x_{i+1})\}\le x_j<\max\{f(x_i),f(x_{i+1})\}\}.$$

Вершини $G_f(x)$ відповідають мінімальним інтервалам $[x_i,x_{i+1}]$ і в $G_f(x)$ існує дуга $i\to j$, якщо $[x_i,x_{i+1}]$ «накриває» $[x_j,x_{j+1}]$ під дією f. Орграф називається *періодичним*, якщо він ізоморфний $G_f(x)$ для деяких f та x. За допомогою періодичних графів можна отримати елегантне комбінаторне доведення теореми Шарковського (див. Ho та Morris (1981) та Straffin (1978)). Теоретико-графові властивості періодичних орграфів вивчалися в роботах Павленко (1987—1989).

Розгляньмо тепер скінченне дерево X та деяке відображення $\sigma:V(X)\to V(X)$ множини його вершин у себе. *Графом Маркова* $\Gamma=\Gamma(X,\sigma)$ називається орграф із множиною вершин $V(\Gamma)=E(X)$ та множиною дуг

$$A(\Gamma)=\{(u_1v_1,u_2v_2):u_2,v_2\in[\sigma(u_1),\sigma(v_1)]_X\}$$

(тут $E(X)$ множина ребер X, а $[\sigma(u_1),\sigma(v_1)]_X$ множина вершин єдиного найкоротшого $\sigma(u_1)-\sigma(v_1)$ ланцюга в X). Легко бачити, що періодичні орграфи є графами Маркова для ланцюгів X та їх циклічних перестановок σ. Орграф є *М-графом*, якщо він ізоморфний $\Gamma(X,\sigma)$ для деякої пари (X,σ). Кожна така пара (X,σ) називається *реалізацією* М-графа.

Для множини вершин $A\subset V(G)$ графа G покладемо

$$\partial_G A=\{u\in A:N_G(u)\cap(V(G)-A)\ne\varnothing\}.$$

Теорема 1.1 *Нехай* X *дерево та* $\sigma:V(X)\to V(X)$ *деяке відображення. Припустимо, що ми маємо набір* $\{A_i:1\le i\le m\}\subset V(X)$ *попарно неперетинних зв'язних множин таких, що для кожного* $1\le i\le m$ *виконано*

$\left|\sigma(\partial_X A_i)\right| = 1$, *або існує* $1 \le j \le m$ *з* $\sigma(\partial_X A_i) \subset A_j$. *Тоді* $\Gamma(X,\sigma) - \bigcup_{i=1}^{m} E(A_i)$ *є М-графом.*

Наслідок 1.2 Нехай Γ М-граф та $v \in V(\Gamma)$ його вершина з $N^+_\Gamma(v) \subset \{v\}$. Тоді $\Gamma - \{v\}$ теж є М-графом. Більш того, якщо $N^+_\Gamma(v) = \{v\}$, то існує реалізація (X,σ) М-графа $\Gamma - \{v\}$ така, що $fix\sigma \neq \varnothing$.

Приклад 1.3 Розглянемо дерево X з

$$V(X) = \{1,\ldots,7\},\ E(X) = \{12,23,34,16,25,67\}$$

та відображення

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 5 & 4 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тоді $d^-_{\Gamma(X,\sigma)}(16) = 0$, проте $\Gamma(X,\sigma) - \{16\}$ не є М-графом.

Очевидно, що орграф Γ є М-графом тоді й тільки тоді, коли $\Gamma \sqcup \overline{K_1}$ є М-графом. Проте, не кожне диз'юнктне об'єднання двох М-графів є М-графом.

Приклад 2.4 Нехай орграф Γ отриманий з повного орграфа K_2 видаленням однієї петлі. Тоді Γ є М-графом, проте $\Gamma \sqcup K_1$ не є М-графом.

Зауваження 5(Козеренко, 2017). Для пари дерев $X_i, i = 1,2$ та пари їх відображень $\sigma_i : V(X_i) \to V(X_i)$ з $fix\sigma_i \neq \varnothing, i = 1,2$ диз'юнктне об'єднання їх графів Маркова $\Gamma(X_1,\sigma_1) \sqcup \Gamma(X_2,\sigma_2)$ також є М-графом. Справді, «склеюючи»' реалізації (X_1,σ_1) та (X_2,σ_2) разом по фіксованій парі нерухомих точок, ми отримаємо реалізацію $\Gamma(X_1,\sigma_1) \sqcup \Gamma(X_2,\sigma_2)$.

Зокрема, використовуючи конструкцію із Зауваження 1, отримаємо наступну достатню умову М-графовості диз'юнктного об'єднання М-графів.

Наслідок 26 (Козеренко, 2017). Нехай Γ_1 та Γ_2 пара М-графів з парною кілікістю петель у кожному. Тоді $\Gamma_1 \sqcup \Gamma_2$ є М-графом. Зокрема, диз'юнктне об'єднання М-графів без петель також є М-графом без петель.

Виявляється, що для заданого М-графа ми можемо надати теоретико-графовий критерій існування його реалізації (X,σ) з $fix\sigma \neq \varnothing$.

Твердження 1.7 *Для орграфа* Γ *орграф* $\Gamma \sqcup K_1$ *є М-графом тоді й тільки тоді, коли* Γ *є М-графом та існує його реалізація* (X,σ) *з* $fix\sigma \neq \varnothing$.

Об'єднуючи Зауваження 1 та Твердження 1, отримаємо наступний результат.

Твердження 2.8 *Нехай для пари орграфів* Γ_1 *та* Γ_2 *орграфи* $\Gamma_1 \sqcup K_1$ *та* $\Gamma_2 \sqcup K_1$ *є М-графами. Тоді* $\Gamma_1 \sqcup \Gamma_2$ *теж є М-графом.*

Твердження 3.9 *Нехай* Γ_1 *та* Γ_2 *є парою нетривіальних орграфів з петлями в кожній вершині. Диз'юнктне об'єднання* $\Gamma_1 \sqcup \Gamma_2$ *є М-графом тоді й тільки тоді, коли* $\Gamma_1 \sqcup K_1$ *та* $\Gamma_2 \sqcup K_1$ *є М-графами.*

Приклад 3.10 Розглянемо ланцюг $X \simeq P_4$ з

$$V(X) = \{1,2,3,4\},\ E(X) = \{12,23,34\}$$

та його відображення

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тоді $\Gamma(X,\sigma)$ має петлю в кожній вершині, але $\Gamma(X,\sigma) \sqcup K_1$ не є М-графом.

Орграф Γ називається *частково функціональним*, якщо $d^+_\Gamma(v) \leq 1$ для всіх $v \in V(\Gamma)$.

Теорема 2.11 *Нехай* Γ_1 *є М-графом та* Γ_2 *є ациклічним частково функціональним орграфом. Тоді* $\Gamma_1 \sqcup \Gamma_2$ *теж є М-графом.*

Умова ациклічності в Теоремі 2 є суттєвою, що випливає із Прикладу 2.

Теорема 3.12 *Диз'юнктне об'єднання будь-якого набору слабких компонент (зокрема, кожна слабка компонента) М-графа також є М-графом.*

Наслідок 3.13 Якщо $\Gamma_1 \sqcup \Gamma_2$ є М-графом, то обидва Γ_1 та Γ_2 є М-графами.

Список літератури

Ho, C-W., & Morris, C. (1981). A graph theoretic proof of Sharkovsky's theorem on the periodic points of continuous functions. *Pacific J. Math., 96*, 361–370.

Kozerenko, S. (2017). On the abstract properties of Markov graphs for maps on trees. *Preprint, accepted for publication in Matematicki Bilten*.

Straffin, P. D. (1978). Periodic points of continuous functions. *Mathematics Magazine, 51*(2), 99–105.

Павленко, В. А. (1987). О числе орграфов периодических точек непрерывного отображения отрезка в себя. *Укр. мат. журн.*

Павленко, В. А. (1988). Периодические орграфы и их свойства. *Укр. мат. журн., 40*(4), 528—532.

Павленко, В. А. (1989). О характеризации периодических орграфов. *Кибернет. систем. анал., 25*, 41—45.

ІНФІНІТЕЗИМАЛЬНІ КОНФОРМНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ДРУГОГО СТЕПЕНЯ У ПРОСТОРІ ДРУГОГО НАБЛИЖЕННЯ $\tilde{V}_n^2$ ДЛЯ РІМАНОВА ПРОСТОРУ V_n НЕНУЛЬОВОЇ ПОСТІЙНОЇ КРИВИНИ

А. В. Крутоголова, Г. Ю. Лісоводська, С. М. Покась
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, Одеса, Україна
01link01@rambler.ru, cublinka91@mail.ru, pokas@onu.edu.ua

Ключові слова: інфінітезимальне конформне перетворення, риманів простір, група Лі.

Розгляньмо ріманів простір V_n, який віднесено до довільної системи координат $\left\{x^1, x^2, \ldots, x^n\right\}$ з метричним тензором $g_{ij}\left(x\right)$. Фіксуємо в цьому просторі точку $M_0\left(x_0^h\right)$ та будуємо новий простір $\tilde{V}_n^2$, визначаючи його метричний тензор $\tilde{g}_{ij}(y)$ так (Покась, 2011):

$$\tilde{g}_{ij}(y) = \underset{0}{g_{ij}} + \frac{1}{3}\underset{0}{R_{i\alpha\beta j}}\, y^\alpha y^\beta ,$$

де $\underset{0}{g_{ij}} = g_{ij}\left(M_0\right)$, $\underset{0}{R_{i\alpha\beta j}} = R_{i\alpha\beta j}\left(M_0\right)$.

Розгляньмо випадок, коли вихідний простір V_n — ріманів простір ненульової постійної кривини. У просторі $\tilde{V}_n^2$ вивчаються інфінітезимальні конформні перетворення другого степеня.

Означення. Нескінченно малі перетворення в рімановому просторі $\tilde{V}_n^2$

$$y'^h = y^h + \xi^h\left(y\right)\delta t$$

називають *перетвореннями другого степеня*, якщо вектор зміщення $\xi^h\left(y\right)$ має вигляд (Крутоголова & Покась, 2009):

$$\xi^h = a^h_{\cdot} + a^h_{\cdot l} y^l + a^h_{\cdot l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} ,$$

де a^h, $a^h_{\cdot l}$, $a^h_{\cdot l_1 l_2}$ — деякі сталі.

У результаті дослідження узагальнених рівнянь Кілінга було доведено твердження.

Теорема. *Простір другого наближення $\tilde{V}_n^2$ для простору V_n ненульової постійної кривини допускає групу Лі G_r інфінітезимальних конформних перетворень другого степеня з вектором зміщення $\xi^h\left(y\right)$ вигляду*

$$\xi^h = a^h_{\cdot} + a^h_{\cdot l} y^l - \frac{k}{3}\left(a_{l_1}\delta^h_{l_2}\right) y^{l_1} y^{l_2} ,$$

де $a_{.}^{h}, a_{.l}^{h} - const$, $r = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Список літератури

Крутоголова, А. В., & Покась, С. М. (2015). Геометрия риманова пространства второго приближения. *Труды международного геометрического центра*, *8* (3—4), *53—59*.

Покась, С. М. (2011). Группы Ли движений в римановом пространстве второго приближения. *Известия Пензенского государственного университета им. В. Г. Белинского, физико-математические науки*, (26), 173—183.

ЩЕ ОДНА ТЕОРЕМА ПРО ТОПОЛОГІЧНЕ ВКЛАДЕННЯ

В. Д. Погребний
Сумський державний педагогічний університет імені А.С. Макаренка, Суми, Україна
mathematicsspu@mail.ru

У роботі продовжуються дослідження проблем топологічного вкладення важливих класів упорядкованих топологічних лінійних просторів — топологічних лінійних решіток. Розглядаються зчислено-нормовані повні лінійні решітки, умови можливості введення еквівалентної системи монотонних півнорм, вкладення зчислено-банахової решітки у топологічну лінійну решітку при умові наявності їх алгебраїчного вкладення.

Ключові слова: простір, порядок, вкладення, півнорма, решітка, монотонність, зчисленість, топологія, збіжність, еквівалентність.

Дана робота є продовженням роботи Погребний (2016), і присвячена вивченню проблем топологічного вкладення деяких класів топологічних лінійних (або векторних) решіток, які являють собою важливий тип упорядкованих топологічних лінійних просторів.

Нехай E_1, E_0 — топологічні лінійні решітки (ТЛР) і E_1 алгебраїчно вкладена в E_0. Розглянемо ще один випадок для E_1.

Нехай X — зчислено-нормований топологічний лінійний простір (ТЛП). Ці простори є локально опуклими ТЛП, а їх топологія $\tau\left(X\right)$ задається зчисленим сімейством півнорм $\left(p_i\left(x\right)\right)_{i\in\mathbb{N}}$. Збіжність послідовностей у цих просторах (послідовностей достатньо для адекватного задання топологічної структури, оскільки ці простори метризовні) часто називається $\left(m\right)$-*збіжністю* і визначається умовою:

$$x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{(m)} x_0 \Leftrightarrow p_i\left(x_n - x_0\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \ \ \forall i\in\mathbb{N}.$$

Повні зчислені-нормовані простори будемо називати *зчислено-банаховими*.

Нехай цей простір X одночасно є і лінійною решіткою. Якщо ці дві структури узгоджені умовою монотонності

$$\left|x\right| \le \left|y\right| \Rightarrow p_i\left(x\right) \le p_i\left(y\right) \ \ \forall i\in\mathbb{N},$$

то X називається *зчислено-нормованою решіткою*, а повний — *зчислено-банаховою решіткою*. У термінології Б. З. Вулиха — відповідно KN^*- лінеал та KB^*-лінеал (Вулих, 1961).

Якщо вихідна система півнорм не є монотонною, то можливість введення еквівалентної системи монотонних півнорм задається умовою теореми $VII.8.1$ (Вулих (1961)). Оскільки там ця теорема не доводиться, то розглянемо її детально.

Теорема 1. *Нехай* X *— лінійна решітка й одночасно зчислено-нормований простір. В* X *можна запровадити еквівалентну систему монотонних півнорм тоді й тільки тоді, коли вихідні півнорми узгоджені з порядком умовою:*

$$p_i(x_n) \to 0 \ \forall i \in \mathbb{N}, \ |y_n| \le |x_n| \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow p_i(y_n) \to 0 \ \ \forall i \in \mathbb{N}.$$

Доведення. 1. *Необхідність*. Нехай усі вихідні півнорми є монотонними. Тоді при

$$|y_n| \le |x_n| \ \forall n \in \mathbb{N}$$

буде (з монотонності)

$$p_i(y_n) \le p_i(x_n) \ \forall i \in \mathbb{N},$$

отже, при $p_i(x_n) \to 0 \Rightarrow p_i(y_n) \to 0 \ \ \forall i \in \mathbb{N}$ і умова теореми виконана.

2. *Достатність*. Нехай умова теореми виконана. Побудуємо на X нову систему півнорм $\left(p_i^*(x)\right)_{i \in \mathbb{N}}$ за правилом:

$$p_i^*(x) = \sup_{\theta \le y \le |x|} p_i(y)$$

де θ — нульовий елемент простору. Покажемо, що всі потрібні властивості виконуються.

1. Коректність введення нових півнорм, тобто

$$0 \le p_i^*(x) < +\infty \ \forall x \in X \ \forall i \in \mathbb{N}.$$

Оскільки $p_i(y) \ge 0$, то і $p_i^*(x) \ge 0$. Покажемо, що

$$p_i^*(x) < +\infty \ \forall x \in X.$$

Нехай $\lambda_n \to 0 \Rightarrow \lambda_n x \to \theta$, оскільки $p_i(\lambda_n x) = |\lambda_n| p_i(x) \to 0$. Якщо $\theta \le y_n \le |x|$, то $p_i(\lambda_n y_n) \to 0$ з умови теореми. При заданому $x \in X$ множина $\{y : \theta \le y \le |x|\}$ обмежена по півнормам $\Rightarrow p_i^*(x) < +\infty$ для всіх $x \in X$.

2. Невід'ємність. $p_i^*(x) = \sup\limits_{\theta \le y \le |x|} p_i(y) \ge 0 \ \forall x \in X$.

3. Абсолютна однорідність.

$$p_i^*(\lambda x) = \sup_{\theta \le y \le |\lambda x|} p_i(y) = \sup_{\theta \le y \le |\lambda||x|} p_i(y) = |\lambda| \sup_{\theta \le y \le |x|} p_i(y) = |\lambda| p_i^*(x).$$

4. Субаддитивність. Нехай $x = a + b$.

$$\theta \le y \le |x| \Rightarrow y = y_1 + y_2,$$

де $\theta \le y_1 \le |a|$, $\theta \le y_2 \le |b|$ за теоремою 3.6.2 (Вулих, 1961).

$$p_i(y) = p_i(y_1 + y_2) \le p_i(y_1) + p_i(y_2),$$

значить,

$$p_i^*(x) = \sup_{\theta \le y \le |x|} p_i(y) \le \sup_{\theta \le y \le |x|} p_i(y_1) + \sup_{\theta \le y \le |x|} p_i(y_2) = p_i^*(a) + p_i^*(b).$$

5. Монотонність. Нехай $|x| \le |z|$, тоді

$$p_i^*(x) = \sup_{\theta \le y \le |x|} p_i(y) \le \sup_{\theta \le y \le |z|} p_i(y) = p_i^*(z).$$

6. Еквівалентність старих і нових півнорм. З означення нових півнорм,

$$p_i^*(x) \ge p_i^*(x_+),\ p_i^*(x) \ge p_i^*(x_-).$$

Отже,

$$p_i^*(x) \le 2p_i^*(x),\ p_i^*(x_n) \to 0 \Rightarrow p_i(x_n) \to 0.$$

Навпаки, нехай $p_i(x_n) \to 0$. Припустимо супротивне. Тоді $(x_n)_{n \in a}$ має підпослідовність

$$(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \ge \varepsilon_0 > 0.\ \forall k \in \mathbb{N}\ \exists y_k : \theta \le y_k \le |x_{n_k}|,\ p_i(y_k) \ge \varepsilon_0.$$

Але з узгодження півнорм, $p_i(y_k) \to 0$. Суперечність. Теорему доведено.

У зчислено-нормованих решітках, оскільки вони архімедові (Вулих, 1961) можна розглядати (r)-збіжність і зіркові по відношенню до неї. Отже, розглянемо співвідношення вихідної топологічної збіжності (τ) та конфінальної зіркової збіжності $(c * r)$.

Теорема 2. *У зчислено-банаховій решітці* $(\tau) \Rightarrow (c * r)$.

Доведення. Нехай

$$x_n \xrightarrow{(\tau)} \theta.$$

Візьмімо її довільну підпослідовність $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$, а з неї виділимо таку підпослідовність $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, що

$$p_i(x_k) \le \frac{1}{k^3}, \text{ для } i = 1,2,\dots,k.$$

Це завжди можливо. Розгляньмо

$$p_i(k|x_k|) = kp_i(|x_k|) = kp_i(x_k) \le k \cdot \frac{1}{k^3} = \frac{1}{k^2},\ i = 1,2,\dots,k$$

при даному $i \in \mathbb{N}$, оскільки $k \to +\infty$. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} k|x_k|$$

абсолютно збіжний, бо він мажорується власно збіжним числовим рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

На повні локально опуклі простори легко переноситься з банахових просторів умова збіжності абсолютно збіжного ряду (Треногин, 1980). Таким чином, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\left|x_k\right|$$

збіжний.

Позначимо його суму: $u \in X \;\; u \geq \theta$ (Вулих, 1961). Також

$$k\left|x_k\right| \leq u,\; k \in N \Rightarrow \left|x_k\right| \leq \frac{1}{k}u.$$

При достатньо великих $k \in \mathbb{N}$, буде

$$\frac{1}{k} < \varepsilon,\; \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \left|x_k\right| \leq \varepsilon u.$$

Це означає, що

$$x_k \xrightarrow{(r)} \theta, \text{ отже } x_n \xrightarrow{(c*r)} \theta.$$

Теорему доведено.

Звідси очевидно, випливає

Теорема 3. *У зчислено-банаховій решітці* $\tau \geq \tau^{(c*r)}$.

Нехай тепер E_1 — зчислено-банахова решітка, E_0 — ТЛР і E_1 алгебраїчно вкладена в E_0. Нехай вкладення структурне: $\tau_1^{(c*r)} \geq \tau_{01}^{(c*r)}$.

Теорема 4. *Якщо зчислено-банахова решітка* E_1 *структурно вкладена в топологічну лінійну решітку* E_0, *то це вкладення є топологічним.*

Доведення. Порівняємо топології τ_1 і τ_{01}. У силу структурності вкладення і теореми 3,

$$\tau_1 \geq \tau_1^{(c*r)} \geq \tau_{01}^{(c*r)} \geq \tau_{01},$$

маємо $\tau_1 \geq \tau_{01}$ і оператор вкладення неперервний у топологіях $\tau\left(E_1\right)$, $\tau\left(E_0\right)$.

Теорему доведено.

Список літератури

Вулих, Б. З. (1961). *Введение в теорию полуупорядоченных пространств.* Москва: Государственное издательство физико-математической литературы.

Погребний В. Д. (2016). Одна теорема про топологічне вкладення. У *Матеріалах XVII Міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука,* Київ, 19—20 травня (с. 147—150). Київ: НТУУ «КПІ».

Треногин, В. А. (1980). *Функциональный анализ.* Москва: Наука.

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧ РОДСТВЕННЫХ ТИПУ РИМАНА — ГИЛЬБЕРТА — ПРИВАЛОВА СО ВЗАИМНО ОБРАТНЫМИ В КОЛЬЦЕ РАЦИОНАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Г. С. Полетаев

Одесская государственная академия строительства и архитектуры, Одесса, Украина

poletayev_gs@ukr.net

Краевые условия рассматриваемых задач, относительно соответствующих неизвестных, задаются уравнениями с рациональными коэффициентами на сомкнутой вещественной оси. Доказана, непосредственно, теорема о разрешимости изучаемых задач и уравнений. Формулы решений получены в явном виде. Установлены некоторые общие свойства. В частности, выражающие связь между решениями задач в случае, когда правая часть краевых условий равна единице.

Ключевые слова: *Задача Римана, уравнение, кольцо, проектор, факторизационная пара*

1. Сообщаются и дополняются соответствующие основные результаты Войтик, Полетаев и Яценко (2015).

Будем использовать обозначения и определения из работ, указаных в списке литературы. В частности.

1.1. Определение. Всякое кольцо R с единицей e, рассматриваемое вместе с его фиксированной факторизационной парой подколец $(R^+, R^-)[\equiv (R^-, R^+)]$, т. е. подколец, обладающих определёнными, аксиоматически заданными свойствами, (Полетаев, 1988, 2015, 2016; McNabb & Schumitzky, 1972) будем называть *кольцом с факторизационной парой*.

1.2. Будем говорить, что элемент $a \in R$ допускает в коммутативном кольце R факторизацию по факторизационной паре (R^+, R^-), если есть элементы $r^+ \in R^+, s^0 \in R^0, t^- \in R^-$ такие, что: $a = r^+ s^0 t^-$.

Эта факторизация называется:

правильной факторизацией (п. ф.), если $r^+ \in R^+, s^0 \in R^0, t^- \in R^-$ обратимы в своих подкольцах;

нормированной факторизацией (н. ф.), если $t^0 = r^0 = e$;

нормированной правильной факторизацией (н. п. ф.), если она является (п. ф.) и $t^0 = r^0 = e$.

Известно, что правильную факторизацию элемента из R по ФП (R^+, R^-) можно нормировать. Нормированная правильная факторизация единственна.

1.3. Обозначим через $\Re_r$ совокупность всех рациональных функций, вообще, комплексного переменного $z \in \mathbb{C}$, все полюсы которых, при существовании, конечны и невещественны. Пределы функций из $\Re_r$ на бесконечности конечны.

Пусть $\Re_r^+$ $(\Re_r^-)$ — совокупности функций из $\Re_r$, все полюсы которых, при существовании, расположены внутри нижней (верхней) полуплоскости Π_- (Π_+), соответственно (ср. Крейн, 1958, с. 13—14). Проверяется, что $\Re_r$ — кольцо с мультипликативной единицей $e = f(z) := 1, z \in \mathbb{C}$ относительно обычных операций сложения и умножения функций, а $\Re_r^+, \Re_r^-$ — его подкольца с единицей. Проекторы на подкольца: $\Re_r \to \Re_r^{\mp}$ обозначим $P^{\mp}$, соответственно. Эти проекторы коммутирующие. Проектор P^+ (проектор P^-) каждой функции из $\Re_r$ ставит в соответствие часть её разложения в сумму простейших дробей первого и второго типов с полюсами в Π_- (в Π_+), соответственно. Полагаем:

$$P^0 = P^+P^-, P_+ = P^+ - P^0, P_- = P^- - P^0, \Re_r^{\mp,0} = P^{\mp,0}(\Re_r),$$

где $\Re_r^0 = \Re_r^+ \cap \Re_r^-$. Можно показать, что $\Re_r$ является кольцом с факторизационной парой $(\Re_r^+, \Re_r^-)$.

2. Рассматриваются следующие задачи.

Задача 1. Для заданных рациональных функций — коэффициентов $A(x), B(x), -\infty < x < +\infty$, найти пару рациональных функций $X^+(z) \in \Re_r^+, Y_-(z) \in \Re_-$, все полюсы первой из которых, при существовании, расположены в нижней, а второй — в верхней полуплоскостях, соответственно, и удовлетворяющих на сомкнутой вещественной оси линейному уравнению:

$$A(x)X^+(x) + Y_-(x) = B(x),\ \ x \in \{-\infty; \infty\}. \qquad (1)$$

Задача 2. Для заданных рациональных функций — коэффициентов $A(x), B(x), -\infty < x < +\infty$, найти пару рациональных функций $X_1^+(z) \in \Re_r^+, Y_{1-}(z) \in \Re_-$, все полюсы первой из которых, при существовании, расположены в нижней, а второй — в верхней полуплоскостях, соответственно, и удовлетворяющих на сомкнутой вещественной оси линейному уравнению:

$$A^{-1}(x)X_1^+(x) + Y_{1-}(x) = B(x), \ x \in \{-\infty; \infty\}. \qquad (2)$$

3. Главный результат. Исходим из возможности продолжения (1), (2) на всю комплексную плоскость, не выходя из соответствующего подкласса рациональных функций. Тогда:

$$A(z)X^+(z) + Y_-(z) = B(z),\ \ z \in \mathbb{C}; \qquad (3)$$

$$A^{-1}(z)X_1^+(z) + Y_{1-}(z) = B(z),\ \ z \in \mathbb{C}, \qquad (4)$$

где $A(z), B(z) \in \Re_r, z \in \mathbb{C}$, — известные функции; $X^+(z) \in \Re_r^+, Y_-(z) \in (\Re_r)_-$, $X_1^+(z) \in \Re_r^+, Y_{1-}(z) \in (\Re_r)_-; z \in \mathbb{C}$ — искомые; $\mathbb{C}$ — расширенная комплексная плоскость. Непосредственно, или с помощью результатов из Полетаев (1988, 2015, 2016), устанавливается следующее.

3.1. Теорема. *Пусть функция* $A(z) \in \Re_r$ *не имеет вещественных нулей и*

$$\lim_{z\to\infty} A(z) = \text{const} \neq 0. \qquad (5)$$

Если, при этом, $A^{-1}(z)$ *допускает нормированную правильную факторизацию по факторизационной паре* $(\Re_r^+, \Re_r^-)$:

$$A^{-1}(z) = \Gamma^+(z) S^0(z) T^-(z),\ z \in \mathbb{C}, \qquad (6)$$

тогда уравнение (3) *и* **Задача 1**, *относительно* $X^+(z) \in \Re_r^+, Y\_(z) \in (\Re_r)\_$, *при любой правой части* $B(z) \in \Re_r$ *имеет единственное решение. Его можно найти по формулам:*

$$X^+(z) = \Gamma^+(z) S^0 P^+[T^-(z) B^+(z)],$$
$$Y\_(z) = B\_(z) + T^{-'}(z) P\_[T^-(z) B^+(z)], \qquad (7)$$

где

$$T^{-'}(z) := (T^-(z))^{-1}; S^0 := S^0(z).$$

3.2. Замечания. Всякая, являющаяся решением (3), пара рациональных функций $X^+(z) \in \Re_r^+, Y\_(z) \in (\Re_r)\_$, сужением на сомкнутую вещественную ось, порождает решение уравнения (1):

$$X^+(x) = X^+(z) \downarrow_{z=x},\ Y\_(x) = Y\_(z) \downarrow_{z=x};\ x \in \{-\infty; \infty\}. \qquad (8)$$

Следовательно, доставляет и решение **Задачи 1.**

Меняя ролями $A(x)$ и $A^{-1}(x)$, заключаем, что, при условиях **Теоремы,** уравнение (4) и **Задача 2,** относительно неизвестных $X_1^+(z) \in \Re_r^+, Y_{1-}(z) \in (\Re_r)\_; z \in \mathbb{C}$ при любой правой части $B(z) \in \Re_r$ имеет единственное решение. Его можно найти по формулам:

$$X_1^+(z) = (\mathit{\Gamma}^+(z) S^0)^{-1} P^+[(T^-(z))^{-1} B^+(z)],$$
$$Y_{1-}(z) = \{B\_(z) + T^-(z) P\_[(T^-(z))^{-1} B^+(z)]\}. \qquad (9)$$

3.3. Следствия. 1. При условиях теоремы, соответствующие правой части $B(z) = 1; z \in \mathbb{C}$ решения уравнений (3), (4) и **Задач 1 и 2** обозначаем и получаем из (7), (9) , соответственно, в виде:

$$X^+(z) := X_e^+(z) = \mathit{\Gamma}^+ S^0, Y\_(z) := Y_{e-}(z) = (T^-(z))^{-1} T\_(z);$$

$$X_1^+(z) := X_{e1}^+(z) = (\Gamma^+ S^0)^{-1}, Y_{1-}(z) := Y_{e1-}(z) = T^-(z) P\_[(T^-(z))^{-1}].$$

Эти решения играют важную роль в общей теории рассматриваемых уравнений и **Задач 1 и 2.**

2. При условиях теоремы, единственное решение в $\Re_r$ уравнения (3) и **Задачи 1,** соответствующее конкретной правой части

$$(\Re_r^- \supset) \, B(z) = B^-(z); z \in \mathbb{C},$$

можно найти из (7) в виде:

$$X^+(z) = \Gamma^+(z) S^0 B^0,$$

$$Y_-(z) = B_-(z) + [T^-(z)]^{-1} T_-(z) B^0;$$

3. При условиях теоремы, единственное решение в $\Re_r$ уравнения (3) и **Задачи 1,** соответствующее конкретной правой части $B(z) = B^+(z); z \in \mathbb{C}$, можно найти в виде:

$$X^+(z) = \Gamma^+(z) S^0(z) p^+[T^-(z) B^+(z)],$$

$$Y_-(z) = [T^-(z)]^{-1} p_-[T_-(z) B^+(z)].$$

Построены иллюстративные примеры.

Список литературы

McNabb, A., & Schumitzky, A. (1972). Factorization of operators I: Algebraic theory and examples. *Journal Funct. Anal.*, *9*(3), 262–295.

Войтик, Т. Г., Полетаев, Г. С, & Яценко, С. А. (2016). Метод нахождения рациональных функций с полюсами из разных полуплоскостей по уравнению с правильно факторизуемым коэффициентом. *Луцьк: НАУКОВІ НОТАТКИ, 54,* 65—70.

Войтик, Т. Г., Полетаев, Г. С., & Яценко, С. А. (2015). Проекторный подход к нахождению двух рациональных линейно связанных на оси функций с полюсами из разных полуплоскостей. В *Трудах Восьмой всероссийской конференции «Необратимые процессы в природе и технике»*, Москва, 27—29 января 2015 г. (Ч. 2, с. 125—129). Москва: МГТУ им. Н. Э. Баумана.

Крейн, М. Г. (1958). Интегральные уравнения на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов. *Успехи мат. наук, 13*(5), 3—120.

Полетаев, Г. С. (1988). *Об уравнениях и системах одного типа в кольцах с факторизационными парами*. Препринт 88.31. Киев: АН УССР, Ин.-т математики.

Полетаев, Г. С. (2015). Подвид двупроекторных первого порядка уравнений с правильно факторизуемым коєффициентом в кольце с факторизационной парой. В *Abstracts of Conf. rep. «XVII International Conference DSMSI», May 27–29, 2015, Kyiv* (с. 46). Київ: Київський національний університет.

Полетаев, Г. С. (2016). Метод решения абстрактных уравнений с двумя неизвестными из подколец факторизационной пары. У *Матеріалах IV Міжнародної наук.-практичної конф. «Математика в сучасному технічному університеті»,* 24—25 грудня 2015 р., Київ (с. 85—88). Київ: НТУУ «КПІ».

СИНГУЛЯРНЫЙ ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР БОХНЕРА — МАРТИНЕЛЛИ В ОБЛАСТЯХ С КОНИЧЕСКИМИ РЕБРАМИ

Б. Б. Пренов

Нукусский государственный педагогический институт, Нукус, Узбекистан

prenov@mail.ru

Получены граничные значения интеграла Бохнера — Мартинелли для областей, граница которых содержит конические ребра.

Ключевые слова: интеграл Бохнера — Мартинелли, граничные значения.

Работа посвящена к изучению интеграла Бохнера — Мартинелли в ограниченных областях пространства $\mathbb{C}^n$, $n > 1$ (см. Кытманов (1992), Кытманов и Мысливец (2010)), граница которых содержит конические ребра и тем самым не является кусочно-гладкой. В случае, когда граница области содержит одну коническую особую точку, интеграл Бохнера — Мартинелли был рассмотрен в работе Кытманов и Мысливец (2007). В случае конических ребер этот интеграл изучался в Джумабаев (2011), но при этом требовалась однородность самого ребра, что значительно сужало класс множеств. В нашем рассмотрении это требование отсутствует. Сначала введем класс поверхностей, которые мы будем изучать.

Будем отождествлять пространство $\mathbb{C}^n$ с пространством $\mathbb{R}^{2n}$ следующим образом:

$z = (z_1, \ldots, z_n)$ — комплексный n-мерный вектор из $\mathbb{C}^n$,

$x = (x_1, \ldots, x_{2n})$ — действительный $2n$-мерный вектор из $\mathbb{R}^{2n}$ и

$$z_j = x_j + ix_{n+j},\ j = 1, \ldots, n.$$

Разделим переменные x_j на группы:

$$x' = (x_1, \ldots, x_q),\ x'' = (x_{q+1}, \ldots, x_{2n-1}),\ q \geqslant 0.$$

Обозначим $d = 2n - 2 - q$, т. е. $d + q = 2n - 2$.

Пусть X — компактное замкнутое гладкое многообразие в $\mathbb{R}^{d+1} \setminus \{0\}$ размерности d, определяемое вещественно-значной функцией

$$\rho \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{d+1} \setminus \{0\})$$

со свойствами:

$$X = \{x'' \in \mathbb{R}^{d+1} : \rho(x'') = 0\}, \quad d\rho \neq 0 \quad \text{на} \quad X.$$

Фиксируем $\varepsilon_0 > 0$. Рассмотрим множество

$$C_0 = \{(rx'', r) \in \mathbb{R}^{d+2} : x'' \in X, x_{2n} = r \in [0, \varepsilon_0]\}.$$

Тогда C_0 есть коническая гладкая поверхность размерности $d+1$ в $\mathbb{R}^{d+2}$ с единственной особой точкой в нуле.

Мы также будем рассматривать пространство $\mathbb{C}^n$ в переменных $w = (w_1,\ldots,w_n)$ и пространство $\mathbb{R}^{2n}$ в переменных $y = (y_1,\ldots,y_{2n})$, причем

$$w_j = y_j + iy_{n+j},\ \ j = 1,\ldots,n.$$

Тогда в переменных w

$$C_0 = \{(y'',y_{2n}) : y'' = rx'', y_{2n} = r, x'' \in X, r \in [0,\varepsilon_0]\}.$$

Пусть W — ограниченная область в $\mathbb{R}^q$ и $y' \in W$. Обозначим $S = W \times C_0$ — гиперповерхность в $\mathbb{C}^n$, т. е.

$$S = \{y = (y',y'',y_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n} : \chi(y) = \chi(y'',y_{2n}) = 0, y' \in W\}. \qquad (1)$$

Множество S является гладким многообразием с особым коническим ребром $\Pi = \{y = (y',0,0) \in W\}$.

Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{C}^n$. Будем считать, что граница D задается в виде

$$\partial D = \Sigma \cup (S_1 \cup \ldots \cup S_N),$$

где Σ является гладкой гиперповерхностью, а каждая из S_ν диффеоморфна конической гиперповерхности S (с разными p и d), рассмотренной выше. Таким образом, ∂D — гладкая гиперповерхность с конечным числом конических ребер. Отметим, что в таких областях справедлива формула Стокса (Шварц, 1972).

Так как анализ вблизи особых точек является локальным, можно считать без ограничения общности, что $N = 1$, т. е. $\partial D = \Sigma \cup S$, где S имеет вид (1).

Меру Лебега размерности q будем обозначать $d\Lambda_q$ и интегрировать по ней будем только на гладких частях многообразий. Функция $f \in \mathcal{L}^1(\partial D)$, если $f \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$ и $f \in \mathcal{L}^1(S \setminus \Pi)$.

Пусть $f \in \mathcal{L}^1(\partial D)$, точку $y_0 \in S$ назовем точкой Лебега для функции f, если

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon^{1-2n} \int\limits_{S \cap B(y_0,\varepsilon)} \left| f(y) - f(y_0) \right| d\Lambda_{2n-1} = 0,$$

где $B(y_0,\varepsilon)$ — шар с центром в точке y_0 радиуса ε.

Теорема 1. *Если $y_0 = (y_0',0,0) \in \Pi$ — точка Лебега функции $f \in \mathcal{L}^1(\partial D)$ и точка $z = x = (y_0',0,x_{2n})$ лежит на оси конуса, то*

$$\lim_{z \to y^0} \left[\int\limits_S (f(w) - f(y_0)) U(w - z) - \int\limits_{S \setminus B\left(y_0,\left|x_{2n}\right|\right)} (f(w) - f(y_0)) U(w - y_0) \right] = 0.$$

Теорема 2. *Если* $f \in \mathcal{L}^1(\partial D)$ *удовлетворяет условию Дини в точке* $z \in \partial D$*, то особый интеграл Бохнера — Мартинелли* $M_s[f](z)$ *существует и справедливы формулы Сохоцкого — Племеля*

$$\begin{aligned} M[f]^+(z) &= (1 - \tau(z))f(z) + M_s[v](z), \\ M[f]^-(z) &= -\tau(z)f(z) + M_s[f](z), \end{aligned}$$

где $M^+[f](z)$ *— граничное значение интеграла Бохнера — Мартинелли* $M[f]$ *изнутри области* D*, а* $M^-[f](z)$ *— граничное значение данного интеграла извне области.*

Теорема 3. Пусть $z_0 \in \Pi$ — точка Лебега функции $f \in \mathcal{L}^1(\partial D)$, тогда

$$\lim_{z^\pm \to z_0} (M^+[f](z^+) - M^-[f](z^-)) = f(z_0),$$

где точки $z^\pm$ *лежат на оси конуса в точке* z_0 *и*

$$z^+ \in D, \; z^- \in \mathbb{C}^n \setminus \bar{D}, \; \left|z^+\right| = \left|z^-\right|.$$

Для функций, удовлетворяющих условию Дини, данное утверждение есть прямое следствие формул Сохоцкого — Племеля.

Список литературы

Джумабаев, Д. Х. (2011). Формулы Сохоцкого — Племеля для интеграла Бохнера — Мартинелли в областях с коническими ребрами. *Журнал СФУ. Сер. математика и физика, 4*(1), 77—84.

Кытманов, А. М. (1992). *Интеграл Бохнера — Мартинелли и его применения*. Новосибирск: Наука, 1992.

Кытманов, А. М., & Мысливец, С. Г. (2007). Сингулярный интегральный оператор Бохнера — Мартинелли на гиперповерхностях с особыми точками/ *Вестник НГУ. Сер. математика, механика, информатика, 7*(2), 17—32.

Кытманов, А. М., & Мысливец, С. Г. (2010). *Интегральные представления и их приложения в многомерном комплексном анализе*, Красноярск: СФУ.

Шварц, Л. (1972). *Анализ*. Москва: Мир.

О МЕРЕ МНОЖЕСТВА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ, НА КОТОРОМ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ ПОЛИНОМЫ ПРИНИМАЮТ МАЛЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

О. В. Рыкова

Белорусский государственный аграрный технический университет, Минск, Беларусь

Oly8521@yandex.ru

Получено неравенство

$$\mu\left(M_2(\omega,Q)\right) < c_2 \cdot Q^{-\frac{\omega-1}{2}},$$

при $n = 2$ для множества $M_2(\omega,Q)$, которое усиливает известный результат Н. Будариной

$$\mu\left(M_n(\omega,Q)\right) < c_1 \cdot Q^{-\frac{\omega-n}{n}}.$$

Ключевые слова: целочисленный полином, степень полинома, дискриминант, мера Лебега, действительные и комплексные числа.

Пусть

$$P(t) = P_n(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + ... + a_1 t + a_0 \tag{1}$$

полином с целыми коэффициентами степени $\deg P(t) = n$ и высоты

$$H = H(P) = \max_{0 \le i \le n} \left|a_i\right|.$$

При классификации действительных и комплексных чисел важное значение имеет величина

$$\gamma_n(x) = \inf \gamma,$$

для которых неравенство

$$\left|P(x)\right| < H^{-\gamma} \tag{2}$$

имеет бесконечное число решений в полиномах (1). Нетрудно доказать (Касселс, 1961), что

$$\gamma_n(x) \le n \tag{3}$$

для всех $x \in \mathbb{R}$. Mahler (1932) предположил, что в (3) можно поставить знак равенства для почти всех (в смысле меры Лебега) действительных чисел x. Его гипотезу доказал В. Г. Спринджук. В работах Берник (1989), Бересневич (1999) этот результат был усилен и обобщен до полного аналога теоремы Хинчина о приближении действительных чисел рациональными.

Во всех перечисленных задачах важное значение имеют оценки сверху меры $M_n(\omega,Q)$ множества $x \in \mathbb{R}$, для которых неравенство

$$\left|P\left(x\right)\right| < Q^{-w}, \quad w > 0$$

выполняется в полиномах $P(x)$, $\deg P \le n$, $H(P) \le Q$. Известно неравенство

$$\mu\ M_n(w, Q) < c_1 Q^{-\frac{w-n}{n}}.$$

Это неравенство можно усилить.

Теорема. *Для множества* $M_2\ (\omega, Q)$ *справедливо неравенство*

$$\mu\Big(M_2(\omega, Q)\Big) < c_2 \cdot Q^{-\frac{\omega-1}{2}}.$$

Список литературы

Mahler, K. (1932). Über das Maß der Menge aller S-Zahlen. *Mathematische Annalen*, *106*(1), 131–139.

Бересневич, В. В. (1999). Точный порядок приближения действительных чисел алгебраическими. *Доклады Академии наук*, *366*(5), 583—586.

Берник, В. (1989). О точном порядке приближения нуля значениями целочисленных многочленов. *Acta Arithmetica*, *53*(1), 17—28.

Касселс, Дж. В. С. (1961). *Введение в теорию диофантовых приближений*. Москва: Изд-во иностранной литературы.

ПРО НАПІВГРУПУ НЕКОМПАКТНИХ ПІДГРУП ВІДНОСНО ОПЕРАЦІЇ ПЕРЕРІЗУ

О. М. Супрун

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

o.n.suprun@gmail.com

Отримано будову локально компактної абелевої групи, множина всіх відкритих некомпактних підгруп якої утворює напрівгрупу відносно операції перерізу. За допомогою теорії двоїстості описані локально компактні абелеві групи, множина всіх невідкритих компактних підгруп яких утворює напівгрупу відносно операції топологічного породження підгруп. Наведено описи будови локально компактної групи, в якій множина всіх некомпактних підгруп утворює напівгрупу відносно операції перерізу, та будови групи, що задовольняє двоїстій умові.

Ключові слова: топологічна група, компактна підгрупа, напівгрупа відносно операції, розширення підгрупи, група скінченної експоненти.

Плідним є вивчення будови топологічних локально компактних абелевих груп, підгрупи яких з заданими обмеженнями утворюють напівгрупу відносно операцій перерізу або топологічного породження підгруп. Початок вивченню цього питання поклав Ю. М. Мухін (1970), який дослідив будову локально компактних абелевих груп, для яких добуток довільних замкнених підгруп є замкненою підгрупою. У дискретних групах підгрупи скінченного індексу утворюють напівгрупу відносно операції перерізу. Постає питання: нехай G— локально компактна група (надалі просто топологічна група), $\left\{M_\alpha\right\}_{\alpha\in I}$ — множина всіх її замкнених підгруп таких, що фактор-простори G/M_α або фактор-групи G/M_α задовольняють деякій умові, причому множина $\left\{M_\alpha\right\}_{\alpha\in I}$ утворює напівгрупу відносно операції перерізу. Якою є будова такої топологічної групи? Оскільки в теорії абелевих топологічних двоїстою до операції перерізу замкнених підгруп H_1 і H_2 є операція топологічного породження для їхніхануляторів, то вивчаються напівтрупи замкнених підгруп відносно операції топологічного породження підгруп, яка зберігає ту чи іншу відповідну двоїсту умову.

Нехай G — топологічна група, $NK(G)$ — множина всіх її некомпактних підгруп, $ONK(G)$— множина всіх відкритих підгруп з $NK(G)$, $NNK(G)$— множина всіх невідкритих підгруп з $NK(G)$. Відповідні напівгрупи відносно операції перерізу $\cap$ позначатимемо так:

$$NK\left(G,\cap\right),\ ONK\left(G,\cap\right),\ NNK\left(G,\cap\right).$$

Теорема 1. *Для топологічної абелевої групи G множина $ONK(G)$ є напівгрупою $ONK\left(G,\cap\right)$ тоді і тільки тоді, коли G є групою одного з типів:*

1) $\mathbb{R}^n \neq 1$;

2) G *— розширення підгрупи* A *типу* $\mathbb{Q}_p$ *або* $\mathbb{C}_{p^\infty}$ *за допомогою компактної* H*;*

3) $G = H \times Q$*, де* H *— компактна група,* Q *— чиста група рангу* 1.

Зауваження. Умова, двоїста до умови $ONK(G,\cap)$: дві невідкриті компактні підгрупи породжують невідкриту компактну підгрупу. Тобто невідкриті компактні підгрупи утворюють напівгрупу відносно операції топологічного породження, яку позначатимемо $NOK(G,\vee)$ ($NOK(G)$ — множина всіх невідкритих компактних підгруп групи G).

Наслідок. Для топологічної абелевої групи G множина $NOK(G)$ утворює напівгрупу $NOK(G,\vee)$ тоді й тільки тоді, коли група G є групою одного з типів:

1) $\mathbb{R}^n \neq 1$;

2) G — розширення дискретної підгрупи D за допомогою $\mathbb{Z}_p$ або $\mathbb{Q}_p$;

3) $G = D \times W$, де D — дискретна підгрупа, W — компактна зв'язна група рангу 1.

Розгляньмо будову топологічної абелевої групи з умовою: переріз двох підгруп з $NK(G)$ знову належить $NK(G)$, тобто коли множина $NK(G)$ утворює напівгрупу $NK(G,\cap)$.

Лема. Нехай H — компактна періодична абелева група. Тоді H — група скінченної експоненти.

Теорема 2. *Для топологічної абелевої групи* G *множина* $NK(G)$ *утворює напівгрупу* $NK(G,\cap)$ *тоді й тільки тоді, коли група* G *є групою одного з типів:*

1) G *— розширення підгрупи* A *типу* $\mathbb{C}_{p^\infty}$ *або* $\mathbb{Q}_p$ *за допомогою нульвимірної компактної групи*;

2) $G = H \times Q$*, де* H *— компактна група скінченної експоненти,* Q *— чиста група рангу* 1.

Наслідок. Для топологічної абелевої групи G множина $N(G)$ утворює напівгрупу відносно операції топологічного породження підгруп $N(G,\vee)$ тоді й тільки тоді, коли G є групою одного з типів:

1) G — розширення дискретної періодичної групи за допомогою групи тину $\mathbb{Z}_p$ або $\mathbb{Q}_p$;

2) $G = D \times W$, де D — дискретна підгрупа скінченної експоненти, W — компактна зв'язна група рангу 1.

Список літератури

Мухин, Ю. Н. (1970). Топологические абелевы группы с дедекиндовой решеткой замкнутых подгрупп. *Математические заметки, 8*(4), 509—519.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОТКРЫТОЙ МОДЕЛИ В ФУНКЦИОНАЛЬНО РАСШИРЕННОМ ФИЗИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ (ФРФП)

В. А. Сущенко
Львов, Украина
kostantyn@meta.ua

Открытая модель проявляется в ФРФП при рассмотрении пространственно-временных преобразований на фоне альтернативных к специальной теории относительности (СТО) теорий (Сабиров, 1992). В данном изложении продолжено развитие работы (Сущенко, 2015).

При сопоставлении круговому движению прямолинейное движение луча продолжим рассмотрение состояний. Тогда в системах координат $\left(v_m t, x\right)$ и $\left(v_m t^1, x^1\right)$ для симметрического состояния I имеется два условия физической инвариантности:

$$v_m^2 t^2 + x^2 = v_m^2 t'^2 + x'^2 \text{ (1) — открытая модель;}$$

$$v_m^2 t^2 - x^2 = v_m^2 t'^2 - x'^2 \text{ (2) — закрытая модель.}$$

Для антисимметрической II — также два условия:

$$v_m^2 t^2 + x^2 = -\left(v_m^2 t'^2 + x'^2\right) \quad (3);$$

$$v_m^2 t^2 - x^2 = -\left(v_m^2 t'^2 - x'^2\right) \quad (4),$$

где v_m — максимальная скорость распространения физического взаимодействия в волнообразной среде (Умов, 1950), где она аналогична ω

Подставляя поочередно линейное преобразование координат:

$$\begin{aligned} v_m t' &= \alpha v_m t + \beta x \\ x' &= \gamma v_m t + \delta x \end{aligned} \quad (5)$$

в условия (1)—(4) находят по три определяющих соотношения между взаимозависимым коэффициентами $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Из (1):

$$v_m^2 t^2 + x^2 = \alpha^2 v_m^2 t^2 + 2\alpha\beta v_m t x + \beta^2 x^2 + \gamma^2 v_m^2 t^2 + 2\gamma\delta v_m t x + \delta^2 x^2$$

и далее перевода всех членов влево, группируя по переменным:

$$\left[v_m^2 t^2\right]\left[1 - \alpha^2 - \gamma^2\right] \longrightarrow \gamma^2 = 1 - \alpha^2 \quad (6.1),$$

$$\left[v_m t x\right]\left[-2\alpha\beta - 2\gamma\delta\right] \longrightarrow \alpha\beta = -\gamma\delta \quad (6.2),$$

$$\left[x^2\right]\left[1 - \beta^2 - \delta^2\right] \longrightarrow \beta^2 = 1 - \delta^2 \quad (6.3),$$

подставим (6.1), (6.3) в (6.2):

$$\alpha\sqrt{1 - \delta^2} = -\delta\sqrt{1 - \alpha^2} \quad (7)$$

при равенстве $\delta^2 = \alpha^2$, исходя из (7) у α и δ разные знаки. При v как скорости движения $\left(v_m t', x'\right)$ относительно $\left(v_m t, x\right)$, исходя из преобразований Галилея в относительном пространстве: $x = x' + vt'$ при начальном условии $x = 0$ для $0 \le v \le v_m$ имеем: $\dfrac{x'}{t'} = -v$, а из (5): $\dfrac{1}{v_m}\dfrac{x'}{t'} = \dfrac{\gamma}{\alpha}$ в итоге:

$$\gamma = -\frac{v}{v_m} \qquad (8),$$

при (8)⟶(6.2):

$$\beta = \frac{v}{v_m}\delta \qquad (9)$$

При начальном условии $t = 0$ исходя из запаздывания сигнала из-за конечной скорости его распространения в относительном пространстве:

$$t = t' + \frac{x'}{v} \quad \text{для } v_m \le v \le \infty$$

имеем $\dfrac{x'}{t'} = -v$, а из (5):

$$\frac{x'}{v_m t'} = \frac{\delta}{\beta} \to \beta = -\frac{v_m}{v}\delta, \qquad \left(\overline{8}\right)$$

$$\text{при } \left(8\right) \to \left(6.2\right) \to \gamma = \frac{v_m}{v}\alpha\,; \qquad \left(\overline{9}\right)$$

$$\text{при } \left(8\right) \to \left(6.1\right) \to \alpha = \frac{-1}{\sqrt{1 + \dfrac{v^2}{v_m^2}}}\,; \qquad (10)$$

$$\text{при } \left(9\right) \to \left(6.3\right) \to \delta = \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{v^2}{v_m^2}}}\,. \qquad (11)$$

Знак «+» в (11) выбран из преобразования Галилея в абсолютном пространстве: $x' = x - vt$ (опирается на (5)), знак «–» в (10) — из (7):

Далее

$$\left(10\right) \to \left(8\right): \quad \gamma = \frac{\dfrac{v}{v_m}}{\sqrt{1 + \dfrac{v^2}{v_m^2}}}\,; \left(11\right) \to \left(9\right): \quad \beta = \frac{\dfrac{v}{v_m}}{\sqrt{1 + \dfrac{v^2}{v_m^2}}}\,;$$

Подставим значения $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ в (5):

$$x' = \frac{x + vt}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{v_m^2}}}; \qquad t' = \frac{\frac{v}{v_m^2} x - t}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{v_m^2}}}. \tag{12}$$

Решая уравнение (12) относительно $x, t,$ получаем обратные преобразования:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{v_m^2}}}; \qquad t = \frac{\frac{v}{v_m^2} x' - t'}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{v_m^2}}}. \tag{13}$$

$$\text{При } \left(\overline{8}\right) \longrightarrow \left(6.3\right) \longrightarrow \delta = \frac{-1}{\sqrt{1 + \frac{v_m^2}{v^2}}}; \tag{$\overline{10}$}$$

$$\text{при } \left(\overline{9}\right) \longrightarrow \left(6.1\right) \longrightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v_m^2}{v^2}}}. \tag{$\overline{11}$}$$

Знак «+» в $\left(\overline{11}\right)$ из $t = t' + \frac{x'}{v}$, а знак «–» в $\left(\overline{10}\right)$ из (7).

Далее

$$\left(\overline{10}\right) \longrightarrow \left(\overline{8}\right):\ \beta = \frac{\frac{v_m}{v}}{\sqrt{1 + \frac{v_m^2}{v^2}}} \qquad \left(\overline{11}\right) \longrightarrow \left(\overline{9}\right):\ \ \gamma = \frac{\frac{v_m}{v}}{\sqrt{1 + \frac{v_m^2}{v^2}}}.$$

Подставим значения $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ в (5):

$$x' = \frac{-x + \frac{v_m^2}{v} t}{\sqrt{1 + \frac{v_m^2}{v^2}}}, \quad t' = \frac{\frac{1}{v} x + t}{\sqrt{1 + \frac{v_m^2}{v^2}}}; \tag{$\overline{12}$}$$

и обратные:

$$x = \frac{-x' + \frac{v_m^2}{v} t'}{\sqrt{1 + \frac{v_m^2}{v^2}}}, \quad t = \frac{\frac{1}{v} x' + t'}{\sqrt{1 + \frac{v_m^2}{v^2}}}. \tag{$\overline{13}$}$$

Запишем $(12),(\overline{12})$ одним преобразованием используя понятие малого параметра $\hat{\beta}$, которое равно:

$$\hat{\beta} = \begin{cases} \dfrac{v}{v_m} \textit{ при } 0 \le v \le v_m \textit{ с верхним знаком преобразования} \\ \dfrac{v_m}{v} \textit{ при } v_m \le v \le \infty \textit{ с нижним знаком преобразования} \end{cases}$$

$$\frac{\pm x + \hat{\beta} v_m t}{\sqrt{1+\hat{\beta}^2}},\ t' = \frac{\dfrac{\hat{\beta}}{v_m} x \mp t}{\sqrt{1+\hat{\beta}^2}} \qquad (14)$$

и соответственно из $(13),(\overline{13})$:

$$x = \frac{\pm x' + \hat{\beta} v_m t'}{\sqrt{1+\hat{\beta}^2}},\ t = \frac{\dfrac{\hat{\beta}}{v_m} x' \mp t'}{\sqrt{1+\hat{\beta}^2}} \qquad (15)$$

Преобразования (14), (15) определяют воздействие сингулярности на движение материальной точки при приближении и удалении от этой сингулярности, характеризуемой величиной v_m. Они принадлежат к открытой модели. Найдем их определители D. Проведем для этого согласование с (5). Для (12):

$$\left.\begin{aligned} v_m t' &= \alpha v_m t + \beta x \\ x' &= \gamma v_m t + \delta x \end{aligned}\right\} \text{ (5)}\rightarrow\text{(12): } v_m t' = \frac{-v_m t + \dfrac{v}{v_m} x}{\sqrt{1+\dfrac{v^2}{v_m^2}}};\ x' = \frac{\dfrac{v}{v_m} v_m t + x}{\sqrt{1+\dfrac{v^2}{v_m^2}}};$$

$$D_{12} = \begin{vmatrix} \dfrac{-1}{\sqrt{1+\dfrac{v^2}{v_m^2}}} & \dfrac{\dfrac{v}{v_m}}{\sqrt{1+\dfrac{v^2}{v_m^2}}} \\ \dfrac{\dfrac{v}{v_m}}{\sqrt{1+\dfrac{v^2}{v_m^2}}} & \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{v^2}{v_m^2}}} \end{vmatrix} = \frac{1}{1+\dfrac{v^2}{v_m^2}} - \frac{\dfrac{v^2}{v_m^2}}{1+\dfrac{v^2}{v_m^2}} = -1.$$

Аналогично $D_{\overline{12}} = -1$.

Из значений (-1) для полученных определителей имеем дополнения к полной группе Лоренца.

Аналогично для случая антисимметрии из условия физической инвариантности (3) получены пространственно-временные преобразования с определителями, равными $-i$, что в произведении дает (-1). Таким образом в ФРФП в рассмотрение включены дополнительно ситуации, ранее не рассматриваемы из-за наличия $v_m = c = \mathrm{const}$.

Список литературы

Сабиров, Р. Х. (1992). Построение аналога СТО для сверхвысоких скоростей. Деп. рукопись № 1074-892. Деп. ВИНИТИ. *Украинский физический журнал*, *37*(8).

Смирнов, В. И. (1953). *Курс высшей математики*. (Т. III, Ч. 1). Москва: ГИТТЛ.

Сущенко, В. А. (2015). К проблеме введения функционально-расширенного физического пространства (ФРФП). В Материалах XVI Межд. науч. конференции им. акад. М. Кравчука, (Т. 2., с. 182—183). Киев: НТУУ «КПІ».

Умов, Н. А. (1950). Единообразный вывод преобразований, совместных с принципом относительности. *Умов Н. А Избр. соч.* Москва: Гостехиздат (Впервые опубликована в 1910).

ДИОФАНТОВЫ КРИСТАЛЛЫ АНАТОЛИЯ ГАЛИЦЫНА

А. Ф. Турбин

Национальный педагогический университет имени М. П. Драгоманова, Киев, Украина

turbin@imath.ua

Рассмотрен новый класс полуправильных многогранников $DP_m(B,P,\Gamma)$, являющихся выпуклыми оболочками решений диофантова уравнения $x_1^2+x_2^2+x_3^2=m,\ x_k\in\mathbb{Z}$, для которых $B-P+\Gamma=0$.

Ключевые слова: диофантово уравнение, выпуклая оболочка решений, полуправильный многогранник.

На сфере

$$S_2\left(\sqrt{m}\right)=\left\{\vec{x}=\left(x_1,x_2,x_3\right)\in E^3:x_1^2+x_2^2+x_3^2=m\right\}$$

радиуса m рассмотрим точки с целочисленными координатами. Если такие точки есть (это зависит от m), то они являются вершинами вписанного в $S_2\left(\sqrt{m}\right)$ выпуклого многогранника.

Нахождение точек с целочисленными координатами на сфере $S_2\left(\sqrt{m}\right)$ сводится к решению диофантова уравнения

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=m,\ x_k\in\mathbb{Z}. \tag{1}$$

Пусть $q\left(3,m\right)$ – число решений уравнения (1). Производящая функция для $q\left(3,m\right)$

$$\sum_{m=0}^{\infty}t^m q\left(3,m\right)=\theta_3^3\left(t\right)=1+6q+12q^2+8q^3+....,$$

где

$$\theta_3\left(t\right)=\sum_{-\infty}^{\infty}q^{m^2}=1+2\sum_{m=1}^{\infty}q^{m^2}$$

— тэта-ряд Якоби, $q=e^{i\pi t}$ и $\overline{\lim}\,q\left(3,m\right)=\infty$.

Общих методов решений уравнения (1) нет. Остаются лишь интуиция и прямой перебор. Например, диофантово уравнение $x_1^2+x_2^2+x_3^2=145, x_k\in\mathbb{Z}$, имеет 96 решений:

$\left(\pm1,\pm12,0\right)+$перестановки (24 решения, диофантов многогранник — усечённый октаэдр Архимеда),

$\left(\pm3,\pm6,\pm10\right)+$перестановки (48 решений, диофантов многогранник — кристалл Е. С. Фёдорова),

$\left(\pm 8, \pm 9, 0\right) +$ перестановки (24 решения, диофантов многогранник — усечённый октаэдр Архимеда).

Обозначим через $DP_m\left(B, P, \Gamma\right)$ выпуклую оболочку решений уравнения (1).

Пусть $m = 14$. Диофантово уравнение

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 14, x_i \in \mathbb{Z} \tag{2}$$

имеет 48 решений:

$$(\pm 1, \pm 2, \pm 3) + \text{перестановки координат.}$$

Выпуклая оболочка решений уравнения (2) — известный в математической кристаллографии кристалл Е. С. Фёдорова $DP_{14}\left(48, 72, 26\right)$ (рис. 1).

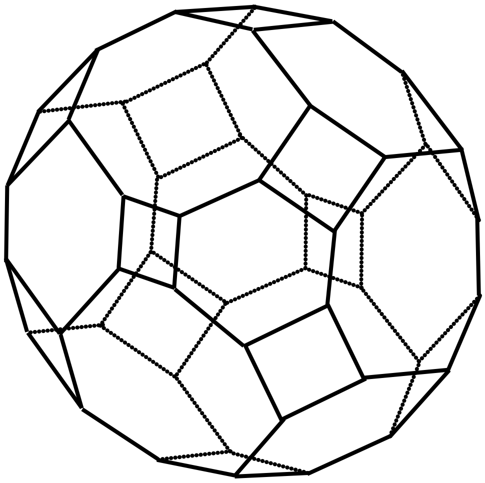


Рис. 1. Кристалл Е. С. Фёдорова $DP_{14}\left(48, 72, 26\right)$

Диофантовыми являются многогранники:

$DP_1\left(B, P, \Gamma\right)$ — октаэдр $(6, 12, 8)$,

$DP_2\left(B, P, \Gamma\right)$ — кубооктаэдр $(12, 24, 14)$,

$DP_3\left(B, P, \Gamma\right)$ — куб $(8, 12, 6)$,

$DP_5\left(B, P, \Gamma\right)$ — усечённый октаэдр $\left(24, 36, 14\right)$,

$DP_6\left(B, P, \Gamma\right)$ — ромбокубооктаэдр $\left(24, 48, 26\right)$,

$DP_{14}\left(B, P, \Gamma\right)$ — кристалл Е. С. Фёдорова) $\left(48, 72, 26\right)$.

Пусть $m = 9$. Диофантово уравнение

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9,\ x_i \in \mathbb{Z}, \tag{3}$$

имеет 30 решений:

$(\pm 3, 0, 0) +$ перестановки координат (6 решений);

$(\pm 1, \pm 2, \pm 2) +$ перестановки координат (24 решения).

Выпуклая оболочка решений уравнения (3) — диофантов кристалл А. С. Галицына $DGP_9\left(30, 84, 54\right)$ (рис. 2), для которого (вопреки знаменитой теореме Л. Эйлера о том, что для любого выпуклого многогранника $P\ \left(B, P, \Gamma\right)$ $B - P + \Gamma = 2$)

$$B - P + \Gamma = 30 - 84 + 54 = 0.$$

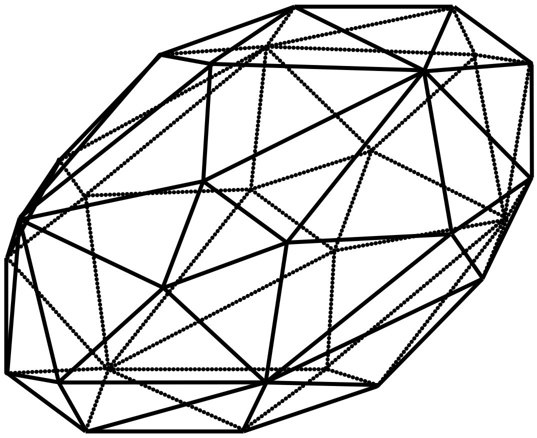


Рис. 2. Диофантов кристалл А. С. Галицына $DGP_9\left(30, 84, 54\right)$

Пусть $m = 25$. Диофантово уравнение

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 25,\ x_i \in \mathbb{Z} \tag{4}$$

имеет 30 решений:

$(\pm 5, 0, 0) +$ перестановки координат (6 решений);

$(\pm 3, \pm 4, 0) +$ перестановки координат (24 решения).

Выпуклая оболочка решений уравнения (4) — диофантов кристалл А. С. Галицына — Пифагора $DGP_{25}\left(30, 60, 30\right)$ (рис. 3), (Пифагор $\to 3^2 + 4^2 = 5^2$), для которого

$$B - P + \Gamma = 30 - 60 + 30 = 0.$$

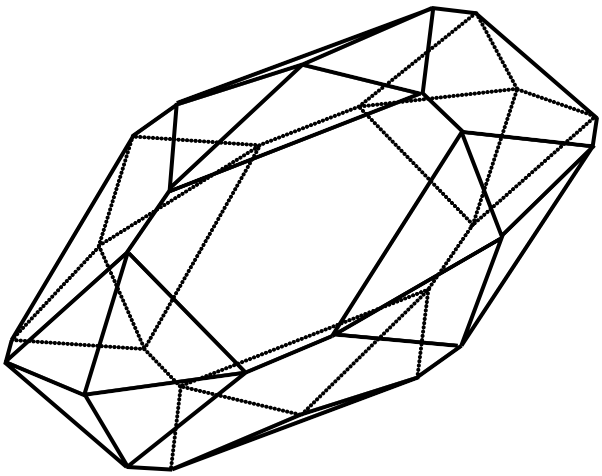


Рис. 3. Диофантов кристалл А. С. Галицына — Пифагора $DGP_{25}\left(30, 60, 30\right)$

Пусть $Q\left(\sqrt{\dfrac{5}{2}}\right)$ — простое алгебраическое расширение поля Q.

Диофантово уравнение

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 5,\ x_i \in Q\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right) \tag{5}$$

имеет 36 решений:

$(\pm 1, \pm 2, 0) +$ перестановки координат (24 решения);

$\left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}}, \pm\sqrt{\frac{5}{2}}, 0\right) +$ перестановки координат (12 решений).

Выпуклая оболочка решений уравнения (5) — диофантов кристалл А. С. Галицына $DGP_5\left(36, 84, 48\right)$ (рис. 4), для которого

$$В — Р + Г = 36 - 84 + 48 = 0.$$

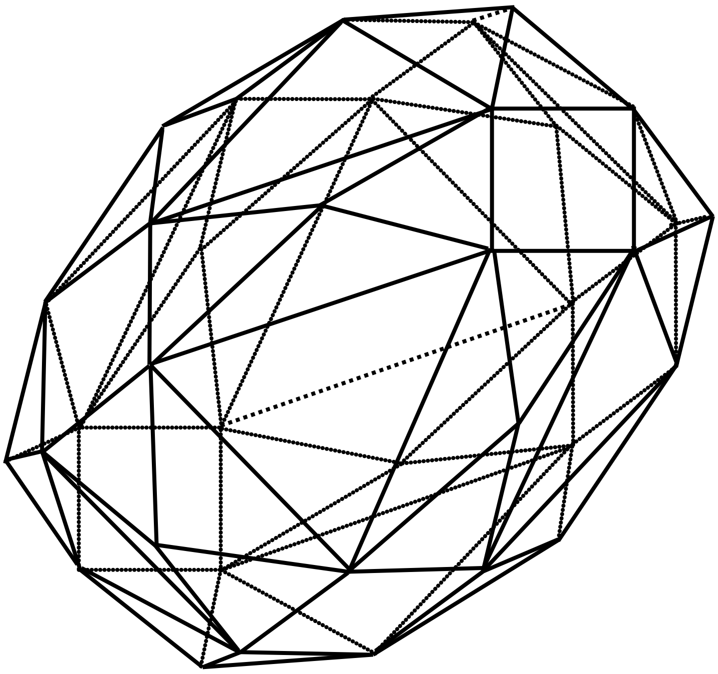


Рис. 4. Диофантов кристалл А. С. Галицына $DGP_5\left(36, 84, 48\right)$

Число диофантовых кристаллов А. С. Галицына не ограничено никем!

СТРУКТУРНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ $\mathcal{H}\left(\mathcal{SK}\right)_{k}$-ГРАФІВ

М. П. Хоменко, Т. М. Виврот

Київ, Україна

У роботі будуємо теорію графів певного підкласу одного класу k-класифікації всіх простих скінченних графів заданого порядку n запропонованої в 1972—73 рр. М. П. Хоменком сім'ї k-класифікацій, $k = 0(1)n$ графів порядку n з погляду неіснування чи існування 1-фактора в самому графі чи в певних його підграфах, а саме $\mathcal{H}\left(\mathcal{SK}\right)_{k}$-графів — максимально насичених ребрами $\left(\mathcal{SK}\right)_{k}$-графів. Знайдена структура графів цього класу дає можливість побудувати всі такі графи заданого порядку.

Ключові слова: граф, 1-фактор, k-класифікація графів, k-факторизуюче ребро, k-початок, 1-переміжний ланцюг.

Ідея k-класифікацій усіх простих скінченних графів порядку n, $k = 0(1)n$ при $k = 0$ започаткована авторами цієї роботи (Хоменко & Выврот, 1971). У побудованій теорії $\mathcal{H}\left(\mathcal{SK}\right)_{k}$-графів значне місце посідає дослідження структурних властивостей графів. Установлено критерій належності графа до класу $\mathcal{H}\left(\mathcal{SK}\right)_{k}$-графів. Дослідження проводимо створеним авторами цієї роботи загальним методом дослідження структурних властивостей графів різних класів кожної k-класифікації, $0 \le k \le n$, усіх простих скінченних графів порядку n, названим нами методом локалізованих переміжних ланцюгів.

Розглядаємо лише прості (без петель і кратних ребер) скінченні неорієнтовані графи G, $G = \left(G^0, G^1\right)$. Через $G \setminus \left(\left\{a_{l_t}\right\}_{t=1}^{k}\right)$ позначаємо граф, одержаний видаленням із заданого графа G k його вершин a_{l_t}, $t = 1(1)k$, різних, якщо $k > 1$, тобто k-ки, разом з інцидентними їм у графі G ребрами, а через $f_{[1]}(G)$ — 1-фактор графа G. k-ку $\left\{a_{l_t}\right\}_{t=1}^{k}$ графа G порядку n, $0 \le k \le n$, $n = \left|G^0\right|$ називаємо $\mathcal{S}$-k-ю чи $\mathcal{K}$-k-ю графа G в залежності від того, чи граф $G \setminus \left(\left\{a_{l_t}\right\}_{t=1}^{k}\right)$ є $\mathcal{S}_0$-графом (примітивним графом; графом без 1-фактора) чи $\mathcal{K}_0$-графом (непримітивним графом; графом, що містить 1-фактор) відповідно. Уважаємо, що G^0 є $\mathcal{K}$-n-ю графа G. Граф називаємо $\mathcal{S}_{k}$-графом чи $\mathcal{K}_{k}$-графом у залежності від того, чи кожна його k-ка є $\mathcal{S}$-k-ю чи $\mathcal{K}$-k-ю відповідно, $\left(\mathcal{SK}\right)_{k}$-графом, якщо він містить принаймні одну $\mathcal{S}$-k-ку та одну $\mathcal{K}$-k-ку. Максимальні та мінімальні елементи впорядкованої за включенням $\subset$ множини $\mathcal{X}_{k}$-графів заданого порядку називаємо $\mathcal{HX}_{k}$- та $h\mathcal{X}_{k}$-графами відповідно (Хоменко & Виврот, 1996, 2000, 2008, 2014).

У класі простих скінченних неорієнтованих $(\mathcal{SK})_{k}$-графів розглядаємо підклас $(\mathcal{SK})_{k}$ 1-графів G, $G=(G^0,G^1)$, кожен з яких містить принаймні одну таку пару несуміжних вершин a_{l_1}, a_{l_2}, що при додаванні до графа G ребра $(a_{l_1}a_{l_2})$ з доповняльного до нього графа $\hat{G}$ отримаємо уже не $(\mathcal{SK})_{k}$-граф $G_{k,\neg 2}$, $G_{k,\neg 2}=G+(a_{l_1}a_{l_2})$, а граф з усіма $\mathcal{K}$-k-ми, тобто $\mathcal{K}_{k}$-граф. Властивості цих графів використовуємо для дослідження властивостей та структури $\mathcal{H}(\mathcal{SK})_{k}$-графів.

Ребро $(a_{l_1}a_{l_2})$, $(a_{l_1}a_{l_2})\in\hat{G}^1$, називаємо *$k$-факторизуючим ребром* $(\mathcal{SK})_{k}$ 1-графа G, а множину $\mathcal{B}^*_{k,2}$, $\mathcal{B}^*_{k,2}=\{a_{l_t}\}_{t=1}^{2}$, вершин $(\mathcal{SK})_{k}$ 1-графа G — його k-початком. Нехай $\{a_{l_\tau}\}_{\tau=1}^{k}$ — довільна $\mathcal{S}$-k-ка $(\mathcal{SK})_{k}$ 1-графа G. Множину $\{a_{l_\tau}\}_{\tau=1}^{k}$ вершин $(\mathcal{SK})_{k}$ 1-графа G позначаємо через $\mathcal{A}^*_{k,2}$, 1-фактор $\mathbf{f}_{[1]}\left(G\setminus\left(\mathcal{A}^*_{k,2}+\mathcal{B}^*_{k,2}\right)\right)$ — через $f_{k,2}$, степінь вершини a_{l_τ} у графі G — через $\rho(a_{l_\tau},G)$, а граф на підмножині M вершин графа G, $M\subset G^0$, — через $G[M]$. При цьому

$$\mathbf{f}^1_{[1]}\left(G_{k,\neg 2}\setminus\left(\mathcal{A}^*_{k,2}\right)\right)=f^1_{k,2}+(a_{l_1}a_{l_2}).$$

Порядок n $(\mathcal{SK})_{k}$ 1-графа G задовольняє умовам: $n-k\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)$ і $n\geq k+2$, $k\geq 1$. $(\mathcal{SK})_{k}$ 1-граф містить незалежну множину вершин потужності ≥ 2 і $\mathcal{A}^*_{k,2}\cap\mathcal{B}^*_{k,2}=\varnothing$. $\mathcal{H}(\mathcal{SK})_{k}$-граф G порядку n, $n-k\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)$, $n\geq 3$ є $(\mathcal{SK})_{k}$ 1-графом.

Твердження 1. *Кожна k-ка $(\mathcal{SK})_{k}$ 1-графа G з k-початком $\mathcal{B}^*_{k,2}$, що містить вершину a_{l_t}, $a_{l_t}\in\mathcal{B}^*_{k,2}$, $t=1,2$ є $\mathcal{K}$-k-ю графа G.*

Звідси випливає, що $(\mathcal{SK})_{k}$ 1-граф порядку n, $n\geq k+2$, $k\geq 1$ містить принаймні дві $\mathcal{K}$-k-ки; якщо G — $(\mathcal{SK})_{k}$ 1-граф з k-початком $\mathcal{B}^*_{k,2}$ і $\mathcal{S}$-k-ю $\mathcal{A}^*_{k,2}$, то лише одна k-ка вершин графа $G\left[\mathcal{A}^*_{k,2}+\mathcal{B}^*_{k,2}\right]$ є його $\mathcal{S}$-k-ю.

Наслідок. Якщо G — $\mathcal{H}(\mathcal{SK})_{k}$-граф порядку n, $n\geq 3$, $a_j\in G^0$ і $\rho(a_j,G)\leq n-2$, то k-ка графа G, що містить вершину a_j, є його $\mathcal{K}$-k-ю.

Твердження 2. *Якщо G — $\mathcal{H}(\mathcal{SK})_{k}$-граф порядку n, $n\geq 3$ і $a_{l_\tau}\in\mathcal{A}^*_{k,2}$, $\tau\in\mathbb{N}_{k}$, то $\rho(a_{l_\tau},G)=n-1$.*

Наслідок. $\mathcal{H}\left(\mathcal{SK}\right)_{k}$-граф зв'язний.

З твердження 1 випливає справедливість наступного твердження.

Твердження 3. *У* $\left(\mathcal{SK}\right)_{k}$ *1-графі* G *з* k*-початком* $\mathcal{B}^{*}_{k,2}$ *і* $\mathcal{S}$*-*k*-ю* $\mathcal{A}^{*}_{k,2}$ *існують напівлокалізовані 1-переміжні відносно 1-фактора* $f_{k,2}$ *ланцюги* $c'_{l_t,l_{\tau_t}}=c'\left(a_{l_t},a_{l_{\tau_t}};G,f_{k,2}\right)$, $\left|c'^{1}_{l_t,l_{\tau_t}}\right|\geq 1$, $a_{l_t}\in\mathcal{B}^{*}_{k,2}$, $a_{l_{\tau_t}}\in\mathcal{A}^{*}_{k,2}$, $t=1,2$ *непарної довжини.*

Лема 1. В $\left(\mathcal{SK}\right)_{k}$ 1-графі G з k-початком $\mathcal{B}^{*}_{k,2}$ не існує локалізованого 1-переміжного відносно 1-фактора $f_{k,2}$ ланцюга $c'_{l_1,l_2}=c'\left(a_{l_1},a_{l_2};G,f_{k,2}\right)$, $\mathcal{B}^{*}_{k,2}=\left\{a_{l_t}\right\}_{t=1}^{2}$.

Звідси, як наслідки, випливають наступні два твердження.

Твердження 4. *Якщо в* $\left(\mathcal{SK}\right)_{k}$ *1-графі* G *з* k*-початком* $\mathcal{B}^{*}_{k,2}$ *існують мимобіжні напівлокалізовані 1-переміжні відносно 1-фактора* $f_{k,2}$ *ланцюги* $c'_{l_t,l_{\zeta_t}}=c'\left(a_{l_t},a_{l_{\zeta_t}};G,f_{k,2}\right)$, $\left|c'^{1}_{l_t,l_{\zeta_t}}\right|\geq 0$, $a_{l_t}\in\mathcal{B}^{*}_{k,2}$, $t=1,2$ *парної довжини, то* $\left(a_{l_{\zeta_1}},a_{l_{\zeta_2}}\right)\in\hat{G}^{1}$.

Твердження 5. *Якщо в* $\left(\mathcal{SK}\right)_{k}$ *1-графі* G *порядку* n, $n\geq k+4$ *з* k*-початком* $\mathcal{B}^{*}_{k,2}$ *існує напівлокалізований 1-переміжний відносно 1-фактора* $f_{k,2}$ *ланцюг* $c'_{l_\theta,l_{\zeta_\theta}}=c'\left(a_{l_\theta},a_{l_{\zeta_\theta}};G,f_{k,2}\right)$, $\left|c'^{1}_{l_\theta,l_{\zeta_\theta}}\right|\geq 0$, $a_{l_\theta}\in\mathcal{B}^{*}_{k,2}$ *парної довжини, то* $\rho\left(a_{l_{\zeta_\theta}},G\right)\leq n-2$.

З цього твердження і твердження 1 випливає справедливість наступного твердження.

Твердження 6. *Якщо в* $\mathcal{H}\left(\mathcal{SK}\right)_{k}$*-графі* G *порядку* n, $n\geq k+4$ *з* k*-початком* $\mathcal{B}^{*}_{k,2}$ *існує напівлокалізований 1-переміжний відносно 1-фактора* $f_{k,2}$ *ланцюг* $c'_{l_\theta,l_{\zeta_\theta}}=c'\left(a_{l_\theta},a_{l_{\zeta_\theta}};G,f_{k,2}\right)$, $\left|c'^{1}_{l_\theta,l_{\zeta_\theta}}\right|\geq 0$, $a_{l_\theta}\in\mathcal{B}^{*}_{k,2}$ *парної довжини, то* k*-тка графа* G*, що містить вершину* $a_{l_{\zeta_\theta}}$*, є його* $\mathcal{K}$*-*k*-ю.*

Лема 2. Якщо $\left\{a_{l_t}\right\}_{t=1}^{2}$ — k-початок $\mathcal{B}^{*}_{k,2}$ $\left(\mathcal{SK}\right)_{k}$ 1-графа G, то $\left\{a_{l_{\zeta_t}}\right\}_{t=1}^{2}$, $\left(a_{l_{\zeta_1}}a_{l_{\zeta_2}}\right)\in\hat{G}^{1}$ також буде його k-початком $\mathcal{B}'^{*}_{k,2}$ тоді й лише тоді, коли у графі G існують мимобіжні напівлокалізовані 1-переміжні відносно 1-фактора $f_{k,2}$ ланцюги $c'_{l_t,l_{\zeta_{\tau_t}}}=c'\left(a_{l_t},a_{l_{\zeta_{\tau_t}}};G,f_{k,2}\right)$, $\left|c'^{1}_{l_t,l_{\zeta_{\tau_t}}}\right|\geq 0$, $t=1,2$ парної довжини.

З викладеного вище та твердження 3 випливає справедливість наступного твердження.

Твердження 7. *Вершина* a_{l_i} $\left(\mathcal{SK}\right)_{\mathcal{k}}$ *1-графа G з* $\mathcal{k}$ *-початком* $\mathcal{B}^*_{\mathcal{k},2}$ *не належить до жодної його* $\mathcal{K}$ *-* $\mathcal{k}$ *-ки тоді й лише тоді, коли вершина* a_{l_i} *знаходиться на довільному напівлокалізованому 1-переміжному відносно 1-фактора* $f_{\mathcal{k},2}$ *ланцюгу* $c'_{l_\theta,l_i} = c'\left(a_{l_\theta}, a_{l_i}; G, f_{\mathcal{k},2}\right)$, $a_{l_\theta} \in \mathcal{B}^*_{\mathcal{k},2}$ *непарної довжини.*

Лема 3. Якщо G — $\mathcal{H}\left(\mathcal{SK}\right)_{\mathcal{k}}$-граф порядку n, $n \geq \mathcal{k}+4$ з $\mathcal{k}$ -початком $\mathcal{B}^*_{\mathcal{k},2}$ і $a_{l_i} \in G^0$, то $\rho\left(a_{l_i}, G\right) = n-1$ тоді і лише тоді, коли вершина a_{l_i} знаходиться на непарній віддалі на довільному напівлокалізованому 1-переміжному відносно 1-фактора $f_{\mathcal{k},2}$ ланцюгу $c'_{l_\tau,l_i} = c'\left(a_{l_\tau}, a_{l_i}; G, f_{\mathcal{k},2}\right)$, $a_{l_\tau} \in \mathcal{B}^*_{\mathcal{k},2}$.

Відносно множин $\mathcal{A}^{**}_{\mathcal{k},2}$, $\mathcal{A}_{\mathcal{k},2}$, $\mathcal{B}^{**}_{\mathcal{k},2}$, $\mathcal{B}_{\mathcal{k},2}$ та їх властивостей див. роботи Хоменка та Виврот (2008, 2014).

Лема 4. Якщо в $\mathcal{H}\left(\mathcal{SK}\right)_{\mathcal{k}}$-графі G існують напівлокалізовані 1-переміжні відносно 1-фактора $f_{\mathcal{k},2}$ ланцюги $c'_{l_{\tau'},l_p} = c'\left(a_{l_{\tau'}}, a_{l_p}; G, f_{\mathcal{k},2}\right)$ і $c'_{l_{\tau''},l_p} = c'\left(a_{l_{\tau''}}, a_{l_p}; G, f_{\mathcal{k},2}\right)$, $a_{l_{\tau'}}, a_{l_{\tau''}} \in \mathcal{B}^*_{\mathcal{k},2}$, на яких вершина a_{l_p} графа G знаходиться на непарній і на парній віддалі від $\mathcal{B}^*_{\mathcal{k},2}$, то у графі G існує й суміжна з вершиною a_{l_p} відповідна їй вершина a_{l_λ}, $a_{l_\lambda} \in \mathcal{B}_{\mathcal{k},2}$, $a_{l_p} \sim a_{l_\lambda}$, і якщо $a_{l_{p'}} \sim a_{l_{\lambda'}}$, $a_{l_{p''}} \sim a_{l_{\lambda''}}$, то ребро $\left(a_{l_{p'}} a_{l_{p''}}\right)$ або $\in G^1$, або $\in \hat{G}^1$ у залежності від того, чи $l_{\lambda''} = l_{\lambda'}$, чи $l_{\lambda''} \neq l_{\lambda'}$.

Теорема. *Граф порядку* n, $n \geq \mathcal{k}+2$, $\mathcal{k} \geq 1$ *є* $\mathcal{H}\left(\mathcal{SK}\right)_{\mathcal{k}}$*-графом тоді йлише тоді, коли він є* $\mathcal{N}$ *-графом* $\mathcal{N}_{n,\mathrm{k},2-\mathcal{k}}\left(\left\{n_r\right\}_{r=1}^{\mathrm{k}-\mathcal{k}+2}\right)$, $n_r \equiv 1 \pmod 2$, $r = 1(1)\left(\mathrm{k}-\mathcal{k}+2\right)$, $1 \leq \mathcal{k} \leq \mathrm{k} \leq \left(n+\mathcal{k}-2\right) \backslash 2$, $n-\mathcal{k} \equiv 0 \pmod 2$.

Теорема дає можливість побудувати всі $\mathcal{H}\left(\mathcal{SK}\right)_{\mathcal{k}}$-графи порядку n, $n \geq \mathcal{k}+2$, $\mathcal{k} \geq 1$.

Список літератури

Хоменко Н. П., & Вывротт Т. М. (1971). Структура примитивных графов. В Н. П. Хоменко (Отв. ред.), *Топологические аспекты теории графов* (с. 64—82). Киев: Ин-т математики АН УССР.

Хоменко, М. П., & Вивротт Т. М. (1996, 2000, 2008, 2014). У *Матеріалах Міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука. П'ятої* (с. 464); *Восьмої* (с. 382—384); *Дванадцятої* (с. 844); *П'ятнадцятої* (с. 193—194). Київ: НТУУ «КПІ».

УЗАГАЛЬНЕННЯ ПОНЯТТЯ ІНДЕКСУ ДЛЯ ПІДГРУП ВІЛЬНИХ ГРУП

С. Й. Цешковський

Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

tsesh@ukr.net

У роботі запроваджено поняття квазііндексу підгрупи вільної групи, З'ясовано, що квазііндекс завжди збігається із класичним, якщо останній скінчений, обґрунтовано ряд властивостей квазііндексу, аналогічних властивостям класичного індексу.

Нехай F — вільна група з базисом X. Для елемента $x \in X$ через $\left|x\right|$ будемо позначати довжину зведеного слова, що представляє елемент x. Якщо $A \subset F$ – деяка підгрупа, а $S \subset F$ — довільна підмножина, то на S можна розглянути відношення (правої) суміжності, покладаючи за означенням

$$s_1 \sim s_2 \Leftrightarrow s_1 s_2^{-1} \in A \,\forall s_1, s_2 \in S.$$

Множину всіх класів суміжності позначимо $S \,/\, A$.

Означення 1 . Число $\mathrm{card}\left(S \,/\, A\right)$ назвімо *вимірністю* множини S над A і позначимо $\dim_A S$.

З кожною підгрупою $A \subset F$ пов'язуємо множину $L\left(A, F\right)$ у наступний спосіб: елемент $x \in L\left(A, F\right)$ тоді й тільки тоді, коли знайдеться такий $y \in F$, що $x, y \in A$ і $\left|xy\right| = \left|x\right| + \left|y\right|$.

Очевидно, що $A \subset L\left(A, F\right)$.

Означення 2. Число $\dim_A L\left(A, F\right)$ назвімо *квазііндексом* A в F і позначимо $\left\langle F : A \right\rangle$.

Мають місце наступні

Лема 1. Якщо $A \subset F$ — підгрупа, вільної підгрупи F і $\left|F : A\right| < \infty$ ($\left|F : A\right|$ — індекс у класичному сенсі), то $\left\langle F : A \right\rangle = \left|F : A\right|$.

Лема 2. Якщо $\left\langle F : A \right\rangle = 1$, то в A існує такий базис $U \subset A$, що $U \subset X$, де X — базис в F. В окремому випадку A — вільний множник групи F.

Якщо F, A, G — вільні групи і $A \subset F$ — підгрупа групи F, то з пари $\left(F; A\right)$ можна утворити дві пари $\left(F * G; A\right)$ та $\left(F * G; A * G\right)$ ($F * G$ — вільний добуток).

З отриманих вище **леми 1** та **леми 2** та побудованих пар вільних добутків випливає наступна

Теорема. $\left\langle F * G : A \right\rangle = \left\langle F : A \right\rangle$; $\left\langle F * G : A * G \right\rangle = \left\langle F : A \right\rangle$.

Список літератури

Ленг, С. (1965). *Алгебра*. Москва: Наука.

ПРОБЛЕМА МОМЕНТІВ ТА РОЗДІЛЕНІ РІЗНИЦІ

М. М. Чип
Національний університет «Львівська політехніка», Львів, Україна
bogdan_markovych@yahoo.com

Форми вираження класичної проблеми моментів та її узагальнень зображають задані комплексні числа в інтегральному вигляді. Способи узагальнення класичної проблеми моментів створюють можливість вивчення нових властивостей зображуваних комплексних чисел та їхніх твірних функцій.

Одне з узагальнень класичної проблеми моментів запроваджено в статті Дзядик (1981).

Задано послідовність $\{s_n\}_0^\infty$ комплексних чисел. Зобразити її члени у вигляді

$$s_{k+l} = \int_\Gamma a_k(\tau) b_l(\tau) d\mu(\tau)$$

на відшукуваній множині Γ для міри $d\mu(\tau)$ з відшукуваними послідовностями $\{a_k(\tau)\}_0^\infty$ та $\{b_l(\tau)\}_0^\infty$ комплексних функцій з простору $L_2(\Gamma; d\mu)$.

Якщо множина Γ утворена відрізком дійсної осі або дійсною додатною піввіссю чи всією дійсною віссю для відповідної міри, а підінтегральні функції є степеневими, то сформульована узагальнена проблема моментів перетворюється у класичну проблему моментів.

Нехай множина Γ та міра $d\mu(\tau)$ задані. Тоді послідовність $\{a_k(\tau)\}_0^\infty$ утворює ортогональну систему функцій на множині Γ за мірою $d\mu(\tau)$, причому

$$\int_\Gamma [a_k(\tau)]^2 d\mu(\tau) = h_k;$$

функції послідовності $\{b_l(\tau)\}_0^\infty$ зображаються у вигляді розвинень у ряди за цією ортогональною системою, тобто у вигляді

$$b_l(\tau) = \sum_{k=0}^\infty \frac{s_{k+l}}{h_k} a_k(\tau).$$

Запроваджена узагальнена проблема моментів виявилась застосованою для встановлення інтегральних зображень твірних функцій послідовностей узагальнених моментів (Чип, 2003). Установлені інтегральні зображення здійснюють аналітичні продовження твірних функцій з областей збіжності заданих рядів на області збіжності отриманих інтегралів.

Розділені різниці твірних функцій послідовностей узагальнених моментів зображаються у вигляді інтеграла від добутку твірних функцій послідовностей розв'язків узагальненої проблеми моментів.

Теорема.1 *Нехай*

$$f_m^{(n)}(z) = f_m^{(n)}(0) + \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\nu+n+1)!}{(\nu+1)!} s_{\nu+n,m} z^{\nu+1}, \quad |z| < r_m;$$

коефіцієнти ряду зображаються у вигляді

$$\frac{(k+l+n+1)!}{(k+l+1)!} s_{k+l+n,m} = \int_{\Gamma} a_{k,m,n}(\tau) b_{l,m,n}(\tau) d\mu_{m,n}(\tau)$$

на множині Γ для мір $d\mu_{m,n}(\tau)$ при $(m;n) = 0,1,2,\ldots$ з послідовностями $\{a_{k,m,n}(\tau)\}_0^{\infty}$ та $\{b_{l,m,n}(\tau)\}_0^{\infty}$ з простору $L_2(\Gamma; d\mu_{m,n})$.

Покладімо

$$A_{m,n}(z;\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,m,n}(\tau) z^k, \quad |z| < p_{m,n},$$

$$B_{m,n}(\zeta;\tau) = \sum_{l=0}^{\infty} b_{l,m,n}(\tau) \zeta^l, \quad |\zeta| < q_{m,n},$$

уважаючи обидва ряди рівномірно збіжними на множині Γ *для кожних значень із кругів збіжності.*

Справджується інтегральне зображення

$$\frac{f_m^{(n)}(z) - f_m^{(n)}(\zeta)}{z-\zeta} = \int_{\Gamma} A_{m,n}(z;\tau) B_{m,n}(\zeta;\tau) d\mu_{m,n}(\tau),$$

$$|z| < \sigma_{m,n}, \quad |\zeta| < \sigma_{m,n}, \quad \zeta \neq z,$$

$$\sigma_{m,n} = \min(r_m; p_{m,n}; q_{m,n}).$$

Наслідок. 2Нехай $\zeta \to z$. Тоді

$$f_m^{(n+1)}(z) = \int_{\Gamma} A_{m,n}(z;\tau) B_{m,n}(z;\tau) d\mu_{m,n}(\tau), \quad |z| < \sigma_{m,n}.$$

Якщо області збіжності інтегралів перетинають круги збіжності рядів, то встановлені інтегральні зображення аналітично продовжують розділені різниці чи похідні із кругів збіжності рядів на області збіжності інтегралів.

Список літератури

Дзядик, В. К. (1981). Про узагальнення проблеми моментів. *Доповіді АН УРСР. Серія А*, (6), 8—12.

Чип, М. М. (2003). Метод моментів зображення функції рядом та інтегралом. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*, *46*(4), 65—72.

ЗМІСТ

I. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування

Hubal H. M. *Theorem on convergence of the series of the solution to the Cauchy problem for the BBGKY hierarchy of equations of many-kind particle systems in the Banach space* $E_{\xi,\,\beta}$ 12

Morawiak M. *Liniowe rozszerzenia układów dynamicznych* 15

Ovcharenko O. V. *Some properties of the r-hypergeometric function* 18

Smetankina N. V. *Modeling of non-stationary vibrations of complex-shape laminated shells under impact loading* 21

Біленко В. І., Божонок К. В., Дзядик С. Ю. *Кусково-поліноміальні наближення розв'язків задач у неоднорідних середовищах* 25

Вережак Г. П. Властивості розв'язків нелокальної багатоточкової за часом задачі для одного класу еволюційних псевдодиференціальних рівнянь 29

Верьовкіна Г. В. *Дослідження періодичних розв'язків одного класу зліченних систем різницевих рівнянь* 34

Вірченко Н. О. *Узагальнений інтеграл Пуассона* 38

Гентош О. Є., Прикарпатський Я. А. *Лі-алгебраїчна структура інтегровних «небесних» суперпотоків* 39

Горбачук В. М. *Про наближення розв'язків задачі Коші для абстрактного параболічного рівняння в банаховому просторі* 43

Городецький В. В., Широковських А. О. *Нелокальна багатоточкова за часом задача для еволюційних псевдодиференціальних рівнянь зі змінними символами* 48

Дронь В. С., Івасишен С. Д. *Коректна розв'язність задачі Коші для вироджених* $\overrightarrow{2b}$*-параболічних рівнянь типу Колмогорова* 53

Зеленський А. Г. *Про обчислення одного невласного інтеграла з параметром* 58

Івасишен С. Д., Label Мединський І. П. *Фундаментальні розв'язки задачі Коші для ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова із гладкими коефіцієнтами* 60

Івасишен С. Д., Пасічник Г. С. *Знаходження, властивості та деякі застосування фундаментального розв'язку задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь* 64

Калайда О. Ф. *Про деякі класи інтегровних у квадратурах нормальних диференціальних рівнянь* 67

Калайда О. Ф. *Про клас варіаційних задач типу задачі про брахістохрону та типу задачі Дідони* 69

Калайда О. Ф. *Про неповні рівняння Ейлера — Пуассона* 72

Коваленко В. Ф. *Признаки m-аккретивной замыкаемости линейного эллиптического оператора второго порядка* 75

Колун Н. П. *Дослідження правильно змінних розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку із правильно та швидко змінними нелінійностями* 79

Комарницкий А. Л., Колмакова Л. Н. *Абстрактная задача Римана с произвольным оператором, допускающим факторизацию* 82

Коропов О. В. *Диференціальні рівняння радіаційно-індукованої сегрегації в п'ятикомпонентних концентрованих металевих стопах* 86

Крутій Ю. С. *Узагальнене відокремлення змінних у диференціальних рівняннях вимушених коливань* 91

Крюков М. М. , Ляшко О. В., Шутовський О. М., Андрейцев А. Ю. *Застосування B-сплайнів до розв'язання задачі про деформацію неколових циліндричних оболонок зі скісними контурами* 95

Кульгава К. И. *Колеблемость и не колеблемость решений дифференциальных уравнений высших порядков* 99

Курбыко И. Ф., Левизов С. В. *О решении уравнений с псевдодифференциальными операторами в пространстве функций на гильбертовом пространстве* 101

Літовченко В. А., Унгурян Г. М. *Про задачу Коші для параболічних систем типу Шилова з коефіцієнтами обмеженої гладкості* 105

Матійчук М. І., Лучко В. М. *Про задачу Коші для параболічного псевдодиференціального рівняння із дробовою похідною* 110

Махней О. В. *Крайова задача для сингулярного рівняння теплопровідності* 112

Мегралиев Я. Т., Ализаде Ф. Х. *Нелинейная обратная краевая задача для одного уравнения Буссинеска четвёртого порядка с нелокальными условиями в прямоугольнике* 115

Ногін М. В. *Обчислення компонент сили для тонкого крила у стаціонарному режимі* 118

Онуфрієнко В. М., Слюсарова Т. І., Онуфрієнко Л. М. *Метод диферінтегрування граничних умов фрактального типу в задачах дифракції* 120

Ординська З. П. *Про експоненціальну дихотомію систем диференціальних рівнянь* 124

Резуненко В. А. *Рассеяние поля вертикального электрического диполя спирально проводящей сферой с нагрузкой* 126

Савельєва К. В., Дашко О. Г., Симчук Я. В. *Взаємодія пружних плоских хвиль у нанокомпозитних матеріалах. Дослідження методом повільно змінних амплітуд* 130

Сєров М. І., Ічанська Н. В. *Задача групової класифікації конформно інваріантних нелінійних багатовимірних рівнянь* 132

Сєров М. І., Омелян О. М. *Нелокальна редукція системи рівнянь конвекції-дифузії* .136

Трасковецька Л. М., Стопень Г. Я. *Крайова задача для сепаратної системи з диференціальних рівнянь Ейлера й Конторовича — Лєбєдєва другого порядку* 141

Федоренко Ю. В., Федоренко В. В. *Типи циклів одного класу одновимірних динамічних систем* 143

Хома І. Ю., Дашко О. Г., Прощенко Т. М. *Про третю крайову задачу деформування трансверсально-ізотропного шару з еліптичним отвором при чистому зсуві на нескінченності* 147

Чепок О. О. *Дослідження швидкозмінних розв'язків двочленних диференціальних рівнянь з нелінійностями різних типів* 151

Шпачук В. П., Чупрынин А. А., Супрун Т. А. *Моделирование динамического взаимодействия на четвертой фазе прохождения вагоном стыковой неровности* .154

II. Алгебра. Геометрія. Математичний аналіз

Desiateryk O. O. *Variants of rectangular bands with an identity* 157

Goy T. P. *Some Tribonacci identities using Toeplitz–Hessenberg determinants* 159

Kuzmenko T. *On equivalence of different definitions of G-monogenic mappings* 162

Voloshyna V. *About functions determined as transformations from W^2 to Q-representation* 166

Безкрила С. І., Нестеренко О. Н., Чайковський А. В. *Про одну нерівність для модулів неперервності дробового порядку, породжених півгрупою операторів*..168

Березовский В. Е., Микеш Й., Пешка П. *Геодезические отображения пространств аффинной связности на симметрические и Риччи симметрические пространства* 170

Білоцький М. М. *Збіжність за відрізками та теореми тауберового типу для ітерацій матричних методів підсумовування рядів* 173

Богданский Ю. В., Моравецкая Е. В. *Поверхностные меры на банаховых многообразиях с равномерной структурой* 176

Веремій М. А., Задерей П. В., Гаєвський М. В. *Мультиплікатори у просторах Харді та в дійсних просторах Харді* 181

Гаврилів О. С. *Про n-лінійне відображення в гільбертовому просторі* 184

Горленко С. В. *Критерій диференційовності функцій багатьох змінних на топологічно масивних множинах* 186

Дирів М. М., Качановський М. О. *Про стохастичне диференціювання в аналізі білого шуму Леві* 188

Дышлис А. А., Покась С. М., Прохода А. С. *Многообразия Зейферта как геометрические модели квазикристаллов с диэдральной и икосаэдральной симметриями* 191

Задерей Н. М., Задерей П. В., Бовсуновська В. В. *Про асимптотику інтеграла від модуля функції, заданої рядом Фур'є* 193

Зеленський О. В., Дармосюк В. М., Семенів О. Г. *Звичайні вагові функції допустимих сагайдаків* 195

Калайда О. Ф. *Побудова правильних раціональних колокант функцій у явному вигляді* 199

Калайда О. Ф. *Побудова явних раціональних двосторонніх колокант із двократними вузлами* 202

Калайда О. Ф. *Про одне узагальнення многочленів С. Бернштейна* 205

Калайда О. Ф. *Про залишковий член колокант функцій із пропусками квантів інформації у вузлах колокації* 207

Козеренко С. О. *Про диз'юнктне об'єднання М-графів* 212

Крутоголова А. В., Лісоводська Г. Ю., Покась С. М. *Інфінітезимальні конформні перетворення другого степеня у просторі другого наближення* $\tilde{V}_n^2$ *для ріманова простору* V_n *ненульової постійної кривини* 215

Погребний В. Д. *Ще одна теорема про топологічне вкладення* 217

Полетаев Г. С. *Разрешимость задач родственных типу Римана — Гильберта — Привалова со взаимно обратными в кольце рациональными коэффициентами* 221

Пренов Б. Б. *Сингулярный интегральный оператор Бохнера — Мартинелли в областях с коническими ребрами* 225

Рыкова О. В. *О мере множества действительных чисел, на котором целочисленные полиномы принимают малые значения* 228

Супрун О. М. *Про напівгрупу некомпактних підгруп відносно операції перерізу* 230

Сущенко В. О. *Исследование открытой модели в функционально расширенном физическом пространстве (ФРФП)* 232

Турбин А. Ф. *Диофантовы кристаллы Анатолия Галицына* 237

Хоменко М. П., Виврот Т. М. *Структурні характеристики* $\mathcal{H}(\mathcal{SK})_k$*-графів* 241

Цешковський С. Й. *Узагальнення поняття індексу для підгруп вільних груп* 245

Чип М. М. *Проблема моментів та розділені різниці* 246

МАТЕРІАЛИ
ВІСІМНАДЦЯТОЇ МІЖНАРОДНОЇ
НАУКОВОЇ КОНФЕРЕНЦІЇ
ІМЕНІ АКАДЕМІКА
МИХАЙЛА КРАВЧУКА
7—10 жовтня 2017 року, Луцьк — Київ

I

Підписано до друку 27.09.2017.
Формат 60x84/16. Папір офсетний.
Ум. друк. арк. 15.75

Зам. №   . Наклад 100 примірників.
Видавництво ТОВ «Спринт-Сервіс»
Свідоцтво: Серія ДК № 4365 від 17.07.2012
м. Київ-70, вул. Почайнинська, 28-б