Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Інститут математики Національної академії наук України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова
Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки
Рівненський державний гуманітарний університет

МАТЕРІАЛИ ВІСІМНАДЦЯТОЇ МІЖНАРОДНОЇ НАУКОВОЇ КОНФЕРЕНЦІЇ ІМЕНІ АКАДЕМІКА МИХАЙЛА КРАВЧУКА

7—10 жовтня 2017 року, Луцьк — Київ

II

Київ
2017

National Technical University of Ukraine
“Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”
Institute of Mathematics of the National Academy of Science of Ukraine
Taras Shevchenko National University of Kyiv
National Pedagogical Drahomanov University
Lesya Ukrainka East European National University
Rivne State Humanitarian University

PROCEEDINGS OF EIGHTEENTH INTERNATIONAL SCIENTIFIC MYKHAILO KRAVCHUK CONFERENCE

October 7–10, 2017, Lutsk – Kyiv

II

Kyiv
2017

Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского»
Институт математики Национальной академии наук Украины
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченка
Национальный педагогический университет имени М. Драгоманова
Восточноевропейский национальный университет
имени Леси Украинки
Ровенский государственный гуманитарный университет

МАТЕРИАЛЫ ВОСЕМНАДЦАТОЙ МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ ИМЕНИ АКАДЕМИКА МИХАИЛА КРАВЧУКА

7–10 октября 2017 года, Луцк — Киев

II

Киев
2017

УДК 51:061.2/.3

Матеріали Вісімнадцятої міжнародної наукової конференції імені академіка Михайла Кравчука, 7—10 жовтня 2017 року, Київ: Т. 2. — Київ: НТУУ «КПІ», 2017. — 320 с.

Proceedings of Eighteenth International Scientific Mykhailo Kravchuk Conference, October 7–10, 2017, Kyiv: Vol. 2. — Kyiv: NTUU «KPI», 2017. — 320 p.

Материалы Восемнадцатой международной научной конференции имени академика Михаила Кравчука, 7—10 октября 2017 года, Киев: Т. 2. — Киев: НТУУ «КПИ», 2017. — 320 с.

ISBN 978-617-7021-58-1

ISBN 978-617-7021-58-1

Академік Всеукраїнської академії наук
Academician of All-Ukrainian Academy of Sciences
Академик Всеукраинской академии наук
Михайло Кравчук
Mychailo Kravchuk
Михаил Кравчук
1892—1942

XVIII Міжнародна наукова конференція
імені академіка Михайла Кравчука

Програмний комітет

Акад. НАН України *М. Згуровський* (Україна) — співголова
Проф. *Н. Вірченко* (Україна) — співголова

Акад. НАН України *Ю. Якименко* (Україна)
Акад. НАН України *М. Ільченко* (Україна)
Акад. НАН України *А. Самойленко* (Україна)
Акад. НАН України *М. Перестюк* (Україна)
Акад. НАН України *Я. Яцків* (Україна)
Проф. *Р. Андрушків* (США)
Проф. *А. Бомба* (Україна)
Проф. *В. Ванін* (Україна)
Проф. *М. Городній* (Україна)
Проф. *П. Задерей* (Україна)
Проф. *І. Парасюк* (Україна)
Проф. *М. Працьовитий* (Україна)
Проф. *А. Прикарпатський* (Польща)
Проф. *А. Романюк* (Україна)

Організаційний комітет

М. Згуровський — співголова
Н. Вірченко — співголова
В. Гайдей — заступник голови
В. Ковтунець
О. Клесов
М. Дудкін
С. Івасишен
Ю. Харкевич
О. Іванов
І. Алєксєєва
О. Диховичний
Н. Задерей
Л. Федорова

Eighteenth International Scientific Mykhailo Kravchuk Conference

Programme Committee

Acad. NASU *M. Zgurovsky* (Ukraine) — Co-Chair
Prof. *N. Virchenko* (Ukraine) — Co-Chair

Acad. NASU *Yu. Yakymenko* (Ukraine)
Acad. NASU *M. Ilchenko* (Ukraine)
Acad. NASU *A. Samoilenko* (Ukraine)
Acad. NASU *M. Perestiuk* (Ukraine)
Acad. NASU *Ya. Yatskiv* (Ukraine)
Prof. *R. Andrushkiw* (USA)
Prof. *A. Bomba* (Ukraine)
Prof. *V. Vanin* (Ukraine)
Prof. *M. Horodniy* (Ukraine)
Prof. *P. Zaderei* (Україна)
Prof. *I. Parasiuk* (Ukraine)
Prof. *M. Pratsiovytyi* (Ukraine)
Prof. *А. Прикарпатський* (Poland)
Prof. *A. Romaniuk* (Ukraine)

Organizing Committee

M. Zgurovsky — Co-Chair
N. Virchenko — Co-Chair
V. Haidey — Deputy Chair
V. Kovtunets
O. Klesov
M. Dudkin
S. Ivasyshen
Yu. Kharkevych
O. Ivanov
I. Alyeksyeyeva
O. Dykhovychnyi
N. Zaderei
L. Fedorova

XVIII Международная научная конференция имени академика Михаила Кравчука

Программный комитет

Акад. НАН Украины М. Згуровский (Украина) — сопредседатель
Проф. Н. Вирченко (Украина) — сопредседатель
Акад. НАН Украины Ю. Якименко (Украина)
Акад. НАН Украины М. Ильченко (Украина)
Акад. НАН Украины А. Самойленко (Украина)
Акад. НАН Украины Н. Перестюк (Украина)
Акад. НАН Украины Я. Яцкив (Украина)
Проф. *Р. Андрушкив* (США)
Проф. *А. Бомба* (Украина)
Проф. *В. Ванин* (Украина)
Проф. *Н. Городний* (Украина)
Проф. *П. Задерей* (Украина)
Проф. *И. Парасюк* (Украина)
Проф. *Н. Працевитый* (Украина)
Проф. *А. Прикарпатский* (Польша)
Проф. *А. Романюк* (Украина)

Организационный комитет

М. Згуровский — сопредседатель
Н. Вирченко — сопредседатель
В. Гайдей — заместитель председателя
В. Ковтунец
О. Клесов
Н. Дудкин
С. Ивасишен
Ю. Харкевич
А. Иванов
И. Алексеева
А. Дыховичный
Н. Задерей
Л. Федорова

УКРАЇНСЬКИЙ ВЧЕНИЙ СВІТОВОЇ СЛАВИ

Михайло Пилипович Кравчук (1892—1942) — найвизначніший український математик XX сторіччя, всесвітньо відомий учений, громадський діяч, академік Всеукраїнської академії наук.

«... Майже жодне явище у створенні математичної науки в Україні не сталося без його участі,... ані закладалися ***перші*** *українські школи в місті і по селах,* ***перші*** *курси,* ***перші українські університети*** *(народний і державний),..., ані утворювалася математична термінологія або наукова мова... — нічого цього не робилося без* ***найактивнішої участі Михайла Кравчука»*** *(так писалося в характеристиці на нього, надісланої до Всеукраїнської академії наук 1929 р. у зв'язку з висуненням його кандидатури в дійсні члени академії).*

Наукові праці М. Кравчука з різних галузей математики (вищої алгебри та математичного аналізу, теорії диференціальних та інтегральних рівнянь, теорії імовірностей та математичної статистики тощо) увійшли до скарбниці ***світової Науки.*** *За його ідеями й відкриттями виразно проступала перспектива поглибленого розвитку й використання їх.*

Вже давно існують на сторінках наукових досліджень і ***многочлени Кравчука,*** *і* ***моменти Кравчука****, і* ***формули Кравчука****, і осцилятори* ***Кравчука****, а завдяки пошукам І. Качановського виявилося, що М. Кравчук стояв біля витоків* ***винаходу першого у світі електронного комп'ютера!***

Увесь свій короткий вік М. Кравчук працював невпинно й творчо на благо ***Науки****, на благо* ***Освіти рідного народу.***

«Моя любов — Україна і математика» *— таким було його життєве кредо.*

Він справжній поет формул, математика для нього — це творчість, натхнення і радість. Він педагог за покликанням. Його лекції — це і сила, й безмірна глибочінь, і краса математичної думки. На його лекції ходили як на свято.

М. Кравчук викладав математичні предмети і в Київському університеті, і у політехнічному, авіаційному, архітектурному, ветеринарно-зоотехнічному, сільськогосподарському інститутах Києва. Він відкрив талант і дав путівку у світ відкриттів видатним конструкторам ***Сергію Корольову*** *і* ***Архипу Люльці****.*

Пам'ять про М. Кравчука живе у ***серцях київських політехніків****, де він викладав вищу математику з 1921 р. і завідував кафедрою вищої математики (1934—1938 рр). Видано його «Науково-популярні праці», «Вибрані математичні праці», книгу «Розвиток математичних ідей Михайла Кравчука», відкрито* ***пам'ятник*** *М. Кравчуку (2003 р.), створено фільм «Голгофа академіка Кравчука» (2004 р.), названо його ім'ям одну з київських* ***вулиць*** *(2009 р.)*

Життя цього видатного вченого-математика спалахнуло як блискучий болід і після арешту й засуду в терорному 1938 році приречено було згоріти через кілька літ у суворих колимських таборах.

Ім'я М. Кравчука повернулось в український науковий пантеон і є зразком для наслідування та продовження його досліджень у працях сучасних і прийдешніх науковців в ***Україні й далеко поза Україною.***

OUTSTANDING UKRAINIAN MATHEMATICIAN ACADEMICIAN M. KRAVCHUK (1892—1942)

Mykhailo Kravchuk *made significant contributions to numerous branches of mathematics and the development of* ***mathematical education****. In 1929 Kravchuk was elected a full member of All-Ukrainian Academy of Sciences.*

Kravchuk was the author of more than 180 scientific works, including 10 monographs, in a number of branches of mathematics (algebra and number theory, theory of functions of real and complex variable, theory of differential and integral equations, mathematical statistics and probability theory, history of mathematics, Ukrainian mathematical terminology etc.)

Let us point some fundamental lines of his research:

— investigations in the theory of permutation matrices, quadratic and bilinear forms, theory of algebraic and transcendental equations;

— the creation and mathematical proof of the general method of moments and its application to the approximate solution of ordinary linear differential equations, integral equations, equations of mathematical physics;

— introduction and use of polynomials associated with the binomial distribution, now known in the world mathematical literature as ***Kravchuk's polynomials;***

— analysis of complex questions in philosophy, the history of mathematics and techniques.

Mykhailo Kravchuk never learned about the role that his sci. works played in the inventions of the first electronic computer. American scientist ***John Atanasoff*** *(1903–1995) took a great interest in Kravchuk's sci. works when he investigated the problem of* ***making electronic computer****.*

His selfness efforts for the sake of the ***development of science*** *in* ***Ukraine****, extraordinary* ***talent*** *as* ***teacher*** *and* ***reputation among students*** *and* ***scientific community*** *could not go unnoticed by authority.*

In 1938 *Kravchuk was arrested and accused of involvement in a host of typical counterrevolutionary activities — changes that were common in those years in USSR. In the same year he was sentenced to 20 years of confinement and 5 years of exile and transported to concentration camps in* ***Kolyma****. There in consequence of cold, undernourishment and illnesses he* ***was died in March 9, 1942.***

He was ***rehabilitated*** *be soviet regime only* ***in 1956****. But only in 1992, almost 100 years after his birth, M. Kravchuk was readmitted to membership in* ***the National Academy of Sciences of Ukraine****. The same year his name was entered in the International Calendar of Scientists by UNESCO. The* ***First Kravchuk International Conference*** *was held at Kyiv Polytechnic Institute "KPI" in 1992.* ***Three books*** *of M. Kravhuk's works were* ***published*** *in Kyiv:*

"Popular scientific works" (2000).

"Selected mathematical works" (2002).

"Development of the Mathematical ideas of Mykhailo Kravchuk (Krawtchouk)".

On the 20th of May 2003 the NTUU "KPI" unveiled ***a statue of M. Kravchuk****.*

III

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

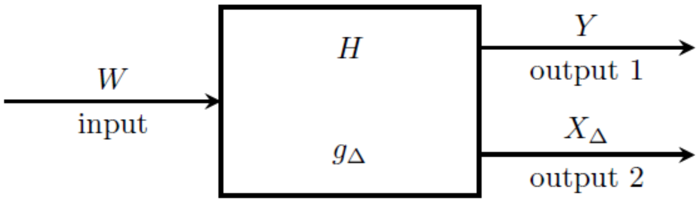
ASYMPTOTIC GAUSSIANESS
OF IMPULSE RESPONSE'S ESTIMATORS
IN 2-DIMENSIONAL SYSTEMS

I. P. Blazhievska
National Technical University of Ukraine
"Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, Ukraine
packsenarrion@rambler.ru

We deal with a statistical approach based on constructing integral-type cross-correlograms for estimation of characteristics in a linear time-invariant two-dimensional system deriving by a standard Wiener process. Supposing only a square integrability of an unknown component of a 2-dimensional impulse response, we prove CLT for its centered estimator in different functional spaces.

Keywords: Wiener shot noise process, impulse response, cross-correlogram, asymptotic Gaussianess.

The problem. Consider a "black box"':



described by a linear two-dimensional system whose response function has real-valued components. The first component is an unknown function

$$H = (H(t), t \in \mathbb{R})$$

and the second component

$$g_\Delta = (g_\Delta(t), t \in \mathbb{R}),$$

is a known function dependent on a parameter $\Delta > 0$. The input to the system

$$W = (W(t), t \in \mathbb{R})$$

is a standard Wiener process on R, and both outputs

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(t-s)dW(s), \text{ and } X_\Delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_\Delta(t-s)dW(s), \quad t \in \mathbb{R},$$

are observable. Throughout the work we suppose that $\{H, g_\Delta\} \subset L_2(\mathbb{R})$, and that the controlled component $(g_\Delta, \Delta > 0)$ is as follows:

$$g_\Delta(t) = g_\Delta(-t), \quad t \in \mathbb{R}; \tag{1}$$

$$\sup_{\Delta>0} \left\| g_\Delta^* \right\|_\infty < \infty; \tag{2}$$

$$\exists c \in (0;\infty) \ \ \forall a \in (0;\infty): \lim_{\Delta\to\infty} \sup_{-a\le\lambda\le a} \left| g_\Delta^*(\lambda) - c \right| = 0. \tag{3}$$

Here,

$$g_{\Delta}^{*}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} g_{\Delta}(t)dt\,, \ \lambda \in \mathbb{R},$$

— is the Fourier–Plancherel transform of g.

By (1)–(3), we see in what sense the family of processes $(X_{\Delta}, \Delta > 0)$ tends to a Gaussian white noise as $\Delta \to \infty$.

We are interested in estimation of the function H after the responses Y and X_{Δ} of the system. Our approach is based on taking the following integral-type sample cross-correlograms:

$$\widehat{H}_{T,\Delta}(\tau) = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} Y(t+\tau)X_{\Delta}(t)dt, \quad \tau \in \mathbb{R},$$

as estimators of H. The estimator

$$\widehat{H}_{T,\Delta} = (\widehat{H}_{T,\Delta}(\tau), \tau \in \mathbb{R})$$

depends on the length of averaging $T > 0$ and the approximating parameter $\Delta > 0$. The estimator is biased, that is,

$$H(\tau) \neq E\widehat{H}_{T,\Delta}(\tau) = \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{\infty} g_{\Delta}(s)H(s+\tau)ds, \ \ \tau \in \mathbb{R}.$$

The properties of $\widehat{H}_{T,\Delta}$ can be studied using the results in Li (2005) and later results for “single input–single output” systems in Buldygin and Blazhievska (2009, 2010).

Main results. For proving asymptotic normality of finite-dimensional distributions of the centered estimator $\widehat{H}_{T,\Delta}$ the following error term should be considered:

$$\widehat{Z}_{T,\Delta}(\tau) = \sqrt{T}[\widehat{H}_{T,\Delta}(\tau) - EH(\tau)], \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Define also a measurable separable real-valued Gaussian process

$$Z = (Z(\tau), \tau \in \mathbb{R})$$

with zero mean and the covariance function

$$\mathbb{E}Z(\tau_1)Z(\tau_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[e^{i(\tau_1-\tau_2)\lambda}\left|H^{*}(\lambda)\right|^2 + e^{i(\tau_1+\tau_2)\lambda}(H^{*}(\lambda))^2\right]d\lambda,$$

$$\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}.$$

Here, H^{*} stands for the Fourier–Plancherel transform of H. If T, Δ arbitrary runs to infinity, the process Z will be the limit of the processes $\widehat{Z}_{T,\Delta}$. The next statement gives an exact shape to this fact.

Theorem 1.1 *Assume that* $\{H, g_\Delta^*\} \subset L_2(\mathbb{R})$. *Then for any* $m \in \mathbb{N}$ *and any set of points* $\tau_1, \ldots, \tau_m \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{(T,\Delta)\to\infty} \mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^{m} \widehat{Z}_{T,\Delta}(\tau_j)\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^{m} Z(\tau_j)\right].$$

Moreover, all finite-dimensional distributions of the processes $\widehat{Z}_{T,\Delta}$ *converge weakly to those of the process* Z.

Our next step is to study asymptotic normality of the centered estimator $\widehat{H}_{T,\Delta}$ in functional spaces. Firstly, we take as an example the space $L_p[a;b], p \geq 1$, and use the moment technique, see Grinblat (1976).

Theorem 2.2 *Assume that* $\{H, g_\Delta^*\} \subset L_2(\mathbb{R})$. *Then for any interval* $[a;b] \subset \mathbb{R}$ *and* $p \geq 1$, *we have:*

- $Z \in L_p[a,b]$ almost surely;
- $\widehat{Z}_{T,\Delta} \in L_p[a,b]$ almost surely for any fixed $T > 0$ and $\Delta > 0$;
- $\widehat{Z}_{T,\Delta}$ converge weakly to Z in $L_p[a,b]$ as $(T,\Delta) \to \infty$.

Secondary, let us show the asymptotic Gaussianess of the centered estimator $\widehat{H}_{T,\Delta}$ in the Banach space $C[a,b]$, using entropy techniques, see Buldygin and Kozachenko (2000, Section 4).

Theorem 3.3 *Assume that* $\{H, g_\Delta^*\} \subset L_2(R)$. *Suppose that for some* $\beta > 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|H^*(\lambda)\right|^2 \log^{4+\beta}\left(1 + |\lambda|\right) d\lambda < \infty.$$

Then for any interval $[a,b] \subset R$ *we have:*

- $Z \in C[a,b]$ almost surely;
- $\widehat{Z}_{T,\Delta} \in C[a,b]$ almost surely for any fixed $T > 0$ and $\Delta > 0$;
- $\widehat{Z}_{T,\Delta}$ converge weakly to Z in $C[a,b]$ as $(T,\Delta) \to \infty$.

References

Buldygin, V. V., & Blazhievska, I. P. (2009). On correlation properties of the cross-correlogram estimators of impulse response functions. *Naukovi Visti "KPI"*, (5), 120–128 (in Ukrainian).

Buldygin, V. V., & Blazhievska, I. P. (2010). On asymptotic properties of cross-correlogram estimators of impulse response functions in linear systems. *Naukovi Visti "KPI"*, (4), 16–27 (in Ukrainian).

Buldygin, V. V., & Kozachenko, Yu. V. (2000). *Metric charactirization of random variables and random processes.* (Vol. 188). Providence, RI: American Mathematical Society.

Grinblat, L. Š. (1976). A limit theorem for measurable random processes and its applications. *Proceedings of the American Mathematical Society, 61*(2), 371–376.

Li, Fu (2005). Asymptotic properties of an estimator of an impulse response function in linear two-dimensional systems. *Vestnik BGU. Physics. Mathematics. Informatics,* (1), 93–99.

SKELLAM PROCESSES WITH TIME CHANGE

K. V. Buchak, L. M. Sakhno
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine
kristina.kobilich@gmail.com, lms@univ.kiev.ua

We study time-changed Skellam processes, where the role of time is played by compound Poisson-Gamma subordinators. We consider time-changed Skellam processes of two types and obtain the probability distributions of these processes and the moment generating function. The distributions are expressed in terms of special functions: Wright function, the modified Bessel function of the first kind and the three-parameter generalized Mittag-Leffler function.

Keywords: Skellam process, Poisson process, compound Poisson-Gamma subordinator, time-change.

Models of stochastic processes with random time are used in various applied areas, such as financial mathematics, reliability, queuing theory, biological, ecological and medical research. In particular, useful models for analysis of financial data are based on the difference of two Poisson processes, so-called Skellam processes, and their generalizations by means of time-change.

We study time-changed Skellam processes, where the role of time is played by compound Poisson-Gamma subordinators and their inverse processes.

The Skellam process is defined as

$$S(t) = N_1(t) - N_2(t),\ t \geq 0,$$

where $N_1(t), t \geq 0$ and $N_2(t), t \geq 0$ are two independent Poisson processes with intensities $\lambda_1 > 0$ and $\lambda_2 > 0$, respectively.

The Skellam process is a Levy process, its Levy measure is the linear combination of two Dirac measures:

$$\nu\left(du\right) = \lambda_1 \delta_{\{1\}}\left(u\right)du + \lambda_2 \delta_{\{-1\}}\left(du\right),$$

corresponding Bernstein function (or Laplace exponent) is

$$f_S\left(\theta\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(1 - e^{-\theta y}\right)\nu\left(dy\right) = \lambda_1\left(1 - e^{-\theta}\right)\lambda_2\left(1 - e^{\theta}\right).$$

We will consider Skellam processes with time change

$$S_I(t) = S\left(X(t)\right) = N_1\left(X(t)\right) - N_2\left(X(t)\right),$$

where $X(t)$ is a subordinator independent of $N_1(t)$ and $N_2(t)$ and will call such processes as time-changed Skellam processes of type I. We will also consider the processes of the form

$$S_{II}(t) = N_1\left(X_1(t)\right) - N_2\left(X_2(t)\right),$$

where $N_1(t)$, $N_2(t)$ are two independent Poisson processes with intensities $\lambda_1 > 0$ and $\lambda_2 > 0$, and $X_1(t)$, $X_2(t)$ are two independent copies of a subordinator $X(t)$, which are also independent of $N_1(t)$ and $N_2(t)$, and we will call the process $S_{II}(t)$ time-changed Skellam process of type II.

We consider Skellam processes $S(t)$ with time change, where the role of time is played by compound Poisson-Gamma subordinators $G_N(t)$ with Laplace exponent

$$f(u) = \lambda\beta^{\alpha}\left(\beta^{-\alpha} - (\beta+u)^{-\alpha}\right), \lambda > 0, \alpha > 0, \beta > 0.$$

When $\alpha = 1$ we have the compound Poisson process with exponential jumps, and we denote such process as $E_N(t)$.

To represent distributions of time-changed Skellam processes we use the following special functions:

1) the modified Bessel function of the first kind:

$$I_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2n+k}}{n!(n+k)!};$$

2) Wright function

$$\Phi(\rho,\delta,z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!\Gamma(\rho k+\delta)}, z \in \mathbb{C}, \rho \in (-1;0)\cup(0;\infty), \delta \in \mathbb{C};$$

3) the three-parameter generalized Mittag-Leffler function

$$\varepsilon_{\rho,\delta}^{\gamma}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma+k)}{\Gamma(\gamma)} \frac{z^k}{k!\Gamma(\rho k+\delta)}, z \in \mathbb{C}, \rho, \delta, \gamma \in \mathbb{C},$$

with $\operatorname{Re}\rho > 0$, $\operatorname{Re}\delta > 0$, $\operatorname{Re}\gamma > 0$.

Consider first the time-changed Skellam process of type I, that is the process

$$S_I(t) = S(G_N(t)) = N_1(G_N(t)) - N_2(G_N(t)),$$

where $N_1(t)$, $N_2(t)$ and $G_N(t)$ are independent.

Theorem 1. *Let* $S_I(t) = S(G_N(t))$, *then probabilities*

$$r_k(t) = P(S_I(t) = k)$$

are given by

$$r_k(t) = e^{-\lambda t}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{k/2} \int_0^{\infty} e^{-u(\lambda_1+\lambda_2+\beta)} I_{|k|}\left(2u\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\right) \frac{1}{u} \Phi\left(\alpha, 0, \mu t(\beta u)^{\alpha}\right) du,$$

The moment generating function is

$$\mathbb{E}e^{\theta S_I(t)} = e^{-\lambda t\left(1-\beta^{\alpha}\left(\beta+\lambda_1+\lambda_2-\lambda_1 e^{\theta}-\lambda_2 e^{-\theta}\right)^{-\alpha}\right)}$$

for θ *such that*

$$\beta + \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1 e^{\theta} - \lambda_2 e^{-\theta} \neq 0.$$

Remark. *For the case* $\alpha = 1$, *that is,* $S_I(t) = S(E_N(t))$, *we obtain*

$$r_k(t) = e^{-\lambda t}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{k/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u(\lambda_1+\lambda_2+\beta)} I_{|k|}\left(2u\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\right) \sqrt{\frac{\lambda\beta t}{u}} I_1\left(2\sqrt{\lambda t\beta u}\right) du, \quad (2)$$

$$\mathbb{E}e^{\theta S_I(t)} = e^{-\lambda t\left(\lambda_1+\lambda_2-\lambda_1 e^{\theta}-\lambda_2 e^{-\theta}\right)\left(\beta+\lambda_1+\lambda_2-\lambda_1 e^{\theta}-\lambda_2 e^{-\theta}\right)^{-1}}.$$

Consider now the time-changed Skellam process of type II, where the role of time is played by the subordinator $X(t) = E_N(t)$ with Laplace exponent

$$f\left(u\right) = \lambda \frac{u}{\beta + u},$$

that is, the process

$$S_{II}(t) = N_1\left(X_1(t)\right) - N_2\left(X_2(t)\right), \tag{2}$$

where $X_1(t)$ and $X_2(t)$ are independent copies $X(t)$ and independent of $N_1(t), N_2(t)$.

Theorem 2. *Let $S_{II}(t)$ be the time-changed Skellam process of type II given by* (2). *Its probability mass function is given by*

$$P\left(S_{II}(t) = k\right) = e^{-2\lambda t} \frac{\left(\lambda t\beta\right)^2 \lambda_1^k}{\left(\lambda_1 + \beta\right)^{k+1}\left(\lambda_2 + \beta\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda_1\lambda_2\right)^n}{\left(\lambda_1 + \beta\right)^n \left(\lambda_2 + \beta\right)^n} \times \varepsilon_{1,2}^{n+k+1}\left(\frac{\lambda\beta t}{\lambda_1 + \beta}\right) \varepsilon_{1,2}^{n+1}\left(\frac{\lambda\beta t}{\lambda_2 + \beta}\right) \tag{3}$$

for $k \in \mathbb{Z}, k \geq 0$, and when $k < 0$

$$P\left(S_{II}(t) = k\right) = e^{-2\lambda t} \frac{\left(\lambda t\beta\right)^2 \lambda_2^{|k|}}{\left(\lambda_1 + \beta\right)\left(\lambda_2 + \beta\right)^{|k|+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda_1\lambda_2\right)^n}{\left(\lambda_1 + \beta\right)^n \left(\lambda_2 + \beta\right)^n} \times \varepsilon_{1,2}^{n+1}\left(\frac{\lambda\beta t}{\lambda_1 + \beta}\right) \varepsilon_{1,2}^{n+|k|+1}\left(\frac{\lambda\beta t}{\lambda_2 + \beta}\right). \tag{4}$$

The moment generating function is

$$\mathbb{E}e^{\theta S_{II}(t)} = e^{-\lambda\lambda_1 t\left(1 - e^{\theta}\right)/\left(\beta + \lambda_1\left(1 - e^{\theta}\right)\right)} e^{-\lambda\lambda_2 t\left(1 - e^{-\theta}\right)/\left(\beta + \lambda_2\left(1 - e^{-\theta}\right)\right)}$$

for θ such that

$$\beta + \lambda_1\left(1 - e^{\theta}\right) \neq 0.$$

We also study the time-changed Skellam processes of type I and type II, where the role of time is played by inverse processes (or first passage time) for processes $G_N(t)$ for $\alpha = n$.

The talk is based on the results presented in the paper Buchak and Sakhno (2017).

Reference

Buchak, K., & Sakhno, L. (2017). Compositions of Poisson and Gamma processes. Submitted to *Modern Stochastics: Theory and Applications*.

ASYMPTOTIC NORMALITY OF TWO TOTAL LEAST SQUARES ESTIMATORS IN A MULTIVARIATE MEASUREMENT ERROR MODEL

Ya. Tsaregorodtsev, A. Kukush
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine
777Tsar777@mail.ru, alexander_kukush@univ.kiev.ua

A multivariable measurement error model $AX \approx B$ is considered. If both the data matrix A and observation matrix B are contaminated with errors, and all the errors are uncorrelated and have equal variances, the total least squares (TLS) technique is appropriate for solving this overdetermined system of equations (Golub & Van Loan, 1980; Van Huffel & Vandewalle, (1991). Under mild conditions, the TLS estimator of X is consistent and asymptotically normal, as the number of rows in A is increasing (Gleser, 1981; Kukush & Tsaregorodtsev, 2016).

In the present talk, we consider two kinds of estimators, the TLS estimator and the element-wise weighted TLS estimator, in two a bit different multivariate measurement error models.

In the first model, all the errors in $[A;B]$ are uncorrelated, row-wise independent, and the total covariance structure of the error matrices $\tilde{A}$ and $\tilde{B}$ is known up to a scalar factor. In Kukush and Van Huffel (2004) the statistical consistency of the TLS estimator $\hat{X}_{tls}$ was shown, as the number m of rows in A grows, provided the errors in $[A,B]$ are row-wise i.i.d. with zero mean and covariance matrix proportional to the identity matrix; the true input matrix A_0 was assumed nonrandom.

The second model is a generalization of the TLS-problem. The errors in $[A,B]$ are row-wise independent, but within each row the errors may be correlated. Some of the columns are observed without errors, and the error covariance matrices may differ from row to row. The total error covariance structure is assumed known up to a scalar factor. For this model, the element-wise weighted total least squares (EW-TLS) estimator of X is introduced and its consistency is proven in Kukush and Van Huffel (2004). Concerning the computation of the estimator see Markovsky et al. (2006), Jazaerti, Amiri-Simkooei, and Sharifi (2014). The EW-TLS estimator $\hat{X}$ is applied, e.g., in geodesy (Mahboud, 2012).

We state the asymptotic normality of estimators in both models and compare the corresponding conditions. The results are based on matrix calculus.

References

Gleser, L. J. (1981). Estimation in a multivariate “errors in variables” regression model: large sample results. *Ann. Stat.*, *9*(1), 24–44.

Golub, G. H., & Van Loan, C. F. (1980). An analysis of the total least squares problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, *17*(6), 883–893.

Jazaerti, S., Amiri-Simkooei, A. R., & Sharifi, M. A. (2014). Iterative algorithm for weighted total least squares adjustment. *Survey Review*, *46*(334), 19–27.

Kukush, A., & Tsaregorodtsev, Ya. (2016). Asymptotic normality of total least squares estimator in a multivariable errors-in-variables model $AX = B$. *Modern Stochastics: Theory and Applications*, *3*(1), 47–57.

Kukush, A., & Van Huffel, S. (2004). Consistency of elementwise-weighted total least squares estimator in a multivariate errors-in-variables model $AX = B$. *Metrika*, *59*(1), 75–97.

Mahboud, V. (2012). On weighted total least squares for geodetic transformation. *J. of Geodesy*, *86*(5), 359–367.

Markovsky, I., Rastello, M. L., Premoli, A., Kukush, A., & Van Huffel, S. (2006). The element-wise weighted total least-squares problem. *Comput. Statist. Data Anal.*, *50*(1), 181–209.

Van Huffel, S. & Vandewalle, J. (1991). *The total least squares problem: Computational aspects and analysis*. Philadelphia, PA: SIAM.

APPLYING IMPLIED VOLATILITY FOR HEDGING DERIVATIVES

O. Tupko
Technical University of Munich, Munich, Germany
olha.tupko@gmail.com

The article covers such topic as difference between actual and implied volatility in Black–Scholes model and how investor can benefit from that. To be more specific delta hedging strategy is set up to construct a risk-free portfolio of European call, asset and risk-free bank account. In the article it is also emphasized that in case of delta, which is calculated based on actual volatility, the portfolio has deterministic payoff at maturity. This means that investor can benefit from portfolio at maturity for sure.

Keywords: Black–Scholes model, implied volatility, Greeks, delta hedging strategy.

Implied volatility can be defined as a factor in the model that isn't directly observable in the market, rather than the option pricing model uses the other factors and option premium to determine it. In this article as an option pricing model is considered Black–Scholes (BS) model and as option European call. There are closed form solution of call price in BS model:

$$C\left(S_t, t\right) = f\left(S_t, t, T, k, r, \sigma\right),$$

f is the deterministic function*;

S_t is the spot price of the underlying asset;

k is the strike price;

r is the risk-free rate;

σ is the volatility of returns of the underlying asset.

We could recall from BS economy that Vega of a European Call is strictly positive:

$$\nu := \frac{\partial C}{\partial \sigma} = S\sqrt{T}\varphi\left(d_1\right) > 0,$$

where $\varphi\left(\cdot\right)$ is density of Standard Normal distribution.

This implies call price is strictly increasing function of volatility σ, meaning that a higher value for volatility results in a higher theoretical value of the option. By the inverse function theorem, f has an inverse

$$g = f^{-1}\left(S_t, t, T, k, r\right),$$

such that

$$\sigma^I = g\left(C^I, S_t, t, T, k, r\right),$$

C^I is market price of a call option.

Let us now consider how could investor benefit from the knowledge of an actual volatility σ^a. Assume we are working in Black–Scholes economy and know σ^a. However other market participants might have different estimate of it. Thus, implied volatility σ^I of a call option could vary from σ^a. If such situation occurs and provided our estimate of actual volatility is the true one, then the option is mispriced and we can make money of it.

I would like to emphasize that in theory σ^a should always be equal to σ^I at least because the underlying is the only source of stochasticity in the option. And to make things clear σ^I is the parameter that we observe in the market, on the other hand value of σ^a is known from the internal sources.

At time t we can observe price of European Call with maturity date T, underlying stock S and strike price K. Call is traded on the market under implied volatility σ^I:

$$C^I \neq C\left(t, \sigma^I\right).$$

We assume actual volatility σ^a be known and satisfy $\sigma^I < \sigma^a$ which means call is underpriced.

Let us set up a delta-hedging strategy of portfolio Π_t which consists of one long position in European call option, delta short position in stock and money borrowed from a risk-free bank account:

Portfolio at time t:

1) buy call C^I;

2) sell Δ^a stocks S_t, there we use $\Delta^a = N\left(d_1\left(\sigma^{(a)}\right)\right)$ — delta which is calculated assuming $\sigma^{(a)}$ as a volatility **;

3) borrow $C^I - \Delta^a S_t$ from risk-free bank account.

At time t:

$$\Pi_t = C_t^I - \Delta^a S_t - \left(C^I - \Delta^a S_t\right) = 0$$

In infinitesimal time interval $\left[t, t+\delta\right], \quad \delta \to 0$:

$$\Pi_{t+\delta} = d\Pi_t = dC_t^I - \Delta_t^a dS_t - r\left(C_t^I - \Delta_t^a S_t\right)dt$$

In this case return is in fact random. In the same time in BS model (such that $\sigma^I = \sigma^a$ delta-hedging strategy would be risk free:

$$d\Pi_t^a = dC_t^a - \Delta^a dS_t - r\left(C_t^a - \Delta^a S_t\right)dt$$

Putting things together:

$$\begin{aligned} d\Pi_t &= dC_t^I - rC_t^I dt - \Delta^a dS_t + r\Delta^a S_t dt = \\ &= dC_t^I - rC_t^I dt + rC_t^a dt - dC_t^a = dC_t^I - dC_t^a - r\left(C_t^I - C_t^a\right)dt = \\ &= e^{rt}\left(-re^{-rt}\left(C^I - C^a\right)dt + e^{-rt}d\left(C^I - C^a\right)\right) = \\ &= e^{rt}d\left(e^{-rt}\left(C^I - C^a\right)\right). \end{aligned}$$

Then we could calculate discounted profit of the portfolio. Under assumption that e^{rt} remains constant in the interval $\left[t, t+\delta\right]$ we get

$$d\tilde{\Pi}_t \simeq \frac{\Pi_{t+\delta} - \Pi_t}{e^{rt}} = d\Pi_t e^{-rt} \Rightarrow d\tilde{\Pi}_t = d\left(e^{-rt}\left(C^I - C^a\right)\right)$$

The final profit of the portfolio will then equal:

$$\Pi_T = \Pi_T - \Pi_0 = \int_0^T d\tilde{\Pi}_t = C_0^I - C_0^a$$

Taking in account that values at maturity of C^I and C^a are equal.

In this case at time 0 we can construct such hedging strategy that payoff at maturity is known and non-stochastic.

As a future research topic estimation of actual volatility σ^a and constructing delta-hedging strategy based on Δ^I could be considered.

* f can be easily found in a variety of respective sources;

** As an alternative delta-hedging strategy $\Delta^I = N\left(d_1\left(\sigma^{(I)}\right)\right)$ could be considered.

References

Bingham, N. H., & Kiesel, R. (2010). Risk-neutral valuation: Pricing and hedging of financial derivatives. London: Springer.

Øksendal, B. (2003). *Stochastic differential equations: An introduction with applications*. Berlin: Springer.

АСИМПТОТИЧНА НОРМАЛЬНІСТЬ ОЦІНКИ ПАРАМЕТРА ХЮРСТА ДРОБОВОГО БРОУНІВСЬКОГО РУХУ ЗА СПОСТЕРЕЖЕННЯМИ З ПОХИБКАМИ

Н. С. Аюбова

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

n.aiubova@gmail.com

Наведена оцінка параметра Хюрста H дробового броунівського руху в моделі спостережень з похибками та доведена її асимптотична нормальність для $H \in \left(0, \frac{3}{4}\right)$.

Ключові слова: параметр Хюрста, дробовий броунівський рух, асимптотична нормальність, спостереження з похибками.

Реальне вимірювання значення випадкового процесу в точці здійснюється з похибками. Параметричне оцінювання в моделях з похибками у спостереженнях розглядалося, наприклад, у монографії Кукуш та ін. (2015) і статті Synyavska (2016). У тезах Аюбова (2017) анонсована консистентна оцінка параметра Хюрста дробового броунівського руху за спостереженнями з похибками.

Випадковий гауссовий процес $\xi_H(t), t \in \mathbb{R}$, з нульовим середнім та коваріаційною функцією

$$B_H(s,t) = \frac{1}{2}\left(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}\right),\ t,s \in \mathbb{R}$$

називають *випадковим процесом дробового броунівського руху з параметром Хюрста* $H \in (0,1)$.

Нехай $0 < a < 1$. Випадковий процес $\xi_H(t)$, $t \in \mathbb{R}$, спостерігається в моменти часу ka, $k = 0,1,\ldots$, з похибками δ_k, $k = 0,1,\ldots$ Щодо похибок припускається, що (δ_k) — послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин з нульовим математичним очікуванням та дисперсією σ^2. Послідовність випадкових величин (δ_k) незалежна від випадкового процесу дробового броунівського руху $\xi_H(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Спостерігається послідовність випадкових величин

$$\eta_{H,k} = \xi_H(ka) + \delta_k,\ k \geq 0.$$

Функція

$$k(H) = E\left(\eta_{H,k+1} - \eta_{H,k}\right)^2 = a^{2H} + 2\sigma^2,\ H \in (0,1)$$

неперервна і спадна на інтервалі $(0,1)$. Для довільного $H \in (0,1)$

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\eta_{H,k+1} - \eta_{H,k}\right)^2 \to k\left(H\right)$$

за ймовірністю, коли $n \to \infty$, що дає можливість розглянути консистентну оцінку

$$\hat{H}_n = \beta\left(S_n\right),\ n \geq 1$$

параметра Хюрста H, де

$$\beta\left(y\right) = \frac{1}{2}\log_a\left(y - 2\sigma^2\right),\ y \in \left(2\sigma^2, 2\sigma^2 + a^2\right)$$

— обернена до $k\left(H\right)$, $H \in \left(0,1\right)$ функція.

Теорема 1. *Для довільного* $H \in \left(0, \frac{3}{4}\right)$ *послідовність випадкових величин*

$$\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{\operatorname{Var} S_n}},\ n \geq 1$$

асимптотично нормальна $N\left(0,1\right)$.

Із цієї теореми випливає асимптотична нормальність оцінки параметра Хюрста $\hat{H}_n$ для $H \in \left(0, \frac{3}{4}\right)$.

Список літератури

Кукуш, О. Г., Ліхтарьов, І. А., Масюк, С. В., Чепурний, М. І., & Шкляр, С. В. (2015). *Моделі регресії зпохибками вимірювання та їх застосування до оцінювання радіаційних ризиків.* Київ: ДІА.

Synyavska, O. O. (2016). Interval estimation of the fractional Brownian motion parameter in a model with measurement error. *Theory of stochastic processes, 21*(1), 84–90.

Аюбова, Н. С. (2017). Оцінювання параметра Хюрста дробового броунівського руху за спостереженнями з похибками. У *Матеріали XV Міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Шевченківська весна — 2017», Київ, 4—6 квітня*. Київ: Київський університет.

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕДУР ГЕНЕРАЦІЇІ ПСЕВДОВИПАДКОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ЧИСЕЛ

Ю. П. Буценко, Ю. Г.Савченко

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

armchairdoc@ukr.net

Розглянуто моделювання генерації псевдовипадкових чисел на основі цифрового автомата Мілі.

Ключові слова: псевдовипадкова послідовність, моделювання, генератор псевдовипадкової послідовності чисел, цифровий автомат.

Псевдовипадкова послідовність чисел (ППЧ) — поняття формально досить розпливчасте. Складова «псевдо» свідчить, що така послідовність лише подібна (наближена) до справжньої випадкової послідовності. А ступінь наближеності може слугувати мірою якості ППЧ. Зважаючи на сферу застосування таких послідовностей, питання якості є не лише актуальним, але навіть критичним, коли мова йде про використання ППЧ в якості ключів шифрування або паролів доступу до інформаційних ресурсів. Для оцінки якості застосовують різноманітні тести, серед яких найбільш популярними залишаються тести, запропоновані NIST (Dolev & Yao, 1983).

З точки зору базових положень теорії інформації справжній випадковій послідовності повинна відповідати максимальна ентропія, оскільки ймовірності появи будь-якої з можливих послідовностей однакові (невизначеність максимальна). Тобто ентропія джерела ППЧ (генератора ППЧ)

$$H = \log_2 N\,,$$

де N — кількість можливих (і різних) послідовностей. Для бінарних послідовностей довжини n ентропія $H = n$ біт.

Очевидно, ця величина є тим практично недосяжним максимумом, до якого має по можливості наближатися ентропія реального генератора ППЧ. Протестувати такий генератор, принаймні, теоретично, досить просто. Для цього потрібно спостерігати за генератором деякий тривалий (достатній для отримання статистики) час, щоб зафіксувати частоти появи різних чисел, і на цій основі обчислити ентропію джерела (генератора). Будь-яке помітне відхилення від рівномірного розподілу частот буде свідчити про недосконалість процедури генерації ППЧ, а величина цього відхилення і є кількісною мірою якості генерованих послідовностей. Зауважмо, що для реальних значень $n = 64...512$ здійснити такий статистичний експеримент проблематично, зважаючи на необхідні для цього часові витрати.

Суттєво складніше оцінювати якість *однієї* окремо взятої послідовності. Сама по собі така послідовність є унікальною та, якщо не знати, з якої множини вона вибрана, послідовність є випадковою для стороннього спостерігача. А як оцінити її якість? Можна припустити, що на неформальному рівні критерієм якості є можливість (неможливість) спрогнозувати подальший перебіг послідовності на основі деякої обмеженої множини попередніх чисел. Наприклад, послідовності

$$1,2,3,4,5,\ldots \qquad 1,2,4,8,16,\ldots$$

навряд чи можуть бути визнані випадковими та використані як ключі шифрування, оскільки їх подальший перебіг практично очевидний. Можна, мабуть, стверджувати, що якість однієї окремо взятої послідовності визначається лише її внутрішніми властивостями. З цієї точки зору універсальним тестом є перевірка на визначення наступного в послідовності біта на основі всіх попередніх значень. Якщо обчислити це значення з ймовірністю, відмінною від 1/2 неможливо, то така бінарна послідовність є випадковою. Це фундаментальне положення доведено ще у 1983 році Андре Яо (Потий, Орлова, & Гриненко, 2001). (Можна припустить, що аналогічне положення має місце й для небінарних послідовностей). На жаль, реалізація такої процедури перевірки пов'язана з великими витратами часових ресурсів.

Очевидно, наявність внутрішніх закономірностей повинна проявити себе на статистичному рівні, наприклад, у вигляді нерівномірності появи окремих груп бітів у послідовності. Але при цьому слід зважати на велику довжину послідовності, що істотно перевищує звичайний для математичної статистики об'єм вибірки. Якщо ж застосувати розбиття послідовності на фрагменти, то такий підхід є неприйнятним, оскільки головною задачею залишається встановлення зв'язку між сусідніми (поточним і попереднім) фрагментами, тобто, по суті, припущення про незалежне отримання елементів вибірки відкидається.

Формально, найбільш природним інструментом тестування є аналіз на незалежність приростів випадкового процесу $\xi(t)$, який для використання традиційних методик може мати значеннями десяткові еквіваленти груп цифр у вихідній послідовності («трійки» еквівалентні значенням від 0 до 7, «четвірки» — від 0 до 15 і т. д.). Це може бути зроблено, наприклад, шляхом побудови розподілу приросту за один крок $\delta_1 = \xi(t+1) - \xi(t)$ з наступною перевіркою гіпотези про те, що розподіл приросту за два кроки $\delta_2 = \xi(t+2) - \xi(t)$ є згорткою попередніх розподілів. У випадку, коли гіпотеза справджується з достатньо високою надійністю, можна стверджувати незалежність приростів $\xi(t)$, тобто незалежність чисел у вихідній послідовності. У будь-якому випадку, скоріш за все, фрагментація послідовності дає надію на практичну реалізацію тестування ППЧ.

Повертаючись до задачі моделювання, зазначимо, що реальний генератор ППЧ — це апаратура або програма, що створює ППЧ. Зауважмо, що комп'ютерна програма є моделлю апаратури, оскільки комп'ютер теж апаратура. Тому моделювання процедури генерації ППЧ логічно (природно) розглядати в термінах, які ближче до апаратури, наприклад, функцій скінченних цифрових автоматів. Тоді генератор ППЧ — це цифровий автомат з входами $x_i(t), i = 1,2,\ldots,k$; виходами $y_j(t), j = 1,2,\ldots,m$ та внутрішніми станами $g_h(t), h = 1,2,\ldots,n$.

Функції найбільш популярного та такого, що найчастіше практично застосовується генератора, можна записати так

$$g_1(t+1) = \oplus \sum_{i \subset B} b_i x_i(t),$$

$$g_2(t+1) = g_2(t), g_3(t+1) = g_3(t), ..., g_n(t+1) = g_n(t), \tag{1}$$

де B — множина коефіцієнтів примітивного полінома степеня $(n-1)$, який є дільником біному $x^n \oplus 1$. Процедура, що задається наведеними рівняннями визначає функціонування регістра зсуву зі зворотними зв'язками: значення суми за модулем 2 деякої сукупності бітів послідовності в попередній момент часу записується в молодший розряд регістру, а інші розряди в регістрі отримують як результат зсуву попередніх значень на одну позицію. Такий алгоритм забезпечує генерацію на виходах автомата (виходами в цьому випадку є стани регістру $g_1(t+1), g_2(t+1), ..., g_n(t+1)$) усіх можливих (окрім 00…0) n-розрядних двійкових чисел з однаковою частотою, що дозволяє говорити про наближення до справжньої випадкової послідовності.

Але ж для зловмисника, який «підбирає ключі» до зашифрованої інформації цей алгоритм напевно відомий і йому достатньо перебрати максимум $2^n - 1$ варіантів набору коефіцієнтів b_i та знайти перебором початкове (стартове) слово в регістрі. Насправді ж необхідний перебір набагато менший, оскільки вибираються лише примітивні дільники $x^n \oplus 1$. Тому використання процедур генерації, що базуються на регістровій моделі не є ефективним засобом з точки зору безпеки (Пометун, 2008).

Для підвищення ефективності захисту, очевидно, слід суттєво збільшити необхідний зловмиснику перебір варіантів для зламу ключа або пароля. Для цього потрібно розширити клас цифрових автоматів, що використовуються для генерації ППЧ. Першим кроком у цьому напрямку є перехід від специфічних функцій (1) до логічних функцій довільного виду, залишаючись у рамках автоматів Мура. Цей клас можна обмежити для спрощення реалізації, використовуючи лише лінійні булеві функції або інший підклас. Наступним кроком, очевидно, є перехід до загальної моделі автоматів Мілі та зняття буд-яких обмежень щодо класу функцій виходів та переходів автомата

$$y_i(t) = f_i[x_1(t), x_2(t), ..., x_k(t); g_1(t), g_2(t), ..., g_n(t)], i = 1,2,...,m,$$

$$g_j(t+1) = \varphi_j[x_1(t), x_2(t), ..., x_k(t); g_1(t), g_2(t), ..., g_n(t)], j = 1,2,...,n,$$

У цьому випадку необхідний зловмиснику перебір лише для функцій виходів складатиме $M = 2^{2^{m+n}}$, що зразу ж перетворює задачу «підбору ключів» шляхом перебору варіантів у таку, що не може бути реально розв'язана. Так, уже при зовсім скромних значеннях, наприклад, $m + n = 16$ кількість варіантів для перебору буде більшою за 10^{30000}(!)..

Використання моделі цифрового автомата Мілі для представлення процедури генерації ППЧ, можна вважати, є універсальним інструментом для пошуку найбільш ефективних реалізацій з точки зору апаратних витрат і якості отриманих ППЧ. Важливо також зауважити, що критерії апаратних витрат з розвитком мікроелектроніки сьогодні суттєво інші, ніж в часи, коли реалізація генераторів ППЧ на регістрах зсуву мала безперечні переваги перед іншими рішеннями. Є й інші додаткові важливі та корисні функції при реалізації генератора як автомата Мілі — це можливість програмної зміни траєкторії переходів автомата шляхом керування вхідними сигналами.

Список літератури

Dolev, D., & Yao, A. (1983). On the security of public key protocols. *IEEE Transactions on information theory*, *29*(2), 198–208.

Пометун, С. О. (2008). Алгебраїчні атаки на потокові шифратори як узагальнення кореляційних атак. *Системні дослідження та інформаційні технології*, (2), 29—40.

Потий, А. В., Орлова, С., & Гриненко, Т. А. (2001). Статистическое тестирование генераторов случайных и псевдослучайных чисел с использованием набора статистических тестов NIST STS. *Правове, нормативне та метрологічне забезпечення системи захисту інформації в Україні*, (2), 206—214.

ДОСТАТНІ УМОВИ СТІЙКОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

В. В. Довгай
КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
valerdov@gmail.com

Розглядається система лінійних стохастичних диференціальних рівнянь Іто. Після відповідної заміни її дослідження зводиться до дослідження інтегрального рівняння для математичного сподівання норми нового вектора стану системи. Його розв'язок оцінюється зверху, що дозволяє сформулювати достатні умови стійкості тривіального розв'язку даної системи.

Ключові слова: лінійна система, стохастична стійкість, достатні умови.

Дослідження динамічних систем, що описуються лінійними диференціальними рівняннями і які зазнають впливу випадкових факторів типу «білого шуму», часто приводить до необхідності розгляду наступної системи стохастичних рівнянь Іто

$$dx = A(t)xdt + \sum_{k=1}^{m} B_k(t)xd\xi_k(t), \tag{1}$$

в якій $x = x(t)$ — n-вимірний вектор з компонентами $x_i = x_i(t)$ $(i = 1,2,\dots,n)$, $A(t), B_k(t)$ — неперервні при $t \ge t_0$ матриці розмірності $n \times n$ з елементами $a_{ij}(t)$, $b_{kij}(t)$ $(i,\ j = 1,2,\dots,n;\ k = 1,2,\dots,m)$ відповідно, $\xi_k(t)(k = 1,2,\dots,m)$ — незалежні вінерівські випадкові процеси. Установімо достатні умови стійкості тривіального розв'язку рівняння (1), для чого позначмо через $x(t,t_0,x_0)$ розв'язок задачі Коші для цього рівняння з невипадковою початковою умовою

$$x(t_0,t_0,x_0) = x_0\,. \tag{2}$$

Тривіальний розв'язок рівняння (1) називатимемо *стійким у середньоквадратичному* (Хасьминский, 1969), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$ таке, що коли $\left|x_0\right| < \delta$, то розв'язок задачі Коші (1)—(2) задовольнятиме нерівності $M\left|x(t,t_0,x_0\right|^2 < \varepsilon$ при всіх $t \ge t_0$. Якщо, крім того

$$\lim_{t\to\infty} M\left|x(t,t_0,x_0)\right|^2 = 0,$$

то тривіальний розв'язок рівняння (1) буде асимптотично стійким у середньоквадратичному. Тут і далі символом M позначено операцію математичного сподівання, а символом $\left|x(t,t_0,x_0)\right|$ — норму вектора $x(t,t_0,x_0)$.

Для досягнення сформульованої мети враховуючи формулу Іто (Хасьминский, 1969) виконаємо в (1) наступну заміну

$$x = \exp\left\{\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} m(u)du\right\}y,\ m(t) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t), \tag{3}$$

після якої для $y = y(t)$ з компонентами $y_i = y_i(t)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ одержимо таке рівняння

$$dy = \left[A(t) - E_n \frac{m(t)}{2}\right] y dt + \sum_{k=1}^{m} B_k(t) y d\xi_k(t),$$

де E_n — одинична $n \times n$ матриця. Звідси на основі формули Іто одержуємо рівняння для норми вектора y

$$d\left|y\right|^2 = \left[2(A(t)y,y) - m(t)\left|y\right|^2 + \sum_{k=1}^{m}\left|B_k(t)y\right|^2\right]dt + 2\sum_{k=1}^{m}\left(B_k(t)y,y\right)d\xi_k(t), \qquad (4)$$

у якому

$$\left|y\right|^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 .$$

Інтегруючи рівняння (4) від t_0 до t, маємо

$$\left|y(t,t_0,x_0)\right|^2 - \left|x_0\right|^2 = \int_{t_0}^{t}\Big[2\left(A(u)y(u,t_0,x_0), y(u,t_0,x_0)\right) - m(u)\left|y(u,t_0,x_0)\right|^2 +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\left|B_k(u)y(u,t_0,x_0)\right|^2\Big]du + 2\sum_{k=1}^{m}\int_{t_0}^{t}\left(B_k(u)y(u,t_0,x_0), y(u,t_0,x_0)\right)d\xi_k(u).$$

Тут функція $y(t,t_0,x_0)$ зв'язана з розв'язком $x(t,t_0,x_0)$ задачі Коші (1)—(2) співвідношенням (3). Обчислимо тепер від обох частин даної рівності математичне сподівання, застосовуючи при цьому властивості стохастичного інтеграла Іто (Хасьминский, 1969):

$$\begin{gathered} M\left|y(t,t_0,x_0)\right|^2 = \left|x_0\right|^2 + M\int_{t_0}^{t}\Big[2\left(A(u)y(u,t_0,x_0), y(u,t_0,x_0)\right) - \\ -m(u)\left|y(u,t_0,x_0)\right|^2 + \sum_{k=1}^{m}\left|B_k(u)y(u,t_0,x_0)\right|^2\Big]du. \end{gathered} \qquad (5)$$

Оцінимо вираз вигляду $2(A(u)y,y) - m(u)\left|y\right|^2$, що присутній тут у правій частині й у якому $y = y(u,t_0,x_0)$, а y_i — компоненти y $(i = 1,2,\ldots,n)$.

$$2(A(u)y,y) - m(u)\left|y\right|^2 = \left(\left(2A(u) - m(u)E_n\right)y, y\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(2a_{ii}(u) - m(u)\right)y_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1, j\neq i}^{n}\left(a_{ij}(u) + a_{ji}(u)\right)y_i y_j \le$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}\left|2a_{ii}(u)-m(u)\right|y_i^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\frac{\left|a_{ij}(u)+a_{ji}(u)\right|}{2}\left(y_i^{\,2}+y_j^{\,2}\right),$$

Ураховуючи одержаний результат, перепишімо (5) у вигляді

$$M\left|y(t,t_0,x_0)\right|^2\leq\left|x_0\right|^2+M\int_{t_0}^{t}\left[\sum_{i=1}^{n}\left|2a_{ii}(u)-m(u)\right|y_i^2+\right.$$
$$\left.+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n}\frac{\left|a_{ij}(u)+a_{ji}(u)\right|}{2}\left(y_i^2+y_j^2\right)+\sum_{k=1}^{m}\left|B_k(u)\right|^2\left|y\right|^2\right]du. \tag{6}$$

Визначимо такі неперервні на $[t_0,\infty)$ функції $a(t),b(t)$, для яких при $t\geq t_0$ та всіх $i,j=1,2,\ldots,n;\ i\neq j$ виконуються нерівності

$$\left|2a_{ii}(t)\ -\ m(t)\right|\leq b(t),\ a_{ij}(t)\ +\ a_{ji}(t)\leq a(t). \tag{7}$$

Тоді з (6) і (7) випливає наступна інтегральна нерівність

$$M\left|y(t,t_0,x_0)\right|^2\leq\left|x_0\right|^2+\int_{t_0}^{t}p(u)M\left|y(u,t_0,x_0)\right|^2du,$$

де введено позначення

$$p(u)=b(u)+(n-1)a(u)+\sum_{k=1}^{m}\left|B_k(u)\right|^2. \tag{8}$$

Слід відзначити, що функція $a(u)$ в (8) може бути рівна й нулю у випадку, коли елементи матриці $A(u)$ мають властивість

$$a_{ij}\left(u\right)\ =-\ a_{ji}\left(u\right);\ \ i,j=1,2,\ldots,n;\ \ i\neq j,\ \ u\in[t_0,\infty).$$

Застосуємо до одержаної інтегральної нерівності лему Гронуолла — Беллмана (Павлюк, 1971), та встановимо оцінку зверху

$$M\left|y(t,t_0,x_0)\right|^2\leq\left|x_0\right|^2\exp\left\{\int_{t_0}^{t}p(u)du\right\}.$$

Звідси на основі (3) маємо відповідну оцінку зверху для розв’язку задачі Коші (1)—(2)

$$M\left|x(t,t_0,x_0)\right|^2\leq\left|x_0\right|^2\exp\left\{\int_{t_0}^{t}\left(p(u)+m(u)\right)du\right\}. \tag{9}$$

Ця оцінка буде справедливою для довільних матриць $A(t),B_k(t)$ $(k\ =\ 1,2,\ldots,m)$ та довільних початкових умов.

Розглянемо тепер випадок, коли всі діагональні елементи матриці $A(t)$ задовольняють умовам

$$a_{ii}(t)\leq\alpha_i<0,\ i=1,2,\ldots,n;t\geq t_0. \tag{10}$$

У цьому випадку для визначеної у (3) функції $m(t)$ на $[t_0,\infty)$ буде вірною нерівність

$$m(t) \le \sum_{i=1}^{n} \alpha_i < 0,$$

а отже $b(t)$ у (7) можна вибрати так, що для деякого від'ємного числа β нерівність $b(t) + m(t) \le \beta < 0$ виконуватиметься при всіх $t \ge t_0$ та $n > 1$. Звідси випливає існування таких матриць $A(t), B_k(t)$ $(k = 1,2,\ldots,m)$, для яких при $t \ge t_0$ та деякому $K > 0$ матиме місце нерівність

$$p(t) + m(t) \le -K < 0. \tag{11}$$

У випадку, коли $n = 1$ заміна (3) не дає можливості одержати оцінку вигляду (11), але потрібний результат досягається збільшенням удвічі виразу, що стоїть у (3) під знаком експоненти.

Отже, нехай матриці $A(t), B_k(t)$ $(k = 1,2,\ldots,m)$ в (1) задовольняють умовам (10) та (11), де $p(t), m(t), a(t), b(t)$ визначаються співвідношеннями (3), (7) та (8). Тоді на основі (9) можна записати оцінку

$$M\left|x(t,t_0,x_0\right|^2 \le \left|x_0\right|^2 \exp\left\{-K(t-t_0)\right\}, \tag{12}$$

де $K > 0$ і яка виконується при всіх $t \ge t_0$. З оцінки (12) випливає, згідно з означенням, асимптотична стійкість тривіального розв'язку системи (1) у середньоквадратичному. Очевидно, що вказаний розв'язок залишиться асимптотично стійким у середньоквадратичному, якщо дві умови (10), (11) замінити умовою

$$\lim_{t\to+\infty} (p(t) + m(t)) < 0.$$

Цей же розв'язок буде просто стійким у середньоквадратичному, якщо збігатиметься невласний інтеграл

$$\int_{t_0}^{+\infty} (p(t) + m(t))dt.$$

Установлені тут достатні умови стійкості тривіального розв'язку системи (1) виражаються через коефіцієнти даної системи, що зручно для практичного застосування.

Список літератури

Павлюк, І. А. (1971) *Асимптотичні властивості розв'язків неавтономних систем диференціальних рівнянь другого порядку*. Київ: Вид-во Київського університету.

Хасьминский, Р. З. (1969). *Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров*. Москва: Наука.

АПРОКСИМАЦІЇ СУМАРНИХ ОБ'ЄМІВ ВИПЛАТ СТРАХОВИХ КОМПАНІЙ ОРТОГОНАЛЬНИМИ ПОЛІНОМАМИ

В. О. Дрозденко

Білоцерківський національний аграрний університет, Біла Церква, Україна

drozdenko@yandex.ru

У роботі розглянуто методи наближеного представлення розподілу сумарних об'ємів виплат страхових компаній, які використовують лише перші декілька моментів випадкової величини й урізані ортогональні розклади щільності та функції розподілу. У якості прикладів застосувань нами представлені у стислій, готовій до практичного використання, формі апроксимації Бауерса, Грама — Шарльє, Ед'єворса (Еджворта) та Есшера.

Ключові слова: страхова компанія, сумарний об'єм виплат, апроксимація, лінійна комбінація, моменти випадкової величини, ортогональні поліноми.

Нехай функція $f(x)$ задана на $\left[0,+\infty\right)$. Нехай, також, $w(x)>0$ є неперервною функцією, такою, що інтеграл

$$\int_0^{+\infty}\pi(x)w(x)dx$$

існує для довільного полінома $\pi(x)$. Припускаємо, що $\pi_0(x),\ \pi_1(x),\ \pi_2(x),\ldots$, це послідовність ортогональних поліномів (існує досить багато рекурсивних алгоритмів для отримання таких послідовностей) відносно вагової функції $w(x)$, тобто

$$\int_0^{+\infty}\pi_i(x)\pi_j(x)w(x)dx=0,\ \text{для}\ i\neq j;$$

тут поліном $\pi_k(x)$ має степінь k.

При досить регулярних умовах, деталі досить легко уточнюються в підручниках з дійсного аналізу, отримуємо розклад

$$f(x)=K_0\pi_0w(x)+K_1\pi_1(x)w(x)+\ldots+K_n\pi_n(x)w(x)+\ldots \quad (1)$$

де

$$K_i=a_i^{-1}\int_0^{+\infty}\pi_i(x)f(x)dx\ \text{та}\ a_i:=\int_0^{+\infty}\pi_i^2(x)w(x)dx\ \text{для}\ i=0,1,2,\cdots.$$

З чого випливає, що коефіцієнт K_i є лінійною комбінацією перших i моментів функції $f(x)$. У випадку, коли функція $f(x)$ є щільністю розподілу сумарних об'ємів виплат страхової компанії S, має місце представлення

$$K_i=a_i^{-1}E\left[\pi_i(S)\right].$$

Урізуючи розклад (1), отримаємо апроксимацію щільності $f(x)$ із використанням лише перших N моментів випадкової величини S, а саме

$$f(x)\approx K_0\pi_0(x)w(x)+\ldots+K_1\pi_1(x)w(x)+\ldots+K_N\pi_N(x)w(x). \quad (2)$$

У такий спосіб отримують досить багато широко-вживаних апроксимацій сумарних об'ємів виплат страхових компаній (скажімо, сумарний об'єм річних виплат, сумарний об'єм виплат згенерований одним типом контрактів клієнтами тієї чи іншої компанії, тощо), як наприклад, апроксимація гамма-функцією Бауерса, апроксимація Грама — Шарльє, апроксимація Ед'єворса, апроксимація Есшера, Normal I та Normal II апроксимації, тощо.

Зупинімося детальніше на перших чотирьох зі щойно згаданих публікацій.

Апроксимація гамма-функцією Бауерса. В апроксимації Бауерса (*Bowers' gamma function approximation*) абсолютно неперервна випадкова величина $S \geq 0$, яку можна трактувати як сумарний об'єм виплат, спочатку нормується $S_{norm} := \Delta S$, де $\Delta := E\left[S\right] / Var\left[S\right]$, а потім замінюється $Gamma\left(\alpha, \lambda\right)$ випадковою величиною, щільність якої позначатимемо $f_{norm}^{gamma}(x)$, так, що її перші два моменти збігаються з відповідними моментами S_{norn}. Після цього, до щільності $f_{norm}^{gamma}(x)$ описується процедура описана у вступі до даної публікації з використанням $\omega(x) = x^{\alpha-1}e^{-x} \;/\; \Gamma(\alpha)$, а в якості поліномів використовуються поліноми Лагера (*Laguerre polinomials*)

$$L_k(x) = (-1)^k x^{1-\alpha} e^x \frac{d^k}{dx^k}\left(x^{k+\alpha-1}e^{-x}\right),$$

які, як відомо, є ортогональними відносно гамма-щільності. При цьому перші коефіцієнти розкладу матимуть вигляд

$$K_0 = 1, \quad K_1 = 0, \quad K_2 = 0, \quad K_3 = \frac{\Gamma(\alpha)}{6\Gamma(\alpha+3)}\left[E\left[S_{norm}^3\right] - \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\right],$$

а наближення (2) для $N = 3$ матиме наступний вигляд

$$f_{norm}^{gamma}(x) \approx \omega(x) + K_3 L_3(x)\omega(x),$$

відповідну функцію розподілу, при цьому, можна наблизити наступним чином

$$F_{norn}^{gamma}(x) \approx W(x) + K_3 \int_0^x L_3(y)\omega(y)dy,$$

де $W(x)$ це $Gamma(\alpha,1)$ функція розподілу.

Деталі обчислень подано в роботі Bowers (1967).

Апроксимація Грама — Шарльє. В апроксимації Грама — Шарльє (*Gram–Charlier approximation*) розглядається нормована випадкова величина Z, з середнім 0 та дисперсією 1, з функцією розподілу $G(z)$. Область інтегрування всіх інтегралів у вступі до даної публікації змінюється з $\left[0,+\infty\right)$ на $\left(-\infty,+\infty\right)$, е якості функції $\omega(x)$ використовується стандартна нормальна щільність $\varphi(x)$, а в якості ортогональних поліномів — поліноми Ерміта (*Hermit's polynomials*) $H_k(x) = \varphi^{(k)}(x) \big/ \varphi(x)$, для $k = 0,1,2,\cdots$, де

$$K_0 = 1, \qquad K_1 = K_2 = 0, \qquad K_3 = -E[Z^3]\big/3!, \qquad K_4 = (E[Z^4] - 3)\big/4!.$$

Для отримання наближення щільності Z використовують розклад

$$dG(z) = \varphi(z) + K_3\varphi^{(3)}(z) + K_4\varphi^{(4)}(z) + \ldots,$$

а для отримання наближень функції розподілу — розклад

$$G(z) = \Phi(z) + K_3\Phi^{(3)}(z) + K_4\Phi^{(4)}(z) + \ldots,$$

де $\Phi(z)$ — стандартна нормальна функція розподілу.

У монографії Gerber (1979) наведено результати застосування щойно описаного алгоритму до моделювання сумарних об'ємів виплат страхової компанії за допомогою складно-пуассонівського процесу з відомим параметром інтенсивності та відомими характеристиками розподілу індивідуальних виплат.

Метод названо на честь датського математика Йоргена Грама (*Jørgen Gram*) та швецького астронома Карла Шарльє (*Carl Charlier*), який уперше описано в роботах Gram (1883) та Charlier (1905—06).

Апроксимація Ед'єворса. В апроксимації Ед'єворса (*Edgeworth approximation*) розглядається нормована випадкова величина Z (з середнім 0 та дисперсією 1) з функцією розподілу $G(z)$ та генератрисою $M(t)$. Стартуючи з розкладу в ряд Тейлора логарифма від генератриси в околі нуля

$$\log M(t) = \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} a_k t^k,$$

при цьому

$$a_0 = a_1 = 0, \qquad a_2 = 1\big/2, \qquad a_3 = E[Z^3]\big/6, \qquad a_4 = (E[Z^4] - 3)\big/24,$$

отримуємо, виділивши основну компоненту в окремий множник

$$M(t) = \exp(t^2\big/2) \cdot \exp\Big(a_3t^3 + a_4t^4 + \ldots\Big).$$

Замінивши другий множник його ж розкладом у ряд Тейлора, отримуємо

$$M(t) = \exp\Big(t^2\big/2\Big) \cdot \Big\{1 + a_3t^3 + a_4t^4 + a_3^2t^6\big/2 + \ldots\Big\}.$$

Узявши до уваги те, що $t^k \exp\Big(t^2\big/2\Big)$ є генератрисою для $(-1)^k\varphi^{(k)}(x)$, де $\varphi\big(x\big)$ це стандартна нормальна щільність, з останнього представлення маємо

$$dG(z) = \varphi(z) + a_3\varphi^{(3)}(z) + a_4\varphi^{(4)}(z) + a_3^2\varphi^{(6)}(z)\big/2 + \ldots,$$

що й називають *розкладом Ед'єворса*. Ініціюючою вважають роботу Edgeworth (1905). З описом еволюції подібних методів можна ознайомитись, наприклад, у роботі Blinnikov та Moessner (1998). У роботі Goovaerts та ін. (1977) отримано аналог апроксимації Ед'єворса для розподілів з важкими хвостами.

Апроксимація Есшера. *Перетворенням Есшера* (для $h \in \mathbb{R}$) функції розподілу $F(x)$ випадкової величини S називають

$$\overline{F_h}\big(x\big) := \int_{-\infty}^{x} e^{hy} dF(y)\Big/E\Big[e^{hS}\Big];$$

перетворенням Есшера величини S, у свою чергу, називається випадкова величина $\overline{S_h} := Se^{hS} \big/ E[e^{hS}]$.

Апроксимація Ед'єворса дає досить гарне наближення в околі $E\big[S\big]$, і точність її може бути гіршою у випадку відхилень від $E\big[S\big]$. Як наслідок, ідея апроксимації Есшера (*Esscher approximation*) полягає в тому, що при потребі оцінки величини $F(x) = P\big\{S \le x\big\}$, для фіксованого x, спочатку здійснюють перетворення Есшера з вибором $h^*(x)$ так, що $E[\overline{S_{h^*(x)}}] = x$, а потім застосовують апроксимацію Ед'єворса не до $F(\cdot)$, а до $\overline{F_{h^*(x)}}(\cdot)$ і виконують обернене перетворення.

У випадку, коли S має складно-пуассонівський розподіл з параметром інтенсивності λ та генератрисою розміру індивідуальних виплат $m(t)$ апроксимація Есшера в розкладі до третього доданка, при $h > 0$, дає наступне наближення

$$F(x) = 1 - e^{\lambda[m(h)-1]-hx}\left\{E_0(u) - \frac{m'''(h)}{6\lambda^{1/2}(m''(h))^{3/2}}E_3(u)\right\},$$

де $u := h(\lambda m''(h))^{1/2}$, а h є розв'язком рівняння $\lambda m'(h) = x$. Крім того,

$$E_k(u) = \int_0^{+\infty} e^{-uz}\varphi^{(k)}(z)dz, \qquad \text{для} \qquad k = 0,1,2,\cdots,$$

це так звані *функції Есшера*, а $\varphi(\cdot)$ — стандартна нормальна щільність.

Першоджерелами апроксимації Есшера слід вважати роботи Esscher (1932) та Esscher (1963). Normal I та Normal II апроксимації добре описані в роботі Beard та ін. (1969). Порівняльний аналіз апроксимацій сумарних об'ємів виплат здійснений, зокрема, у роботі Bohman та Esscher (1963). Із загальними концепціями ортогональних наближень можна ознайомитись у монографії Szegö (1975).

Список літератури

Beard, R. E., Pentikäinen, T., & Pesonen, E. (1969). *Risk Theory*. London: Methuen.

Bohman, H., & Esscher, F. (1963). Studies in risk theory with numerical illustrations concerning distribution functions and stop loss premiums. *Skand. Aktuar. J., 46*, 173–225.

Blinnikov, S., & Moessner, R. (1998). Expansions for nearly Gaussian distributions. *Astronomy and Astrophysics Supplement Series, 130*, 193—205.

Bowers, N. L. (1967). Expansion of probability density functions as a gamma densities with application in risk theory. *Transactions of the Society of Actuaries, 18*, 125–137.

Charlier, C. V. L. (1905–06). Über das Fehlergesetz. *Ark. Math. Astr. och Phys., 2*(9), 1–9.

Edgeworth, F. Y. (1905). The law of error. *Cambridge Philos. Soc., 20*, 36–66 and 113–141.

Esscher, F. (1932). On the probability function in the collective theory of risk. *Scand. Actuar. J., 15*, 175–195.

Esscher, F. (1963). On approximate computations when the corresponding characteristic functions are known. *Scand. Actuar. J., 46*, 78–86.

Gerber, H. U. (1979). *An Introduction to Mathematical Risk Theory*. Philadelphia: S. S. Huebner Foundation for Insurance Education.

Goovaerts, M. J., d'Hooge, L., & Van Goethem, P. (1977). An analytical approach to the generalized Poisson process in case of claim distributions with infinite skewness. *Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker*, *77*(1), 59–69.

Gram, J. P. (1883). Über die Entwicklung reeller Funktionen in Reihen Mitteln der Methode der kleinsten Quadrate. *J. reine angew. Math.*, *94*, 41–73.

Pratsiovytyi M. V., & Drozdenko V. O. (2016). Limit behavior of the Esscher premium. *J. Random Operators and Stochastic Equations, 24*(2), 143–146.

Szegö, G. (1975). *Orthogonal Polynomials.* (4th ed.). Providence, RI: Amer. Math. Soc.

ПРО РОЗПОДІЛИ НАПІВНОРМ ГЕЛЬДЕРА ВІД ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ ІЗ ПРОСТОРІВ $\mathbb{F}_{\psi}(\Omega)$

Д. В. Затула

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

dm.zatula@gmail.com

Вивчається питання оцінювання розподілів напівнорм Гельдера від випадкових процесів із просторів $\mathbb{F}_{\psi}(\Omega)$, визначених на компактному метричному просторі та на нескінченному проміжку.

Ключові слова: напівнорми Гельдера, простори $\mathbb{F}_{\psi}(\Omega)$ випадкових величин, модулі неперервності, метрична масивність.

Модулі неперервності та оцінки розподілів супремума від гауссових процесів детально розглянуто в роботі Dudley (1973). Ці результати було узагальнено для деяких класів процесів із просторів Орліча та для φ-субгауссових процесів.

Простори випадкових величин $\mathbb{F}_{\psi}(\Omega)$ та процеси з цих просторів досліджено в роботі Козаченка та Млавця (2012).

Означення 1 (Козаченко & Млавець, 2012). Нехай $\psi(u) > 0, u \geq 1$ — деяка монотонно зростаюча функція така, що $\psi(u) \to \infty$ при $u \to \infty$. Випадкова величина ξ *належить простору* $\mathbb{F}_{\psi}(\Omega)$, якщо виконується наступна умова:

$$\sup_{u\geq 1}\frac{(\mathbf{E}|\xi|^{u})^{1/u}}{\psi(u)} < \infty.$$

Випадковий процес $X = \{X(t), t \in \mathbb{T}\}$ належить простору $\mathbb{F}_{\psi}(\Omega)$, якщо для всіх $t \in \mathbb{T}$ випадкова величина $X(t) \in \mathbb{F}_{\psi}(\Omega)$.

Основною задачею дослідження є знаходження оцінок ймовірності

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{0<\rho(t,s)\leq v}\frac{|X(t)-X(s)|}{f(\rho(t,s))} > x\right\}$$

та модулів неперервності для випадкових процесів $X = \{X(t), t \in \mathbb{T}\}$ із просторів $\mathbb{F}_{\psi}(\Omega)$, визначених на компактному метричному просторі $(\mathbb{T}, \rho)$ та на проміжку $[0,\infty)$. Результати для випадкових процесів, визначених на компакті, представлені в роботі Затули та Козаченка (2014).

Нехай $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — випадкові величини з простору $\mathbb{F}_{\psi}(\Omega)$. Позначимо

$$\eta_n = \max_{1\leq k\leq n}|\xi_k|,\ a_n = \max_{1\leq k\leq n}\|\xi_k\|_{\psi}.$$

Означення 2 (Затула & Козаченко, 2014). Казатимемо, що простір $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$ *має властивість* Z, якщо існують монотонно неспадна функція $z(x) > 0$, монотонно зростаюча функція $U(n)$ та дійсне число $x_0 > 0$ такі, що для будь-якої послідовності випадкових величин $(\xi_k, k = \overline{1,n})$ із простору $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$, $\forall x > x_0$ і для всіх $n \geq 2$ виконується наступна нерівність:

$$\mathrm{P}\{\eta_n > x a_n U(n)\} \leq \frac{1}{n}\exp\{-z(x)\}.$$

Теорема (Затула & Козаченко, 2014). *Нехай* $(\mathbb{T},\rho)$ *— деякий компактний метричний простір. Розглянемо сепарабельний випадковий процес*

$$X = \{X(t), t \in \mathbb{T}\}$$

з банахового простору $\mathbb{F}_\psi(\Omega)$*, що має властивість* Z *з функціями* $U(n)$*,* $z(x)$ *та* $x_0 > 0$*. Припустимо, що існує монотонно зростаюча неперервна функція* $\sigma = \{\sigma(h), h \geq 0\}$ *така, що* $\sigma(0) = 0$ *та виконується наступна нерівність*:

$$\sup_{\rho(t,s) \leq h} \left\| X(t) - X(s) \right\|_\psi \leq \sigma(h).$$

Нехай $N(\varepsilon) = N_\rho(\mathbb{T},\varepsilon)$ — метрична масивність простору $(\mathbb{T},\rho)$. Також нехай

$$\varepsilon_0 = \sigma^{(-1)}\left(\sup_{t,s\in\mathbb{T}} \rho(t,s)\right),$$

де $\sigma^{(-1)}(h)$ є оберненою функцією до функції $\sigma(h)$, та

$$g_B(\varepsilon) = \int_0^{\sigma(\varepsilon)} U(B^2 N^2(\sigma^{(-1)}(t)))dt < \infty, \varepsilon > 0.$$

Тоді для $x > x_0$, $B > 1$ та $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ виконується наступна нерівність:

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{0<\rho(t,s)\leq\varepsilon} \frac{|X(t) - X(s)|}{(6+4\sqrt{2})f_B(\rho(t,s)) + (5+2\sqrt{6})g_B(\rho(t,s))} > x\right\} \leq$$

$$\leq \frac{2B(2B+1)}{(B^2-1)N(\varepsilon)} \cdot \exp\{-z(x)\},$$

де

$$f_B(\varepsilon) = \int_0^{\sigma(\varepsilon)} U(BN(\sigma^{(-1)}(t)))dt, \varepsilon > 0.$$

Базуючись на теоремі 1, також доведено результат для випадкових процесів, визначених на нескінченному інтервалі $[0,\infty)$.

Список літератури

Dudley, R. M. (1973). Sample functions of the Gaussian processes. *Ann. Probab., 1*(1), 3–68.

Затула, Д. В., & Козаченко, Ю. В. (2014). Умови Ліпшиця для випадкових процесів з банахових просторів $\mathbb{F}_{\psi}(\Omega)$ випадкових величин. *Теорія ймовірн. та матем. статист., 91*, 38—54.

Козаченко, Ю. В., & Млавець, Ю. Ю. (2012). Простори Банаха випадкових величин $\mathbb{F}_{\psi}(\Omega)$. *Теорія ймовірн. та матем. статист., 86*, 92—107.

ВИЯВЛЕННЯ ПРИХОВАНИХ ПЕРІОДИЧНОСТЕЙ ЗА СПОСТЕРЕЖЕННЯМИ ВИПАДКОВОГО ПОЛЯ НА ПЛОЩИНІ

О. В. Іванов, О. В. Маляр
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ, Україна
alexntuu@gmail.com, malyar95@ukr.net

У доповіді розглянуто властивість консистентності оцінки найменших квадратів параметрів текстурованої поверхні, що описана синусоїдальними коливаннями, за спостереженнями на площині на фоні однорідного та ізотропного випадкового шуму.

Ключові слова: виявлення прихованих періодичностей, оцінка найменших квадратів, збіжність майже напевно, консистентність.

Розглянемо модель спостережень

$$X(t) = g(t,\theta^0) + \varepsilon(t), \quad t = (t_1,t_2) \in [0,\infty)\times[0,\infty), \tag{1}$$

де

$$g\left(t,\theta^0\right) = A^0\cos\left(\varphi_1^0 t_1 + \varphi_1^0 t_2\right) + B^0\sin\left(\varphi_1^0 t_1 + \varphi_2^0 t_2\right), \tag{2}$$

$\theta^0 = \left(A^0, B^0, \varphi_1^0, \varphi_2^0\right) \in \Theta \subset \mathbb{R}^4$ — вектор істинних значень невідомих параметрів, $\left(A^0\right)^2 + \left(B^0\right)^2 > 0$, Θ — деяка відкрита параметрична множина в якій амплітуди A, B можуть набувати будь-яких значень, а кутові частоти $\varphi \in \Phi$, де

$$\Phi = \{\varphi = \left(\varphi_1,\varphi_2\right) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \underline{\varphi} < \varphi_1 < \varphi_2 < \overline{\varphi} < \infty\},$$

$\varepsilon = \left\{\varepsilon\left(t\right),\ t \in \mathbb{R}^2\right\}$, — випадковий шум з нульовим середнім.

Статистичне оцінювання невідомих амплітуд та кутових частот у моделі (1), (2) та її модифікацій — це природне узагальнення класичної задачі виявлення прихованих періодичностей, яка має численні застосування у прикладних галузях знань (Quinn & Hannan, 2001).

Так, модель типу (1), (2), у якій

$$g(t,\theta^0) = \sum_{k=1}^{p}(A_k^0\cos(s\lambda_k^0 + t\mu_k^0) + B_k^0\sin(s\lambda_k^0 + t\mu_k^0)),$$

а шум є послідовністю незалежних однакових розподілених випадкових величин з нульовим середнім та скінченною дисперсією, зокрема, гауссівських, має спеціальний інтерес у спектрографії (див., наприклад, Malliavin (1994a, 1994b)) та отримала значну увагу в літературі з обробки сигналів (див., наприклад, роботу Nandi, Kundu та Srivastava (2013) і наведені там посилання), завдяки застосуванню в аналізі симетричних текстурних, так званих, образів відтінків сірого (gray-scale texture images).

Означення. *Оцінкою найменших квадратів* (*о.н.к.*) параметра $\theta^0 \in \Theta$ за спостереженнями $X(t),\ t \in [0,T] \times [0,T] = \Pi(T)$, називається будь-який випадковий вектор $\theta_T = (A_T, B_T, \varphi_{1T}, \varphi_{2T})$, для якого

$$Q_T\left(\theta_T\right) = \min_{\theta \in \Theta^c} Q_T\left(\theta\right),\ Q_T\left(\theta\right) = T^{-2} \int\limits_{\Pi(T)} \left[X\left(t\right) - g\left(t,\theta\right)\right]^2 dt.$$

Введемо умови:

A1. ε є однорідним ізотропним гауссівським полем з коваріаційною функцією

$$B\left(t\right) = E\varepsilon\left(t\right)\varepsilon\left(0\right) = L\left(\left\|t\right\|\right)\left\|t\right\|^{-\alpha},\ \alpha \in \left(0,1\right),$$

де L — повільно змінна на нескінченності функція;

A2. ε є однорідним ізотропним гауссівським полем таким, що $B\left(\cdot\right) \in L_1\left(\mathbb{R}^2\right)$.

Наступна теорема узагальнює результат роботи Іванов (2009).

Теорема. *Якщо виконується умова **A1** з неспадною функцією L або припущення **A2**, то о.н.к. θ_T є консистентною оцінкою параметра θ^0, а саме:*

$$A_T \to A^0,\ \ B_T \to B^0,\ \ T\left(\varphi_{1T} - \varphi_1^0\right) \to 0,\ \ T\left(\varphi_{2T} - \varphi_2^0\right) \to 0$$

майже напевно (м.н.) при $T \to \infty$.

Для доведення даної теореми використовуються наступні леми.

Лема 1. Якщо виконано припущення **A1** з монотонно неспадною функцією $L(t),\ t \ge 0$, то

$$\xi\left(T\right) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^2} T^{-2} \left| \int\limits_0^T \int\limits_0^T e^{-i\left(\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2\right)} \varepsilon\left(t_1, t_2\right) dt_1 dt_2 \right| \underset{T \to \infty}{\longrightarrow} 0 \text{ м. н.} \tag{3}$$

Лема 2. Якщо виконано припущення **A2,** то правильне (3).

Схема доведення лем 1 і 2 полягає в тому, що спочатку встановлюється, що

$$\mathrm{E}\,\xi(T)^2 \xrightarrow[T \to \infty]{} 0,$$

а потім застосовується добре відомий прийом (Крамер & Лидбеттер, 1969) для посилення цього результату до співвідношення (3). Доведення теореми полягає у використанні системи нормальних рівнянь для обчислення о.н.к. амплітуд A_T та B_T й застосуванні лем 1, 2 (Іванов, 2009).

Список літератури

Malliavin, P. (1994a). Sur la norme d'une matrice circulante Gaussienne. *CR de l'Academie des Sciences. Serie 1(Mathematique), 319,* 745–749.

Malliavin, P. (1994b). Estimation d'un signal Lorentzien. *CR de l'Academie des Sciences. Serie 1(Mathematique), 319,* 991–997.

Nandi, S., Kundu, D., & Srivastava, R. K. (2013). Noise space decomposition method for two-dimensional sinusoidal model. *Computation Statistics and Data Analysis, 58,* 147–161.

Quinn, B. G., & Hannan, E. J. (2001). *The estimation and tracking of frequency*. (Vol. 9). Cambridge University Press.

Іванов, О. В. (2009). Консистентність оцінки найменших квадратів амплітуд та кутових частот суми гармонійних коливань у моделях з сильною залежністю. *Теорія ймовірностей та математична статистика*, *80*, 55—62.

Крамер, Г., & Лидбеттер, М. (1969). *Стационарные случайные процессы*, Москва: Мир.

ВЕЛИКІ ВІДХИЛЕННЯ ОЦІНКИ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ ПАРАМЕТРІВ РЕГРЕСІЇ ІЗ СТАЦІОНАРНИМ СУБГАУССІВСЬКИМ ШУМОМ

О. В. Іванов, І. В. Орловський

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

alexntuu@gmail.com, i.v.orlovsky@gmail.com

У доповіді розглядаються нелінійні моделі регресії з неперервним часом та сумісно строго субгауссівським випадковим шумом. Наведено результати щодо експоненціального спадання ймовірностей великих відхилень оцінок найменших квадратів параметрів таких моделей та приклади, до яких ці результати можна застосовувати.

Ключові слова: великі відхилення, нелінійна модель регресії, неперервний час, оцінка найменших квадратів, субгауссівський випадковий шум

Ймовірності великих відхилень оцінки найменших квадратів (о.н.к.) параметрів нелінійних моделей регресії раніше досліджувались багатьма авторами. Так, у роботі Ivanov (1977) було отримано степеневу швидкість спадання ймовірностей скалярного параметра в нелінійних моделях регресії з незалежними однаково розподіленими похибками спостережень, а Rao (1984) отримано аналогічні результати з експоненціальною швидкістю спадання в гауссівських нелінійних регресії. У Sieders та Dzhaparidze (1987) було отримано теорему про ймовірності векиких відхилень для M-оцінок, яку застосовано до о.н.к. параметрів нелінійних моделей регресії з предгауссівськими та субгауссівськими помилками спостережень. Крім того, результати щодо ймовірностей великих відхилень о.н.к. у нелінійних моделях регресії з коррельованими спостереженнями можна знайти в роботах (Ivanov & Leonenko, 1989; Rao, 1984b; Hu, 1993; Yang & Hu, 2014; Huang et al., 2016).

У роботі Ivanov (2016) розглянуто нелінійну регресію з дискретним часом та сумісно строго субгауссівськими похибками спостережень. Результати, наведені в доповіді розширюють результати роботи Ivanov (2016) на випадок неперервного часу.

Розглянемо нелінійну модель регресії

$$X(t) = g(t,\theta) + \varepsilon(t), t \geq 0, \tag{1}$$

де $g:[0,\infty)\times\Theta^c \to \mathbb{R}$ — неперервна функція, Θ^c — замикання відкритої обмеженої опуклої множини $\Theta \subset \mathbb{R}^q$, $\theta \in \Theta$ — істинне значення параметра, $\varepsilon(t)$, $t \in \mathbb{R}$, — неперервний у середньому квадратичному стаціонарний випадковий процес (в. п.) з нульовим середнім.

Означення 1. *Оцінкою найменших квадрат*ів (о.н.к.) невідомого параметра $\theta \in \Theta$, одержаною за спостереженнями $X(t), t \in [0, T]$, виду (1) називається будь-який випадковий вектор $\hat{\theta}_T = \hat{\theta}_T\left(X(t), t \in [0,T]\right) \in \Theta^c$, для якого

$$Q_T\left(\hat{\theta}_T\right) = \min_{\tau \in \Theta^c} Q_T(\tau), \ \ Q_T(\tau) = \int\limits_0^T \left(X(t) - g(t,\tau)\right)^2 dt, \tau \in \Theta^c.$$

Означення 2. Випадковий вектор $\boldsymbol{\xi} = \left(\xi_1, ..., \xi_n\right)^* \in \mathbb{R}^n$ (* — означає транспонування) називається *строго субгауссівським*, якщо для довільного $\mathbf{y} = \left(y_1, ..., y_n\right)^* \in \mathbb{R}^n$

$$E\exp\left\{\left\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{y}\right\rangle\right\} \le \exp\left\{\frac{1}{2}\left\langle \mathbf{B}\mathbf{y}, \mathbf{y}\right\rangle\right\},$$

де $\left\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{y}\right\rangle = \sum\limits_{k=1}^n \xi_k y_k$, $\mathbf{B} = \left(B_{ij}\right)_{i,j=1}^n$ — коваріаційна матриця $\boldsymbol{\xi}$, тобто

$$B_{ij} = \mathrm{E}\xi_i \xi_j, \ i,j = \overline{1,n}, \left\langle \mathbf{B}\mathbf{y}, \mathbf{y}\right\rangle = \sum_{i,j=1}^n B_{ij} y_i y_j .$$

Означення 3. В. п. $\varepsilon(t), t \in \mathbb{R},$ називається *сумісно строго субгауссівським*, якщо для довільного $n \ge 1$ та довільних $t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}$ випадковий вектор $\boldsymbol{\varepsilon}_n = \left(\varepsilon_{t_1}, ..., \varepsilon_{t_n}\right)^*$ є строго субгауссівським.

Більш детальну інформацію щодо субгауссівських випадкових величин, векторів та процесів можна знайти в книзі Buldygin та Kozachenko (2000).

Щодо випадкового шуму ε в моделі (1) зробимо наступні припущення:

1) в. п. $\varepsilon(t), t \in \mathbb{R},$ є сумісно строго субгауссівським, $B(t,s) = \mathrm{E}\,\varepsilon(t)\varepsilon(s)$, $t, s \in \mathbb{R}$;

2) для довільного $n \ge 1$ та довільних $\mathbf{t} = \left(t_1, ..., t_n\right) \in \mathbb{R}^n$

$$\left\langle \mathbf{B}\mathbf{t}, \mathbf{t}\right\rangle \le \gamma \left\| \mathbf{t} \right\|$$

для деякої константи γ,

$$\left\|\mathbf{t}\right\| = \left(\sum_{k=1}^n t_k^2\right)^{1/2}, \ \mathbf{B} = \left(B(t_i, t_l)\right)_{i,l=1}^n;$$

Введемо позначення,

$$d_T(\theta) = \mathrm{diag}\left(d_{iT}(\theta)\right)_{i=1}^q, \ d_{iT}(\theta) = \left(\int\limits_0^T \left(\frac{\partial}{\partial \theta_i} g(t,\theta)\right)^2 dt\right)^{1/2}, \ i = \overline{1,q},$$

$$U_T(\theta) = d_T(\theta)(\Theta^c - \theta), \ \Delta(t,u) = g\left(t, \theta + d_T^{-1}u\right) - g(t,\theta), \ u \in U_T(\theta);$$

3) існують такі числа $0 < \underline{\varkappa}(\theta) < \overline{\varkappa}(\theta) < \infty$, що для довільних

$u, v \in U_T(\theta)$ та для достатньо великих T $(T > T_0)$

$$\underline{\varkappa}(\theta)\left\|u - v\right\|^2 \leq \int\limits_0^T \left(\Delta(t,u) - \Delta(t,v)\right)^2 dt \leq \overline{\varkappa}(\theta)\left\|u - v\right\|^2.$$

Теорема. *Якщо умови* **1)—3)** *виконано, тоді існують константи* $A_0, a_0 > 0$ *такі, що для* $T > T_0$ *та достатньо великих* R $(R > R_0)$

$$P\left\{\left\|d_T(\theta)\left(\hat{\theta}_T - \theta\right)\right\| \geq R\right\} \leq A_0 \exp\left\{-a_0 R^2\right\},$$

більш того, для довільного $\alpha > 0$ *сталу* A_0 *можна обрати таку, що*

$$a_0 \geq \frac{\underline{\varkappa}(\theta)}{8\gamma(1+q)} - \alpha.$$

Розглянемо приклад сумісно строго субгауссівського процесу ε;

4) в. п. $\varepsilon(t), t \in \mathbb{R},$ допускає представлення

$$\varepsilon(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \psi(t-s)d\zeta(s),$$

де $\zeta(t), t \in \mathbb{R},$ є неперервний у середньому квадратичному, сумісно строго субгауссівський в. п. з ортогональними приростами,

$$\mathrm{E}\,\zeta(t) = 0,\ \mathrm{E}(\zeta(t+s) - \zeta(t))^2 = s,\ t \in \mathbb{R},\ s > 0;$$

$\psi(t),\ t \in \mathbb{R},$ є невипадковою функцією, для якої $\psi(t) = 0,\ t < 0$, та

$$\int\limits_0^{\infty} \psi^2(t)dt < \infty.$$

Зазначимо, що ε є стаціонарним у широкому розумінні в. п., і його спектральна щільність $f(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}$, допускає представлення

$$f(\lambda) = (2\pi)^{-1}\left|h(i\lambda)\right|^2,\ h(i\lambda) = \int\limits_0^{\infty} \psi(t)e^{-i\lambda t}dt. \tag{3}$$

Крім того, можна показати, що ε за умови **4)** буде сумісно строго субгауссівським процесом.

Припустимо також, що

5) спектральна щільність f в. п. ε є обмеженою, причому $\overline{f} = \sup\limits_{\lambda \in \mathbb{R}} f(\lambda)$.

Наслідок 1. Якщо умови **3)—5)** виконано, тоді твердження **Теореми** є правильним з нерівністю

$$a_0 \geq \frac{\underline{\varkappa}(\theta)}{16\pi\overline{f}(1+q)} - \alpha.$$

Розглянемо важливий у застосуваннях випадок процесу **4)**, коли функція h

з (3) є дробово раціональною, тобто $h(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, де P, Q є поліномами степенів m та n, відповідно ($m < n$). Припустимо, що поліноми P, Q не мають спільних коренів та не дорівнюють нулю на уявній осі;

6) в. п. $\varepsilon(t)$, $t \in \mathbb{R}$, має спектральну щільність

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \frac{\left|P(i\lambda)\right|^2}{\left|Q(i\lambda)\right|^2},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Зауважимо, що оскільки P, Q не дорівнюють нулю на уявній осі та $m < n$, то

$$f_{\max} = \max_{\lambda \in \mathbb{R}} \frac{\left|P(i\lambda)\right|^2}{\left|Q(i\lambda)\right|^2} < \infty.$$

Наслідок 2. Якщо умови **3), 6)** виконано, тоді твердження **Теореми** є правильним з нерівністю

$$a_0 \geq \frac{\varkappa(\theta)}{8 f_{\max}(1+q)} - \alpha.$$

Припустимо, що виконано умову

7) $\lim\limits_{T \to \infty} T^{-1/2} d_{iT}(\theta) > 0$, $i = \overline{1,q}$.

Наступний наслідок є достатньо сильним твердженням про консистентність о.н.к.

Наслідок 3. За умов **Теореми** або **Наслідків 1, 2** та **7),** для довільних $\rho > 0$, $\delta \in \left[0, 1/2\right)$ та $T > T_0$

$$P\left\{\left\| T^{-1/2} d_T(\theta)\left(\hat{\theta}_T - \theta\right)\right\| \geq \rho T^{-\delta}\right\} \leq A_0 \cdot \exp\left\{-a_0 \rho T^{1-2\delta}\right\},$$

У доповіді наводяться також приклади випадкового шуму та функцій регресії, до яких можна застосувати наведені вище результати.

Список літератури

Buldygin, V. V., & Kozachenko, Yu. V. (2000). *Metric characterization of random variables and random processes*. Providence: AMS.

Hu, S.H. (1993). A large deviation result for the least squares estimators in nonlinear regression. *Stochastic Process and their Applications, 47*, 345–352.

Huang, X., Tang, X., Deng, X., & Wang, X. (2016). The large deviation for the least squares estimator of nonlinear regression model based on WOD errors. *Journal of Inequalities and Applications*, (1), 125. doi: 10.1186/s13660-016-1064-6

Ivanov, A. V. (1977). An asymtotic expansion for the distribution of the least squares estimator of the non-linear regression parameter. *Theory. Probab. Appl.*, *21*(3), 557–570.

Ivanov, A. V. (2016). Large Deviations of regression parameter estimate in the model with stationary sub-Gaussian noise. *Теорія ймовір. та матем. статист.*, *95*, 92—100.

Ivanov, A. V., & Leonenko, N. N. (1989). *Statistical analysis of random fields*. Dordecht: Kluwer Academic Publishers.

Rao, B. P. (1984a). On the exponential rate of convergence of the least squares estimator in the nonlinear regression model with Gaussian errors. *Statistics & Probability letters*, *2*(3), 139–142.

Rao, B. P. (1984b). The rate of convergence for the least squares estimator in a non-linear regression model with dependent errors. *J. Multivariate Analysis*, *14*(3), 315–322.

Sieders, A., & Dzhaparidze, K. O. (1987). A large deviation result for parameter estimators and its application to nonlinear regression analysis. *Ann. Statist.*, *15*(3), 1031–1049.

Yang, W. Z., & Hu, S. H. (2014). Large deviation for a least squares estimator in a nonlinear regression model. *Stat. Probab. Lett.*, *91*, 135–144.

ФОРМУЛА КОШІ ДЛЯ РОЗВ’ЯЗКУ ЛІНІЙНОГО НЕОДНОРІДНОГО СТОХАСТИЧНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З ВИПЕРЕДЖЕННЯМ

О. В. Ільченко, Т. В. Шовкопляс

Київський національний університет імені Тараса Шевченко, Київ, Україна

from_tatyana@ukr.net

Установлено формулу Коші для зображення розв’язків лінійного неоднорідного стохастичного диференціального рівняння з інтегралом Скорохода. Наведено приклад застосування формули Коші у випадку початкової умови та неоднорідностей з випередженням. Зокрема, приклад свідчить, що за умови стійкості з ймовірністю 1 однорідного рівняння розв’язок неоднорідного рівняння може бути стохастично обмеженим.

Ключові слова: визначений стохастичний інтеграл Скорохода, лінійне неоднорідне стохастичне диференціальне рівняння з інтегралом Скорохода, формула Коші, Вінерівський процес, формула Іто.

У публікаціях [2—5, 8] вивчались властивості розв’язків лінійних неоднорідних стохастичних диференціальних рівнянь дифузійного типу. У роботі [3] наведені умови існування стохастично обмежених розв’язків, у роботі [5] показано, що за умови періодичності коефіцієнтів, стохастично обмежений розв’язок може бути також періодичним, тобто мати періодичні скінченновимірні розподіли. Основний інструмент цих досліджень становить формула Коші зображення розв’язків лінійних неоднорідних стохастичних диференціальних рівнянь у явному вигляді. Для стохастичних диференціальних рівнянь зі стохастичним інтегралом Іто формула Коші отримана в [1] та [6]. Оскільки стохастичний інтеграл Скорохода дозволяє розглядати підінтегральні вирази з випередженням відносно фільтрації породженої Вінерівським процесом, то зображення розв’язків лінійних неоднорідних стохастичних диференціальних рівнянь у явному вигляді для рівнянь з інтегралом Скорохода дає можливість вивчати властивості більш широкого класу рівнянь. Частковий випадок формули Коші для інтеграла Скорохода у випадку відсутності неоднорідності у стохастичному інтегралі виписаний у [7].

Установлено формулу Коші для зображення розв’язків лінійного неоднорідного стохастичного диференціального рівняння з інтегралом Скорохода та наведено приклад її застосування у випадку початкової умови та неоднорідностей з випередженням. Зокрема, приклад свідчить, що за умови стійкості з ймовірністю 1 однорідного рівняння розв’язок неоднорідного рівняння може бути стохастично обмеженим.

Нехай $(\Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P})$ — канонічний ймовірнісний простір одновимірного броунівського руху, тобто $\Omega = C_0([0,1])$ — неперервні функції, визначені на відрізку $[0,1]$, такі, що $x(0) = 0$, F — борелевська σ—алгебра, P — вінерівська міра, $\left\|\xi\right\|^2 = \mathrm{E}\,\xi^2$. Через S позначимо множину гладких випадкових величин на просторі $(\Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P})$ [7];. через

$$\int_0^1 f_s(\omega)\,\delta w_s$$

позначатимемо визначений стохастичний інтеграл Скорохода [7], $\mathrm{Dom}\,\delta$ — область визначення інтегралу Скорохода.

Нехай $L_s^2([0,1]^m)$ — підпростір в $L^2([0,1]^m)$ складений з симетричних функцій,

$$\left\|g_l\right\|_2^2 = \int_0^1 \cdots \int_0^1 g_l^{\,2}(s_1,\ldots,s_l)ds_1\ldots ds_l\,.$$

Для $g_l \in L_s^2([0,1]^m)$ визначений кратний стохастичний інтеграл [7]

$$I_l(g_l) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 g_l(s_1,\ldots,s_l)dw_{s_1}\ldots dw_{s_l}\,.$$

Для $f_n \in L_s^2([0,1]^n)$ і $g_m \in L_s^2([0,1]^m)$ через $f_n \tilde{\otimes}\, g_m$ позначено симетризацію тензорного добутку $f_n \otimes g_m$. Якщо $\sigma \in L^2([0,1])$ тоді на Ω існують сімейства перетворень $T^t, A^t : \Omega \to \Omega$, $t \in [0,1]$ визначені так:

$$T^t(\omega)_s = \omega_s + \int\limits_0^{t\wedge s} \sigma_u du,\; A^t(\omega)_s = \omega_s - \int\limits_0^{t\wedge s} \sigma_u du,\; s,t \in [0,1].$$

Зазначимо, що $T^tA^t = A^tT^t = I$, $I(\omega) = \omega$. Позначимо

$$\breve{\varepsilon}(f) = \exp\left\{\int_0^\infty f_u dw_u - \frac{1}{2}\int_0^\infty (f_u)^2 du\right\} \text{ для } f \in L^2([0,\infty)),$$

$$\breve{\varepsilon}_s^t = \breve{\varepsilon}(\sigma \mathrm{I}_{[s,t]}) = \exp\left\{\int_s^t \sigma_u dw_u - \frac{1}{2}\int_s^t \sigma_u^2 du\right\}.$$

Нехай $b \in L^1([0,1])$. Тоді

$$\widehat{\varepsilon}_s^t = \exp\left\{\int_s^t b_u du\right\},\; h_s^t = \widehat{\varepsilon}_s^t \breve{\varepsilon}_s^t,\; h_s^t = h_0^t (h_0^s)^{-1},\; s,t \in [0,1].$$

Справедливе зображення

$$\breve{\varepsilon}_s^t = \sum_{m=0}^\infty \frac{1}{m!} I_m(f_m^{s,t}),$$

де $f_m^{s,t} = \left(\sigma \mathrm{I}_{[s,t]}\right)^{\otimes m}$, $\left(\sigma \mathrm{I}_{[s,t]}\right)(u) = \sigma_u \mathrm{I}_{[s,t]}(u)$, $f_0^{s,t} = 1$.

Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння

$$x_t = x_0(\omega) + \int\limits_0^t \left[b_s x_s + \phi_s(\omega)\right]ds + \int\limits_0^t \left[\sigma_s x_s + \psi_s(\omega)\right]\delta w_s \tag{1}$$

Припускаємо, що випадкові величини які входять у праву частину рівняння (1) зображуються рядами Вінера — Іто, тобто

$$x_0(\omega) = \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} I_n(r_n);\ \phi_t(\omega) = \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} I_n((\phi_t)_n);\ \psi_t(\omega) = \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} I_n((\psi_t)_n).$$

Означення. Процес $x_t,\ 0 \le t \le 1$, називається *розв'язком* рівняння (1), якщо $1_{[0,t]}(\bullet)\sigma_\bullet x_\bullet \in \operatorname{Dom}\delta$ для кожного $t \in [0,1]$ і якщо співвідношення (1) виконується з ймовірністю 1 для кожного $t \in [0,1]$.

Лема. Справедлива рівність

$$I_l(g_l; A^t T^s)\breve{\varepsilon}_s^t = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} I_{l+m}(g_l \tilde{\otimes} f_m^{s,t}).$$

Доведення. Враховуючи формулу добутку кратних стохастичних інтегралів, комбінаторні співвідношення, і те, що

$$I_l(g_l; A^t T^s) = \sum\nolimits_{k=0}^{l} (-1)^k C_l^k I_{l-k}((g_l, f_k^{s,t})),$$

$$(g_l, f_k^{s,t}) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 g_l(s_1,\ldots,s_{l-k},s_{l-k-1},\ldots,s_l) f_k^{s,t}(s_{l-k+1},\ldots,s_l) ds_{l-k+1}\ldots ds_l,$$

маємо

$$I_l(g_l; A^t T^s)\breve{\varepsilon}_s^t = \sum_{k=0}^{l}(-1)^k C_l^k \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!} I_{l-k}((g_l, f_k^{s,t})) I_m(f_m^{s,t}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{l}(-1)^k C_l^k \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\sum_{r=0}^{(l-k)\wedge m} r!\, C_{l-k}^r C_m^r I_{(l-k)+m-2r}((g_l, f_{k+r}^{s,t}) \tilde{\otimes} f_{m-r}^{s,t}) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{l}\sum_{r=0}^{l-k}(-1)^k \frac{r!}{(r+m)!} C_l^k C_{l-k}^r C_{r+m}^r I_{l-(k+r)+m}((g_l, f_{k+r}^{s,t}) \tilde{\otimes} f_m^{s,t}) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!} I_{l+m}(g_l \tilde{\otimes} f_m^{s,t}),$$

оскільки для $v = k + r$, $0 \le v \le l$,

$$\sum_{r=0}^{v}(-1)^{v-r}\frac{r!}{(r+m)!} C_l^{v-r} C_{l-(v-r)}^r C_{r+m}^r = \frac{l!}{m!\,v!\,(l-v)!}\sum_{r=0}^{v}(-1)^{v-r} C_v^{v-r} = \begin{cases} 0, v = \overline{1,l}; \\ \dfrac{1}{m!}, v = 0. \end{cases}$$

Наслідок.

$$\breve{\varepsilon}_s^t \breve{\varepsilon}(f; A^t T^s) = \breve{\varepsilon}(f^{s,t} + f).$$

Позначимо через π_n множину всіх перестановок з n елементів, а через λ_n множину всіх розбиттів множини з n елементів на k та $(n-k)$ елементів. Матимемо

$$\breve{\varepsilon}_s^t \breve{\varepsilon}(f; A^t T^s) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!} I_m(f_m^{s,t}) \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} I_n(f^{\otimes n}; A^t T^s) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} I_n(f^{\otimes n}; A^t T^s)\breve{\varepsilon}_s^t =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!} I_{n+m}(f^{\otimes n} \tilde{\otimes} f_m^{s,t}) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} I_n(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{1}{(n-k)!} f^{\otimes k} \tilde{\otimes} f_{n-k}^{s,t}) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} I_n(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{1}{(n-k)!} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \pi_n} f(\bullet_{\sigma(1)}) \cdot \ldots \cdot f(\bullet_{\sigma(k)}) f^{s,t}(\bullet_{\sigma(k+1)}) \cdot \ldots \cdot f^{s,t}(\bullet_{\sigma(n)})) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} I_n(\sum_{k=0}^{n} \sum_{\sigma \in \lambda_n} f(\bullet_{\sigma(1)}) \cdot \ldots \cdot f(\bullet_{\sigma(k)}) f^{s,t}(\bullet_{\sigma(k+1)}) \cdot \ldots \cdot f^{s,t}(\bullet_{\sigma(n)})) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} I_n((f^{s,t} + f)^{\otimes n}) = \breve{\varepsilon}(f^{s,t} + f).$$

Основним результатом дослідження є

Теорема. *Нехай виконується умови*

1) $\sum_{n=0}^{\infty} n! 2^{2n} \left\| r_n \right\|_2^2 < \infty;\ \sup\limits_{0 \le t \le 1} \sum_{n=0}^{\infty} n! 2^{2n} \left\| (\phi_s)_n \right\|_2^2 < \infty;$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)! 2^{2(n+1)} \left\| \tilde{\psi}_n \right\|_2^2 < \infty;$$

2) $\sup\limits_{0 \le t \le 1} \left(\left| b_t \right| + \left| \sigma_t^2 \right| \right) \le L < \infty.$

Тоді розв'язок рівняння (1) зображується у вигляді

$$x_t = h_0^t x_0(A^t) + \int_0^t h_s^t \phi_s(A^t T^s) ds + \int_0^t h_s^t \psi_s(A^t T^s) \delta w_s.$$

Для лінійних неоднорідних стохастичних диференціальних рівнянь одне із застосувань формули Коші полягає у вивченні властивостей розв'язків при $t \to \infty$. Для рівнянь дифузійного типу ця проблематика досліджувалась, зокрема, в роботах [2—5, 8].

Припускаємо, що $x_0(\omega) = \breve{\varepsilon}(f^1)$, $\phi_t(\omega) = \breve{\varepsilon}(f^2)$, $\psi_t(\omega) \equiv 0$, $f_\bullet^i = q_\bullet^i 1_{[0,T]}(\bullet)$, $0 < T < \infty$, $q^i \in L^2([0,\infty))$, $i = 1,2$. Слід зазначити, що функції такого типу формують тотальну множину у просторі $L^2(\Omega)$. Нехай, також, при $0 \le t < \infty$ $b_t - \sigma_t^2 / 2 \le -\gamma < 0$, існують $\sigma_t' = d\sigma_t / dt$ і $\sigma_t^{-1} = 1/\sigma_t$ такі, що

$$\sup_{0 \le t < \infty} \left(\left| \sigma_t^{-1} \right| + \left| \sigma' \right|_t \right) \le L < \infty.$$

Розглянемо рівняння

$$x_t = \breve{\varepsilon}(f^1) + \int_0^t \left[b_s x_s + \breve{\varepsilon}(f^2) \right] ds + \int_0^t \sigma_s x_s \delta w_s \qquad (2)$$

З наслідку леми випливає, що

$$h_0^t x_0(A^t) = \hat{\varepsilon}_0^t \breve{\varepsilon}(f^{0,t} + f^1),\ h_s^t \phi_s(A^t T^s) = \hat{\varepsilon}_s^t \breve{\varepsilon}(f^{s,t} + f^2).$$

При $T < s < t$ випадкові величини $\breve{\varepsilon}(f^i)$ та $\breve{\varepsilon}_s^t$ незалежні, а відтак,

$$\breve{\varepsilon}(f^{s,t} + f^i) = \breve{\varepsilon}(f^{s,t})\breve{\varepsilon}(f^i).$$

Розв'язок рівняння (2) має вигляд

$$x_t = \widehat{\varepsilon}_0^t\breve{\varepsilon}(f^{0,t} + f^1) + \int_0^t \widehat{\varepsilon}_s^t\breve{\varepsilon}(f^{s,t} + f^2)ds + \int_0^t h_s^t \delta w_s .$$

Оскільки

$$\int_0^t h_s^t \delta w_s = h_0^t \int_0^t (h_0^s)^{-1}\delta w_s - h_0^t \int_0^t \sigma_s (h_0^s)^{-1} ds ,$$

а процес $(h_0^t)^{-1}$ вимірний відносно потоку породженого Вінерівським процесом то інтеграл Скорохода збігається з інтегралом Іто, тобто

$$\int_0^t (h_0^s)^{-1}\delta w_s = \int_0^t (h_0^s)^{-1} dw_s .$$

За допомогою формули Іто отримаємо

$$h_0^t \int_0^t (h_0^s)^{-1} dw_s = h_0^t \sigma_0^{-1} - \sigma_t^{-1} + \int_0^t \sigma_s^{-1}(-b_s + \sigma_s^2 - \sigma_s^{-1}\sigma_s')h_s^t ds .$$

Отже,

$$\begin{gathered} x_t = -\sigma_t^{-1} + \widehat{\varepsilon}_0^t\left(\breve{\varepsilon}(f^{0,t} + f^1) + \sigma_0^{-1}\breve{\varepsilon}(f^{0,t})\right) + \\ + \int_0^t \widehat{\varepsilon}_s^t\left[\breve{\varepsilon}(f^{s,t} + f^2) - \breve{\varepsilon}(f^{s,t})\sigma_s + \breve{\varepsilon}(f^{s,t})\sigma_s^{-1}(-b_s + \sigma_s^2 - \sigma_s^{-1}\sigma_s')\right]ds \end{gathered} . \quad (3)$$

При виконанні зроблених припущень $\widehat{\varepsilon}_0^t\left(\breve{\varepsilon}(f^{0,t} + f^1) + \sigma_0^{-1}\breve{\varepsilon}(f^{0,t})\right)$ прямує до нуля майже напевно при $t \to \infty$, а

$$\int_0^t \widehat{\varepsilon}_s^t\left[\breve{\varepsilon}(f^{s,t} + f^2) - \breve{\varepsilon}(f^{s,t})\sigma_s + \breve{\varepsilon}(f^{s,t})\sigma_s^{-1}(-b_s + \sigma_s^2 - \sigma_s^{-1}\sigma_s')\right]ds$$

— стохастично обмежений процес, як це випливає з [3], оскільки випадкові величини $\breve{\varepsilon}(f^i)$ і $\breve{\varepsilon}(f^{s,t})$ не залежні для $T < s < t$. Отже, розв'язок (3) рівняння (2) буде стохастично обмеженим.

Е даній роботі встановлено формулу Коші зображення розв'язків лінійного неоднорідного стохастичного диференціального рівняння з інтегралом Скорохода. Таке зображення дає можливість досліджувати асимптотичні властивості розв'язків у разі, якщо неоднорідності є функціоналами від Вінерівського процесу з випередженням відносно потоку породженого Вінерівським процесом. Наведений приклад демонструє таку можливість у випадку обмеженої за часом неоднорідності експоненціального типу.

Список літератури

1. Гихман, И. И., & Скороход, А. В. (1968). *Стохастические дифференциальные уравнения*. Киев: Наукова думка.
2. Ільченко, О. В. (2003). Про стаціонарні розв'язки лінійного неоднорідного стохастичного диференціального рівняння. *Вісник КНУ ім. Т. Шевченка, матем. та мех.*, *9,* 36—40.
3. Ільченко, О. В. (2003). Стохастично обмежені розв'язки лінійного неоднорідного стохастичного диференціального рівняння. *Теорія ймовір. та матем. статист.*, *68,* 47—54.
4. Ільченко, О. В. (2007). Про асимптотичне виродження систем лінійних неоднорідних стохастичних диференціальних рівнянь. *Теорія ймовір. та матем. статист., 76,* 39—46.
5. Ільченко О.В. (2013). Періодичні розв'язки лінійного неоднорідного стохастичного диференціального рівняння. *Вісник КНУ ім. Т. Шевченка, матем. та мех.*, *30,* 37—41.
6. Царьков, Е. Ф. (1989) *Случайные возмущения дифференциально—функциональных уравнений*. Рига: Зинатне.
7. Nualart, D. (2006) *The Malliavin calculus and related topics* (3d ed.). Berlin: Springer.
8. Ilchenko, A. (1992). Asymptotic behavior of solutions of nonhomogeneous linear systems of stochastic differential equations with constant coefficients. *Random Operators And Stochastic Equations*, *1*(1), 79–89.

ШВИДКІСТЬ ЗБІЖНОСТІ В ЦЕНТРАЛЬНІЙ ГРАНИЧНІЙ ТЕОРЕМІ В ТЕРМІНАХ СЕРЕДНІХ ПСЕВДОМОМЕНТІВ

М. М. Капустей

Ужгородський національний університет, Ужгород, Україна

michaelkapustey@gmail.com

Наводяться узагальнення оцінок В. М. Золотарьова в термінах середніх псевдомоментів для послідовності незалежних різнорозподілених випадкових величин.

Ключові слова: центральна гранична теорема, швидкість збіжності, псевдомоменти.

В. М. Золотарев (Zolotarev, 1973) одержав узагальнення нерівності Беррі — Ессеена з використанням різного вигляду псевдомоментів, у його монографії Золотарев (1986, с. 377) цей результат поданий трохи в іншій формі. Після роботи Zolotarev (1973) псевдомоменти широко використовуються у граничних теоремах. У роботі Y. Mishura, Munchak та Slyusarchuk (2015) розглядаються умови, при виконанні яких, швидкість збіжності буде вищою, ніж $n^{-\frac{1}{2}}$. У роботах Слюсарчук та Поляк (1998) і Боярищева та Слюсарчук (1999) розглядаються різні підходи до узагальнення результатів Zolotarev (1973) на різнорозподілені випадкові величини. У даній роботі ми уточнюємо результати роботи Слюсарчук та Поляк (1998).

Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — послідовність незалежних випадкових величин з математичними сподіваннями $M\xi_k = 0$ дисперсіями $D\xi_k = \sigma_k^2$,

$B_n^2 = \sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2$. Позначимо через $F_k(\mathrm{x})$ — функцію розподілу випадкової величини ξ_k,

$$S_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n}{B_n},\ \overline{\sigma}_n = \max\left\{\sigma_1, \ldots \sigma_n\right\},\ \underline{\sigma}_n = \min\left\{\sigma_1, \ldots \sigma_n\right\},$$

$\Phi_n(\mathrm{x})$ — функція розподілу S_n, $\Phi(x)$ — функція розподілу стандартного нормального закону,

$$\rho_n = \sup_x \left|\Phi_n(x) - \Phi(x)\right|.$$

Розгляньмо псевдомоменти:

$$\nu_k^{(0)} = \int_{-\infty}^{\infty} \max\left(1, \left|x\right|^3\right) \left|d\left(F_k(x\sigma_k) - \Phi(x)\right)\right|,$$

$$\overline{\nu}_n^{(0)} = B_n^{-2} \overline{\sigma}_n^2 \sum_{k=1}^{n} \nu_k^{(0)};$$

$$\kappa_k^{(0)} = \int_{-\infty}^{\infty} \max\left(1, 3x^2\right)\left|F_k(x\sigma_k) - \Phi(x)\right| dx,$$

$$\overline{\kappa}_n^{(0)} = B_n^{-2}\overline{\sigma}_n \sum_{k=1}^{n} \kappa_k^{(0)}\sigma_k;$$

$$\kappa_k = \int_{-\infty}^{\infty} 3x^2 \left|F_k(x\sigma_k) - \Phi(x)\right| dx,$$

$$\overline{\kappa}_n = B_n^{-2}\overline{\sigma}_n^{-1} \sum_{k=1}^{n} \kappa_k\sigma_k^3.$$

Теорема. *Існують сталі $C^{(1)}$, $C^{(2)}$, $C^{(3)}$, що для всіх $n \geq 1$ справедливі нерівності*

$$\rho_n \leq C^{(1)} \frac{\overline{\sigma}^n}{B_n} \overline{\nu}_n^{(0)} \delta_{n1},$$

$$\rho_n \leq C^{(2)} \frac{\overline{\sigma}^n}{B_n} \max\left\{ \overline{\kappa}_n^{(0)}\delta_{n1}; \left(\overline{\kappa}_n^{(0)}\right)^{\frac{n}{n+1}} \right\},$$

$$\rho_n \leq C^{(3)} \frac{\overline{\sigma}^n}{B_n} \max\left\{ \overline{\kappa}_n\delta_{n2}; \overline{\kappa}_n^{\frac{n}{3n+1}} \right\},$$

де

$$\delta_{n1} = \max\left\{ \frac{\overline{\sigma}_n}{B_n}\left(\frac{\overline{\sigma}_n}{\underline{\sigma}_n}\right)^3; 1 \right\},\ \delta_{n2} = \max\left\{ \frac{\overline{\sigma}_n}{B_n}\left(\frac{\overline{\sigma}_n}{\underline{\sigma}_n}\right)^5; 1 \right\}.$$

Якщо випадкові величини однаково розподілені, то $\delta_{n1} = 1$, $\delta_{n2} = 1$ і з цих оцінок випливають результати Zolotarev (1973).

Список літератури

Mishura, Y., Munchak, Y., & Slyusarchuk, P. (2015). The rate of convergence to the normal law in therms of psevdomoments. *Modern Stochastics: Theory and Applications*, *2*(2), 95–106.

Zolotarev, V. M. (1973). Exactness of an approximation in the central limit theorem. In *Proceedings of the Second Japan–USSR Symposium on Probability Theory* (pp. 531-543). Berlin: Springer.

Боярищева, Т. В., & Слюсарчук, П. В. (1999). Оцінка швидкості збіжності в центральній граничній теоремі для різнорозподілених величин. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія математика*, (4), 12—16.

Золотарев, В. М. (1986). *Современная теория суммирования независимых случайных величин.* Москва: Наука.

Слюсарчук, П. В., & Поляк, І. Й. (1998). Узагальнення одного результату В.М.Золотарьова. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія математика,* (3), 184—189.

УМОВИ ЗБІЖНОСТІ МАЙЖЕ НАПЕВНО ДЛЯ УЗАГАЛЬНЕНОГО ЗАКОНУ ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ РОЗВ’ЯЗКІВ НЕАВТОНОМНИХ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

О. І. Клесов, І. І. Сіренька, О. А. Тимошенко
КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
matan@kpi.ua

Отримано достатні умови збіжності майже напевно до нуля нормованого доданку, що відповідає за дифузію в неавтономному стохастичному диференціальному рівнянні. Одержані результати можна використовувати для дослідження асимптотичної поведінки розв’язків стохастичних диференціальних рівнянь.

Ключові слова. Підсилений закон великих чисел, стохастичне диференціальне рівняння, вінерів процес, асимптотична поведінка.

У даній доповіді сформульовано умови для теореми типу ПЗВЧ (підсиленого закону великих чисел) для розв’язку неавтономного стохастичного диференціального рівняння.

Розглянемо загальне неавтономне стохастичне диференціальне рівняння

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + \sigma(X(t))\theta(t)dw(t), \tag{1}$$

де $w(\cdot)$ ¾ стандартний вінерів процес; $a(\cdot,\cdot)$, $\theta(\cdot)$ та $\sigma(\cdot)$ ¾ неперервні додатні функції такі, що рівняння (1) має неперервний розв’язок $X(\cdot)$.

Припукаємо, що випадковий процес

$$X(t) = \Big(X(\omega, t),\ \omega \in \Omega,\ t \geq 0 \Big)$$

задано на повному ймовірнісному просторі $\Big\{ \Omega,\ F,\ P \Big\}$.

Позначимо

$$\Phi(t) = \int_0^t \phi(u)du,\ t \geq 0,$$

де $\phi(\cdot)$ ¾ неперервна додатна функція така, що

$$\lim_{t\to\infty} \Phi(t) = \infty\,. \tag{2}$$

Теорема. *Припустимо, що* $w(\cdot)$ *— вінерівський процес,* $\sigma(\cdot)$ *— неперервна додатна функція така, що* $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \sigma(x) < \infty$, $a(\cdot,\cdot)$ *та* $\theta(\cdot)$ *— неперервні додатні функції такі, що рівняння* (1) *має неперервний розв’язок* $X(\cdot)$, *для якого* $\lim\limits_{t\to\infty} X(t) = \infty$ *майже напевно* (*м. н.*). *Крім того, нехай виконується умова* (2) *та*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\int_0^{2^{k+1}} \theta^2(s)ds}{\Phi^2(2^k)} < \infty\,. \tag{3}$$

Тоді

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\Phi(t)}\int_0^t \sigma(X(s))\theta(s)dw(s)=0 \text{ м. н.}$$

Лема. При $\theta\equiv 1,\ t\geq 0$, ряд (3) збігається, якщо для деякого $\delta>\dfrac{1}{2}$

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{t^{\delta}}{\Phi(t)}<\infty. \tag{4}$$

Зауваження. Умова (4) виконується, якщо для деякого $\beta<\dfrac{1}{2}$

$$\liminf_{u\to\infty}\phi(u)u^{\beta}>0.$$

Ці результати дозволяють досліджувати асимптотичну поведінку розв'язків більш загальних стохастичних диференціальних рівнянь, ніж ті, які досліджувались іншими авторами (Гіхман & Скороход (1982); Keller, Kersting, & Rösler, 1984; Buldygin, Klesov, & Steinebach, 2007; Appleby, Cheng, & Rodkina 2011; Buldygin, Klesov, Steinebach, & Tymoshenko 2008 та інші).

За одержаних умов з'являється можливість розглядати більш загальні форми залежності коефіцієнтів зсуву та дифузії від часової та просторової змінних.

У подальших дослідженнях планується встановлення нових тверджень, які описують властивості розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь.

Список літератури

Appleby, J. A., Cheng, J., & Rodkina, A. (2011). Characterisation of the asymptotic behaviour of scalar linear differential equations with respect to a fading stochastic perturbation. *Discrete. Contin. Dynam. Syst., Suppl*, 79–90.

Buldygin, V. V., Klesov, O. I., & Steinebach, J. G. (2007). PRV property and the ϕ-asymptotic behavior of solutions of stochastic differential equations. *Lithuanian Mathematical Journal*, *47*(4), 361–378.

Buldygin, V. V., Klesov, O. I., & Steinebach, J. G., & Tymoshenko, O. A. (2008). On the φ-asymptotic behavior of solutions of stochastic differential equations. *Theor Stoch. Process.*, *14*, 11–30.

Keller, G., Kersting, G., & Rosler, U. (1984). On the asymptotic behavior of solutions of stochastic differential equations. *Z. Wahrsch. Geb.*, *68*, 163–184.

Гихман, И. И., & Скороход, А. В. (1982). *Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения*. Киев: Наукова думка.

ОЦІНКИ РОЗПОДІЛУ СУПРЕМУМА МОДУЛЯ СТАЦІОНАРНИХ ГАУССОВИХ ВЛАСНИХ КОМПЛЕКСНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

Ю. В. Козаченко[1], М. Ю. Петранова[2]

[1]*Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна*

[2]*Донецький національний університет імені Василя Стуса, Вінниця, Україна*

m.petranova@donnu.edu.ua

У даній роботі досліджуються властивості власних стаціонарних комплексних випадкових процесів зі стійкими кореляційними функціями. Отримано оцінки для розподілу супремума модуля цих процесів та норми у просторах L_p на скінченних та нескінченних інтервалах.

Ключові слова: комплексний випадковий процес, стаціонарний гауссовий власний комплексний випадковий процес, стійка кореляційна функція.

Розглядаються комплексні випадкові процеси, які є одним з найбільш важливих узагальнень поняття випадкового процесу (див. Doob (1953), Neeser та Massey (1993)). Ці процеси використовуються в якості моделей комплексних амплітуд квазігармонічних коливань або хвиль в радіофізики та оптиці. У роботі отримано оцінки розподілу функціоналів модуля стаціонарних гауссовских власних випадкових комплексних процесів, описується поведінка модуля стаціонарного дійсного випадкового комплексного процесу на нескінченності (подібні оцінки отримані у роботі Petranova (2016)).

Умови існування власних комплексних випадкових процесів описані в роботах Doob (1953), Neeser та Massey (1993). У цій роботі досліджуються стаціонарні комплексні випадкові процеси зі стійкими кореляційними функціями.

Означення 1. Випадковий процес $X(t)=X_c(t)+iX_s(t)$ називається *комплексним випадковим процесом*, де $X_c(t)$ та $X_s(t)$ дійсні випадкові процеси (індекси c та s введені в книзі Doob (1953) та роботі Neeser та Massey (1993), де c — косинус, s — синус).

Означення 2. Функція

$$r(\tau,t)=\mathrm{E}\,X(t+\tau)\overline{X}(t)=\mathrm{E}\,X_c(t+\tau)X_c(t)+\mathrm{E}\,X_s(t+\tau)X_s(t)+$$
$$i(\mathrm{E}\,X_c(t+\tau)X_s(t)-\mathrm{E}\,X_s(t+\tau)X_c(t))$$

називається *кореляційною* функцією процесу $X(t)$. Функція

$$\hat{r}(\tau,t)=\mathrm{E}\,X(t+\tau)X(t)=\mathrm{E}\,X_c(t+\tau)X_c(t)-\mathrm{E}\,X_s(t+\tau)X_s(t)+$$
$$+i\left(\mathrm{E}\,X_c(t+\tau)X_s(t)+\mathrm{E}\,X_s(t+\tau)X_c(t)\right)$$

називається *псевдокореляційною* функцією процесу $X(t)$.

Означення 3. Випадковий комплексний процес $X(t)$ називається *власним випадковим комплексним* процесом (PCR-процесом), якщо псевдокореляційна функція цього процесу дорівнює нулю $\mathrm{E}\,X(t+\tau)X(t)=0$, тобто коли виконуються умови

$$\mathrm{E}\,X_c(t+\tau)X_c(t)=\mathrm{E}\,X_s(t+\tau)X_s(t),$$
$$\mathrm{E}\,X_c(t+\tau)X_s(t)=-\mathrm{E}\,X_s(t+\tau)X_c(t).$$

Означення 4. Функція $r(\tau)$, $\tau\in\mathbb{R}$ називається *стійкою кореляційною* функцією, якщо

$$r(\tau)=\sigma^2\exp\left\{-c\left|\tau\right|^{\alpha}\left(1+i\beta\frac{\tau}{\left|\tau\right|}\omega\left(\tau,\alpha\right)\right)\right\}$$

де σ^2,c,β,α — дійсні константи, такі що $\sigma^2>0, c>0, \left|\beta\right|\le 1, 0\le\alpha\le 2$,

$$\omega\left(\tau,\alpha\right)=\begin{cases}\mathrm{tg}\dfrac{\pi\alpha}{2}, & 0\le\alpha\le 2,\\ \dfrac{2}{\pi}\log\left|\tau\right|, & \alpha=1\end{cases}$$

Теорема. *Нехай* $X=\left\{X(t),t\in[a,b]\right\}$ *власний випадковий комплексний процес зі стійкою кореляційною функцією та нехай*

$$\left|X(t)\right|=\left(X_c^2(t)+X_s^2(t)\right)^{1/2}.$$

Тоді для

$$u\ge\left(\frac{p}{\sqrt{2}}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}+1\right)p}\right)\sigma^2(b-a)^{1/p}$$

виконується наступна нерівність

$$P\left\{\left\|X(t)^2-\sigma^2\right\|_{L_p([a,b])}>u\right\}\le 2\sqrt{1+\frac{u\sqrt{2}}{(b-a)^{1/p}\sigma^2}\exp\left\{-\frac{u}{(b-a)^{1/p}\sigma^2}\right\}}.$$

Список літератури

Doob, J. L. (1953). *Stochastic Processes.* New York: John Wiley and Sons.

Neeser, F. D., & Massey, J. L. (1993). Proper complex random processes with applications to information theory. *IEEE Transactions on Information Theory*, *39*(4), 1293–1302.

Petranova, M. (2016). Simulation of Gaussian stationary quasi Ornstein–Uhlenbeck process with given reliability and accuracy in spaces $C([0,T])$ and $L_p([0,T])$. *Journal of Applied Mathematics and Statistics*, *3*(1), 144–58.

ТЕОРЕМИ БАКСТЕРІВСЬКОГО ТИПУ ДЛЯ УЗАГАЛЬНЕНИХ ГАУССОВИХ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ

С. М. Краснитський[1], О. О. Курченко[2]
[1]*Київський національний університет технології та дизайну, Київ, Україна*
[2]*Київський національний університет Тараса Шевченка, Київ, Україна*
krasnits.sm@ukr.net, olkurchenko@ukr.net

У доповіді анонсована теорема бакстерівського типу для узагальненого гауссового випадкового поля.

Ключові слова: узагальнене випадкове поле, гауссове випадкове поле, теорема бакстерівського типу.

Граничні теореми, зміст яких полягає в формулюванні умов збіжності так званих сум *бакстерівських сум* (або *сум Леві — Бакстера*), що формуються спеціальним чином за допомогою певного випадкового процесу й послідовністю деяких розбиттів проміжку завдання зазначеного процесу, є досить поширеною темою ймовірнісних досліджень. Для гауссових випадкових процесів піонерськими роботами в цьому напрямі стали статті Levy (1940), Baxter (1956), а для гауссових випадкових полів (випадкових функцій на підмножинах простору $\mathbb{R}^N$) — Berman (1967) та Краснитський (1971). Результати згаданого типу належать до області стохастичного аналізу, і в той же час, мають серйозні статистичні застосування. Так, у статистиці випадкових процесів і полів для оцінювання параметрів, поряд з іншими методами, застосовують метод бакстерівських сум. Наприклад, у статті Козаченко та Курченко (1999) цей метод був застосований для оцінки параметра коваріаційної функції багатопараметричного дробового броунівського поля. Граничні теореми бакстерівського типу забезпечують консистентність оцінок, отриманих бакстерівським методом. Теореми бакстерівського типу застосовуються і в задачах перевірки статистичних гіпотез (умови ортогональності ймовірнісних мір, що відповідають розглядуваним випадковим функціям). Указані обставини обґрунтовують доцільність досліджень, що полягають у визначенні і встановленні відповідних властивостей бакстерівских сум на і на інших ймовірнісних об'єктах (а не тільки на процесах і полях на $\mathbb{R}^1$ та $\mathbb{R}^N$). Зокрема становить інтерес дослідження зазначених питань у ситуації спостереження за узагальненою (див., наприклад, Гельфанд та Виленкин (1961) випадковою функцією. Відзначимо, що оскільки в даному випадку значення випадкової функції в точці немає сенсу, то класичні бакстерівські суми й послідовності, у яких фігурують ті чи інші скінченнорізницеві оператори над значеннями процесів (полів) тут очевидним чином не визначені. Відзначимо, що в роботі Krasnitskiy та Kurchenko (2016) одержано деякі загальні результати щодо можливих варіантів означень бакстерівських сум для узагальнених гауссівських випадкових процесів й умови збіжності таких сум у середньоквадратичному та з імовірністю 1. У згаданій роботі міститься застосування одержаних результатів для оцінювання параметрів Хьорста узагальненого процесу дробового броунівського руху та умов ортогональності (сингулярності) ймовірнісних мір, що відповідають указаному процесу. Що стосується теорем бакстерівського типу для узагальнених випадкових полів, то певні відомості ту можна знайти, наприклад, у монографії Розанов (1995), де значна увага приділена застосуванню бакстерівських сум у задачах статистики. Тим не менш, ситуація з теоремами бакстерівського типу для узагальнених випадкових полів досліджена ще далеко не повністю. Наступне твердження можна розглядати як окремий результат дослідження у зазначеному напрямку.

Нехай K — простір фінітних нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}^2$ функцій; $\xi(\phi) = (\xi, \phi)$, $\phi \in K$ — узагальнене гауссове двопараметричне випадкове поле з нульовим математичним очікуванням. Нехай для

$$t = (t_1, t_2), \; h = (h_1, h_2) \; \chi_{t,h} \in K,$$

$$\mathrm{supp}\chi_{t,h} = [t_1, t_1 + h_1] \times [t_2, t_2 + h_2];$$

$$(b_n) \subset \mathrm{N}, \; b_n \to \infty \text{ при } n \to \infty.$$

Функцію $\chi_{t,h}$ при

$$t_1 = \frac{i_1}{b_n}, \; t_2 = \frac{i_2}{b_n}, \; h_1 = h_2 = \frac{1}{b_n}, \; n \geq 1,$$

позначимо через $\chi_{i,n}$, де $i = (i_1, i_2), i_j = 1, \ldots, b_n - 1, j = 1, 2$. Покладімо

$$S_n(\xi) = \sum_{i_1, i_2 = 0}^{b_n - 1} (\xi, \chi_{i,n})^2, \; n \geq 1.$$

Теорема 1. *Нехай* $\xi(\phi)$, $\phi \in K$ *— узагальнене гауссове випадкове поле з нульовим математичним очікуванням. Тоді* $S_n(\xi) - ES_n(\xi) \to 0$ *у середньому квадратичному при* $n \to \infty$ *тоді й тільки тоді, коли*

$$\nu_n(\xi) = \sum_{i_1, i_2 = 0}^{b_n - 1} \sum_{j_1, j_2 = 0}^{b_n - 1} \left(E(\xi, \chi_{i,n})(\xi, \chi_{j,n}) \right)^2 \to 0, \; n \to \infty.$$

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \nu_n(\xi)$ *збіжний, то* $S_n(\xi) - ES_n(\xi) \to 0$ *з ймовірністю одиниця при* $n \to \infty$.

Список літератури

Baxter, G. (1956). A strong limit theorem for Gaussian processes. *Proc. Amer. Math. Soc., 7,* 522–527.

Berman, S. M. (1967). A version of the Levy–Baxter theorem for the increments of Brownian motion of several parameters. *Proc. Amer. Math. Soc., 18,* 1051–1055.

Kozachenko, Yu. V., & Kurchenko, O. O. (1999). An estimate for the multiparameter FBM. *Theory of Stochastic Processes, 5,* 113–119.

Krasnitskiy S. M., & Kurchenko O. O. (2016). Baxter type theorems for generalized random Gaussian processes. *Theory of Stochastic Processes*, *21*(1), 45–53.
Levy, P. (1940). Le movement Brownian plan. *Amer. J. Math.*, *62*, 422–437.
Гельфанд, И. М., & Виленкин, Н. Я. (1961). Некоторые применения гармонического анализа. Оснащённые гильбертовы пространства. Москва: Физматлит.
Краснитский, С. М. (1971). О некоторых предельных теоремах с гауссовскими разностями *m*-го порядка. *Теория вероятностей и математическая статистика*, *5*, 71–80.
Розанов, Ю. А. (1995). *Случайные поля и стохастические уравнения с частными производными*, Москва: Наука.

МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОВОГО САМОЗАЙМАННЯ ПИЛОВУГІЛЬНИХ СУМІШЕЙ З ВИКОРИСТАННЯМ ПРИКЛАДНОЇ ТЕОРІЇ КАТАСТРОФ

Б. В. Кузьменко

Інститут вугільних енерготехнологій НАН України, Київ, Україна

bkuzmenko@i.ua

Отримана математична модель теплового самозаймання пиловугільних сумішей. Ця модель описує процес за детермінованих, стохастичних, нечітких умов. Вона також поширена на системи хаотичного типу. Встановлено, що фазовою траєкторією відповідної динамічної системи не може бути дивний атрактор.

Ключові слова: пиловугільні суміші, теплове самозаймання, детерміновані, стохастичні, нечіткі та хаотичні системи та умови.

Класична математична модель процесу теплового самозаймання пиловугільних сумішей (детерміновані умови) складається із сукупності двох звичайних нелінійних рівнянь теплового та матеріального балансу та одного лінійного рівняння, яке пов'язує невідомі функції (масовий вміст у пиловугільній суміші вуглецю та окислювача).

Теорія хаосу — математичний апарат, що описує поведінку деяких нелінійних динамічних систем, схильних за певних умов до явища, відомого як *хаос*. Поведінка такої системи здається випадковою, навіть якщо модель, що описує систему, є детермінованою. Прикладами подібних систем є атмосфера, турбулентні потоки, біологічні популяції, суспільство як система комунікацій і його підсистеми: економічні, політичні та інші соціальні системи. Їх вивчення поряд з аналітичним дослідженням наявних рекурентних співвідношень, зазвичай супроводжується *математичним моделюванням*. Теорія хаосу — область досліджень, що зв'язує математику, фізику і філософію. Теорія хаосу стверджує, що складні системи надзвичайно залежні від початкових умов і невеликі зміни в навколишньому середовищі ведуть до непередбачуваних наслідків. Математичні системи з хаотичним поведінкою є детермінованими, то тобто підкоряються деякого суворому закону і, у якомусь сенсі, є впорядкованими. Таке використання слова «хаос» відрізняється від його звичайного значення (як хаос у міфології). Існує також така галузь фізики, як теорія квантового хаосу, що вивчає недетерміновані системи, що підкоряються законам квантової механіки. Піонером теорії вважають французького фізика й філософа Анрі Пуанкаре (довів теорему про повернення), радянські математики А. М. Колмогоров і В. І. Арнольд та німецький математик Ю. К. Мозер побудували теорію хаосу, звану КАМ (теорія Колмогорова — Арнольда — Мозера). У теорії запроваджено поняття *атракторів* (у тому числі, *дивних атракторів*), стійких орбіт системи (т. зв. *КАМ-торів*). У побутовому контексті слово «хаос» означає «бути у стані безладу». У теорії хаосу прикметник *хаотичний* визначено більш точно. Хоча загальноприйнятого універсального математичного означення хаосу немає, його зазвичай описують так:

динамічна система, яка класифікується як *хаотична*, повинна мати такі властивості:

1) вона повинна бути чутлива до початкових умов;

2) вона повинна мати властивість топологічного змішування;

3) її періодичні орбіти повинні бути всюди щільними.

Більш точно математичні умови виникнення хаосу виглядають так: система повинна мати нелінійні характеристики, бути глобально стійкою, але мати хоча б одну нестійку точку рівноваги коливального типу, проте розмірність має бути не меншою за 1.5 з порядком диференціального рівняння не менше третього. Лінійні системи ніколи не бувають хаотичними. Для того, щоб динамічна система була хаотичною, вона повинна бути нелінійною. За теоремою Пуанкаре — Бендиксона (Poincaré–Bendixson), безперервна динамічна система на площині не може бути хаотичною. Серед безперервних систем хаотична поведінка мають тільки неплоскі просторові системи (обов'язкова наявність не менше трьох вимірів або неевклідова геометрія). Однак дискретна динамічна система на якійсь стадії може виявляти хаотичну поведінку навіть в одновимірному чи двовимірному просторі.

Чутливість до початкових умов у такій системі означає, що всі точки, спочатку близько наближені між собою, у майбутньому мають значно відмінні траєкторії. Таким чином, довільно невелика зміна поточної траєкторії може привести до значної зміни в її майбутній поведінці. Доведено, що останні дві властивості фактично мають на увазі чутливість до початкових умов (альтернативне, більш слабке визначення хаосу використовує тільки перші дві властивості з вищезгаданого списку). Чутливість до початкових умов більш відома як «ефект метелика». Термін виник у зв'язку зі статтею «Пророцтво: Помах крил метелика в Бразилії викличе торнадо у штаті Техас», яку Едвард Лоренц в 1972 році вручив американської «Асоціації для просування науки» у Вашингтоні. Помах крил метелика символізує дрібні зміни в первісному стані системи, які викликають ланцюжок подій, що ведуть до великомасштабних змін. Якби метелик не плескав крилами, то траєкторія системи була б зовсім іншою, що у принципі доводить певну лінійність системи. Але дрібні зміни в первісному стані системи можуть і не викликати ланцюжок подій. Топологічне змішування в динаміці хаосу означає таку схему розширення системи, що одна її область у якійсь стадії розширення накладається на будь-яку іншу область. Математичне поняття «змішування» як приклад хаотичної системи відповідає змішуванню різнокольорових фарб або рідин. У популярних роботах чутливість до первинних умов часто плутається з самим хаосом. Грань дуже тонка, оскільки залежить від вибору показників виміру й визначення відстаней у конкретній стадії системи. Наприклад, розглядаємо просту динамічну систему, яка неодноразово подвоює первинні значення. Така система має чутливу залежність від первинних умов скрізь, оскільки будь-які дві сусідні точки в первинній стадії згодом випадковим чином будуть на значній відстані один від одного. Проте її поведінка тривіальна, оскільки всі точки окрім нуля мають тенденцію до нескінченності, і це не топологічне змішування. У визначенні хаосу увага зазвичай обмежується тільки закритими системами, у яких розширення й чутливість до первинних умов об'єднуються зі змішуванням.

Навіть для закритих систем, чутливість до первинних умов не ідентична з хаосом у сенсі викладеному вище. Наприклад, розглянемо тор (геометрична фігура, поверхня обертання кола навколо осі, що лежить у площині цього кола — має форму бублика), заданий парою кутів $\left(x, y\right)$ зі значеннями від 0 до 2π. Відображення будь-якої точки $\left(x, y\right)$ визначається як $\left(2x, y + a\right)$, де значення $\dfrac{a}{2\pi}$ є ірраціональним. Подвоєння першої координати у відображенні вказує на чутливість до первинних умов. Проте, через ірраціональну зміну у другій координаті, немає ніяких періодичних орбіт — отже відображення не є хаотичним згідно з вищезгаданим визначенням. Атрактор (англ. *attract* — притягати, притягувати) — безліч станів (точніше — точок фазового простору) динамічної системи, до якого вона прагне з часом. Найбільш простими варіантами атрактора є притягальна нерухома точка (приміром, у завданні про маятник з тертям) і періодична траєкторія (приклад — коливання, що самозбуджуються, у контурі з позитивним зворотним зв'язком), проте бувають і значно складніші приклади.

Деякі динамічні системи є хаотичними завжди, але в більшості випадків хаотична поведінка спостерігається тільки в тих випадках, коли параметри динамічної системи належать до деякого спеціального підпростору.

Найцікавіші випадки хаотичної поведінки, коли великий набір первинних умов призводить до зміни на орбітах атрактора. Простий спосіб продемонструвати хаотичний атрактор — це розпочати з точки в районі тяжіння атрактора і потім скласти графік його подальшої орбіти. Більшість типів руху описуються простими атракторами, що є обмеженими циклами. Хаотичний рух описується дивними атракторами, які дуже складні і мають багато параметрів. Наприклад, проста тривимірна система погоди описується відомим атрактором Лоренца — одній з найвідоміших діаграм хаотичних систем, не лише тому, що вона була однією з перших, але і тому, що вона одна з найскладніших. Іншим таким атрактором є аттрактор Реслера, яка має подвійний період, подібно до логістичного відображення.

Дивні атрактори з'являються в обох системах, і у безперервних динамічних (типу системи Лоренца) і в деяких дискретних (наприклад, відображення Ено (Hénon)). Деякі дискретні динамічні системи названі системами Жуліа за походженням. І дивні атрактори, і системи Жуліа мають типову рекурсивну, фрактальну структуру (Кузьменко & Мальчевський, 2011).

Теорема Пуанкаре — Бендиксона доводить, що дивний атрактор може виникнути у безперервній динамічній системі, тільки якщо вона має три або більше вимірів. Проте це обмеження не працює для дискретних динамічних систем. Дискретні двух- і навіть одновимірні системи можуть мати дивні атрактори. Рух трьох або більшої кількості тіл, що випробовують гравітаційне тяжіння за деяких початкових умов може виявитися хаотичним рухом.

Застосування теорії хаосу та катастроф дає всі підстави стверджувати про відсутність у цій системі відповідних режимів (Кузьменко & Мальчевський, 2011; Кузьменко, 2015; Кузьменко & Лисенко, 2006).

Список літератури

Кузьменко, Б. В. (2015). Математичні дослідження процесу теплового самозаймання пиловугільних сумішей за детермінованих, стохастичних, нечітких та хаотичних умов. *Математика в сучасному технічному університеті*, *1*, 30—40.

Кузьменко, Б. В., & Лисенко, В. П. (2006). *Спеціальні розділи вищої математики*: *Нечіткі множини, нечіткі відношення, нечітка логіка та основи теорії наближених міркувань. Двійкові динамічні системи. Теорія випадкових функцій і процесів. Прикладна теорія катастроф*. Київ: Фенікс.

Кузьменко, Б. В., & Мальчевський, І. А. (2011). *Теплове самозаймання пиловугільних сумішей*: *Монографія*. Проект «Наукова книга». Київ: Наукова думка.

ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ДЛЯ МАКСИМУМУ СУМ НЕЗАЛЕЖНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ.

І. К. Мацак[1], А. М. Плічко[2], А. С. Шелуденко[1]

[1]*Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна*

[2]*Краківська політехніка імені Тадеуша Косцюшка, Краків, Польща*

anytusinichka@mail.ru

Вивчаються умови слабкої збіжності максимуму сум незалежних випадкових процесів у просторах L_p та $C[0,1]$.

Ключові слова: гранична теорема, випадкова величина, слабка збіжність, броунівський рух.

Ставиться задача дослідження умов, при яких має місце слабка збіжність максимуму сум незалежних випадкових процесів у просторах L_p та $C[0,1]$.

Нехай $X = \{X(s), s[0,1]\}$ — деякий випадковий процес (в. п.), а $\Gamma = \{\Gamma(s), s \in [0,1]\}$ — гаусівський в. п., визначені на ймовірнісному просторі $(\Omega;\Sigma;\mathbf{P})$, зі значеннями в $\mathbb{R}$ такі, що для будь-яких $s,t \in [0,1]$

$$\mathbf{E}X(s) = \mathbf{E}\Gamma(s) = 0 \text{ і } \mathbf{E}X(s)X(t) = \mathbf{E}\Gamma(s)\Gamma(t) =: R(s,t). \tag{1}$$

Розглянемо сепарабельний функційний банахів простір

$$B = \{x = x(s),\, s \in [0,1]\}.$$

Казатимемо, що в. п. *належить* B *майже напевне* (м. н.), якщо його вибіркові функції належать B м. н. (Мацак, 2008).

Припустимо, що Γ належить B м. н. і введемо випадкову функцію двох змінних

$$W(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n(s) F_n(t),\ \ s,t \in [0,1], \tag{2}$$

де (Γ_n) — послідовність незалежних копій процесу Γ, а $F_n(t)$ — пікоподібні функції Фабера — Шаудера (які є інтегралами відповідних функцій Гаара $\mathrm{H}_n(u)$, точніше

$$F_n(t) = \int_0^t \mathrm{H}_{n-1}(u)\,du.$$

Такий процес називається *процесом броунівського руху* (*або вінерівським процесом*) *зі значеннями в* B.

Позначимо через (X_n) послідовність незалежних копій процесу X і покладімо

$$S_n(s) = \sum_{k=1}^{n} X_k(s),\ S_0 = 0,\ \overline{S}_n(s) = \max_{0 \le k \le 1} S_k(s),\ n \ge 1.$$

Якщо в. п. $S_n(s)$ та $W(s)$ належать просторові B м. н., то природно поставити задачу дослідження умов, за яких має місце слабка збіжність у цьому просторі: при $n \to \infty$

$$\frac{\overline{S}_n(\cdot)}{\sqrt{n}} \to \overline{W}(\cdot). \qquad (3).$$

Через $L_p = L_p[0,1]$, $1 \le p < \infty$, позначаємо банахів простір (класів) вимірних функцій $x(t)$ на просторі $([0,1], \Lambda, \mu)$ з нормою

$$\|x\| = \left(\int_1^1 |x(t)|^p \mu(dt) \right)^{1/p}.$$

Простір $C[0,1]$ складається з неперервних на відрізку $[0,1]$ функцій з рівномірною нормою. Запровадимо такі позначення

$$T_h = \left\{ (s,t) \in [0,1]^2 : |s-t| \le h \right\}, h > 0;$$

$$d_p(s,t) = \left(\mathbf{E} |X(s) - X(t)|^p \right)^{1/p}, \ s,t \in [0,1], \ p \ge 1, d_p(h) = \sup_{T_h} d_p(s,t).$$

Теорема 1. *Якщо випадкові процеси* X *та* Γ *задовольняють умову* (1) *і для деякого* $p \ge 2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n/p} d_p\left(2^{-n}\right) < \infty,$$

то X, Γ *та* $\overline{W}$ належать $C[0,1]$ *м. н. і в просторі* $C[0,1]$ *має місце слабка збіжність* (3).

Покладаємо

$$S_p = \left(\sigma_p(s), s \in [0,1] \right), \ \sigma_p(s) = \left| \mathbf{E} |X(s)|^p \right|^{1/p}.$$

Теорема 2. *Якщо вимірні випадкові процеси* X *та* Γ *задовольняють умову* (2) *і виконується нерівність*

$$\|S_{p^*}\|_{p^*} = \left(\int_0^1 s_{p^*}^{p^*}(s) ds \right)^{1/p^*} < \infty,$$

то X, Γ та $\overline{W}$ належать L_p м. н. і в L_p має місце слабка збіжність (3).

Список літератури

Мацак, И. К. (2008). Деякі граничні теореми для максимуму сум незалежних випадкових процесів. *Укр. мат. журн.*, *60*(12), 1664—1674.

КОНСИСТЕНТНІСТЬ ОЦІНКИ УІТЛА ПАРАМЕТРІВ СПЕКТРАЛЬНОЇ ЩІЛЬНОСТІ ЛІНІЙНОГО ВИПАДКОВОГО ШУМУ В НЕЛІНІЙНІЙ РЕГРЕСІЇ

І. В.Орловський, Т. А. Кулумбегова
КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
i.v.orlovsky@gmail.com, tatykulumbehova@gmail.com

У доповіді розглядаються нелінійні моделі регресії з неперервним часом та стаціонарним лінійним випадковим шумом. Наводяться достатні умови консистентності оцінки Уітла спектральної щільності випадкового шуму таких моделей.

Ключові слова: оцінка Уітла, спектральна щільність, нелінійна модель регресії, неперервний час, лінійний випадковий шум.

Доповідь присвячена дослідженню асимптотичних властивостей оцінки Уітла параметра спектральної щільності (с. щ.) випадкового шуму в нелінійній моделі регресії типу «сигнал+шум». Задачі дослідження випадкового шуму, його структури та характеристик є важливою складовою регресійного аналізу. Особливістю такої постановки задачі є те, що «сигнал» (функція регресії) в цьому випадку стає заважаючим, і для нівелювання його впливу необхідно оцінити параметри функції регресії. У якості такої оцінки обрано оцінку найменших квадратів (о. н. к.), яка є однією з найважливіших та широко вживаних оцінок. Асимптотичні властивості о. н. к. розглядались багатьма авторами. Ми, в свою чергу, пошлемося лише на монографії Іванов та Леоненко (1989) і Іванов (1997), які містять достатньо повну бібліографію з цього питання.

Оцінка Уітла вперше з’явилася у роботах Whittle (1951, 1953) і на теперішній час є однією з найпопулярніших оцінок с. щ.

Асимптотичні властивості оцінок Уітла параметрів с. щ. стаціонарного гауссівського шуму в нелінійних моделях регресії розглядались у роботі Іванов та Приходько (2015). У доповіді наводяться результати, які продовжують дослідження вказаної роботи, розширюючи їх на на випадок лінійного стаціонарного процесу, який не обов’язково є гауссівським.

Розглянемо модель регресії

$$X(t) = g(t,\theta) + \varepsilon(t),\ t \ge 0, \tag{1}$$

де $g : (-\Delta;\infty)\times\Theta_\gamma \to \mathbb{R}$ — неперервна функція,

$$\Theta_\gamma = \bigcup_{\|e\|\le 1} (\Theta + \gamma e),$$

γ, Δ — деякі додатні числа, Θ — обмежена відкрита опукла множина, $\theta \in \Theta$ — істинне значення параметра.

Означення 1. *О. н. к.* параметра $\theta \in \Theta$, отриманою за спостереженнями $\{X(t), t\in[0,T]\}$ вигляду (1), називається будь-який випадковий вектор

$$\hat\theta_T = \hat\theta_T(X(t), t\in[0,T]) \in \Theta^c,$$

Θ^c — замикання Θ в $\mathbb{R}^q$, для якого

$$Q_T(\hat{\theta}_T) = \min_{\tau \in \Theta^c} Q_T(\tau), \qquad Q_T(\theta) = \int_0^T (X(t) - g(t,\tau))^2 dt.$$

Щодо випадкового шуму ε припускаємо, що $\varepsilon(t), t \in \mathbb{R},$ є дійснозначним вимірним стаціонарним лінійним процесом, $\mathrm{E}\,\varepsilon(0) = 0.$

Лінійність випадкового процесу ε ми будемо розуміти у тому сенсі, що він має представлення

$$\varepsilon(t) = \int_{\mathbb{R}} a(t-s)\zeta(ds), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

де $a(t), t \in \mathbb{R}$, — функція, інтегровна у квадраті відносно незалежно розподіленої випадкової міри зі скінченими другими моментами, тобто однорідна випадкова міра $\zeta(A), A \subset \mathbb{R},$ зі скінченими другими моментами та незалежними значеннями на множинах, що не перетинаються.

Перевагою припущення щодо лінійного представлення (2) є явне представлення кумулянт цього процесу

$$C_k(t_1,\dots,t_k) = d_k \int_{\mathbb{R}} \prod_{j=1}^{k} a(t_j - s) ds,$$

де d_k — кумулянта k-го порядку випадкової величини $\zeta\left(\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]\right)$.

Е частотній області ми отримаємо с. щ. старших порядків

$$f_k(\lambda_1,\dots,\lambda_{k-1}) = d_k \cdot a(-\lambda_1 - \dots - \lambda_{k-1}) \cdot \prod_{j=1}^{k-1} a(\lambda_j).$$

Для $k = 2$ будемо мати звичайну с. щ.

$$f_2(\lambda) = d_2 a(\lambda) a(-\lambda).$$

Припускаємо, що

$$a(\lambda) = a(\lambda, \varkappa_a), d_k = d_k(\varkappa_d).$$

Тоді спектральну щільність можна записати, як

$$f_2(\lambda, \varkappa), \quad \varkappa = (\varkappa_a, \varkappa_d) \in \Xi \subset \mathbb{R}^m,$$

Ξ — компактна множина, а істинне значення $\varkappa$ є внутрішньою точкою Ξ. Більш того, припускаємо, що $f(\lambda, \varkappa_1) \neq f(\lambda, \varkappa_2)$ при $\varkappa_1 \neq \varkappa_2$ майже всюди в $\mathbb{R}$ відносно міри Лебега.

Розгляньмо поле контрасту Уітла

$$U_T(\kappa, \hat{\theta}_T) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\ln f(\lambda, \kappa) + \frac{I_T(\lambda, \hat{\theta}_T)}{f(\lambda, \kappa)} \right) \omega(\lambda) d\lambda, \ \kappa \in \Xi, \tag{3}$$

де $I_T(\lambda, \hat{\theta}_T)$ періодограма другого порядку

$$I_T(\lambda, \hat{\theta}_T) = \frac{1}{2T\pi} \left| \int_0^T \varepsilon(t) e^{-it\lambda} dt \right|^2, \lambda \in \mathbb{R}. \qquad (4)$$

Означення 2. *Оцінкою мінімального контрасту* невідомого параметра $\varkappa \in \Xi$, називається будь-який вектор $\hat{\varkappa}_T$, для якого

$$U_T\left(\hat{\varkappa}_T, \hat{\theta}_T\right) = \min_{\kappa \in \Xi} U_T(\kappa, \hat{\theta}_T).$$

У доповіді наведено достатні умови консистентності оцінки Уітла с.щ. випадкового шуму, який є стаціонарним лінійним процесом у нелінійній моделі регресії.

Список літератури

Ivanov, A. V. (1997). *Asymptotic theory of nonlinear regression*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Ivanov, A. V., & Leonenko, N. N. (1989). *Statistical analysis of random fields*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Whittle, P. (1951). *Hypothesis testing in time series analysis*. New York: Hafner.

Whittle, P. (1953). Estimation and information in stationary time series. *Arkiv för matematik, 2*(5), 423–434.

Іванов, О. В., & Приходько, В. В. (2015). Про оцінку Уітла параметра спектральної щільності випадкового шуму в моделі нелінійної регресії. *Український математичний журнал, 67*(8), 1050—1067.

КЛАСИ ФУНКЦІЙ, ЯКІ УЗАГАЛЬНЮЮТЬ ПРАВИЛЬНО ЗМІННІ

В. В. Павленков
КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
pavlenkov@matan.kpi.ua

У доповіді розглянуто різні класи функцій, які узагальнюють правильно змінні функції та встановлюються зв'язки між цими класами.

Ключові слова: правильно змінна функція, RV функція, ORV функція, регулярно log-періодична функція.

Поняття *правильно змінної* (RV) з'явилося в роботі Karamata (1930). На сьогодні теорія правильно змінних функцій є добре розвиненою та використовується у різних розділах математики.

Нехай $\mathbb{FM}_+$ позначає сімейство додатних та вимірних (за Лебегом) функцій $\big(f(x),\ x > 0\big)$. Для функції $f \in \mathbb{FM}_+$ розглянемо її *верхню та нижню граничні функції*

$$f^*(\lambda) = \limsup_{x\to\infty}\frac{f(\lambda x)}{f(x)},\ f_*(\lambda) = \liminf_{x\to\infty}\frac{f(\lambda x)}{f(x)},\ \lambda > 0\,,$$

які приймають значення в множині $\big[0,\infty\big]$.

Функція $f \in \mathbb{FM}_+$ називається *правильно змінною,* якщо для кожного $\lambda > 0$

$$f^*(\lambda) = f_*(\lambda) = \kappa(\lambda) \in \big(0,\infty\big),$$

тобто якщо для кожного $\lambda > 0$ існує додатна та скінченна границя

$$\kappa(\lambda) = \lim_{x\to\infty}\frac{f(\lambda x)}{f(x)}.$$

Клас правильно змінних функцій позначимо через RV.

Перші узагальнення правильно змінних функцій з'явилися в Avakumovic (1936). Функція $f \in \mathbb{FM}_+$ називається O-*правильно змінною* (ORV), якщо для кожного $\lambda > 0$ справедлива нерівність $f^*(\lambda) < \infty$. Клас таких функції позначимо ORV.

Для довільної ORV функції f існують та скінченні її *верхній та нижній індекси*

$$\rho^* = \limsup_{x\to\infty}\frac{\ln f(x)}{\ln x},\ \rho_* = \limsup_{x\to\infty}\frac{\ln f(x)}{\ln x}.$$

ORV функцію f будемо називати *ORV функцією з індексом*, якщо виконується рівність $\rho^* = \rho_*$. Клас таких функцій позначимо ORVind.

У роботах Buldygin, Klesov та Steinebach (2004), Булдигін, Індлекофер, Клесов та Штайнебах (2012), Булдыгин та Павленков (2012) розглядаються

ORV функції з невиродженими групами регулярних точок та регулярно log-періодичні функції. Класи таких функцій позначимо через ORN та RLP відповідно.

Число $\lambda > 0$ називають *регулярною точкою* функції $f \in \mathbb{FM}_+$, якщо

$$f^*(\lambda) = f_*(\lambda) \in \left(0, \infty\right) .$$

Множина всіх регулярних точок функції є групою відносно множення її називають *групою регулярних точок*. Якщо для функції $f \in \mathbb{FM}_+$ її група регулярних точок містить принаймні два елемента, то функцію називають *функцією з невиродженою групою регулярних точок*.

До класу RLP належать функції $f \in \mathbb{FM}_+$ вигляду

$$f(x) = r(x)h(\ln x),\ x > 0,$$

де r — RV функція, h — неперервна періодична функція.

У статті Cadena та Kratz (2015) міститься ще одне узагальнення правильно змінних функцій, там означено клас функцій M. До класу M належать функції $f \in \mathbb{FM}_+$ для яких існує число $\rho \in \mathbb{R}$ таке, що для кожного $\varepsilon > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^{\rho-\varepsilon}} = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^{\rho+\varepsilon}} = 0.$$

Для введених вище класів функцій, що узагальнюють правильно змінні, справедливе наступне твердження:

$$RV \subset RLP \subset ORN \subset ORVind = (ORV \bigcap M) .$$

Список літератури

Avakumovic, V. G. (1936). Uber einer O-Inversionssatz. *Bull. Int. Acad. Youg. Sci.*, *29*(30), 107–117.

Buldygin, V. V., Klesov, O. I., & Steinebach, J. G. (2004). On factorization representations for Avakumović–Karamata functions with nondegenerate groups of regular points. *Analysis Mathematica*, *30*(3), 161–192.

Cadena, M., & Kratz, M. (2015). *A new extension of the class of regularly varying functions*. HAL Id: hal-01181346. Available at: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01181346/document

Karamata, J. (1930). Sur un mode de croissance régulière des fonctions. *Mathematica (Cluj)*, *4*, 38–53.

Булдигін, В. В., Індлекофер, К.-Х., Клесов, О. І., & Штайнебах, Й. Г. (2012). *Псевдорегулярні функції та узагальнені процеси відновлення.* Київ: ТВіМС.

Булдыгин, В. В., & Павленков, В. В. (2012). Теорема Караматы для регулярно log-периодических функций. *Укр. мат. журн.*, 64(11), 1443—1463.

ХВИЛЬОВЕ РІВНЯННЯ НА ПЛОЩИНІ ЗІ СТІЙКИМ БІЛИМ ШУМОМ

Л. І. Пригара, Г. М. Шевченко

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

pruhara7@gmail.com, zhoraster@gmail.com

Розглянуто хвильове рівняння на площині зі стійким білим шумом. Визначено потенційний розв'язок рівняння за допомогою формули Пуассона — Парсеваля. Установлено локальні властивості реалізацій потенційного розв'язку та доведено, що він є узагальненим розв'язком рівняння.

Ключові слова: хвильове рівняння, білий шум, формула Пуассона — Парсеваля.

Вступ. Рівняння математичної фізики з випадковою правою частиною відіграють значну роль у моделюванні. Більшість літератури з тематики присвячено або випадку загальних стохастичних мір (Pryhara & Shevchenko, 2016; Radchenko, 2009), або випадку гаусівських чи субгаусівських розподілів випадковості (Радченко, 1999; Balan & Tudor, 2010; Dalang & Frangos, 1998; Millet & Morien, 2000; Radchenko, 2011; Quer-Sardanyons & Tindel, 2007; Samorodnitsky & Taqqu, 1994). Тому наявні результати непридатні в ситуації, коли випадковість має важкі хвости розділу.

Попередні відомості. Стійкі величини та їх розподіли. У цій статті розглядатимуться лише симетричні α-стійкі $(S\alpha S)$ випадкові величини з $\alpha \in (0,2)$. Більш докладну інформацію про стійкі величини можна знайти у Radchenko (2009). Випадкова величина $\xi \in S\alpha S$ з параметром масштабу $\sigma^{\alpha}, \sigma > 0,$ якщо її характеристична функція

$$E\left[e^{i\lambda\xi}\right] = e^{-|\sigma\lambda|^{\alpha}}.$$

Для стійкої величини ξ визначимо $\|\xi\|_{\alpha}^{\alpha} = -\ln E\left[e^{i\xi}\right].$

Розглядатиметься $S\alpha S$ міра на $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$ з незалежними приростами. За означенням це функція

$$M : B_f\left(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+\right) \times \Omega \to \mathbb{R},$$

де $B_f\left(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+\right)$ — сім'я борелевих підмножин скінченної міри Лебега, із властивостями:

1) для будь-якої борельової множини $A \in B_f\left(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+\right)$ випадкова величина $M(A)$ є $S\alpha S$ з параметром масштабу, що дорівнює $\lambda(A)$, мірі Лебега множини A;

2) для непересинних множин $A_1,\dots,A_n \in B_f\left(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+\right)$ значення $M\left(A_1\right),\dots,M\left(A_n\right)$ є незалежними;

3) для неперетинних множин $A_1,\dots,A_n,\dots \in B_f\left(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+\right)$ таких, що

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in B_f\left(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+\right)$$

виконано

$$M\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} M\left(A_n\right) \text{ майже напевно.}$$

Для функцій $f(x,t) \in L^{\alpha}\left(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+\right)$ інтеграл

$$I(f) = \int_0^{\infty} \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,t) M(dx,dt)$$

визначено як границю за імовірністю інтегралів від простих функцій з обмеженим носієм. Має місце ізометрична властивість:

$$\left\| I(f) \right\|_{\alpha}^{\alpha} = \int_0^{\infty} \iint_{\mathbb{R}^2} \left| f(x,t) \right|^{\alpha} dxdt.$$

Для M має місце зображення ЛеПажа. Нехай ϕ — довільна неперервна додатна щільність розподілу на $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$. Незалежні набори

$$\left\{\Gamma_k, k \geq 1\right\}, \left\{\left(\xi_k, \zeta_k\right), k \geq 1\right\}, \left\{g_k, k \geq 1\right\}$$

задовольняють наступні умови:

1) $\left\{\Gamma_k, k \geq 1\right\}$ — послідовність моментів стрибків пуассонівського процесу з одиничною інтенсивністю;

2) $\left\{\left(\xi_k, \zeta_k\right), k \geq 1\right\}$ — незалежні випадкові вектори зі щільністю ϕ;

3) $\left\{g_k, k \geq 1\right\}$ — незалежні центровані нормально розподілені величини з

$$E\left[\left|g_k\right|^{\alpha}\right] = 1.$$

Тоді M має такий самий розподіл, що й

$$M'(dx,dt) = C_{\alpha} \sum_{k \geq 1} \Gamma_k^{-1/\alpha} \phi\left(\xi_k, \zeta_k\right)^{-1/\alpha} \delta_{\left(\xi_k, \zeta_k\right)} g_k(dx,dt), \qquad (1)$$

де

$$C_{\alpha} = \left(\frac{\Gamma\left(2-\alpha\right)}{1-\alpha} \cos\frac{\pi\alpha}{2}\right)^{1/\alpha},$$

причому ряд майже напевно збігається.

Рівність (1) потрібно розуміти у наступному сенсі: для довільних $f_1,\dots,f_n \in L^{\alpha}\left(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+\right)$ вектор $\left(I\left(f_1\right),\dots,I\left(f_n\right)\right)$ має такий самий розподіл, що й вектор $\left(I'\left(f_1\right),\dots,I'\left(f_n\right)\right)$, де

$$I'\left(f_n\right) = C_{\alpha}\sum_{k\geq 1}\Gamma_k^{-1/\alpha}\phi\left(\xi_k,\zeta_k\right)^{-1/\alpha} f\left(\xi_k,\zeta_k\right)g_k. \tag{2}$$

Надалі без обмеження загальності вважатимемо, що M задається формулою (1), а для функції $f(x,t) \in L^{\alpha}\left(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+\right)$ інтеграл

$$I(f) = \int_0^{\infty}\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,t)M(dx,dt)$$

задається формулою (2). Причому для довільної функції $f(x,t) \in L^{\alpha}\left(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+\right)$ ряд є збіжним майже напевно.

Формула Пуассона — Парсеваля для хвильового рівняння з білим шумом. Ми розглядаємо хвильове рівняння з α-стійким збуренням:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta\right)U(x,t) = f(x,t), \\ U(x,0) = 0, \\ \dfrac{\partial U(x,0)}{\partial t} = 0, \end{cases} \tag{3}$$

Розглядатимемо випадкове збурення, що є просторово-часовим шумом, тобто

$$f(x,t) = \sigma(x,t)\dot{M}(x,t),$$

де $\dot{M}(x,t)$ — «α-стійкий білий шум» у $\mathbb{R}^2$, що є щільністю Радона — Нікодима міри M, $\sigma : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ — неперервна обмежена функція.

У якості кандидата на розв’язок рівняння (3) варто розглянути функцію, що задана формулою Пуассона — Парсеваля:

$$U(x,t) = \frac{1}{2\pi a}\int_0^t \iint_{y:\left|x-y\right|<a(t-\tau)} \frac{\sigma\left(y_1,y_2,\tau\right)M\left(dy_1,dy_2,d\tau\right)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - \left|x-y\right|^2}}. \tag{4}$$

Основні результати.

Теорема 1. *Якщо функція $\sigma(x,t)$ є обмеженою, то інтеграл у* (4) *визначено майже напевно для всіх $(x,t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$.*

Теорема 2. *Для будь-яких $t \geq 0$ та $x \in \mathbb{R}^2$ таких, що $\sigma(x,t) \neq 0$ та для $\forall\delta > 0$ виконується наступне співвідношення:*

$$\sup_{y:\left|x-y\right|<\delta}\left|U(y,t)\right| = +\infty,$$

$$\sup_{s:\left|t-s\right|<\delta}\left|U(x,s)\right| = +\infty.$$

Теорема 3. *Для довільної функції* $\theta(x,t) \in C_{fin}^{\infty}\left(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+\right)$ *з імовірністю* 1 *виконано рівність:*

$$\int\limits_0^{\infty}\iint\limits_{\mathbb{R}^2} U(x,t)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\theta\left(x,t\right) - a^2\Delta\theta\left(x,t\right)\right)dxdt = \int\limits_0^{\infty}\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\theta\left(x,t\right)\sigma\left(x,t\right)M\left(dx,dt\right).$$

Висновки. У статті розглянуто хвильове рівняння з α-стійким збуренням. Доведено, що існує майже напевно розв’язок рівняння, який задається формулою Пуассона — Парсеваля. Також доведено, що він є узагальненим роз’язком рівняння.

Список літератури

Balan, R. M., & Tudor, C.A. (2010). The stochastic wave equation with fractional noise: a random field approach. *Stochastic Processes Appl.*, *120*(12), 2468–2494.

Dalang, R. C., & Frangos, N. E. (1998). The stochastic wave equation in two spatial dimensions. *Ann. Probab.*, *26*(1), 187–212.

Dalang, R. C., & Sanz-Solé, M. (2009). Hölder–Sobolev regularity of the solution to the stochastic wave equation in dimension three. *Mem. Amer. Math. Soc.*, *199*(931).

Millet, A., & Morien, P.-L. (2000). On a stochastic wave equation in two space dimensions: regularity of the solution and its density. *Stochastic Process. Appl.*, *86*(1), 141–162.

Pryhara, L., & Shevchenko, G. (2016). Stochastic wave equation in a plane driven by spatial stable noise. *Modern Stochastics: Theory and Applications*, *3*(3), 237–248.

Quer-Sardanyons, L., & Tindel, S. (2007). The 1-d stochastic wave equation driven by a fractional Brownian sheet. *Stochastic Processes Appl.*, *117*(10), 1448–1472.

Radchenko, V. (2009). Mild solution of the heat equation with a general stochastic measure. *Stud. Math.*, *194*(3), 231–251.

Radchenko, V. M. (2011). Properties of integrals with respect to a general stochastic measure in a stochastic heat equation. *Theory Probab. Math. Stat.*, *82*, 103–114.

Samorodnitsky, G., & Taqqu, M.S. (1994). Stable non-Gaussian random processes: Stochastic models with infinite variance. New York, NY: CRC press.

Walsh, J. B. (1986). An introduction to stochastic partial differential equations. In *École d’Été de Probabilités de Saint Flour XIV–1984* (pp. 265-439). *Lecture Notes in Mathematics* (Vol. 1180). Berlin: Springer.

Радченко, В. Н. (1999). Интегралы по общим случайным мерам. *Труды института математики НАН Украины*, *27*.

ОПТИМАЛЬНЫЙ ПЛАН ЭКСПЕРИМЕНТА ДЛЯ МНОГОФАКТОРНОГО СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

С. Г. Радченко
КПИ им. Игоря Сикорского, Киев, Украина
lapach@ukr.net

Получение математических моделей сложных систем и процессов в большинстве случаев проводится с использованием экспериментально-статистического подхода. Свойства сложных систем таковы, что структура математической модели исследователю часто не известна. Модель может быть получена методом аппроксимации исходных экспериментальных данных с использованием регрессионного анализа. Аппроксимацию исходных данных будем осуществлять с использованием полиномиальных математических моделей. Их применение обосновано теоремами Вейерштрасса, Стоуна, Джексона (Радченко, 2011, с. 87—88).

Цель публикации — получение многофакторных статистических моделей по оптимальным планам экспериментов.

В работе Себер (1980, с. 184) отмечается, что план эксперимента, будучи оптимальным для определенной модели, может оказаться «наихудшим из возможных», если модель в действительности окажется иной.

Элементы структуры определяемой статистической модели выбираются из элементов структуры модели полного факторного эксперимента (Радченко, 2011, с. 92—93)

$$\prod_{i=1}^{k}(1+x_i^{(1)}+x_i^{(2)}+\ldots+x_i^{(s_i-1)}) \to N_{\Pi},$$

где 1 — значение фиктивного фактора $x_0 \equiv 1$;

$x_i^{(1)},\ x_i^{(2)}, \ldots, x_i^{(s_i-1)}$ — ортогональные контрасты факторов X_i;

s_i — число различных уровней фактора X_i;

k — общее число факторов, $1 \le i \le k$;

(1), (2), …, (s_i-1) — порядок контрастов фактора X_i;

N_{Π} — число структурных элементов полного факторного эксперимента, равное числу опытов эксперимента.

Все эффекты выражаются в виде ортогональных нормированных контрастов. По теореме Бродского (1976, с. 26—29) в модели полного факторного эксперимента все эффекты ортогональны друг другу и число эффектов равно числу опытов.

Модель будет соответствовать наилучшим возможным критериям *D*-, *A*-, *E*-, *G*-оптимальности, ортогональности и адекватна результатам экспериментов.

В общем случае полный факторный эксперимент имеет значительное число опытов и при решении реальных прикладных задач не выполним. Необходимо использовать дробный факторный эксперимент, применять многофакторные регулярные планы и планы на основе ЛП_τ равномерно распределенных последовательностей (Радченко, 2011, с. 93—111), которые являются квазиполными факторными экспериментами.

Многофакторный план эксперимента должен соответствовать следующим критериям.

1. Обеспечение соответствия эффектов модели критерию ортогональности или (для случая дробного факторного эксперимента) близости к нему. Невыполнение этого требования приводит, в общем случае, к получению неадекватных и неустойчивых моделей, а коэффициенты моделей будут смещенные.

2. Соответствие плана эксперимента критериям *D*-, *A*-, *E*-, *G*-, *Q*-оптимальности. Не выполнение критериев приведет к получению не эффективных в статистическом смысле моделей.

3. План эксперимента должен обеспечивать за счет ортогональности и нормирования эффектов максимально возможную устойчивость коэффициентов модели $\mathrm{cond}(\mathbf{X}^T\mathbf{X}) = 1$. При невыполнении — структура модели не будет соответствовать «истинной» (правильной) и она будет неустойчивой.

4. При ортогональности эффектов получаем наилучшие условия для случаев перебора (введение большего, чем надо, числа эффектов) и недобора эффектов по отношению к «истинной» структуре модели по критериям несмещенности, состоятельности и статистической эффективности определяемых коэффициентов. При невыполнении — полученная модель не будет соответствовать приведенным критериям.

5. При ортогональности всех эффектов обеспечивается адекватность или близость к ней полученных моделей в реализованных точках плана эксперимента. При невыполнении этого условия модель будет давать ошибочные значения критерия качества моделируемой системы (отклика).

6. Возможность использования плана эксперимента для количественных и качественных факторов. Многофакторные регулярные планы позволяют описывать влияние количественных и качественных факторов.

7. Возможность последовательного планирования для дробного факторного эксперимента. При выполнении условия возможно адекватное описание критерия качества при минимальном числе опытов или, при необходимости, переходе к большему числу опытов с сохранением начального плана или его расширением.

8. Разбиение плана эксперимента, при необходимости, на произвольное число ортогональных блоков. При невыполнении условия дисперсия воспроизводимости может быть значительной и некоторые эффекты модели будут статистически незначимы.

Рассмотрим последовательный многофакторный регулярный план $5^{11}//50$

Таблица 1. Последовательный регулярный план эксперимента $5^{11}//50$

№ оп.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	***8***	*7*	*10*	9	11	
1	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	***0***	*0*	*0*	0	0	
2	**0**	**1**	**1**	**2**	**3**	**4**	***1***	*1*	*1*	1	1	
3	**0**	**2**	**2**	**4**	**1**	**3**	***2***	*2*	*2*	2	2	**1 2 3 4 5 6**
4	**0**	**3**	**3**	**1**	**4**	**2**	***3***	*3*	*3*	3	3	для N = 1…25
5	**0**	**4**	**4**	**3**	**2**	**1**	***4***	*4*	*4*	4	4	и N = 1…50
6	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	***2***	*1*	*4*	3	0	ортогональны
7	**1**	**1**	**2**	**3**	**4**	**0**	***3***	*2*	*0*	4	1	
8	**1**	**2**	**3**	**0**	**2**	**4**	***4***	*3*	*1*	0	2	
9	**1**	**3**	**4**	**2**	**0**	**3**	***0***	*4*	*2*	1	3	
10	**1**	**4**	**0**	**4**	**3**	**2**	***1***	*0*	*3*	2	4	***8***
11	**2**	**0**	**2**	**2**	**2**	**2**	***1***	*4*	*0*	3	2	для N = 1…25
12	**2**	**1**	**3**	**4**	**0**	**1**	***2***	*0*	*1*	4	3	с **1 2 3 4 5 6**
13	**2**	**2**	**4**	**1**	**3**	**0**	***3***	*1*	*2*	0	4	$r_{ij\,\max} = 0{,}2$
14	**2**	**3**	**0**	**3**	**1**	**4**	***4***	*2*	*3*	1	0	
15	**2**	**4**	**1**	**0**	**4**	**3**	***0***	*3*	*4*	2	1	
16	**3**	**0**	**3**	**3**	**3**	**3**	***2***	*4*	*3*	0	1	
17	**3**	**1**	**4**	**0**	**1**	**2**	***3***	*0*	*4*	1	2	
18	**3**	**2**	**0**	**2**	**4**	**1**	***4***	*1*	*0*	2	3	*1*
19	**3**	**3**	**1**	**4**	**2**	**0**	***0***	*2*	*1*	3	4	*7 0*
20	**3**	**4**	**2**	**1**	**0**	**4**	***1***	*3*	*2*	4	0	для N = 1…25
21	**4**	**0**	**4**	**4**	**4**	**4**	***0***	*1*	*3*	4	2	с **1 2 3 4 5 6**
22	**4**	**1**	**0**	**1**	**2**	**3**	***1***	*2*	*4*	0	3	$r_{ij\,\max} = 0{,}3$
23	**4**	**2**	**1**	**3**	**0**	**2**	***2***	*3*	*0*	1	4	
24	**4**	**3**	**2**	**0**	**3**	**1**	***3***	*4*	*1*	2	0	
25	**4**	**4**	**3**	**2**	**1**	**0**	***4***	*0*	*2*	3	1	
26	0	0	1	3	2	4	3	0	2	2	3	1
27	0	1	2	0	0	3	4	1	3	3	4	9 1
28	0	2	3	2	3	2	0	2	4	4	0	для N = 1…25
29	0	3	4	4	1	1	1	3	0	0	1	с **1 2 3 4 5 6**
30	0	4	0	1	4	0	2	4	1	1	2	$r_{ij\,\max} = 0{,}4$
31	1	0	2	4	3	0	4	3	4	1	3	
32	1	1	3	1	1	4	0	4	0	2	4	
33	1	2	4	3	4	3	1	0	1	3	0	
34	1	3	0	0	2	2	2	1	2	4	1	
35	1	4	1	2	0	1	3	2	3	0	2	1
36	2	0	3	0	4	1	1	2	2	1	4	**1**…1
37	2	1	4	2	2	0	2	3	3	2	0	для N = 1…50
38	2	2	0	4	0	4	3	4	4	3	1	ортогональны
39	2	3	1	1	3	3	4	0	0	4	2	
40	2	4	2	3	1	2	0	1	1	0	3	
41	3	0	4	1	0	2	4	2	1	2	1	
42	3	1	0	3	3	1	0	3	2	3	2	
43	3	2	1	0	1	0	1	4	3	4	3	
44	3	3	2	2	4	4	2	0	4	0	4	
45	3	4	3	4	2	3	3	1	0	1	0	

46	4	0	0	2	1	3	3	3	1	4	4
47	4	1	1	4	4	2	4	4	2	0	0
48	4	2	2	1	2	1	0	0	3	1	1
49	4	3	3	3	0	0	1	1	4	2	2
50	4	4	4	0	3	4	2	2	0	3	3

Рассмотренный план эксперимента позволяет использовать последовательную схему проведения эксперимента: провести опыты 1…25, а затем, в случае необходимости, опыты 26…50. План эксперимента близок к критериям *D*-, *A*-, *E*-, *G*-, *Q*-оптимальности.

Полный факторный эксперимент и многофакторные регулярные планы позволяют выделять различные структуры статистических моделей по одному плану эксперимента. При невыполнении условия необходимо использовать несколько планов, что увеличивает затраты на исследование.

Обработку результатов следует проводить с использованием программного средства ПРИАМ (Радченко, 2011, с. 84—85). Для получения многофакторных планов экспериментов целесообразно использовать алгоритм RASTA8 (Радченко & Лапач, 2011).

В работе [5] было исследовано повышение точности измерения цифровых весов путем моделирования влияния на показание датчика весов y четырех факторов, (X_1 — гистерезис, X_2 — температура окружающей среды, X_3 — напряжение питания, X_4 — измеряемый вес), из которых первые три создают переменные систематические погрешности, с последующим исключением влияния этих погрешностей с использованием полученной модели. По результатам полного факторного эксперимента $2^1 \times 3^2 \times 6^1 // 108$ построена адекватная, информативная, максимально устойчивая модель, с использованием которой точность измерений по критерию среднее абсолютных величин относительных погрешностей аппроксимации $\left|\bar{e}_{u\text{отн}}\right|$ была повышена в 13,3 раза.

С разработанными методами моделирования и полученными результатами можно ознакомиться в N-t.org (2017), Tm-mmi.kpi.ua (2017).

Список литературы

N-t.org. (2017). *Лаборатория экспериментально-статистических методов исследований*. [online] Доступ по: http://www.n-t.org/sp/lesmi

Tm-mmi.kpi.ua. (2017). *Сайт кафедры «Технология машиностроения»*. [online] Доступ по: http://tm-mmi.kpi.ua/ru

Бродский, В. З. (1976). *Введение в факторное планирование эксперимента*. Москва: Наука.

Радченко, С. Г. (2011). *Методология регрессионного анализа: Монография*. Киев: «Корнійчук».

Радченко, С. Г. (2016). Статистическое моделирование сложных систем. *Вісник НТУУ «КПІ», Серія машинобудування*, (3(78)), 124—131.

Радченко, С. Г., & Лапач, С. М. (2011). Генерування квазірегулярних квазірівномірних багатофакторних планів експериментів (алгоритм RASTA8). *Наукові вісті НТУУ «КПІ»*, (2), 95—99.

Себер, Дж. (1980). *Линейный регрессионный анализ*. (В. П. Носко, Пер.). М. Б. Малютова (Ред.). Москва: Мир.

IV

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ, ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ МЕТОДИ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ

LIPSCHITZ PROPERTIES OF SOLUTION MAPPINGS

D. E. Berezhnov, L. I. Minchenko
Belarus State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus
daniilberezhnov@gmail.com, inform@bsuir.by

Investigating the properties of solution mappings in parametric optimization represents a pressing problem. Considerable effort is directed towards finding the conditions of different types of generalized Lipschitzian continuity of solution mappings, namely their calmness and pseudo-Lipschitzian continuity (also referred to as Aubin property) (Rockafellar & Wets, 1998). An interesting approach to investigating the calmness of solution mappings has recently been proposed by Klatte and Kummer (2015). In our report spreading the approach Klatte and Kummer (2015) to investigating the pseudo-Lipschitzian continuity of solution mappings is proposed. The results are applied to the investigation of solution mapping in parametric linear programming.

Keywords: nonlinear programming, solution mapping, pseudo-Lipschitzian continuity.

Consider a problem

$$P(x) : f(x,y) \to \min_{y}, \ y \in F(x) \subset \mathbb{R}^m,$$

where $x \in \mathbb{R}^n$ is a vector of parameters, $F : x \mapsto F(x)$ is a closed multivalued mapping, $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ is a locally Lipschitz continuous function.

Introduce the optimal value function

$$\varphi(x) = \min\{f(x,y) \big| y \in F(x)\},$$

the solution set

$$S(x) = \{y \in F(x) \mid f(x,y) = \varphi(x)\}$$

and the solution mapping $S : x \mapsto S(x)$. The goal of our report is to study the pseudo-Lipschitzian continuity of the solution mapping $S : x \mapsto S(x)$.

Denote by $\left|v\right|$ the Euclidian norm of a vector v. Let

$G : x \mapsto G(x) \subset \mathbb{R}^m$, $\operatorname{dom} G = \{x \big| G(x) \neq \varnothing\}$, $B = \{y \in \mathbb{R}^m \big| \left|y\right| < 1\}$.

Recall some definitions (see, e. g. Rockafellar and Wets (1998)).

Let $x^0 \in X$, $y^0 \in G(x^0)$. We say that a mapping G is *pseudo-Lipschitzian relative to* $X \subset \mathbb{R}^n$ *at a point* (x^0, y^0), if there exist a number $l > 0$ and neighborhoods $V(x^0)$ and $V(y^0)$ such that

$$G(x^1) \cap V(y^0) \subset G(x^2) + l\left|x^2 - x^1\right|B \text{ for all } x^1, x^2 \in V(x^0) \cap X.$$

A mapping G is *inner semicontinuous relative to* $X \subset \mathbb{R}^n$ at a point (x^0, y^0), if for each $x^k \to x^0$, $x^k \in X$ there exists $y^k \in G(x^k)$ such that $y^k \to y^0$.

A mapping G is *uniformly bounded* near $x^0 \in \operatorname{dom} G$, if there exist a neighborhood $V(x^0)$ and a bounded set Y_0 such that $G(x) \subset Y_0$ for all $x \in V(x^0)$.

Let $x^0 \in \operatorname{dom} F,\ \mu \in \mathbb{R}$. Following Klatte and Kummer (2015), introduce a multivalued mapping

$$L : (x,\mu) \mapsto L(x,\mu) = \{y \in F(x) \big| f(x^0,y) \le \mu\}.$$

Theorem 1. *Assume that*

(i) F be pseudo-Lipschitzian at a point $(x^0,y^0) \in \operatorname{gr} S$ relative to $\operatorname{dom} F$,

(ii) $L(x,\mu)$ be pseudo-Lipschitzian at a point $((x^0,\varphi(x^0)),y^0)$ relative to $\operatorname{dom} L$,

(iii) S be inner semicontinuous at a point (x^0,y^0) relative to $\operatorname{dom} S$.

Then S is pseudo-Lipschitzian at a point (x^0,y^0) relative to $\operatorname{dom} S$.

Theorem 2. *Assume that*

(i) F be pseudo-Lipschitzian at a point $(x^0,y^0) \in \operatorname{gr} S$ relative to $\operatorname{dom} F$,

(ii) $L(x,\mu)$ be pseudo-Lipschitzian at a point $((x^0,\varphi(x^0)),y^0)$ relative to $\operatorname{dom} L$,

(iii) S be uniformly bounded near (x^0,y^0) and $S(x^0) = \{y^0\}$.

Then S is pseudo-Lipschitzian at a point (x^0,y^0) relative to $\operatorname{dom} S$.

Consider the parametric linear programming problem $P(b,p)$:

$$\langle c(b,p),y\rangle \to \min_y,\ \ y \in \mathbb{R}(b) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \langle a^i,y\rangle + b_i \le 0 \quad i = 1,\dots,s\},$$

where $a^i \in \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}^s$ and $p \in \mathbb{R}^l$ are vectors of parameters.

Apply Th. 1 and Th. 2 to the problem $P(b,p)$: let

$$\varphi(b,p) = \{\langle c(b,p),y\rangle \big| y \in F(b)\},\ S(b,p) = \{y \in F(b) \big| \varphi(b,p) = \langle c(b,p),y\rangle\};$$

consider a point $y^0 \in F(b^0)$ and a number $\mu^0 = \varphi(b^0,p^0)$; set

$$L(b,p,\mu) = \{y \in \mathbb{R}^m \big| \langle c(b^0,p^0),y\rangle - \mu \le 0,\ \langle a^i,y\rangle + b_i \le 0 \quad i = 1,\dots,s\}.$$

Since the graphs $\operatorname{gr} F$ and $\operatorname{gr} L$ of multivalued mappings F and L are polyhedral, these mappings are Lipschitzian and, consequently, pseudo-Lipschitzian at $((b^0,p^0,\mu^0),y^0)$ relative to $\operatorname{dom} F$ and $\operatorname{dom} L$ respectively (see Rockafellar and Wets (1998), p. 376).

Therefore, the next two assertions for the problem $P(b,p)$ follow from Th. 1 and Th. 2.

Theorem 3. *Let* $y^0 \in S(b^0, p^0)$ *and let the solution mapping* S *be inner semi-continuous at* (b^0, p^0, y^0) *relative to* $\operatorname{dom} S$. *Then* S *is pseudo-Lipschitzian at* (b^0, p^0, y^0) *relative to* $\operatorname{dom} S$.

Theorem 4. *Let the solution mapping* S *be uniformly bounded near* (b^0, p^0, y^0) *and* $S(b^0, p^0) = \{y^0\}$. *Then* S *is pseudo-Lipschitzian at* (b^0, p^0, y^0) *relative to* $\operatorname{dom} S$.

The counter-examples show that the result of Theorem 3 is not valid without the assumption about inner semicontinuity of S at the given point.

References

Klatte, D., & Kummer, B. (2015). On calmness of the argmin mapping in parametric optimization problems. *J. Optimiz. Theory and Applications, 165,* 708–719.

Rockafellar, R. T., & Wets, R. J.-B. (1998). *Variational analysis*. Berlin: Springer.

NUMERICAL INVESTIGATION METHOD
OF VIBRATIONS OF PIEZOCERAMIC TRANSFORMERS

L. O. Grigoryeva
S. P. Timoshenko Institute of Mechanics NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine
l_grigoryeva@ukr.net

A method of investigation of harmonic electroelastic oscillations in curvilinear coordinates based on variational principles and spline approximations on spatial coordinates is developed and the numerical implementation of the proposed method in cylindrical coordinates is fulfilled. The proposed method can effectively explore the harmonic vibrations of piezoceramic bodies of different geometries with arbitrary boundary conditions. Analysis of the results of calculations allow effectively investigate the forced oscillations, resonance frequencies and their modes for piezoceramic transformers under electrical and mechanical harmonical loadings.

Keywords: electroelastic vibrations, variational principle, spline approximation, piezoceramical cylinder, resonance frequencies, forced vibrations, electric excitation.

Nowadays the technical devices which operate on the basis of phenomenon of piezoelectric effect are widely used in industry, what explains great interest to the piezoelectric materials and equipment created on their basis. The piezoceramic transformers presently find application in different domains of modern technique, medicine, biology, agriculture. Form, geometrical dimensions and fixing conditions of piezoelectric construction elements are determined by their assignment and type of loading (Mason, 1961). Thus, the problem of vibrations analysis of a piezoelectric transformers of different configuration has the important fundamental and applied value.

Solving of spatial problems of electroelasticity in approximation of linear theory is based on variational principle of Hamilton–Ostrogradsky (Washizu, 1982; Zavyalov, Kvasov & Miroshnichenko, 1980). Admissible functions in this principle are chosen so that the definitive relations, Cauchy relations, gradient relations for electric potential and boundary conditions, which are set on displacements and the potential of the electric field, are satisfied.

The wanted functions will be presented as a first-order spline on two coordinates. In accordance with the principle of Hamilton–Ostrogradsky on real displacements and potential functional reach steady state, and stationary condition is $\delta J(u,\phi) = 0$. Carrying out the integration over two coordinates and satisfying the stationarity conditions of the functional, we obtain a system of equations for finding the displacements and electric potential. The system of ordinary differential equations of second order with the appropriate boundary conditions is solved numerically.

The developed numerical method is implemented for radially polarized piezoceramic cylinders of finite length at axisymmetric electrical loads.

Statement of the problem. To formulate the electrodynamic boundary problems, we start from the integral variational principle of Hamilton–Ostrogradsky (Mason, 1961; Washizu, 1982)

$$\int_V \left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho \dot{u}_k \dot{u}_k \right) + \sigma_{ik}\dot{K}_{ik} - D_k \dot{E}_k - f_k \dot{u}_k \right) dV - \oint_S \left(\sigma_{ik} n_i \dot{u}_k + D_i n_i \dot{\phi} \right) dS = 0, \quad (1)$$

where $\sigma_{ik}\dot{K}_{ik} - D_i\dot{E}_i = \dot{H}_{el}$ — electric enthalpy change (Washizu, 1982), $\overline{n}$ — normal to the surface *S* of the volume V, $\mathbf{K}$ — deformation tensor, $\overline{D}$ — electrical induction, $\overline{E}$ — electric field, ϕ — potential difference, f — volume force. In equation (1) it is necessary to consider the Cauchy relations, material relations for pre-polarized ceramics (Shulga & Bolkisev, 1990) and the equations of electrostatics in curvilinear system of coordinates (x_1, x_2, x_3). So we pass in (1) to resolving variables $Y = (u_1, u_2, u_3, \phi)'$. On the surface *S* must be performed the kinematic or dynamic boundary conditions

$$u_k(x_S, t) = u_{kS}(x_S, t), \;\; \phi(x_S, t) = u_S(x_S, t);$$
$$n_i \sigma_{ik}(x_S, t) = p_k(x_S, t), \;\; n_i D_i(x_S, t) = -q_{suf}(x_S, t). \quad (2)$$

The variational principle of Hamilton–Ostrogradsky may be formulated so: on real displacements $u_i(x_1, x_2, x_3, t)$ and electric potential $\phi(x_1, x_2, x_3, t)$, satisfying the boundary conditions (2), the functional

$$H = \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_V \left(\frac{1}{2}\rho \dot{u}_k \dot{u}_k - H_{el} + f_i u_i \right) dV + \oint \left(p_i u_i - q_{suf}\phi \right) dS \right) dt \quad (3)$$

takes a stationary value for isochronous variations $\delta u_k, \delta\phi$.

Since this paper investigates established vibrations an expression

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, t) = \mathrm{Re}(\Phi(x_1, x_2, x_3) e^{-i\omega t})$$

must be used, where ω is the angular frequency and a function Φ is any of the above values. In a further multiplier will be passed.

Method of solving. For discretization of equations we divide the region along the axis x_2, x_3 by rectangular grid with intervals

$$h_i = x_{2,i+1} - x_{2,i}, \;\; i = 0,1,...,N, \quad l_j = x_{3,j+1} - x_{3,j}, \;\; j = 0,1,...,M.$$

We represent the unknown functions on the lines as the splines of the first order (Zavyalov et al., 1980), which are the piecewise-continuous functions

$$f(x_1, x_2, x_3) = (1-\zeta)[(1-\xi)f_{i,j} + \xi f_{i+1,j}] + \zeta[(1-\xi)f_{i,j+1} + \xi f_{i+1,j+1}]$$
$$\xi = \frac{x_2 - x_{2,i}}{h_i}, \quad i = 0,1,\ldots,N-1, \;\; \zeta = \frac{x_3 - x_{3,j}}{l_j}, \; j = 0,1,\ldots,M-1 \quad (4)$$

In variations of functional (1) we have to switch from continuous to discrete derivatives, and from integration to summation:

$$J = \int_{x_{1,0}}^{x_{1,r}} \int_{x_{2,0}}^{x_{2,N}} \int_{x_{3,0}}^{x_{3,M}} J dx_3 dx_2 dx_1 = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} \int_{x_{2,i}}^{x_{2,i+1}} \int_{x_{3,j}}^{x_{3,j+1}} \int_{x_{1,0}}^{x_{1,r}} J_{ij} dx_1 dx_2 dx_3 =$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} h_i l_j \int_0^1 \int_0^1 \int_{x_{1,0}}^{x_{1,r}} J_{ij} dx_1 d\xi d\zeta$$

Here J_{ij} — discrete functional in grid cells $[x_{2,i}, x_{2,i+1}; x_{3,i}, x_{3,i+1}]$, received at application of the proposed spline-approximation.

According to the principle of Hamilton–Ostrogradsky, functional (3) on real displacements reaches a stationary value, and the condition of stationarity takes the form

$$\delta H = \delta \int_{x_{1,0}}^{x_{1,r}} \int_{x_{2,0}}^{x_{2,N}} \int_{x_{3,0}}^{x_{3,M}} J dx_3 dx_2 dx_1 = \int_{x_{1,0}}^{x_{1,r}} \sum_{k=1}^{4} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} \left(\frac{\partial J}{\partial y_k} \delta y_k + \frac{\partial J}{\partial y'_k} \delta y'_k \right) dx_1 = 0.$$

Here $(y_1, y_2, y_3, y_4) = (u_{1ij}, u_{2ij}, u_{3ij}, \phi_{ij})$, $i = 1,...,N-1$, $j = 1,...,M-1$, y'_k — their derivatives by coordinate x_1. Unknown in the contour points are determined from the boundary conditions

Through the integration on x_1 and satisfying the functional conditions of the stationarity, we obtain a system of ordinary differential equations of second order for the displacements and the electric potential

$$\mathbf{M} \frac{\partial^2 \mathbf{Y}}{\partial x_1} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x_1} + \mathbf{BY} = 0. \tag{5}$$

Matrices $\mathbf{M}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ have band structure what simplifies finding of the numerical solution. The resulting system of equations (5) with appropriate boundary conditions (2) is solved by the discrete orthogonalization method. Testing of the method accuracy is performed changing the number of grid points and comparing the solution with results obtained by other methods.

Numerical experiment. We consider a radially polarized cylinder of piezoceramic PZT-4 with length l_z and radiuses R_0, R_1. On the outer surfaces of the cylinder are set displacements or stresses according to the conditions of fixing.

Let cylindrical surfaces to be free from mechanical stresses. Oscillations excited by a potential difference, applied to the electrodes on cylindrical surfaces which varies harmonically with a frequency ω and amplitude $2V_0$. We consider cylinders with shorted ends ($\phi(0,r) = 0$, $\phi(l_z, r) = 0$), membrane binded, rigidly fixed and with fixed end $z = 0$ and free end $z = l_z$. Changing the frequency of loading ω, we build curves for amplitude values of the main characteristics of the dynamic electromechanical state for the cylinders of different length with named conditions of fixing.

Analyzing the curves, we find the resonant frequencies for the considered cylinders and set their dependence from the length of the cylinder.

Conclusions. Based on the variational principle of Hamilton–Ostrogradsky and spline approximations on one coordinate equations of electroelastic axisymmetric harmonic vibrations in cylindrical coordinates are reduced to a system of ordinary differential equations. The obtained boundary value problem is solved by discrete orthogonalization method. There are analyzed vibrations of radially polarized hollow cylinder of a piezoceramic PZT-4 with different boundary conditions. Conducting analysis of the results for different values of frequency perturbation, we find resonance frequencies and their forms for piezoceramic cylindrical transformer at electrical loading. Founded that with increasing length of the cylinder it's frequencies increase too.

References

Mason, W. (1961). *Physical Acoustics.* New York: Academic Press.

Shulga, N. A., & Bolkisev, A. M. (1990). *Vibrations of piezoceramic bodies.* Kyiv: Naukova Dumka.

Washizu, K. (1982). *Variational methods in elasticity and plasticity*. 3rd edition. Oxford-New York: Pergamon Press.

Zavyalov, Y. S., Kvasov, B. I., & Miroshnichenko, V. L. (1980). *Methods of spline functions.* Moscow: Nauka.

ПРИКЛАД ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ У ФОРМІ ВЕКТОРНОЇ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ДЛЯ ОПТИМІЗАЦІЇ ФУНКЦІОНУВАННЯ МАЛОГО ПІДПРИЄМСТВА

І. В. Алєксєєва, В. С. Боднарчук

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського», Київ, Україна
alexir1@ukr.net, bodnar4yk.valerija2014@yandex.ua

Розглянуто задачу багатокритеріальної оптимізації функціонування малого підприємства. Математична модель побудовано у вигляді векторної задачі лінійного програмування (ВЗЛП). Для розв'язання поставленої задачі запропоновано один з методів, що гарантує одержання оптимального за Парето розв'язку. Проведено апробацію на тестовому прикладі.

Ключові слова: багатокритеріальна оптимізація, оптимальність за Парето, багатокритеріальна математична модель, точка оптимуму, точка антиоптимуму, максимінна задача.

1. Поняття про задачу векторної оптимізації. Широкий спектр задач у промисловості, техніці, економіці та багатьох інших галузях містить необхідність одночасної оптимізації декількох цілей. У багатьох випадках цілі визначаються в непорівнянних одиницях і існує певна ступінь конфлікту між ними, наприклад, одна ціль не може бути покращена без погіршення іншої. Такі задачі називають задачами *багатокритеріальної оптимізації* (Multiobjective Optimization Problems). Уперше задачу багатокритеріальної векторної оптимізації описав італійський економіст В. Парето під час математичного дослідження товарного обміну. В умовах однокритеріальних задач оптимізації зазвичай отримують один оптимальний розв'язок. Проте, у багатокритеріальній оптимізації не існує прямого метода визначення чи розв'язок краще, ніж інші. Найчастіше в багатокритеріальній оптимізації для порівняння розв'язків застосовують метод, який називають *відношенням домінантності Парето* і який, замість єдиного оптимального розв'язку, призводить до набору альтернатив з різними компромісами серед цілей (Jaimes, Martinez & Coello, 2011).

Загальна лінійна задача багатокритеріальної оптимізації полягає у знаходженні допустимого вектора змінних

$$X \geq 0 \ \left(X = \left\{ x_j \right\}, j = \overline{1,n} \right),$$

який максимізує векторний критерій $F\left(X\right)$ і записується у вигляді (Подиновский & Ногин, 1982):

$$F\left(X\right) = \left\{ f_k\left(X\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j^k x_j,\ k = \overline{1,K} \right\} \to \max \qquad (1)$$
$$AX \leq B,\ X \geq 0,$$

де

$$G(X)=\left\{X\in\mathbb{R}^n \mid AX\le B,\, X\ge 0\right\}$$

— область допустимих розв'язків.

Означення 1. Розв'язок X^* називають розв'язком *оптимальним за Парето* задачі векторної оптимізації (1), якщо не існує іншого розв'язку $X\in G(X)$ такого, що

$$f_k(X)\ge f_k(X^*)\ \forall k=\overline{1,K}$$

і хоча б для одного індексу

$$l\in\{1,\dots,K\}\ f_l(X)\ge f_l(X^*).$$

Означення 2. Розв'язок X^* називається розв'язком *слабо оптимальним за Парето* (*оптимальним за Слейтером*) задачі векторної оптимізації (1), якщо не існує іншого розв'язку $X\in G(X)$ такого, що

$$f_k(X)>f_k(X^*)\ \forall k=\overline{1,K}.$$

2. Побудова математичної моделі малого підприємства. Сучасні економічні умови вимагають від університетів знаходження додаткових джерел фінансування. У цьому напрямі важливою задачею є комерціалізація наукових розробок, яку можна здійснити шляхом створення малих інноваційних підприємств, оскільки кращі університети мають потужний науковий потенціал і технічну базу.

Сучасна теорія розвитку фірми (*theory of the firm*) складається з безлічі економічних теорій, які пояснюють і передбачають існування, структуру й поведінку фірми. Традиційна теорія, яка виходить з того, що поведінка фірми визначається єдиною ціллю — максимізацією прибутку, неадекватно відображує реальну ситуацію на сучасному ринку. Тому з'являються нові підходи в управлінні підприємствами. Економічна теорія множинності цілей виходить з того, що сьогодні фірма — це складна система, яка у своєму розвитку може поєднувати багато інтересів.

Розглянемо математичну модель розвитку малого IT підприємства на основі багатокритеріальної лінійної задачі векторної оптимізації. Найважливішим ресурсом такого підприємства є персонал, тому основним ресурсним обмеженням вважаємо робочий час працівників.

Нехай

$$F_1(X)=\left\{f_k(X)=\sum_{j=1}^{n}c_j^k x_j,\ k=\overline{1,K_1}\right\}$$

— множина критеріїв (цілей), які потрібно максимізувати (дохід, прибуток, додана вартість), а

$$F_2(X)=\left\{f_k(X)=\sum_{j=1}^{n}c_j^k x_j,\ k=\overline{K_1+1,K_2}\right\}$$

— множина критеріїв, які потребують мінімізації (собівартість, витрати на рекламу тощо).

Тоді математична модель формування стратегічного плану розвитку підприємства з можливістю залучення додаткових ресурсів будується як векторна задача лінійного програмування:

$$\begin{aligned} \operatorname{opt} F(X) = \Bigg\{ F_1(X) = \left\{ \max f_k(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j^k x_j,\ k = \overline{1, K_1} \right\}; \\ F_2(X) = \left\{ \min f_k(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j^k x_j,\ k = \overline{K_1 + 1, K_2} \right\} \Bigg\} \end{aligned} \quad (2)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i + z_i,\ i = \overline{1, m}, \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_i z_i \le V, \quad (4)$$

$$0 \le x_j \le u_j,\ j = \overline{1, n},\ z_i \ge 0,\ i = \overline{1, m}, \quad (5)$$

де $X = \{x_j\}$, $j = \overline{1, n}$ — вектор змінних, кожна компонента якого визначає кількість j-го типу проектів, що розробляється підприємством, c_j^k — економічний показник k-го типу, що характеризує одиницю j-го типу продукту, a_{ij} — норми витрат i-го виду ресурсів на розробку кожного типу продукту, b_i — запас i-го ресурсу, V — сума витрат на залучення додаткових ресурсів, v_i — вартість одиниці i-го ресурсу, z_i — кількість одиниць i-го виду ресурсів, u_j — об'єм попиту $\left(i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n}\right)$.

3. Алгоритм розв'язання задачі багатокритеріальної оптимізації. Для розв'язання задачі (2)—(5) пропонується застосувати один з методів, який гарантує одержання розв'язку слабо оптимального за Парето.

На першому етапі розв'язують задачу з умовами (3)—(5) за кожним критерієм окремо і знаходять найкращу точку X_k^* (точку оптимуму) і найгіршу X_k^0 (точку антиоптимуму), $\forall k \in K = K_1 \cup K_2$.

Далі будується максимінна задача оптимізації з нормалізованими критеріями (Машунин, 2015):

$$\lambda^0 = \max_x \min_k \lambda_k(X),$$

де

$$\lambda_k\left(X\right)=\frac{f_k\left(X\right)-f_k\left(X_k^0\right)}{f_k\left(X_k^*\right)-f_k\left(X_k^0\right)},\forall k\in K$$

— відносна оцінка k-го критерію в точці X_k^*, у якій значення $f_k\left(X_k^*\right)$ найкраще за k-м критерієм, $f_k\left(X_k^0\right)$ — найгірше. Зауважимо, що $\forall k\in K$ в точці оптимуму X_k^*:

$$\lambda_k\left(X_k^*\right)=\frac{f_k\left(X_k^*\right)-f_k\left(X_k^0\right)}{f_k\left(X_k^*\right)-f_k\left(X_k^0\right)}=1,$$

а в точці X_k^0:

$$\lambda_k\left(X_k^0\right)=\frac{f_k\left(X_k^0\right)-f_k\left(X_k^0\right)}{f_k\left(X_k^*\right)-f_k\left(X_k^0\right)}=0,$$

тобто відносна оцінка лежить у межах $0\le\lambda_k\le 1$, $\forall k\in K$.

На наступному етапі розв'язання максимінна задача перетворюється у стандартну задачу лінійного програмування, яку називають λ-*задачею*:

$$\lambda^0=\max_x\lambda, \tag{6}$$

$$\lambda-\frac{f_k\left(X\right)-f_k\left(X_k^0\right)}{f_k\left(X_k^*\right)-f_k\left(X_k^0\right)}\le 0,\ k=\overline{1,K}, \tag{7}$$

$$A\left(X\right)\le B,\ X\ge 0, \tag{8}$$

де $\lambda=\min\limits_k\lambda_k\left(X\right)$.

Обмеження (8) відповідають обмеженням (3)—(5).

Розв'язуючи λ-задачу, одержуємо точку оптимуму X_{opt}, значення векторного критерію $F\left(X_{opt}\right)$, відносну оцінку λ^0, яка є максимальним нижнім рівнем для всіх відносних оцінок

$$\lambda_k\left(X_{opt}\right),\ k=\overline{1,K}$$

або гарантованим результатом.

4. Розв'язання тестового прикладу. Розглядаємо векторну задачу оптимізації:

$$\begin{gathered}\max F(X)=\left\{f_1(X)=2x_1+3x_2+2x_3, f_2(X)=3x_1+3x_2+2x_3,\right.\\ \left.f_3(X)=0{,}14x_1+0{,}2x_2+0{,}5x_3\right\},\end{gathered} \tag{9}$$

за умов

$$\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 + 12x_3 \le 850, \\ 10x_1 + 5x_2 + 6x_3 \le 700, \\ 8x_1 + 10x_2 + 5x_3 \le 600, \\ x_1 \ge 5, \\ x_2 \ge 10, \\ x_3 \ge 20. \end{cases} \tag{10}$$

Використовуючи надбудову «Пошук розв'язку» в MS Excel знаходимо розв'язок задачі (9)—(10) за кожним критерієм окремо. Одержуємо точки оптимуму і оптимальні значення критеріїв:

$X_1^* = \left\{x_1 = 5; x_2 = 37{,}07; x_3 = 37{,}07\right\},\ f_1^* = f_1\left(X_1^*\right) = 196{,}93;$

$X_2^* = \left\{x_1 = 31{,}69; x_2 = 10; x_3 = 49{,}3\right\},\ f_2^* = f_2\left(X_2^*\right) = 223{,}67;$

$X_3^* = \left\{x_1 = 5; x_2 = 10; x_3 = 60{,}4\right\},\ f_3^* = f_3\left(X_3^*\right) = 32{,}91,$

а також, найгірші розв'язки (точки антиоптимуму) і значення функцій у цих точках:

$$X_1^0 = \left\{x_1 = 5; x_2 = 10; x_3 = 20\right\},\ f_1^0 = f_1\left(X_1^0\right) = 80;$$

$$X_2^0 = \left\{x_1 = 5; x_2 = 10; x_3 = 20\right\},\ f_2^0 = f_2\left(X_2^0\right) = 85;$$

$$X_3^0 = \left\{x_1 = 5; x_2 = 10; x_3 = 20\right\},\ f_3^0 = f_3\left(X_3^0\right) = 12{,}7.$$

Таким чином, для значень векторних критеріїв у точках X_k^* і відносних оцінок $\lambda_k\left(X_k^*\right),\ k = \overline{1{,}3}$ маємо

$$f_k\left(X_k^*\right) = \begin{bmatrix} f_1\left(X_1^*\right) = 196{,}93 & f_2\left(X_1^*\right) = 201{,}93 & f_3\left(X_1^*\right) = 27{,}04 \\ f_1\left(X_2^*\right) = 191{,}97 & f_2\left(X_2^*\right) = 223{,}67 & f_3\left(X_2^*\right) = 31{,}08 \\ f_1\left(X_3^*\right) = 162{,}83 & f_2\left(X_3^*\right) = 165{,}83 & f_3\left(X_3^*\right) = 32{,}91 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_k\left(X_k^*\right) = \begin{bmatrix} \lambda_1\left(X_1^*\right) = 1 & \lambda_2\left(X_1^*\right) = 0{,}8432 & \lambda_3\left(X_1^*\right) = 0{,}7098 \\ \lambda_1\left(X_2^*\right) = 0{,}9576 & \lambda_2\left(X_2^*\right) = 1 & \lambda_3\left(X_2^*\right) = 0{,}9097 \\ \lambda_1\left(X_3^*\right) = 0{,}7084 & \lambda_2\left(X_3^*\right) = 0{,}5829 & \lambda_3\left(X_3^*\right) = 1 \end{bmatrix}.$$

Будуємо λ-задачу:

$$\lambda^0 = \max_X \lambda,$$

$$\lambda - 0,0171x_1 - 0,0257x_2 - 0,0171x_3 + 0,6842 \le 0,$$
$$\lambda - 0,0216x_1 - 0,0216x_2 - 0,0144x_3 + 0,6130 \le 0,$$
$$\lambda - 0,0069x_1 - 0,0099x_2 - 0,0247x_3 + 0,6285 \le 0$$

і враховуємо умови (10).

Розв'язуючи побудовану λ - задачу, одержуємо точку оптимуму

$$X_{opt} = \left(28,1;\, 10;\, 50,8\right),$$

максимальну відносну оцінку $\lambda^0 = 0,9219$ і значення цільових функцій у вказаній точці

$$f_1\left(X_{opt}\right) = 187,79;\; f_2\left(X_{opt}\right) = 215,9;\; f_3\left(X_{opt}\right) = 31,32.$$

Висновки. 1. У доповіді розвинуто підхід до використання математичних моделей типу векторної задачі лінійного програмування для покращення діяльності малих ІТ підприємств. Аналіз розв'язку ВЗЛП дозволяє спрогнозувати розвиток підприємства, визначити можливість залучення додаткових трудових ресурсів і прийняти оптимальне рішення за необхідними економічними показниками.

2. Тестовий приклад дозволив відпрацювати інформаційну технологію прийняття оптимального рішення на базі налаштування «Пошук розв'язку» в MS Excel.

Список літератури

Jaimes, A. L., Martinez, S. Z., & Coello, C. A. C. (2011). An introduction to multiobjective optimization techniques. In A. G. L. Cunha, & J. A. Covas (Eds.), *Optimization in Polymer Processing* (pp. 29–57). Hauppauge, N.Y: Nova Science Publishers.

Машунин, Ю. (2015). Моделирование и прогнозирование развития фирмы на базе векторной оптимизации. *Известия ДВФУ. Экономика и управление*, (1), 17—36.

Подиновский, В. В., & Ногин, В. Д. (1982). *Парето-оптимальные решения многокритериальных задач*. Москва: Наука.

МЕТОД ЧИСЕЛЬНОГО АНАЛІЗУ ПОВІЛЬНИХ ТЕЧІЙ В'ЯЗКОЇ НЕСТИСЛИВОЇ РІДИНИ

А. В. Артюх, М. В. Сидоров, М. О. Шпакович

Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків, Україна

artyukhanton@gmail.com

Розглядається задача математичного моделювання нестаціонарних плоскопаралельних повільних течій в'язкої нестисливої рідини. За допомогою запровадження функції течії здійснюється перехід від системи Стокса до диференціального рівняння четвертого порядку, яке зводиться до системи звичайних диференціальних рівнянь за допомогою методу Гальоркіна для нестаціонарних задач та методу R-функцій. Наводяться результати обчислювальних експериментів розрахунку функції течії, вектору швидкостей, завихреності і тиску для різних областей.

Ключові слова: функція течії, в'язка рідина, система рівнянь Нав'є — Стокса, метод R-функцій, метод Гальоркіна.

Необхідність математичного моделювання нестаціонарних повільних течій в'язкої рідини виникає при вивченні різних фізичних (теплоенергетика, геофізика тощо) та біологічних (біологія, біомедицина тощо) процесів (Buyskikh, 2015; Khurshid, & Hoffmann, 2013; Podyma, Zbicinski, & Walecki, 2006). Це дозволяє уникнути — зазвичай великих — витрат на устаткування та отримати необхідні результати лише за допомогою обчислювальної техніки.

Розв'язки вихідної нестаціонарної системи диференціальних рівнянь, лінеаризованої за Стоксом, відомі лише в деяких найпростіших випадках (Agranovich & Khatskevich, 2012), тому часто для розв'язання використовуються чисельні або чисельно-аналітичні методи: методи скінченних різниць, скінченних елементів (Donea & Huerta, 2003) тощо. Основним недоліком цих методів є те, що вони наближено враховують геометрію області, що призводить до неусувних похибок у розв'язку. Точно врахувати форму межі області дозволяє метод R-функцій академіка НАН України В. Л. Рвачова (Рвачев, 1974).

Аналіз плоскопаралельних течій, що розглядаються в деякій скінченній області Ω площини xOy, зручно проводити за допомогою функції течії $\psi(x, y, t)$, яка пов'язана з вектором швидкостей $\vec{v} = (v_x, v_y)$ співвідношеннями (Ландау & Лифшиц, 2003)

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y},\ v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{1}$$

Тоді для функції течії можна поставити початково-крайову задачу

$$\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} = \nu \Delta^2 \psi,\ (x, y) \in \Omega,\ t > 0, \tag{2}$$

$$\psi|_{\partial\Omega} = f_0(s, t),\ \left.\frac{\partial \psi}{\partial \vec{n}}\right|_{\partial\Omega} = g_0(s, t),\ s \in \partial\Omega,\ t \geq 0, \tag{3}$$

$$\psi|_{t=0} = \psi_0(x, y),\ (x, y) \in \bar{\Omega}, \tag{4}$$

де t — час; $\dfrac{\partial f_0}{\partial s}$, g_0 — деякі розподіли нормальної та дотичної складової швидкості потоку відповідно; Δ — оператор Лапласа; Δ^2 — бігармонічний оператор, $\vec{n}$ — зовнішня нормаль до межі області $\partial\Omega$.

Для розв’язання початково-крайової задачі (2)—(4) використаємо метод Гальоркіна та структурний метод R-функцій.

Нехай межа $\partial\Omega$ області Ω кусково-гладка та може бути описана за допомогою елементарної функції $\omega(x,y)$ згідно з методом R-функцій, причому функція $\omega(x,y)$ задовольняє наступним умовам:

1) $\omega(x,y) = 0$ на $\partial\Omega$;

2) $\omega(x,y) > 0$ в Ω;

3) $\dfrac{\partial\omega}{\partial\vec{n}} = -1$ на $\partial\Omega$.

Тобто $\omega(x,y) = 0$ — нормалізоване рівняння $\partial\Omega$.

У роботі Сидорова (2002) показано, що крайовим умовам (3) задовольняє жмуток функцій

$$\psi = f - \omega(D_1 f + g) + \omega^2\Phi,$$

де $f = EC\,f_0$, $g = EC\,g_0$ — продовження функцій f_0, g_0 в Ω, $\Phi = \Phi(x,y,t)$ — невизначена компонента, $D_1 u = \dfrac{\partial\omega}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial\omega}{\partial y}\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

У задачі (2)—(4) зробимо заміну $\psi = \varphi + u$, де u — нова невідома функція, $\varphi = f - \omega(D_1 f + g)$. Тоді для функції u отримаємо початково-крайову задачу з однорідними крайовими умовами:

$$\frac{\partial(-\Delta u)}{\partial t} + \nu\Delta^2 u = F,\ (x,y) \in \Omega,\ t > 0, \tag{5}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0,\ t \ge 0, \tag{6}$$

$$u|_{t=0} = u_0,\ (x,y) \in \overline{\Omega}, \tag{7}$$

де

$$F = -\nu\Delta^2\varphi + \frac{\partial\Delta\varphi}{\partial t};\ u_0 = \psi_0 - \varphi|_{t=0}.$$

Розглянемо оператори A та B, що діють у просторі $L_2(0,T;L_2(\Omega))$ за правилами

$$Au = \Delta^2 u,\ Bu = -\Delta u$$

на областях визначення

$$D_A = \left\{u \,\middle|\, u \in C^4(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}),\ u|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0\right\},$$

$$D_B = \left\{u \,\middle|\, u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}),\ u|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0\right\}.$$

На D_A і D_B запровадимо відповідно енергетичні скалярні добутки

$$[u,v]_A = \iint_\Omega \Delta u \Delta v \, dxdy\,,\ [u,v]_B = \iint_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dxdy\,.$$

Позначимо множину функцій

$$W_T = \left\{ u \mid u \in L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)),\ u' \in L_2(0,T;L_2(\Omega)),\ u(T) = 0 \right\}.$$

Функцію $u(t)$ назвімо *узагальненим* (*слабким*) *розв'язком* задачі (5)—(7), якщо: а) $u(t) \in L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega))$; б) для будь-якого елементу $v(t) \in W_T$ має місце рівність

$$-\int_0^T \left[u, \frac{dv}{dt} \right]_B dt + \nu \int_0^T [u,v]_A dt = [u_0, v(0)]_B + \int_0^T (F,v)_{L_2(\Omega)} dt\,.$$

Варіаційне формулювання задачі (5)—(7), що еквівалентне означенню узагальненого розв'язку, можна записати наступним чином:

$$[u',v]_B + \nu[u,v]_A = (F,v)_{L_2(\Omega)}\,,\ t \in (0;T], \tag{8}$$

$$(u - u_0, v)_{L_2(\Omega)} = 0\,,\ t = 0\,, \tag{9}$$

де під u' слід розуміти похідну за часом.

Для побудови узагальненого розв'язку задачі (8), (9) застосуємо метод Гальоркіна для нестаціонарних задач (Савула, 2004; Михлин, 1966). Наближений розв'язок шукаємо у вигляді:

$$u_n(t) = \sum_{i=1}^n c_i(t) \varphi_i\,, \tag{10}$$

де $c_i(t)$, $i = 1,\dots,n$, — невідомі функції, $\{\varphi_i\}$ — координатна послідовність, яку можна взяти у вигляді $\varphi_i = \omega^2 \tau_i$, де $\{\tau_i\}$ — будь-яка повна у $L_2(\Omega)$ система функцій.

Відповідно до методу Гальоркіна невідомі функції $c_i(t)$, $i = 1,\dots,n$, знайдемо з умови ортогональності відхилу першим n координатним функціям $\varphi_1,\dots,\varphi_n$, що отримується при підстановці (10) у рівняння (8). Це приводить до системи звичайних диференціальних рівнянь

$$BC'(t) + \nu AC(t) = L(t),\ t \in (0;T], \tag{11}$$

$$SC(0) = P\,, \tag{12}$$

де

$$C(t) = \{c_i(t)\},\ B = \{b_{ij}\},\ A = \{a_{ij}\},\ L(t) = \{l_j(t)\},\ S = \{s_{ij}\},\ P = \{p_j\},$$
$$b_{ij} = [\varphi_i, \varphi_j]_B,\ a_{ij} = [\varphi_i, \varphi_j]_A,\ l_j(t) = (F, \varphi_j)_{L_2(\Omega)},\ s_{ij} = (\varphi_i, \varphi_j)_{L_2(\Omega)},$$
$$p_j = (u_0, \varphi_j)_{L_2(\Omega)}\,.$$

Теорема. *Нехай задані функції* $u_0 \in L_2(\Omega)$ *і* $F(t) \in L_2(0,T;L_2(\Omega))$. *Тоді варіаційна задача* (8), (9) *має єдиний розв'язок*

$$u \in L_\infty(0,T;L_2(\Omega)) \cap L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^2(\Omega)),$$

до якого збігаються гальоркінські наближення.

Обчислювальний експеримент було проведено для прямокутної області $\Omega = [0,a] \times [0,b]$ з різним співвідношенням сторін каверни $a : b$. Область прямокутника описувалась формулою

$$\omega(x,y) = \left[\frac{1}{a}x(a-x)\right] \wedge_0 \left[\frac{1}{b}y(b-y)\right],$$

де $\wedge_0$ — R-кон'юнкція.

За базисні функції було обрано сплайни Шенберга п'ятого порядку, інтеграли в (11), (12) обчислювались за допомогою формули Гауса за 16 вузлами.

Вектор швидкості розраховувався за формулою (1), завихреність дорівнює $\zeta = -\Delta\psi$, а тиск:

$$p(x,y,t) = \nu\rho \int\limits_{M_0M} \left(\frac{\partial^3\psi}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}\right)dx - \left(\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3\psi}{\partial x \partial y^2}\right)dy + C,$$

де $M_0(x_0,y_0)$ — фіксована точка Ω; $M(x,y)$ — довільна точка Ω.

На рис. 1 наведено поле швидкостей та тиску після виходу системи у стаціонар для квадрату $\Omega = [0,1] \times [0,1]$.

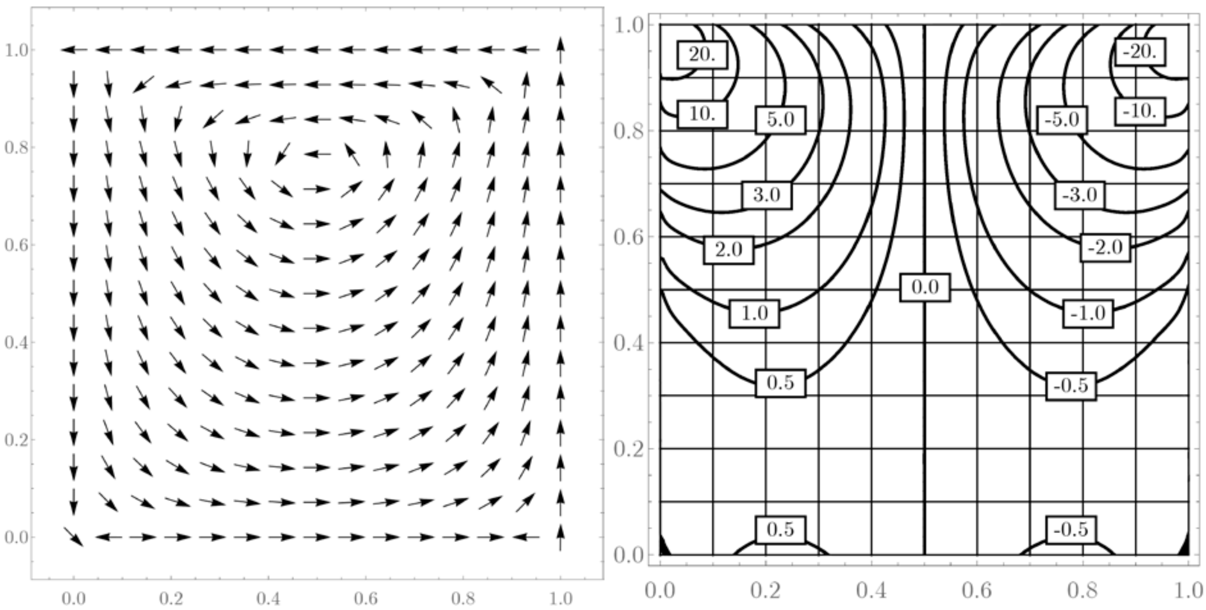


Рис. 1. Поле швидкостей та тиску

Список літератури

Agranovich, Yu. Ya., & Khatskevich, V. L. (2012). Mathematical modeling of nonlinearly viscous fluid motion: Strong solutions. *Automation and Remote Control, 73*(1), 171–180.

Buyskikh, A. A. (2015). Viscous flow simulation of geological bodies. *Mathematical Models and Computer Simulations, 7*(4), 374–380.

Donea, J., & Huerta, A. (2003). *Finite element methods for flow problems*. London: Wiley.
Khurshid, H., & Hoffmann, K. A. (2013). Development of a high-order solver for blood flow. *Engineering with Computers, 31*(1), 51–71.
Podyma, M., Zbicinski, I., Walecki, J., Nowicki, M. L., Andziak, P., Makowski, P., & Stefanczyk, L. (2006). Numerical analysis of blood flow in human abdominal aorta. *WIT Transactions on Engineering Sciences*, *52*, 603–611.
Ландау, Л. Д., & Лифшиц, Е. М. (2003). *Теоретическая физика. В 10 т. Т. VI. Гидродинамика.* Москва: Физматлит.
Михлин, С. Г. (1966). *Численная реализация вариационных методов*. Москва: Наука.
Рвачев, В. Л. (1974). *Методы алгебры логики в математической физике.* Киев: Наукова думка.
Савула, Я. (2004). *Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами*. Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка.
Сидоров, М. В. (2002). О построении структур решений задачи Стокса. *Радиоэлектроника и информатика,* (3), 52—54.

КЕРУВАННЯ ІНВЕСТИЦІЯМИ НАКОПИЧУВАЛЬНО-СПОЖИВЧОГО ФОНДА ЗА УМОВИ РЕАЛІЗАЦІЇ РЕКЛАМНОЇ СТРАТЕГІЇ ЦІНА КЕРУВАННЯ

В. О. Болдирєва[1], Т. В. Жмихова

[1] *Донецький національний університет імені Василя Стуса, Вінниця, Україна*

valery.boldyreva@gmail.com, zhmykhovatanya@gmail.com

Розглядається задача про керування для динамічної системи, у якості якої виступає накопичувально-споживчий фонд із функціями страхової компанії такої, що працює на фінансовому ринку та реалізує рекламну стратегію. Ціна ризикового активу описується узагальненою моделлю П. Кларка. Було знайдено оптимальні керування портфелем активів фінансового ринку та тієї частини капіталу, що фонд витрачає на проведення рекламної компанії, при яких функціонал якості набуває найбільшого значення. Знайдена ціна такого керування.

Ключові слова: узагальнена модель П. Кларка, накопичувально-споживчий фонд, оптимальні керування, рекламна компанія, фінансовий ринок.

Постановка задачі. Нехай задано фінансовий ринок, що складається з безризикового активу $B(t)$, ціна якого описується рівнянням

$$B(t) = B(0)e^{r(t)}dt, B(0) > 0, \tag{1}$$

де r — процентна ставка банку, причому $r(t) \equiv r > 0$, $B(0)$ — сума на депозиті в початковий момент часу, та ризикового (акції) $P\left(t\right)$, $0 \le t \le T$, ціна якого описується узагальненою моделлю П. Кларка:

$$P(t) = P(0)\exp\left\{\left(\alpha - \lambda\left[\sqrt{e} - 1\right]\right)t + W\left(Z(t)\right) + \sigma W_1(t)\right\}, \tag{2}$$

де $\alpha > 0, \sigma > 0$, $W\left(t\right), W_1\left(t\right)$, $0 \le t \le T$ — стандартні Вінерові процеси, $Z(t)$ — процес Пуассона з параметром λ, що не залежить від $W(t), W_1(t)$.

У момент часу t капітал фонду дорівнює $X_x(t), t \ge 0, \left(X_x(0) = x\right)$, та розміщується на фінансовому (B, P)-ринку, ціни активів якого описуються рівняннями (1) та (2), причому $uX_x(t)$, $\left(0 \le u \le 1\right)$ — частина капіталу, що відводиться на купівлю акцій, відповідно, $\left(1 - u\right)X_x(t)$ — частина капіталу, яку фонд розміщує на банківському депозиті під просту процентну ставку $r > 0$. Уважатимемо, що $\alpha > r$, в іншому випадку мішане інвестування не має сенсу.

Уважатимемо, що сумарні премії, що фонд отримує за час $[t; t + \Delta t]$ складатимуть $c\left(1 + \mu\right)X_x(t)\Delta t$, тут $c\left(c > 0\right)$ — швидкість надходження премій у фонд, $\mu\left(0 < \mu < \mu_0 < 1\right)$ — частка, що характеризує витрати фонду на проведення рекламної компанії. Сумарні виплати за той самий час дорівнюють

$$\sum_{i=N\left(t\right)+1}^{N\left(t+\Delta t\right)} X_x(t)\chi\left(\eta_i, \gamma\right), \tag{3}$$

де η_i — незалежні додатні однаково розподілені випадкові величини, що керують розмірами виплат, причому $\eta = \dfrac{\varsigma}{K}$ — керуючі величини, тут ς — величина позову до фонду, $K > 0$ — деяке число, що може бути достатньо великим, тобто

$$\chi(\eta,\gamma) = \begin{cases} \dfrac{\varsigma}{K}, \ 0 < \varsigma < K\gamma < K, \\ \gamma, \ \varsigma \geq \gamma K. \end{cases}$$

Конструкція керуючої величини (3) запропонована Баєвим (2006). Тоді капітал фонду за рахунок інвестиційної діяльності та рекламної стратегії еволюціонуватиме згідно з рівнянням

$$dX_x(t)uX_x(t)\left(\alpha dt + \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[e^{\kappa} - 1\right]\tilde{\nu}\left(d\kappa, dt\right) + \sigma dW_1(t)\right) +$$
$$+\left(1-u\right)X_x(t)rdt - \mu X_x(t)dt + c(1+\mu)X_x(t)dt -$$
$$-\int\limits_{0}^{+\infty} X_x(t)\chi\left(\frac{y}{K},\gamma\right)\nu_{\lambda(1+\mu)}\left(dy, dt\right).$$

Авторами була розв'язана задача по визначенню таких керувань $u\left(0 \leq u \leq 1\right)$ та $\mu\left(0 < \mu < \mu_0 < 1\right)$, що максимізують термінальну плату

$$f_{t,x}(u,\mu) = M\left(X_{x,t}\left(T\right)\right)^{\rho}, 0 < \rho < 1,$$

та знайдена ціна такого керування.

Слід зауважити, що подібні до цієї задачі, але з іншим функціоналом якості розглядалися Бондарєвим та Баєвим (2006) і Бондарєвим та Сосницьким (2013), але в них не робилось припущення про проведення фондом рекламних компаній, та Жмиховою (2011), але за умови, коли еволюція ціни ризикового активу була задана моделлю Самуельсона.

Список літератури

Бондарев, Б. В., & Сосницкий, О. Е. (2013). Некоторые задачи для модели Кларка. II. Решение задачи Р. Мертона. *Кибернетика и системный анализ, 49*(5), 99—111.

Бондарев, Б. В., Баев, А. В. (2006). Управление накопительно-потребительским фондом с функциями страховой компании. *Український математичний вісник, 3*(2), 166—186.

Жмихова, Т. В. (2011) Керування накопичувально-споживчим фондом з можливістю інвестицій в фінансовий (*B*,*S*)-ринок та витратами на рекламу за умови, що премії є випадковими. *Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика,* (1—2), 21—26.

Жмихова, Т. В. (2011). Керування накопичувально-споживчим фондом з можливістю інвестицій в фінансовий (*B*,*S*)-ринок та витратами на рекламу. *Вісник Київського національного університету ім. Т. Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки,* (3), 149—152.

НЕЛІНІЙНІ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНІ МОДЕЛЬНІ ЗАДАЧІ ТИПУ «КОНВЕКЦІЯ-ДИФУЗІЯ-МАСООБМІН» У ШАРУВАТИХ МІКРОПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ З НЕІДЕАЛЬНИМ КОНТАКТОМ

А. Я. Бомба, І. М. Присяжнюк, О. В. Присяжнюк
Рівненський державний гуманітарний університет, Рівне, Україна
abomba@ukr.net, igor_pri@mail.ru, lenapris@ukr.net

Сформовано математичну модель сингулярно збуреного процесу багатокомпонентного конвективно-дифузійного масоперенесення із врахуванням масообміну, породженого переходом забруднення з міжчастинкового простору у внутрішньочастинковий, та взаємовпливу характеристик процесу на характеристики середовища в шаруватому фільтрі за умови неідеального контакту на межі розділу шарів.

Ключові слова: масоперенесення, мікропористе середовище.

Процеси сорбції в мікропористих цеолітних каталізаторах застосовують у технологіях сепарації та очищення газів, а також у технологічних схемах очищення рідин. Складність дослідження властивостей неоднорідних складної структури середовищ з математичної точки зору пов’язана з тим, що фізичні процеси в таких середовищах описуються сингулярно збуреними крайовими задачами, коефіцієнти яких швидко змінюються на межах розділу різних фаз. Незважаючи на велику кількість публікацій, присвячених моделюванню адсорбції забруднень мікропористими матеріалами (наприклад, див. *Список літератури*), актуальним залишається питання врахування всіх складових процесу масоперенесення в таких середовищах з метою прогнозування ефективності роботи очисних пристроїв, що використовують мікропористе завантаження в якості фільтруючих шарів.

У даній роботі сформовано математичну модель процесу n-компонентного конвективно-дифузійного масоперенесення із врахуванням масообміну, породженого переходом забруднення з міжчастинкового простору у внутрішньочастинковий, та зворотнього впливу характеристик процесу на характеристики середовища (коефіцієнти дифузії) в m-шаровому фільтрі, що складається з різних за розміром і сорбційними властивостями мікропористих частинок:

$$\sigma_j \frac{\partial C_{i,j}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D_{i,j}(C_{1,j},\ldots,C_{m,j}) \frac{\partial}{\partial x} C_{i,j} \right) - v(x)\frac{\partial C_{i,j}}{\partial x} - D^*_{*i,j}\left(U_{i,j}\right)'_r\Big|_{r=R_j},$$

$$\sigma^*_j \frac{\partial U_{i,j}}{\partial t} = r^2 \frac{\partial}{\partial r}\left(D^*_{i,j}(U_{1,j},\ldots,U_{m,j}) \frac{1}{r^2}\frac{\partial U_{i,j}}{\partial r} \right), i=\overline{0,n-1},\ j=\overline{0,m-1};$$

$$C_{i,j}\left(x,0\right) = C^0_{i,j}(x),\ C_{i,0}(x,t)\Big|_{x=0} = C_{*i}(t),\ \frac{\partial C_{i,m-1}(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=L} = 0,$$

$$U_{i,j}\left(x,r,0\right) = U_{i,j}^{0}(x,r),\ U_{i,j}\left(x,R_j,t\right) = k_{i,j}C_{i,j}\left(x,t\right), \left.\frac{\partial U_{i,j}(x,r,t)}{\partial r}\right|_{r=0} = 0,$$

$$\left[C_i\right]_{l_j} = \alpha_{i,j}, \left[\left(D_{i,j}\frac{\partial C_i}{\partial x} - v(l_j)C_i\right)\right]_{l_j} = \beta_{i,j},$$

де $C_{i,j}\left(x,t\right)$ — концентрація i-го сорту забруднюючої речовини в міжчастинковому просторі в j- му шарі фільтра, $U_{i,j}\left(x,r,t\right)$ – концентрація i-го сорту забруднюючої речовини на сфері радіусом $r \geq R$ мікрочастинки з центром у точці з координатою x, $D_{i,j} = \varepsilon d_{i,j}$ та $D_{i,j}^{*} = \varepsilon^3 d_{i,j}^{*}$ — коефіцієнти дифузії відповідно в міжчастинковому просторі та в порах частинок, $D_{*i,j}^{*} = \varepsilon^2 d_{*i,j}^{*}$ — коефіцієнт впливу внутрішньочастинкового переносу на міжчастинковий, $v(x) \gg \varepsilon > 0$ — швидкість конвективного перенесення, σ_j, σ_j^{*} — коефіцієнти пористості відповідно макро- та мікросередовищ, R_j — радіус частинки, $k_{i,j}$ — константи адсорбційної рівноваги. Зауважимо, що питання ідентифікації параметрів задач дифузії в мікропористих середовищах досліджено зокрема в Sergienko et al. (2015). Уважається, що всі функції, які фігурують в умовах є достатньо гладкими та узгодженими між собою в кутових точках відповідної області, а також на поверхнях частинок.

Побудовано алгоритм асимптотичного розвинення розв'язку поставленої задачі аналогічно до Бомба, Присяжнюк, І. М. та Присяжнюк, О. В. (2017), Bomba et al. (2016). Отримані результати дозволяють зробити висновок про суттєвий вплив адсорбції та дифузії на перерозподіл концентрацій домішкових речовин (не зважаючи на те, що вони є малими в порівнянні з конвекцією).

Список літератури

Bomba, A., Klymiuk, Y., Prysiazhniuk, I., Prysiazhniuk, O., & Safonyk, A. (2016, October). Mathematical modeling of wastewater treatment from multicomponent pollution by through microporous filling. In *AIP Conference Proceedings* (Vol. 1773, No. 1, p. 040003). AIP Publishing.

Kärger, J., Grinberg, F., & Heitjans, P. (2005). *Diffusion fundamentals.* Leipzig: Leipziger Unviersite.

Petryk, M. R., & Fraissard, J. (2008). Mathematical modeling and visualization of multilevel mass transfer system in heterogeneous catalytic media of nanoporous particles. *Journal of Automation and Information Sciences, 40*(10), 1–21.

Roque-Malherbe, R. M. (2012). *Adsorption and diffusion in nanoporous materials*. Boca Raton: CRC Press.

Sergienko, I. V., Petryk, M. R., Fraissard, J., & Leclerc, S. (2015). Highly efficient methods of the identification of competitive diffusion parameters in inhomogeneous media of nanoporous particles. *Cybernetics and System Analysis, 51*(4), 529–546.

Бомба, А. Я., Присяжнюк, І. М., & Присяжнюк, О. В. (2017). *Методи теорії збурень прогнозування процесів тепломасоперенесення в пористих та мікропористих середовищах*. Рівне: О. Зень.

РОЗВИТОК МЕТОДІВ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ Й ТЕОРІЇ ЗБУРЕНЬ МОДЕЛЮВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ПРОЦЕСІВ З КЕРУВАННЯМ, ІДЕНТИФІКАЦІЄЮ ТА ОПТИМІЗАЦІЄЮ

А. Я. Бомба

Рівненський державний гуманітарний університет, Рівне, Україна

abomba@ukr.net

Дослідження присвячене розвитку методів комплексного аналізу та теорії збурень моделювання нелінійних процесів з керуванням, ідентифікацією та оптимізацією.

Ключові слова: методи теорії збурень, квазіконформні відображення, нелінійні задачі.

Роботу присвячено створенню ефективного методологічного та математичного апарату моделювання плоских і просторових нелінійних процесів типу «фільтрація-конвекція-дифузія-масообмін» у пористих та нанопористих середовищах з післядією за умов керування, ідентифікації та оптимізації параметрів, розвитку числових методів комплексного аналізу й теорії збурень розв'язування відповідних нелінійних регулярно та сингулярно збурених задач, а також моделювання процесів поширення локалізованих солітоноподібних збурень у суцільних середовищах із врахуванням їх взаємодії та розвитку методу біжучих хвиль. Застосуванню до дослідження процесів: витіснення флюїдів у нафтогазових пластах за умови їх взаємодії між собою (наприклад, фазові переходи, дифузійний перерозподіл компонент фаз тощо) та пористим середовищем (осідання частинок, сорбція, адсорбція активних компонент скелетом породи) тощо; фільтрування рідин від багатокомпонентних домішок, що є одним з найбільш складних і поширених технологічних процесів у різних галузях промисловості; охолодження водойм за умов превалювання конвективно-масообмінних їх складових над дифузійними.

Вирішуються проблеми моделювання і автоматизованого прогнозування плоских і просторових нелінійних процесів: багатофазної багатокомпонентної фільтрації в малопроникних пластах (сланцевих напластуваннях, тощо) та пластах з важко видобувними флюїдами (бітуми тощо) за умов інтенсифікації (гідравлічний розрив тощо); очищення рідин від багатокомпонентного забруднення через пористі та різнопористі середовища за умов інтенсифікації механізмів фільтрування та підвищення ефективності роботи водоочисних станцій. Моделювання процесів виникнення та поширення локалізованих солітоноподібних збурень у суцільних середовищах з урахуванням їх взаємодії.

Зокрема, розглядається процес фільтрації в пористому пласті — однозв'язній криволінійній області G_z (рис. 1), обмеженій гладкою замкненою кривою $\partial G_z = \{(x,y): \quad x = \tilde{x}(\tau), \quad y = \tilde{y}(\tau), \quad 0 \le \tau \le 2\pi, \quad \tilde{x}(0) = \tilde{x}(2\pi) = \tilde{x}_0,$ $\tilde{y}(0) = \tilde{y}(2\pi) = \tilde{y}_0,$ *де* $\tilde{x}(\tau)$, $\tilde{y}(\tau)$ — *визначені неперервно диференційовані* *функції*, $O\left(\tilde{x}_0,\tilde{y}_0\right)$ — *задана початкова точка відліку*$\}$ (рис. 1), породжений дією різниць потенціалів $\varphi_*^{(p)}$ та $\varphi^{*(p)}$ $\left(\varphi^{*(p)}-\varphi_*^{(p)}>0\right)$ на заданих

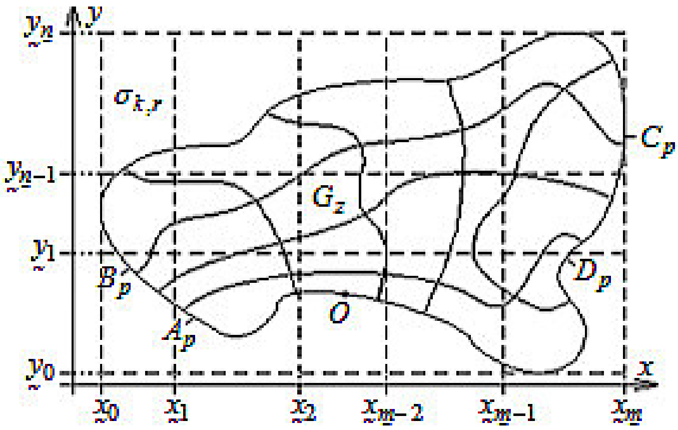


Рис. 1

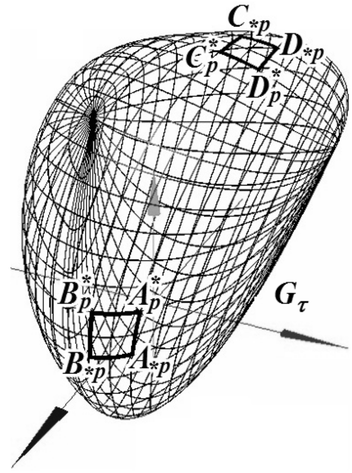


Рис. 2

еквіпотенціальних лініях A_pB_p та C_pD_p, де A_p,B_p,C_p,D_p — відмічені точки на ∂G_z; B_pC_p та A_pD_p — непроникні граничні лінії течій. В основі відповідної модельної задачі на відшукання функцій $\varphi^{(p)}=\varphi^{(p)}(x,y)$ (потенціалів) та $\psi^{(p)}=\psi^{(p)}(x,y)$ (течій) для кожної (p-ї) із $\tilde{p}$ $\left(1\le p\le\tilde{p}\right)$ інжекцій [4, 5] за умови ідентифікації коефіцієнта провідності (КП) $\sigma=\sigma(x,y)$ [1— 6] є такі співвідношення:

$$\sigma\frac{\partial\varphi^{(p)}}{\partial x}=\frac{\partial\psi^{(p)}}{\partial y},\sigma\frac{\partial\varphi^{(p)}}{\partial y}=-\frac{\partial\psi^{(p)}}{\partial x};$$

$$\varphi^{(p)}\Big|_{A_pB_p}=\varphi_*^{(p)},\varphi^{(p)}\Big|_{C_pD_p}=\varphi^{*(p)},\ \psi^{(p)}\Big|_{A_pD_p}=0,\ \psi^{(p)}\Big|_{B_pC_p}=Q^{(p)};$$

$$\int\limits_{MN}\sigma\frac{\partial\varphi^{(p)}}{\partial n}=Q^{(p)},M\in B_pC_p,N\in A_pD_p;$$

$$\varphi\left(M\right)\Big|_{B_pC_p}=\overline{\varphi}^{(p)}\left(M\right),\ \varphi\left(M\right)\Big|_{A_pD_p}=\underline{\varphi}^{(p)}\left(M\right),$$

$$\psi\left(M\right)\Big|_{A_pB_p}=\psi_*^{(p)}\left(M\right),\ \psi\left(M\right)\Big|_{C_pD_p}=\psi^{*(p)}\left(M\right).$$

Тут $\vec{n}$ — одиничний вектор зовнішньої нормалі; M — біжуча точка відповідної кривої; функції $\overline{\varphi}^{(p)}\left(M\right)$, $\underline{\varphi}^{(p)}\left(M\right)$, $\psi_*^{(p)}\left(M\right)$, $\psi^{*(p)}\left(M\right)$ та повна витрата $Q^{(p)}$ — одержуються в результаті фізичних замірів; коефіцієнт $\sigma\left(x,y\right)$ представляємо або у вигляді єдиного для даної області аналітичного виразу (многочлена

$$\sigma\left(x,y\right)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{r=0}^{k}\alpha_{k-r,r}x^{k-r}y^{r}$$

чи тригонометричного многочлена

$$\sigma\left(x,y\right)=$$

$$\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{r=0}^{n-1}\lambda_{k,r}\left(a_{k,r}\cos kx\cos ry+b_{k,r}\cos kx\sin ry+c_{k,r}\sin kx\cos ry+d_{k,r}\sin kx\sin ry\right),$$

де $\alpha_{k,r}$, $a_{k,r}$, $b_{k,r}$, $c_{k,r}$, $d_{k,r}$ — шукані параметри; $\lambda_{k,r}=0.25$, *якщо* $k=r=0$, $\lambda_{k,r}=0.5$, *якщо* $k=0\wedge r>0\vee k>0\wedge r=0$, $\lambda_{k,r}=1$, *якщо* $k,r>0$), або «покусково» (як це зображено на рис. 1, за відповідних умов спряження), або ж, коли деякі із однорідних ділянок збурюються функціями виду

$$\tilde{\sigma}\left(x,y\right)=\alpha\left(x-\overline{x}\right)^{2\underline{l}}\left(y-\overline{y}\right)^{2\overline{l}}.$$

При побудові алгоритмів розв'язання прямих задач та задачі ідентифікації використані ідеї, закладені у роботах [1—6].

Результати узагальнено на відповідний просторовий випадок (див. рис. 2) [9—11].

На відповідному фільтраційному фоні розглядається усереднена вздовж ліній течії обернена модельна сингулярно збурена задача однокомпонентного конвективно-адсорбційно-дифузійного масопереносу в двопористому середовищі [7, 8]:

$$\sigma_1\frac{\partial c}{\partial t}=\varepsilon a\left(t\right)\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}-v(x)\frac{\partial c}{\partial x}-\varepsilon b(t)\left(\frac{\partial q}{\partial r}\right)\Bigg|_{r=R};$$

$$\sigma_2\frac{\partial q}{\partial t}=\varepsilon a^*(t)\left(\frac{\partial^2 q}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial q}{\partial r}\right);$$

$$c\left(x,0\right)=c_0^0(x),\ c\left(0,t\right)=c_*(t),\ c_x(x,t)\big|_{x=l}=0,$$

$$q\left(x,r,0\right)=q_0^0(x,r),\ q\left(x,R,t\right)=k(t)\cdot c\left(x,t\right),\ q_r(x,r,t)\big|_{r=0}=0;$$

$$b(t)\int_0^l q(x,R,t)dx=D_*^*(t),\ k(t)\int_0^l c(x,t)dx=K_*^*(t),$$

$$a(t)\frac{\partial c(x,t)}{\partial x}\Bigg|_{x=0}=c_*^*(t),\ a^*(x,t)\frac{\partial q(x,r,t)}{\partial r}\Bigg|_{r=R}=q_*^*(x,t), \tag{1}$$

де $c\left(x,t\right)$, $q\left(x,r,t\right)$ — концентрації речовини відповідно в міжчастинковому просторі та в самих частинках, l — товщина середовища, R — радіус частинки, $v(x)$ — швидкість конвективного перенесення, $b(t)$ та $k(t)$ — невідомі функції впливу внутрішньо-частинкового дифузійного переносу на міжчастинковий та адсорбційної рівноваги відповідно, функції $a(t)$ та $a^*(x,t)$, які є достатньо гладкими та обмеженими функціями [7], відповідно характеризують швидкість протікання процесів дифузійного масоперенесення в міжчастинковому просторі та в порах частинок і знаходяться з умов перевизначення (1), $c_*^*(t)$, $q_*^*(x,t)$, $D_*^*(t)$, $K_*^*(t)$ — функції, що характеризують масовий розподіл речовини з часом (входять в умови перевизначення і знаходяться експериментально), σ_1, σ_2 — коефіцієнти пористості відповідно макро- та мікросередовища. На основі результатів, отриманих авторами в роботі [7], побудовано асимптотичне наближення розв'язків наведеної вище задачі.

Одержані результати узагальнено на простір [9—11]. Зокрема, у роботі [9] сформовано та проаналізовано математичну модель очищення води у фільтрі-освітлювачі з урахуванням впливу дози реагенту та незворотної коагуляції домішкових частинок.

Список літератури

1. Somersalo, E., Cheney, M., & Isaacson, D. (1992). Existence and uniqueness for electrode models for electric current computed tomography. *SIAM J. Appl. Math.*, *52*(4), 1023–1040.
2. Бомба, А. Я., Каштан, С. С., Пригорницький, Д. О., & Ярощак, С. В. (2013). *Методи комплексного аналізу: Монографія*. Рівне: НУВГП.
3. Бомба, А. Я., Булавацький В. М., & Скопецький, В. В. (2007). *Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки: Монографія*. Київ: Наукова думка.
4. Бомба, А. Я., & Крока, Л. Л. (2014). Числовий метод квазіконформного відображення розв'язання задач ідентифікації коефіцієнта електричної провідності за даними томографії прикладених потенціалів. *Волинський математичний вісник. Серія: Прикладна математика*, *11*(20), 24—33.
5. Бомба, А. Я., & Бойчура, М. В. (2016). One numerical complex analysis method for parameters identification of piecewise homogeneous conductivity media with using applied quasipotential tomographic data. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки: Зб. наук. праць*, *14*, 5—17.
6. Бомба А. Я., Бойчура М. В., Савюк Є. В. (2016). Числові методи квазіконформних відображень моделювання повільного руху рідини у водоймах. *Вісник НУВГП. Серія: Технічні науки: Зб. наук. праць*, *2*(74), 92-106.
7. Бомба, А. Я., Присяжнюк, І. М., & Присяжнюк, О. В. (2017). *Методи теорії збурень прогнозування процесів тепломасоперенесення в пористих та мікропористих середовищах: монографія*. Рівне: О. Зень.
8. Sergienko, I. V., Petryk, M. R., Fraissard, J., & Leclerc, S. (2015). Highly efficient methods of the identification of competitive diffusion parameters in inhomogeneous media of nanoporous particles. *Cybernetics and System Analysis*, *51*(4), 529–546.
9. Бомба, А. Я., & Сафоник, А. П. (2014). Моделювання процесу очищення води фільтром-освітлювачем із шаром завислого осаду. *Проблемы машиностроения*, *17*(4), 36—43.
10. Бомба, А. Я., & Климюк, Ю. Є. (2014). *Математичне моделювання просторових сингулярно-збурених процесів типу фільтрація-конвекція-дифузія: Монографія*. Рівне: Асоль.
11. Теребус, А. В. (2011). Просторові модельні аналоги крайових задач на квазіконформні відображення. *Волинський математичний вісник. Серія: Прикладна математика*, *8*(17), 191—205.

ОПТИМІЗАЦІЯ РОЗПОДІЛЕНОЇ СИСТЕМИ МОНІТОРИНГУ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

Ю. П. Буценко, В. А. Лабжинський
КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
armchairdoc@ukr.net, sergeant@aprodos.kpi.ua

Розглядається задача мінімізації витрат на утримання системи моніторингу. Датчики перебувають під впливом пуассонових потоків збоїв та відмов.
Ключові слова: система моніторингу, датчик, збій, відмова, ланцюг Маркова.

Задача створення розподіленої системи моніторингу виникає в багатьох галузях техніки — при контролі стану споруд, транспортних засобів, робочих зон хімічних та енергетичних реакторів тощо. У цьому випадку діагностика системи будується на основі інформації про частку датчиків, що надають дані про належний або неналежний стан контрольованої ними ділянки. У зв'язку з цим виникають задачі оптимізації кількості використовуваних датчиків за таких умов:

- забезпечення достатньо високої ймовірності прийняття правильного рішення шляхом застосування голосування для працездатних датчиків;
- забезпечення достатнього рівня контрольованості системи — частки працездатних датчиків;
- мінімізації середнього значення збитків з урахуванням можливих помилок першого та другого родів, а також втрати контрольованості системи.

Нехай ми маємо елементи контролю системи, які перебувають під впливом потоків збоїв, що спричиняють помилки, які проявляються лише при поточному вимірюванні, та відмов, які призводять до виходу датчика з ладу, що тягне за собою невірні покази при поточному та всіх наступних вимірюваннях.

Надалі припускатимемо, що:

- існують критерії, відповідно до яких можна виявити неробочі датчики за наявності певних типів збоїв та відмов (надалі — явних);
- як явні, так і неявні збої та відмови відбуваються в моменти, визначені пуассоновими потоками з відповідними інтенсивностями;
- наявні елементи контролю є однорідними з точки зору потоків збоїв та відмов, що впливають на них;
- контроль стану системи (зняття показань датчиків) відбувається через рівні часові інтервали.

Таким чином, позначивши λ_1 — інтенсивність потоку явних збоїв, λ_2 — інтенсивність потоку неявних збоїв, λ_3 — інтенсивність потоку неявних відмов, λ_4 — інтенсивність потоку явних відмов, Δt — тривалість часового інтервалу між послідовними вимірюваннями, отримуємо:

- $p_1 = \int\limits_0^{\Delta t} \lambda_1 e^{-\lambda_1 \tau} d\tau$, $p_2 = \int\limits_0^{\Delta t} \lambda_2 e^{-\lambda_2 \tau} d\tau$ — імовірності явного або неявного збою відповідно при першому вимірюванні;
- $p_3 = \int\limits_0^{\Delta t} \lambda_3 e^{-\lambda_3 \tau} d\tau$, $p_4 = \int\limits_0^{\Delta t} \lambda_4 e^{-\lambda_4 \tau} d\tau$— імовірності неявної або явної відмови відповідно при першому вимірюванні.

Подальшу еволюцію кожного з датчиків можна розглядати як траєкторію ланцюга Маркова з дискретним часом та п'ятьма станами:

1. Датчик працездатний.
2. Явний збій.
3. Неявний збій.
4. Неявна відмова.
5. Явна відмова.

Матриця перехідних імовірностей для такого ланцюга має такий вигляд (вважаємо початковий стан працездатним):

$$P = \begin{pmatrix} 1 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ 1 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ 1 - p_1 - p_2 - p_3 - p_4 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - p_4 & p_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки стан 5 є поглинаючим, то датчик напевно опиниться в ньому через деякий час. Функціонування системи датчиків є паралельною еволюцією n (початкова кількість датчиків) незалежних (припускаємо, що це має місце) ланцюгів вказаного типу. До сукупності їх траєкторій висувають такі вимоги:

- імовірність того, що протягом часу $m \cdot \Delta t$, необхідного для проведення перших m вимірювань, кількість ланцюгів, які перебувають у стані 1, не менша за наперед задане значення $k \le n$, у свою чергу, не менша наперед заданого значення p_0;
- важливим параметром траєкторії системи є середнє значення суми

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\mu_2 \nu_2^{(i)} + \mu_3 \nu_3^{(i)} + \mu_4 \nu_4^{(i)} + \mu_5 \nu_5^{(i)} \right),$$

  де $\nu_k^{(i)}$ — кількість датчиків, що перебувають у станах 2, 3, 4, 5 відповідно при i-му вимірюванні, μ_i — вагові коефіцієнти, що відображають негативний вплив на систему відповідного стану датчика, не перевищує заданого значення M_0.

Основним параметром, зміною якого забезпечується належна надійність та керованість функціонування системи, є кількість використовуваних датчиків n. Другим за можливістю використання — параметри датчиків.

Цільова функція задачі оптимізації має враховувати:

- вартість датчика;
- вартість виведення системи з експлуатації;
- вартість функціонування системи в одиницю часу (протягом проміжку між двома послідовними вимірюваннями).

Якщо допускається вихід з ладу не більше ніж двох датчиків системи, то позначивши через q_0 імовірність такої події, співвідношення «вартість — ефективність» матиме такий вигляд

$$V\left(n\right)=\frac{q_0}{nc}=\frac{1}{2c}\left(e^{-\lambda}\right)^{n-2}\left(n\left(1-e^{-\lambda}\right)-\frac{2}{n}e^{-2\lambda}+2\left(4e^{-\lambda}-3e^{-2\lambda}-1\right)\right),$$

де $e^{-\lambda}$ — наближена ймовірність безвідмовної роботи одного датчика протягом m циклів (λ вважається рівною mp, де $p=1-p_1-p_2-p_3-p_4$), n — загальна кількість датчиків у системі, c — вартість використання одного датчика протягом часу $m\Delta t$.

Встановлюється існування та єдиність мінімуму функції $V(n)$ при $n\geq 3$ для високонадійних датчиків $(0<\lambda\ll 1)$, що дозволяє оптимізувати інформаційне забезпечення системи моніторингу технологічних об'єктів в описаному вище сенсі.

Список літератури

Latif-Shabgahi, G., Bennett, S., & Bass, J. M. (2002). Voting algorithms in multiple error scenarios for real-time control applications. *IFAC Proceedings Volumes, 35*(1), 391–396.

Барзилович, Е. Ю. (1982). *Модели технического обслуживания сложных систем.* Москва: Высшая школа.

Буценко, Ю. П., & Лабжинський, В. А. (2017). Математична модель мажоритарного голосування для діагностування техногенно небезпечних систем. У *Матеріали V Міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті»* (с. 34—35). Київ: НТУУ «КПІ».

Карманов, А. В. (2002). *Исследование управляемых конечных марковских цепей с неполной информацией (минимаксный подход).* Москва: Физматлит.

Панкратова, Н. Д., & Радюк, А. М. (2008). Розпізнавання позаштатної ситуації в динаміці функціонування техногенно небезпечного об'єкта, *Наукові вісті НТУУ «КПІ»,* (3), 43—52.

УМОВИ ЗРОСТАННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ ВПРОВАДЖЕННЯ ІНФОРМАЦІЙНО-НАЧАЛЬНОГО СЕРЕДОВИЩА В НАВЧАЛЬНИЙ ПРОЦЕС

В. П. Кайдан[1], Н. В. Кайдан[2], В. В. Глазова[2]

[1]*Слов'янський енергобудівний технікум, Слов'янськ, Україна*

[2]*Донбаський державний педагогічний університет, Слов'янськ, Україна*

kajtan.kt@gmail.com, kaydannv@gmail.com

Розглянуто навички та підходи в роботі викладача, що забезпечують створення ефективного інформаційно-навчального середовища та умови зростання ефективності впровадження інформаційно-начального середовища в навчальний процес.

Ключові слова: викладач, вища освіта, інформаційно-навчальне середовище.

Модернізація освіти України потребує від педагогічних працівників відповідної науково-методичної новизни. Це стосується і складного багатоаспектного поняття «інформаційно-навчальне середовище» (Мацюк, 2016).

Єдине інформаційно-освітнє середовище вищого навчального закладу покликане створити якомога кращі умови для опанування здобувачами освіти навчального матеріалу, що є запорукою отримання якісної освіти. На нашу думку, дану структуру неможливо вважати повною без такої структурної одиниці, як матеріали опрацьовані здобувачами освіти. До таких матеріалів можуть належати звіти з лабораторних робіт, матеріали доповідей, реферати, курсові проекти та роботи тощо.

Зауважмо, що інформаційно-навчальне середовище розробляється та створюється викладачем для організації навчально-пізнавальної діяльності здобувача освіти. Розміщені в ньому матеріали та посилання працюють як окремі частини структури курсу певної дисципліни або предмету, так і забезпечують цілісну структуру майбутніх знань, умінь та навичок здобувача освіти (Кадемія & Шахіна, 2011).

Використання великої кількості різноманітних джерел інформації створюють умови для індивідуалізації діяльності кожного окремого здобувача. І чим більша кількість посилань та варіантів повідомлення навчальної інформації, тим більше шансів у здобувача створити свою унікальну систему опрацювання навчального курсу. Крім того, ця система буде як найбільш пристосована до вимог саме цієї людини, що лише позитивно вплине на результати навчання.

Одночасно з вказаними позитивними елементами необхідно вказати на можливі недоліки такої системи навчання. Варіативність, існування якої було доведено вище, усе ж таки створюється однією людиною. Навіть у випадку, коли викладач виступає в першу чергу як архітектор навчального курсу, а відповідно цьому творець критеріїв відбору інформації, а в самій роботі йому допомагає додатковий контингент контент-менеджерів, усе ж таки існує певний вплив лише однієї системи поглядів на дане питання. Таким чином, більш правильним було б казати про варіативність у певних рамках.

Логічно припустити, що такий випадок наявності певних меж у використанні навчальної інформації унеможливлює позитивний результат для певної кількості здобувачів освіти. Чим більш кваліфікований педагогічний склад навчального закладу та більш ефективна робота контент-менеджерів, тим менша масова частина такого контингенту серед осіб, що отримують освіту. Але не існує системи доказів, що дозволить переконливо довести змогу викладача самостійно довести кількість таких здобувачів до нуля. Виходячи з цього, на нашу думку зростання ефективності розроблених курсів можна забезпечити створенням робочих груп з викладачів відповідного предмету або дисципліни.

Така діяльність буде більш ефективною у випадку створення робочих груп з викладачів різних кафедр чи циклових комісій, або як варіант різних вищих навчальних закладів, які є структурними підрозділами вищого навчального закладу більш високого рівня акредитації. На нашу думку, такий підхід можливий, однак існують фактори, що унеможливлюють ефективне протікання таких процесів в окремих випадках. Наприклад, випадок коли певну дисципліну взагалі викладає одна особа в даному навчальному закладі, а інформаційно-освітнє середовище цього навчального закладу не пов’язано з іншими навчальними закладами. Продуктивність діяльності такої групи буде зростати у випадку коли відповідні інформаційно-навчальні середовища предметів та дисциплін будуть структурними елементами єдиного інформаційно-освітнього середовища.

Інший підхід до підвищення ефективності навчальних курсів, на нашу думку, є залучення до їх вдосконалення осіб, що вже опанували цей курс, тобто здобувачів освіти. По-перше, це дозволить значно збільшити кількість осіб, що виконують певним чином функції контент-менеджерів, без додаткового фінансування, що вже є позитивним фактором. По-друге, буде забезпечено стабільна кількість відгуків про доступність, зручність та ефективність даного курсу, а також інформації про виявлені недоліки, тобто, буде забезпечено стабільний зворотній зв’язок. Важливість цієї інформації очевидна, оскільки вона буде поступати від споживачів освітньої послуги. Третій важливий фактор — можливість використання результатів процесу навчання здобувачів у подальшій освітній роботі. Саме він повинен забезпечити велику кількість підходів до освітнього процесу, а відповідно забезпечити зростання кількості варіацій опрацювання навчального матеріалу (Кайдан, 2015).

Реалізація цього фактору можлива за таких умов:

— наявність завдань напрямлених на аналіз та опис дій під час певного виду діяльності у процесі опанування навчальним курсом;

— наявність завдань спрямованих на пошук нових джерел інформації та аналіз зручності їх використання;

— розміщення результатів навчальної діяльності здобувача в інформаційно-навчальному середовищі даного курсу.

Окрему увагу хотілося б приділити першій із вказаних умов. Можливо такі завдання необхідно виконувати не всім, а лише тим особам, що претендують на високі результати навчання. Однак унікальність кожної людини в даному випадку відображається саме в унікальності вибору шляху розв’язання навчальної проблеми. А вже використання такого унікального досвіду є запорукою зростання рівня універсальності окремого інформаційно-освітнього середовища.

Необхідно зазначити, що вказані положення неможливо вважати зайвими під час навчального процесу у вищому навчальному закладі. Така діяльність забезпечить розвиток аналітичних здібностей, покращить здатність передачі інформації, тощо. А це, на нашу думку, є дуже важливим під час підготовки наукових та педагогічних кадрів, під час навчання керівників різного рівня.

Отже, зростання ефективності впровадження та використання інформаційно-начального середовища з певної дисципліни або предмету можливо за умови збільшення варіативності процесу опанування навчальною інформацією, що можливо за реалізації наступних факторів:

— створенням робочих груп з викладачів відповідного предмету або дисципліни;

— використання завдань напрямлених на аналіз та опис дій здобувача під час навчання;

— використання завдань з пошуку та аналізу нових джерел інформації;

— використання результатів навчальної діяльності здобувача в інформаційно-навчальному середовищі.

Список літератури

Кадемія, М. Ю., & Шахіна, І. Ю. (2011). *Інформаційно-комунікаційні технології в навчальному процесі*: *Навчальний посібник*. Вінниця: ТОВ «Планер».

Кайдан, Н. В. (2015). Використання елементів дистанційної освіти в навчальному процесі вищої школи. В. І. Сипченко (Ред.), *Гуманізація навчально-виховного процесу: Збірник наукових праць, 74,* 26—32.

Мацюк, Г. (2016). Сутність інформаційно-навчального середовища і його роль у професійному розвитку іноземних студентів. У *Матеріалах ІІІ Міжнародної науково-методичної конференції «Актуальні питання організації навчання іноземних студентів в Україні»,* 18—20 травня 2016 року (с. 134—137). Тернопіль: ФОП Паляниця В. А.

ЗАСОБИ 3D МОДЕЛЮВАННЯ У РОБОТІ ВЧИТЕЛЯ

Н. В. Кайдан, З. Д. Пащенко, А. В. Стьопкін, Т. В. Турка
Донбаський державний педагогічний університет, Слов'янськ, Україна
kaydannv@gmail.com, tvturka@gmail.com

У статті висвітлено сучасний стан проблеми використання засобів 3D моделювання на уроках трудового навчання в загальноосвітніх школах. Розглянуто основні переваги та недоліки використання різних систем 3D моделювання у роботі вчителя трудового навчання.

Ключові слова: 3D моделювання, візуалізація, методика навчання трудового навчання.

Сучасну наукову роботу неможливо уявити без застосування комп'ютерної техніки. Представлення графічних даних на моніторі комп'ютера вперше було реалізовано в середині 50-х років для великих ЕОМ. З тих пір графічний спосіб відображення даних став невід'ємною складовою комп'ютерних систем. Застосування обчислювальної техніки для створення графічних зображень та їх відображення різними засобами називають *комп'ютерною графікою*. Вона поділяється на два види: двовимірна (2D) та тривимірна (3D). Двовимірна графіка це зображення на площині. Цей вид графіки є основою і тривимірної. Яка, у свою чергу, вивчає методи побудови об'ємних моделей об'єктів у віртуальному просторі (Жалдак, 2004).

Динамічний розвиток обчислювальних машин сприяв вдосконаленню та проникненню комп'ютерної графіки в усі сфери нашого життя, не оминувши й таку важливу сферу, як освіта. Сьогодні принцип наочності у викладанні будь-яких дисциплін набуває все більшого значення. Навіть у сільських школах дітей уже не здивуєш ані комп'ютером, ані планшетом або смартфоном, тим більше, що у більшості учнів є, як мінімум, один із цих пристроїв. Таким чином, поступово замість звичних таблиць і плакатів застосовуються комп'ютерні презентації та мультимедійні дошки, а замість звичайного пояснення та демонстрації якогось явища чи процесу за допомогою ілюстрацій або макетів ліпше подивитись відео, де все докладно показано (Рамский, 2003).

Останнім часом для створення наочності все частіше використовують 3D-моделі, створені за допомогою різноманітних інструментів. Дана тенденція не підштовхує до повного виключення класичних методів, але стає все більш актуальною для більшості навчальних дисциплін, трудове навчання не є виключенням.

У наш час є досить велика кількість програмних засобів для 3D моделювання, які надають досить широкий спектр інструментів для побудови необхідних для навчального процесу моделей. Але всі програмні засоби мають як свої переваги, так і недоліки. Достатньо вагомою залишається саме проблема вибору оптимального програмного засобу, який повною мірою забезпечить потреби вчителя та учнів під час побудови 3D-моделей.

Серед різноманіття програм 3D моделювання складно обрати оптимальний програмний засіб, але зважаючи на те, що він буде використовуватися для навчання в загальноосвітніх школах, які іноді не можуть собі дозволити сучасний комп'ютерний клас та навіть комерційне програмне забезпечення, то коло пошуку можна відразу зменшити до безкоштовних програм з мінімальними системними вимогами, наприклад Компас-3D або Blender. Але, зважаючи на те, що освітні версії програмного засобу Компас-3D, які можна використовувати на заняттях у школах, значно спрощенні у порівнянні з повною версією, то розглянемо повністю безкоштовний програмний засіб 3D моделювання під назвою Blender.

Blender — це безкоштовний професійний пакет для створення тривимірної комп'ютерної графіки, що включає в себе інструменти моделювання, анімації, рендеринга, обробки відео та створення ігрових застосунків. Особливістю цього програмного продукту є його невеликий розмір порівняно з іншими програмами, призначеними для роботи з 3D-графікою. Додаткові можливості реалізуються підключенням додаткових плагінів — як офіційних, так і розроблених незалежними користувачами (Chronister, 2011).

Також слід відзначити, що Blender кросплатформений та працює навіть на комп'ютерах з одноядерними процесорами з частотою 1ГГц, при наявності 512 Мб оперативної пам'яті (ОЗУ) та графічною картою з підтримкою OpenGL з 64 МБ ОЗУ, що значно розширює коло її використання навіть у загальноосвітніх школах, де давно не оновлювалась комп'ютерна техніка.

І хоча Blender раніше мав репутацію складної для вивчення та роботи програми, так як кожна функція має відповідну їй комбінацію клавіш, а взявши до уваги кількість інструментів, які має Blender, кожна клавіша входить у більш ніж одну комбінацію, то коли він став проектом з відкритим вихідним кодом, було додано контекстні меню до всіх можливих функцій, а використання інструментів стало більш логічним і гнучким. Також слід зазначити подальше поліпшення користувацького інтерфейсу з введенням різноманітних колірних схем, прозорих плаваючих елементів, новою системою перегляду дерева об'єктів та ін.

Однією з важливих особливостей програми є відкритий WebGL (програмна бібліотека WebGL дозволяє створювати на JavaScript інтерактивну 3D-графіку, що функціонує в широкому спектрі сумісних з нею браузерів). За рахунок використання низькорівневих засобів підтримки OpenGL, частина коду на WebGL може виконуватися безпосередньо на відеокартах. Фреймворк Blend4Web дозволяє експортувати підготовлені в Blender сцени для відтворення у стандартних браузерах, без необхідності встановлення будь-яких розширень.

До основних переваг програми можна віднести: можливість безкоштовного використання повної версії програми; відкритість коду; постійний розвиток та оновлення (остання версія 2.79 вийшла 12 вересня 2017 року); порівняно невеликий розмір інсталятора; можливість створення ігор; кросплатформеність; можливість створення анімації, у тому числі та ріггінга (анімація за допомогою «арматури»); настроювання фону; монтаж відео; скінінг (прив’язка моделі персонажа до скелету для того, щоб під час руху скелета рухалася і сама модель); можливість роботи з хромакеєм (технологія суміщення двох і більше зображень в одній композиції).

До основних же недоліків можна віднести: відсутність документації в базовій поставці, але її можна знайти на сайті програми та не дуже якісний переклад інтерфейсу з англійської на інші мови.

Використання програм 3D моделювання на уроках трудового навчання дозволяє зменшити час розв’язання поставлених задач, організувати необхідний рівень візуалізації та спростити процес побудови моделі майбутнього виробу. Специфіка програми Blender дозволяє припустити, що її використання підвищить ефективність навчання, а в перспективі може сприяти поступовому переходу до вирішення нестандартних задач творчого характеру. Але обґрунтування цього потребує більш детального дослідження.

Список літератури

Chronister, J. (2011). *Blender Basics: Classroom Tutorial Book* (4^{th} ed.). Blender Nation.

Жалдак, М. І., & Вітюк, О. В. (2004). *Комп’ютер на уроках геометрії*. Київ: РННЦ ДІНІТ.

Рамский, Ю. С. (2003). Информационное общество. Информатизация образования. *Компьютерно-ориентированные системы обучения*, (7), 16—28. Киев: НПУ им. М.П. Драгоманова.

КОРЕЛЯЦІЙНИЙ АНАЛІЗ В ЗАСТОСУВАННІ ДО ВИЗНАЧЕННЯ СТРУКТУРИ РІВНЯННЯ РЕГРЕСІЇ

С. М. Лапач

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ, Україна
lapach@ukr.net

Досліджується стійкість коефіцієнтів різних видів кореляції (Пірсона, Спірмена, Кендала, часткового) до наявності випадкової помилки, викидів та мультиколінеарності з метою використання для конкретної специфікації рівняння регресії.

Ключові слова: регресійний аналіз, кореляційний аналіз, структура рівняння регресії, рангові коефіцієнти кореляції, мультиколінеарність, частковий коефіцієнт кореляції.

Стан питання. Методи формування конкретної специфікації регресійного рівняння останнім часом розвивались слабко (див. Дрейпер (2007) і Грін (2005) проти Thompson (1978) і Butler (1982)). Застосування з цією метою кореляційного аналізу обґрунтовано в Мешалкин (1970) і Лапач (1993, 1998, 1999, 2007). Його застосування базується на доведених твердженнях, що незалежно від ступені закорельованості коефіцієнт кореляції для «істинного» ефекту буде більший, ніж для «хибного» і для більш сильного «істинного» коефіцієнт кореляції буде більший, ніж для слабшого. Разом з тим останнім часом в літературі з'являються припущення, що замість коефіцієнта кореляції Пірсона в таких ситуаціях краще використовувати рангові коефіцієнти кореляції або навіть частковий коефіцієнт кореляції.

Результати досліджень. Був проведений обчислювальний експеримент на штучно сконструйованих прикладах для 5 факторів з різним рівнем закорельованості на вибірках з числом дослідів 32. Рівень закорельованості оцінювався за двома показниками: найбільший коефіцієнт кореляції між факторами (в таблицях $\max$ з вказівкою $r(x_i, x_j)$, між якими факторами досягається) і середній (в таблицях aver). Середній коефіцієнт кореляції змінювався в тестах від 0 до $0,265$; а максимальний — від 0 до $0,88$. Оцінювався вплив закорельованості і наявності викидів на збереження відношень між значеннями коефіцієнтами кореляції.

У результаті досліджень установлено, що коефіцієнт кореляції Пірсона при рівнях значень вище $0,05$ слабко реагує на наявність випадкової помилки і «викидів». Приклад відображено в табл. 1: Y — кореляція для ідеальної ситуації, $Y+\varepsilon$ — кореляція при наявності випадкової помилки, а $Y+\varepsilon+OL$ — при наявності помилки і «викиду».

Таблиця 1. Вплив випадкової помилки і «викидів» на значення коефіцієнта Пірсона.

Вид вибірки	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
Y	0,845034	-0,50702	0,169007	0,016901	0
$Y+\varepsilon$	0,816621	-0,53149	0,164461	0,037965	0,046347
$Y+\varepsilon+OL$	0,81192	-0,53361	0,161009	0,034755	0,074279

З табл. 2 можна побачити, що рангові коефіцієнти Спірмена і Кендала також стійкі з точки зору досліджуваних властивостей. Але при цьому застосування коефіцієнта кореляції Кендала небажане, так як він навіть в ідеальному варіанті (без випадкової помилки і «викидів» дає розподіл значень, які входять в протиріччя з фактичними залежностями між факторами (табл..2). Розглядаючи перший блок («Y») в табл. 2 (і рис. 1—3) можна побачити, що розподіл за абсолютними значеннями коефіцієнтів кореляції Кендала $(X_2, X_1, X_5, X_4, X_3)$ абсолютно не відповідає фактичному, яке точно відображають коефіцієнти Пірсона і Спірмена $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$. Виходячи зі вказаного можна сказати, що різниця між коефіцієнтами Пірсона і Спірмена несуттєва, а коефіцієнт Кендала не може бути використаний взагалі.

Таблиця 2. Вплив випадкової похибки і «викидів» на значення коефіцієнтів кореляції (П — Пірсона, С — Спірмена, К — Кендала)

	Y			$Y+\varepsilon$			$Y+\varepsilon+OL$		
	П	С	К	П	С	К	П	С	К
X_1	0,845	0,859	0,613	0,817	0,844	0,629	0,812	0,844	0,645
X_2	-0,507	-0,430	-0,677	-0,532	-0,442	-0,661	-0,534	-0,442	-0,645
X_3	0,169	0,215	-0,032	0,164	0,194	-0,032	0,161	0,194	-0,040
X_4	0,017	0,107	-0,097	0,038	0,047	-0,161	0,035	0,047	-0,177
X_5	0	0	-0,194	0,046	0,054	-0,161	0,074	0,054	-0,137

Табл. 3 ілюструє вплив закорельованості матриці факторів на характер кореляції з відгуком. З неї можна зробити наступні висновки:

- при малих значення коефіцієнтів кореляції (до 0,05) пропорції між факторами порушуються навіть при слабкій закорельованості;
- навіть при сильній закорельованості «істинний» сильний фактор має коефіцієнт кореляції більший, ніж «хибний».
-

Таблиця 3. Вплив мультиколінеарності на значення коефіцієнтів кореляції Пірсона

Показник закорельованості		Фактори				
max	Aver	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
0	0	0,816621	-0,53149	0,164461	0,037965	0,046347
0,563602 $r(X_1,X_2)$	0,148528	0,927855	-0,79285	0,236873	0,064877	-0,00096
0,625 $r(X_1,X_2)$	0,0625	0,926727	-0,83686	0,128168	0,029587	0,03612
0,881917 $r(X_1,X_5)$	0,265449	0,927855	-0,79285	0,236873	0,064877	0,780933

Для часткової кореляції, як видно з табл. 4, співвідношення між коефіцієнтами кореляції правильно відображаються для коефіцієнтів кореляції з відгуком від 0,15 і вище. Для порівняння в останньому рядку таблиці для самої високої закорельованості показаний результат після першого кроку алгоритму ПВС (послідовного виділення структури) Лапач (1993). Видно, що для нього зберігається співвідношення між факторами на всіх рівнях.

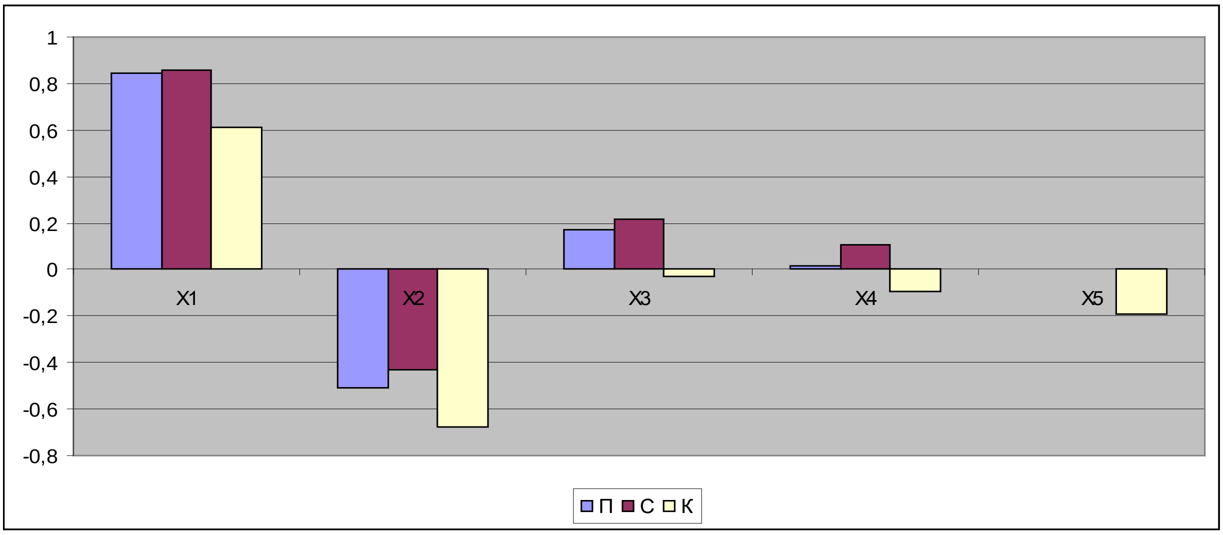


Рис.1. Спотворення в ідеальних умовах

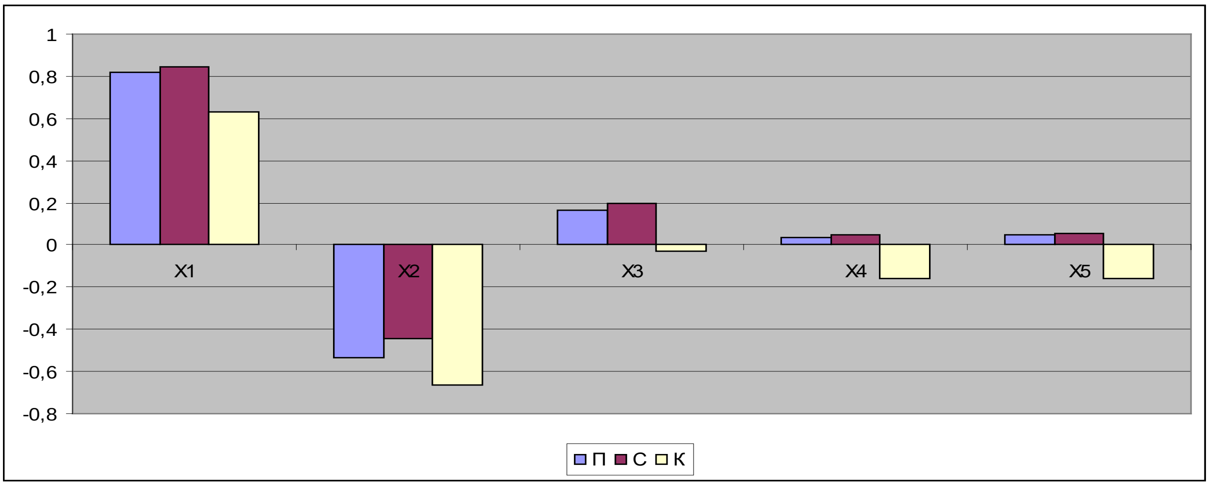


Рис.2. Спотворення при наявності випадкової помилки

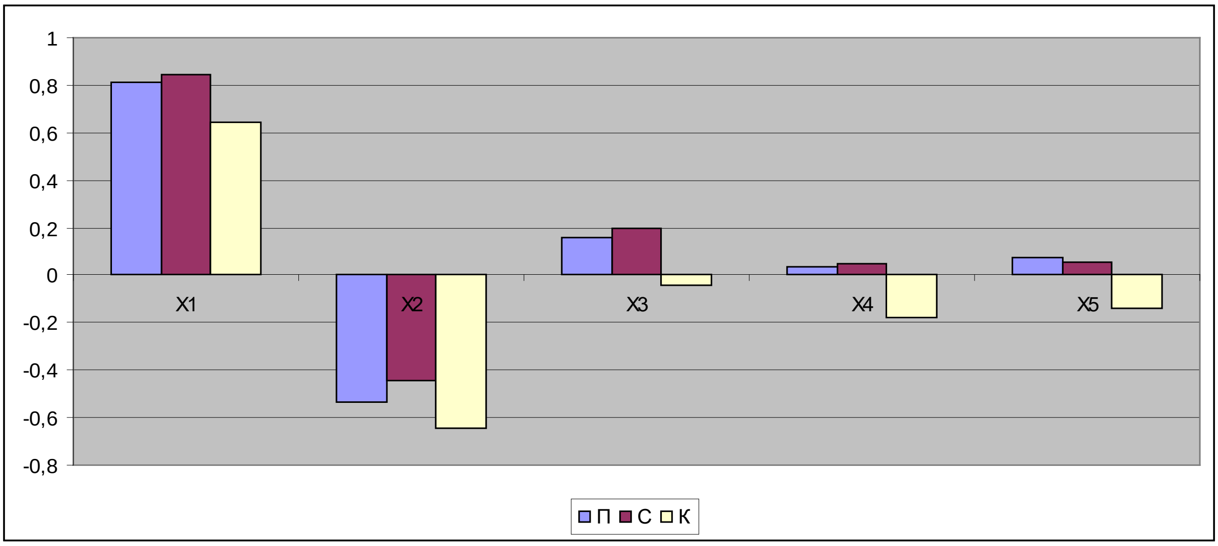


Рис. 3. Спотворення при наявності викидів

Таблиця 4. Вплив мультиколінеарності на частковий коефіцієнт кореляції

Закорельованість		Алгоритм	Фактори				
max	Aver		X1	X2	X3	X4	X5
0,625 $r(X_1,X_2)$	0,0625	Пірсона	0,926727	-0,83686	0,128168	0,029587	0,03612
		Частковий	0,968461	0,928521	0,543255	-0,55897	-0,0535
0,5636 $r(X_1,X_2)$	0,1485	Пірсона	0,927855	-0,79285	0,236873	0,064877	-0,00096
		Частковий	0,945082	0,861606	0,484923	-0,51146	-0,29264
0,88192 $r(X_1,X_5)$	0,2655	Пірсона	0,927855	-0,79285	0,236873	0,064877	0,780933
		Частковий	0,886186	0,878935	0,59228	-0,41977	-0,70451
		1-й крок ПВС	0	-0,72372	0,321699	-0,13949	-0,10017

Висновки й рекомендації. Коефіцієнт кореляції Кендала і частковий коефіцієнт кореляції при наявності випадкової помилки, мультиколінеарності або викидів не забезпечує збереження співвідношення між величиною коефіцієнтів і силою залежності між змінними, яка відповідає ідеальним умовам. Особливо великі спотворення співвідношень спостерігаються при значеннях коефіцієнтів кореляції за абсолютною величиною менших $0,15$.

Для алгоритмів визначення структури рівняння регресії на етапі кореляційного аналізу доцільно застосовувати коефіцієнти кореляції Пірсона або Спірмена, як найменш чутливі до закорельованості і наявності «викидів», і які зберігають співвідношення між ними, пропорційні силі взаємовпливу змінних, навіть при малих значеннях коефіцієнтів. Коефіцієнт кореляції Кендала і частковий не рекомендуються до використання.

Список літератури

Butler, R. W. (1982). Bounds of significance attained by the best-fitting regressor variable. *Applied Statistics, 31*(3), 290–292.

Thompson, M. R. (1978) Selection of variables in multiple regression: Part II. Computation and example. *International Statistical Review*, *46*, 129–149.

Thompson, M. R. (1978). Selection of variables in multiple regression: Part I. A review and evaluation. *International Statistical Review*, *46*, 1–20.

Грін, Г. В. (2005) *Економетричний аналіз*. Київ: Основи.
Дрейпер, Н., & Смит, Г. (2007). *Прикладной регрессионный анализ* (3-е изд.). Москва: Диалектика.
Лапач, С. М., & Радченко, С. Г. (2007). Проблеми визначення структури рівняння регресії в множинному регресійному аналізі. *Наукові вісті НТУУ «КПІ»*, (1), 150—155.
Лапач, С. Н. (1998). Проблемы построения математических моделей экспериментально-статистическими методами. *Прогресивна техніка і технологія машинобудування, приладобудування і зварювального виробництва. Праці НТУУ "КПІ", 2*, 25–29.
Лапач, С. Н., Радченко, С. Г., & Бабич, П. Н. (1993). Планирование, регрессия и анализ моделей PRIAM (ПРИАМ). В *Каталоге «Программные продукты Украины»* (с. 24—27). Киев.
Лапач, С. Н., Пасечник, М. Ф., & Чубенко, А. В. (1999). *Статистические методы в фармакологии и маркетинге фармацевтического рынка.* Киев: ЗАТ «Укрспецмонтаж»
Мешалкин, Л. Д. (1970). К обоснованию метода случайного баланса. *Заводская лаборатория, 36*(3), 316—318.

ПАВЫШЭННЕ НАДЗЕЙНАСЦІ БІЯМЕТРЫЧНАЙ СІСТЭМЫ

А. І. Міцюхін

Беларускі дзяржаўны ўніверсітэт інфарматыкі і радыяэлектронікі, Інстытут інфармацыйных тэхналогій, Мінск, Беларусь

mityuhin@bsuir.by

Для павышэння дакладнасных характарыстык біяметрычнай сістэмы прапануецца ўвесці дадатковы этап апрацоўкі фрагмента выявы адбітка. Разглядаецца апрацоўка выяў адбіткаў на грунце эфектыўнага статыстычнага алгарытму з выкарыстаннем уласных функцый.

Ключавые словы: выява, біяметрычны параметр, ідэнтыфікацыя, пазнанне дэскрыптары, уласныя функцыі, каварыяцыйня матрыца.

Выявы адбіткаў пальцаў з’яўляюцца біяметрычнымі параметрамі індывідуальнага арганізма чалавека і даўно выкарыстоўваюцца для вырашэння задачы ідэнтыфікацыі чалавека ў крыміналістыцы. Біяметрычная сістэма правярае адсутнасць асобы ў базе дадзеных злачынцаў, якіе адшукваюцца. Экспертыза грунтуецца на аналізе выяў асобных дробных скураных баразенак адбіткаў, такіх як дуга, завіток, «шатровая дуга» і інш. Прасторавае размяшчэнне і форма гэтых прыкмет ўнікальна для кожнага чалавека. Каэфіцыенты памылак, напрыклад, памылка пропуску падабенства — *ілжывае адмаўленне* біяметрычнай сістэмы па адбітках складае ад 3 да 7 на 1000 чалавек (Biometric Systems Lab, FVC, 2002) .

Для павышэння дакладнасных характарыстык сістэмы прапануецца ўвесці дадатковы этап апрацоўкі фрагмента выявы адбітка. У гэтым выпадку унікальнае выява адбітка апісваецца не толькі асобнымі дэскрыптарамі, але і сукупнасцю элементаў (пікселямі), якія прадстаўляюць абраны фрагмент. У працы прыводзяцца вынікі даследавання, звязаныя з апрацоўкай і пазнаннем па выяве адбітка на аснове статыстычнага падыходу і энтрапійнага кадавання.

Выява уяўляецца шэрагам лічбавых паслядоўнасцяў з лікам кропак (адлікаў), колькасць якіх вызначаецца даўжыней контуру $g_n, 0 \le n \le N-1$, які апісвае баразенкі. Вядома, што выявы замкнёных межаў і контураў характарызуюцца параўнальна высокай лінейнай залежнасцю — высокай карэляцыйнасцю дадзеных, якія апісваюць гэтыя аб’екты. Гэта ўласцівасць і прымяненне ў якасці дэскрыптараў пазнання каэфіцыентаў раскладання па базісу уласных функцый каварыяцыйнай матрыцы

$$\boldsymbol{K}_g = E\left\{\boldsymbol{g}_n \boldsymbol{g}_n^{\,T}\right\} - \overline{\boldsymbol{g}}_n \overline{\boldsymbol{g}}_n^{\,T}, 0 \le n \le N-1 \qquad (1)$$

дадзеных контуру дазваляе паменшыць памернасць абсяга пазнавання. Фільтраванне значэнняў дэскрыптараў здзяйсняецца на аснове дысперсійнага крытэра (Митюхин, 2016). Такая працэдура выбару прыкмет пазнання дазволіла спрасціць працэс класіфікацыі. Дэскрыптары пазнання можна атрымаць шляхам прадстаўлення контуру g_n функцыянальным шэрагам

$$g_n = \sum_{v=0}^{N-1} \hat{g}_v \eta_{v,n}, \tag{2}$$

где

$$\hat{g}_v = \sum_{n=0}^{N-1} g_n \eta_{v,n} \tag{3}$$

паслядоўнасць каэфіцыентаў раскладання (пераўтварэння) па базісу уласных функцый, $\{\eta_{v,n}\}$ — мноства ўласных функцый на інтэрвале з N точек $0,1,\ldots,N-1$. Выраз (2) апісвае раскладанне па ўласных функцыях (вектарах) каварыяцыйнай матрыцы $\boldsymbol{K}_g$ паслядоўнасці g_n (контуру). У працэсе пераўтварэння паслядоўнасці g_n, якая мае моцныя карэляцыйныя сувязі паміж сумежнымі элементамі, адбываецца працэс дэкарэляцыі. У гэтым выпадку асноўная доля энергіі сігналу прыпадае на малы лік дэскрыптараў. Пры раскладанні па базісу уласных функцый, дысперсіі σ_v^2 каэфіцыентаў пераўтварэнні роўныя адпаведным уласным значэнням, г. зн.

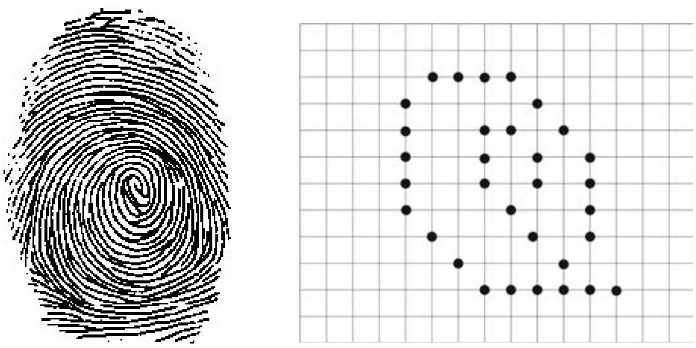
$$\sigma_v^2 = \{\lambda_n\}.$$

Паколькі выява контуру і каварыяцыйная матрыца $\boldsymbol{K}_g$ (2) падзельныя па прасторавым пераменным, дысперсія 2-D выявы таксама падзельная дыскрэтная функцыя

$$\sigma_{v,n}^2 = \{\sigma_v^2 \sigma_n^2\} = \{\lambda_v \lambda_n\}. \tag{4}$$

Формула (4) адлюстроўвае 2-D пераўтварэнне ў выглядзе здабытка 1-D дысперсій па радках і слупках. Фільтраванне значэнняў дэскрыптараў ў адпаведнасці з размеркаваннем (4) дазваляе ажыццявіць эфектыўнае рашэнне задачы выбару прыкмет і спрашчэнне працэсу класіфікацыі.

Прыклад. На мал. 1 і 2 прадстаўлены адбітак пальца і контур — эталон бінарнага фрагмента выявы баразенак g_n на дэкартавым здабытку $\mathbb{Z}^2$



Мал. 1. Адбітак пальца і выява эталона

Контур апісваецца дыскрэтнай лініяй ў выглядзе сукупнасці пунктаў з прасторавымі каардынатамі (x_i, y_i). Пункты так упарадкаваны, што (x_i, y_i) і

(x_{i+1}, y_{i+1}) з'яўляюцца найбліжэйшымі суседзямі на контуру. Кожнаму пункту контура адназначна адпавядае функцыя g_{x_i,y_i}. Паслядоўнасці g_{x_i,y_i} адпавядаюць дзве аднамерныя паслядоўнасці (вектары):

$$x_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}\} \text{ і } y_n = \{y_0, y_1, \ldots, y_{N-1}\}.$$

Так x_n запісваецца як

$$x_n = (9\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1\ 1\ 1\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 3\ 4\ 4).$$

Для памяншэння вылічальнай складанасці апрацоўкі або паніжэння памеру працэсара, ўваходныя дадзеныя x_n разбіваюцца на адрэзкі даўжынёй L. Гэтыя адрэзкі запісваюцца слупкамі матрыцы $\boldsymbol{S}$. Няхай $L = 4$. Вылічыўшы каварыяцыйнаю матрыцу $\boldsymbol{K}_s$ для матрыцы $\boldsymbol{S}$, выконваюцца вышэйапісаныя пераўтварэнні. Паслядоўнасць каэфіцыентаў пераўтварэння (3), запісаная ў выглядзе матрыцы памерам 4×8 роўная

$$\hat{\boldsymbol{g}}_v = \begin{pmatrix} -0.0606 & -0.1090 & \ldots & -0.4077 \\ -0.7136 & -0.1233 & \ldots & -0.4727 \\ -1.1731 & 0.4900 & \ldots & -1.3561 \\ 17.9475 & 16.5751 & \ldots & 6.9117 \end{pmatrix},$$

Як відаць з матрыцы $\hat{\boldsymbol{g}}_v$, для беспамылковага апісання выявы эталона з дапамогай дэскрыптараў $\hat{g}_v$ ў абсягу пераўтварэння дастаткова мець толькі значэнні каэфіцыентаў апошняга радка матрыцы $\hat{\boldsymbol{g}}_v$ или 8 з 32 класіфікацыйных параметраў.

Разгледжаны падыход з выкарыстаннем дадатковай інфармацыі аб біяметрычных параметрах і дадатковым этапе параўнання уваходнага біяметрычнага параметру з ўзорамі, зарэгістраванымі ў базе дадзеных, дае магчымасць паменшыць памылку сістэмы ідэнтыфікацыі.

Спіс литаратуры

Biometric Systems Lab, Pattern Recognition and Image Processing Laboratory, and National Biomttric Test Center. FVC (2002). *Fingerprint verification competition.*

Митюхин, А. И. (2016). *Цифровая обработка речи и анализ изображений*. Минск, БГУИР.

ДИФЕРІНТЕГРАЛЬНА МОДЕЛЬ КОНТАКТНОЇ ЗАДАЧІ ГЕРЦА ДЛЯ ТІЛ ІЗ ФРАКТАЛЬНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ СЕРЕДОВИЩА

В. М. Онуфрієнко, Л. М. Онуфрієнко

Запорізький національний технічний університет, Запоріжжя, Україна

onufr@zntu.edu.ua, lonufr@zntu.edu.ua

Розглядається у точній постановці контактна задача Герца про взаємодію двох тіл з в’язко-пружними фрактальними властивостями середовища. Розв’язок диферінтегрального рівняння задачі оцінюється методом теорії потенціалу фрактального шару. Аналізується розв’язок і порівнюється з класичним.

Ключові слова: контактна задача Герца, міра Хаусдорфа, диферінтеграл, диферінтегральне рівняння, потенціал фрактального шару.

Розгляд фрактальних множин у метриці Хаусдорфа дозволяє порівнювати величину хаусдорфової розмірності

$$d_H = \lim_{r \to 0} \frac{\ln N(r)}{\ln\left(\dfrac{1}{r}\right)}$$

де r — сторона куба покриття, $N(r)$ — кількість кубів, до яких потрапляє хоча б одна точка фрактальної множини, з показником порядку α дробового інтегро-диференціала

$$\left({}_a I_x^{\alpha} f \right)\left(x \right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt,$$

конструкція якого виникає в задачі про визначення протяжності фрактальної множини, що є моделлю для опису просторової неоднорідності тіла.

Для точної постановки задачі Герца про контактну взаємодію двох твердих тіл, що заповнені суцільними середовищами із фрактальними властивостями в’язко-пружних границь, розглядається диферінтегральна модель з визначеною мірою Хаусдорфа та відповідною фрактальною розмірністю. Задача зводиться до визначення введених нами α-характеристик та потенціалу фрактального шару (Онуфрієнко & Куземко, 2014), що є узагальненням простого та подвійного потенціалів.

Як і у класичному випадку задачі про взаємодію твердих тіл (Ландау & Лифшиц, 1987), рівняння обвідних поверхонь для фрактально конфігурованих границь поблизу точки торкання записуємо у вигляді

$$z = \kappa_{ij} x_i x_j$$

для першого тіла та

$$z' = \kappa'_{ij} x_i x_j$$

— для другого, де тензори κ_{ij} та κ'_{ij} характеризують кривизну поверхонь.

Після дії сили стискання F обвідні поверхні деформуються і зближуються на деяку малу відстань

$$d^{\alpha}h = (z + d^{\alpha}u_z) + (z' + d^{\alpha}u'_z),$$

де $d^{\alpha}u_z$ і $d^{\alpha}u'_z$ — диферінтегральні компоненти по осях z і z' векторного фрактального зміщення точок поверхонь обох тіл після стискання. Якщо обрати напрями осей x та y так, щоб тензор $\kappa_{ij} + \kappa'_{ij}$ став зведеним до головних осей, то

$$d^{\alpha}h - Ax^2 - By^2 = d^{\alpha}u_z + z' + d^{\alpha}u'_z, \tag{1}$$

де A та B — головні значення цього тензора.

Зміщення точок поверхонь обох тіл після дії α-характеристики нормальних сил $D^{\alpha}P_z$ визначаємо виразами (поверхні вважаємо фрактально конфігурованими зі скейлінгом α):

$$\begin{aligned} d^{\alpha}u_z &= \frac{1-\mu^2}{\pi E}\iint \frac{D^{\alpha}P_z}{r} d^{\alpha}s'; \\ d^{\alpha}u'_z &= \frac{1-\mu'^2}{\pi E'}\iint \frac{D^{\alpha}P_z}{r} d^{\alpha}s', \end{aligned} \tag{2}$$

де E, E' — модулі Юнга, μ, μ' — коефіцієнти Пуассона тіл з однорідним ізотропним лінійно пружним середовищем.

Після підстановки (2) в (1) одержуємо інтегральне рівняння, що визначає розподіл тиску $D^{\alpha}P_z(x,y)$ по області дотикання

$$\iint \frac{D^{\alpha}P_z(x',y')}{r} d^{\alpha_1}x' d^{\alpha_2}y' = \frac{\pi(d^{\alpha}h - Ax^2 - By^2)}{\dfrac{1-\mu^2}{E} - \dfrac{1-\mu'^2}{E'}}. \tag{3}$$

Розв’язування (3) здійснюється методами теорії потенціалу. Наприклад, для двох куль з радіусами r та r' маємо

$$h = \left(\frac{F}{K}\right)^{2/3(1-\alpha)} f(\alpha, r, r'), \tag{4}$$

де K — ефективний модуль Юнга, функція $f(\alpha)$ визначається з (3) для зазначених в умовах задач скейлінгів $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$.

У порівнянні із класичною задачею залежність (4) демонструє сильний зв’язок між величиною зближення тіл h та силою F у випадку фрактальної конфігурації поверхонь контактних тіл зі скейлінгом $-1 < \alpha < 1$. Одержаний результат застосовний і для інших тіл скінченних розмірів із фрактально конфігурованим середовищем.

Список літератури

Ландау, Л. Д., & Лифшиц, Е. М. (1987). *Теория упругости*. Москва: Наука.

Онуфрієнко, В. М., & Куземко, А. В. (2014). Фрактальний шар зарядів у граничній задачі як узагальнення простого та подвійного шарів. У *Матеріалах П'ятнадцятої Міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті»*, НТУУ «КПІ», Київ, 15—17 травня (Т. 1, Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування, с. 235). Київ: НТУУ «КПІ».

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ІМПУЛЬСНОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА ПОЧАТКОВУ ТРІЩИНУ ВНАСЛІДОК ДІЇ МЕХАНІЧНОГО ПОРОДОРУЙНІВНОГО ІНСТРУМЕНТУ

Я. Б. Петрівський, М. В. Тимчук

Рівненський державний гуманітарний університет, Рівне, Україна

vsirf.17@gmail.com

Розглянуто задачу про відбивання ділянки масиву за допомогою механічного породоруйнівного інструменту та знайдено її математичну модель. На основі моделі проведено чисельний експеримент із використанням пакету програм COMSOL Multiphysics. Установлено залежність довжини поширення тріщини від радіусу інструменту та міцності породи; діапазон ефективних діаметрів інструменту.

Ключові слова: протифільтраційний екран, математична модель, тріщина, область ослаблених зв'язків.

Одним із дієвих способів запобігання негативним впливам скупчень промислових та побутових відходів на довкілля є будівництво різних типів захисних протифільтраційних споруд.

Зокрема, дана задача може бути вирішена шляхом створення в підстилаючому масиві порід протифільтраційного колекторного екрану, який має необхідні міцнісні характеристики та дозволяє спрямований збір фільтрату.

Улаштування екрану передбачає створення в масиві порід технологічної порожнини та заповнення її твердіючим бар'єрним матеріалом. Для відроблення може бути застосований відомий пристрій для спрямованого руйнування ділянки гірського масиву (Петрівський та ін., 2013).

Актуальним є з'ясування закономірностей, які дозволяють визначити параметри оптимальної технології для створення екрану (потужність, швидкість та глибина вироблення, стійкість на руйнування масиву гірських порід при створенні виробленого простору тощо).

Визначальним для оцінки ефективності пропонованого способу є математичне моделювання процесу руйнування ділянки масиву породоруйнівним інструментом.

У випадку армування різальної кромки породоруйнівного інструменту, її занурення в масив відбувається з початкового моменту дії удару — надходження початкової хвилі напруження. Під кромкою, у зоні найбільших напружень, починає рости ядро ущільнення зім'ятої породи, завдяки якому відбуваються більш плавний перерозподіл і передача ударного імпульсу на масив. У масиві збільшується об'єм стиснення з постійно зростаючим у бік ядра ущільнення градієнтом напруження. Зростання напружень відбувається як унаслідок занурення різальної кромки та росту ядра ущільнення, так і в результаті внутрішнього відбиття хвильової енергії, що виділяється кромкою вглиб масиву.

При досягненні напруженнями граничного для даної породи значення в зоні, що межує з ядром ущільнення, починають зароджуватись мікротріщини, які вивільняють частину пружної енергії і спричиняють відщеплення від об'єму стиснення певного шару. Частина цього шару переходить у ядро ущільнення (приминаючись різальною кромкою), а інша частина формує область ослаблених зв'язків навколо ядра.

У подальшому цей процес повторюється. У наступному, суміжному ядрі, шарі напруження досягає граничного значення, відбувається зародження мікротріщин, їх ріст та збільшення області ослаблених зв'язків. У наступний момент часу знову відбувається збільшення ядра, і так до тих пір, поки спротив породи зануренню кромки не зрівняється із силою дії імпульсу чи поки не завершиться удар (Шелковников, 1977).

У випадку, коли прикладене зусилля буде достатнім, ріст мікротріщин продовжиться аж до виходу її на поверхню вибою та відбивання шматка масиву.

Дана складна просторова задача може бути зведена до плоскої задачі теорії пружності, якщо розділити її на n елементарних задач, міркуючи наступним чином. Різальна кромка породоруйнівного інструменту взаємодіє з масивом по дузі кола. Природно припустити, що якщо тріщина виникне й вийде на поверхню вибою в найвіддаленішій від поверхні вибою точці дуги, то такі ж процеси відбуватимуться в усіх інших точках дуги взаємодії.

Таким чином, приходимо до задачі про поширення тріщини в напівнескінченній пластинці із загасаючою швидкістю (рис. 1).

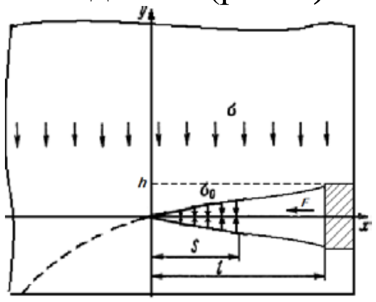


Рис. 1. Схема поширення тріщини

Особливістю задачі є близькість тріщини до краю. Через цю близькість тріщина розвиватиметься не прямолінійно, а прямуватиме до поверхні, вільної від напружень (поверхні вибою). Дана гіпотеза добре узгоджується з основними положеннями теорії Буссінеска.

Математичною моделлю задачі при початковій імпульсній дії F будуть рівняння руху пружного середовища (Мусхелишвили, 1966):

$$\begin{cases} \nabla^2 u + \dfrac{1}{1-2\nu}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\right) = \rho_0 \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \\ \nabla^2 v + \dfrac{1}{1-2\nu}\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\right) = \rho_0 \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \end{cases}$$

за умови, що:

$$\sigma_y = \sigma_0 \text{ на } [0;s],\ \sigma_y = 0 \text{ на } [s;l],\ \sigma_y = -F \text{ на } (l;\infty),$$

$$v(x,y+0,0) = h,\ \ v(x,y-0,0) = -h \text{ на } (l;\infty).$$

Тут ρ_0 — густина породи, σ_0 — межа міцності породи на розрив, ν — коефіцієнт Пуассона.

Відомі методики пошуку аналітичного розв'язку цієї системи рівнянь, а саме застосування методів комплексного аналізу та інтегралів типу Коші (Мусхелишвили, 1966), введення в розгляд хвильових потенціалів з подальшим розв'язуванням рівнянь Гельмгольца і використанням різних інтегральних перетворень та обернених до них (Партон & Борисковский, 1985; Кулиев, 2005). На даному етапі досліджень, однак, вбачається доцільним проведення чисельних експериментів на основі отриманої моделі за допомогою сучасних пакетів прикладних програм комп'ютерної математики.

На основі отриманої математичної моделі проведено чисельний експеримент із використанням програмного продукту COMSOL. Для нього було вибрано наступні модельні параметри: $F = 20$ кН, $l = 0{,}025$ м, $s = 0{,}005$ м, $h = 5 \cdot 10^{-4}$ м і механічні властивості порід: $\rho_{01} = 2700\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, $\nu_1 = 0{,}23$, $\sigma_{01} = 6\,\text{МПа}$, $\rho_{02} = 2500\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, $\nu_2 = 0{,}3$, $\sigma_{02} = 15\,\text{МПа}$ та $\rho_{03} = 2600\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, $\nu_3 = 0{,}27$, $\sigma_{03} = 20\,\text{МПа}$, які є середніми показниками для аргілітів, пісковиків та граніту відповідно.

Визначальними для процесу руйнування ділянки масиву є наступні параметри моделі: діаметр породоруйнівного інструменту $2r$, величина ударного імпульсу та межа міцності породи на розрив σ_0.

На рис. 2 та 3 для фіксованого ударного імпульсу зображено залежність довжини тріщини L від радіусу породоруйнівного інструменту r (при фіксованому σ_0) та межі міцності на розрив σ_0 (при фіксованому r).

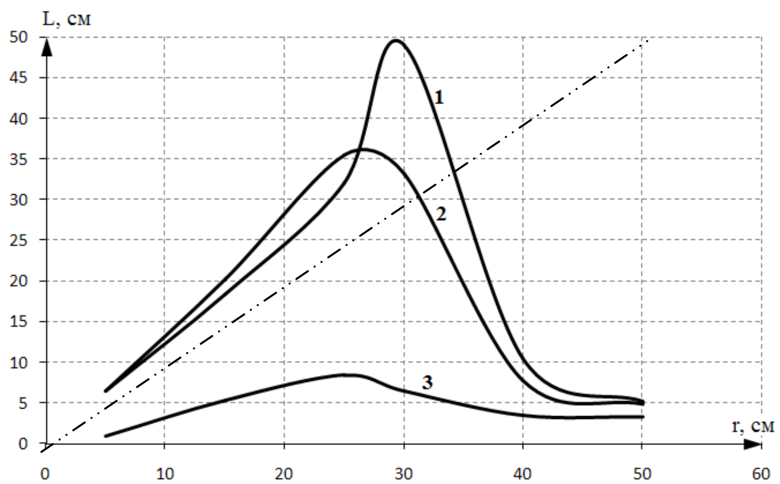


Рис. 2. Залежність довжини тріщини від радіусу інструменту:
1 — аргіліти, **2** — пісковики, **3** — граніт

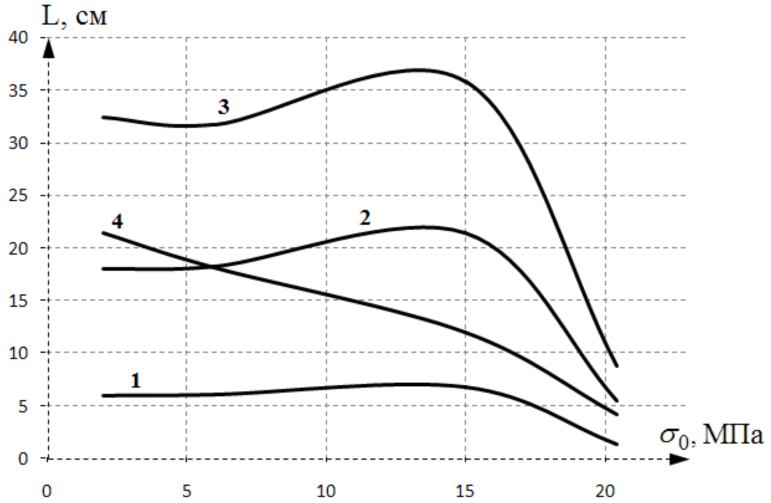


Рис. 3. Залежність довжини тріщини від міцності породи на розрив:
1 — для $r = 5$, **2** — для $r = 15$, **3** — для $r = 25$, **4** — для $r = 35$

Згідно з результатами чисельного експерименту, момент, коли тріщина досягає довжини $L \approx 1{,}2 \div 1{,}4r$, відповідає виходу тріщини на поверхню вибою (відбиванню ділянки масиву). Відповідні частини кривих на рис. 2 знаходяться над штрих-пунктирною прямою.

Аналіз отриманих результатів дозволяє зробити висновок про те, що при сталому ударному імпульсі поширення області зруйнованих зв'язків у масиві порід залежатиме від діаметру породоруйнівного інструменту та фізико-механічних властивостей породи, зокрема межі міцності породи на розрив. Також слід зауважити, що існує ефективний розмір діаметру інструменту (20—30 см), який дозволяє відбивати максимальний об'єм породи при незмінній величині прикладених зусиль.

Список літератури

Кулиев, В. Д. (2005). *Сингулярные краевые задачи.* Москва: Физматлит.

Мусхелишвили, Н. И. (1966). *Некоторые основные задачи математической теории упругости.* Москва: Наука.

Партон, В. З., & Борисковский, В. Г. (1985). *Динамическая механика разрушения.* Москва: Машиностроение.

Петрівський, Я. Б., Тимчук, М. В., & Петрівський, В. Я. (2013). *Спосіб та пристрій для спрямованого руйнування визначеної особливостями ведення гірничих робіт ділянки гірського масиву*. Патент України, № 101055.

Шелковников, И. Г. (1977). *Использование энергии удара в процесах бурения.* Ленинград: Недра.

ЗНАХОДЖЕННЯ КІЛЬКОСТІ ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ НЕЛІНІЙНИХ ДВОПАРАМЕТРИЧНИХ СПЕКТРАЛЬНИХ ЗАДАЧ, ЩО ЛЕЖАТЬ У ЗАДАНІЙ ОБЛАСТІ

Б. М. Подлевський

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів, Україна

bpodlev@gmail.com

Запропоновано підхід до знаходження кількості власних значень нелінійної двопараметричної задачі на власні значення, що можуть знаходитися в заданій області зміни спектральних параметрів.

Ключові слова: нелінійна двопараметрична спектральна задача, кількість власних значень, принцип аргументу аналітичної функції.

Багато теоретичних і прикладних питань математичної фізики, механіки та інших наук породжують спектральні задачі для операторнозначних функцій, які лінійно або нелінійно залежать від двох або декількох параметрів — двопараметричні або багатопараметричні спектральні задачі.

Вони мають різні формулювання й ці відмінності визначаються тим, зокрема, що: вони можуть бути сформульовані у вигляді слабо зв'язних систем матричних або операторних рівнянь (тобто систем рівнянь, які зв'язані лише за допомогою спектральних параметрів) або одного рівняння; можуть мати різну кількість скалярних параметрів, які розглядаються як спектральні, а також виглядом залежності від них (лінійна, нелінійна, комбінована).

Розглядається алгебраїчна двопараметрична задача на власні значення, яка записується у вигляді системи двох однорідних нелінійних рівнянь

$$\begin{aligned} T_1(\lambda,\mu)x &= 0, \\ T_2(\lambda,\mu)y &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

де $T_i(\lambda,\mu)$ — квадратні матриці n-го порядку, елементи яких нелінійно, зокрема, аналітично залежать від параметрів $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$, а $x, y \in \mathbb{R}^n$. Задача полягає у знаходженні власних пар (λ, μ) таких, що система (1) має нетривіальні розв'язки $x \neq 0$ і $y \neq 0$.

Очевидно, що власні пари є розв'язками системи двох нелінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned} f(\lambda,\mu) &\equiv \det(T_1(\lambda,\mu)) = 0 \\ g(\lambda,\mu) &\equiv \det(T_2(\lambda,\mu)) = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Оскільки система нелінійних рівнянь може взагалі не мати розв'язків або мати їх довільну кількість, то виникає питання: скільки розв'язків має система (2), а отже й задача (1) у заданій області G зміни параметрів (λ, μ).

Для розв'язання цієї задачі спочатку будемо вимагати, щоб функція $u = f + ig$ була аналітичною і не мала полюсів усередині G. Тоді, як відомо, кількість m коренів $\nu = \lambda + i\mu$ функції u всередині деякої області G, що обмежена кривою Γ, тобто спільних розв'язків (λ, μ) рівнянь $f(\lambda,\mu) = 0$, $g(\lambda,\mu) = 0$, випливає з принципу аргументу аналітичної функції, тобто

$$m = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{u'(\nu)}{u(\nu)} d\nu .$$

Беручи до уваги, що

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{u'(\nu)}{u(\nu)} d\nu = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} d\ln u(\nu) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} d\phi,$$

де

$$\phi = \arg\ln u(\nu) = \operatorname{arctg}\frac{g}{f} + \pi n, \tag{3}$$

отримуємо, що

$$m = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} d(\operatorname{arctg}\frac{g}{f} + n\pi).$$

Розглянемо криву Γ з її параметричним представленням $\lambda = \lambda(t)$; $\mu = \mu(t)$; $0 \le t \le 1$. З (3) маємо

$$d\phi = \frac{fdg - gdf}{f^2 + g^2}$$

Якщо ϕ замінити диференціюванням за t, отримаємо

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} d\phi = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} \frac{d\phi}{dt} dt$$

Більш того, якщо ми розглянемо наш вираз для $d\phi$ вздовж кривої, то матимемо:

$$m = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} \frac{d\phi}{dt} dt = \int_0^1 \frac{f\left(\dfrac{dg}{d\lambda}\dfrac{d\lambda}{dt} + \dfrac{dg}{d\mu}\dfrac{d\mu}{dt}\right) - g\left(\dfrac{df}{d\lambda}\dfrac{d\lambda}{dt} + \dfrac{df}{d\mu}\dfrac{d\mu}{dt}\right)}{f^2 + g^2} dt \tag{4}$$

Отже, кількість власних значень m системи рівнянь (2) обчислюється за формулою (4), у якій інтеграл заміняємо якоюсь квадратурною формулою, наприклад, прямокутників. Оскільки, значення функцій (детермінантів) f і g та їхніх похідних потрібно обчислити лише для фіксованих значень параметрів λ та μ, а точніше для фіксованих t, то це можна зробити за допомогою $LU-$розкладу матриць $T_1(\lambda,\mu)$ та $T_2(\lambda,\mu)$ (Подлевський, 2013, 2014).

Список літератури

Подлевський, Б. М. (2013) Обчислення точних похідних детермінанта матриці *Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. математ. та інформ*. *20*, 42—48.

Подлевський, Б. М. (2014). *Двосторонні методи розв'язування нелінійних спектральних задач*. Київ: Наукова думка.

МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ И РАСЧЕТА МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ СИСТЕМ ПРОВОДНИКОВ С ТОКАМИ В ВИРТУАЛЬНОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ЛАБОРАТОРИИ

А. В. Розанов[1], С. Н. Потемкина[2]

[1]*Саратовский государственный аграрный университет имени Н. И. Вавилова, Саратов, Россия*

[2]*Тольяттинский государственный университет, Тольятти, Россия*

s.potemkina@tltsu.ru, arosanov@yandex.ru

Рассмотрены модели и методы расчёта напряженности магнитного поля проводников с током на основе законов Био — Савара — Лапласа и полного тока с целью определения универсальности каждого из способов решения и границ применимости указанных законов

Ключевые слова: математическое моделирование, магнитные поля, законы полного тока и Био — Савара — Лапласа.

При изучении основ электродинамики студентам технических вузов часто приходится выполнять задания на построение картин магнитных полей систем проводников с токами, магнитов и электромагнитов, полей возбуждения и якорей электрических машин, что связано с определением величин магнитной индукции и напряжённости соответствующих магнитных полей различной конфигурации. Экранная 3D-визуализация картины полей в настоящее время не создает никаких проблем. В то же время выбор математической модели и метода расчета напряженности магнитного поля системы проводников произвольной формы может вызвать у студентов определенные трудности (Розанов & Потемкина, 2015).

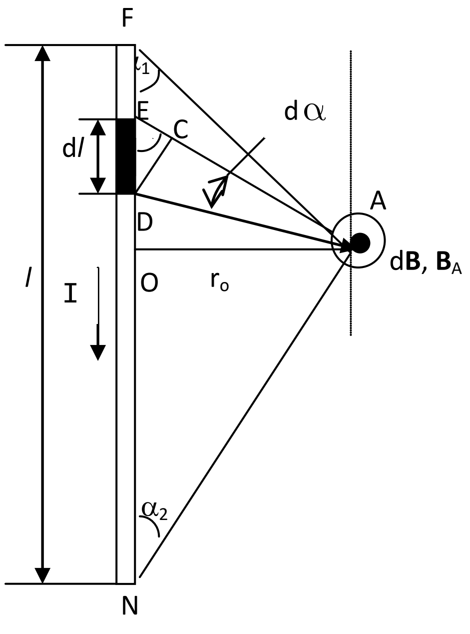


Рис.1

В настоящей работе представлено решение задачи расчёта напряженности магнитного поля отрезка проводника с током на основе законов Био — Савара — Лапласа и полного тока (Потемкина, 2010) с целью определения универсальности каждого из способов решения и границ применимости указанных законов. Определим индукцию магнитного поля, создаваемого отрезком проводника с током длиной l, в точке A, удаленной от проводника на расстояние r_0. Перпендикуляр, опущенный из точки A на отрезок проводника с током, делит отрезок на две части, длины которых равны $OF = \frac{1}{4}l$, $ON = \frac{3}{4}l$. Сила тока, текущего по проводу равна I. Разобьем отрезок провода на элементарные отрезки длиной dl, для каждого из элементарных отрезков dl в искомой точке A найдем $d\vec{B}$ (согласно закону Био — Савара — Лапласа), а затем по принципу суперпозиции рассчитаем

$$\vec{B}_A = \int d\vec{B}.$$

В точке A все векторы $d\vec{B}$ в соответствии с правилом «правого винта» сонаправлены и, следовательно, численное значение

$$B_A = \int dB.$$

Для решения задачи рассмотрим hис.1, на котором: l — длина отрезка провода с током; dl — длина элемента проводника; $d\vec{\ell}$ — вектор, равный по модулю dl и совпадающий по направлению с током; α — угол между векторами $d\vec{\ell}$ и $\vec{r}$; r_0 — длина перпендикуляра, опущенного из точки A на отрезок проводника с током; $d\alpha$ приращение угла, при перемещении по проводнику с током на расстояние dl. Согласно закону Био — Савара — Лапласа в дифференциальной форме (Беликов, 1986):

$$dB = \frac{\mu_0 I \sin\alpha d\ell}{4\pi r^2}.$$

Преобразуем данное выражение, выбрав в качестве переменной интегрирования угол α. Из рис.1 видно, что $CD = r\sin d\alpha$. Учитывая, что угол $d\alpha$ очень мал и $\sin d\alpha \approx d\alpha$, получим $CD = rd\alpha$. Из ΔDCE и ΔAOE найдем:

$$dl = \frac{rd\alpha}{\sin\alpha},\ r = \frac{r_0}{\sin\alpha}.$$

Отсюда

$$dl = \frac{r^2 d\alpha}{r_0}.$$

Подставив выражение dl в формулу для dB, получим:

$$dB = \frac{\mu_0 I \sin\alpha d\alpha}{4\pi r_0}.$$

При перемещении по отрезку угол α меняется от α_1 до α_2, тогда согласно принципу суперпозиции:

$$B_A = \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \frac{\mu_0 I \sin\alpha d\alpha}{4\pi r_0} = \frac{\mu_0 I\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right)}{4\pi r_0},$$

где

$$\cos\alpha_1 = \frac{\frac{1}{4}l}{\sqrt{r_0^2 + \frac{l^2}{16}}}, \text{ а } \cos\alpha_2 = \frac{\frac{3}{4}l}{\sqrt{r_0^2 + \frac{l^2}{16}}}.$$

Если концы проводника расположены симметрично относительно точки, в которой определяется магнитная индукция, то $\alpha_2 = \pi - \alpha_1$ и $\cos\alpha_2 = -\cos\alpha_1$, тогда

$$B_A = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0} 2\cos\alpha_1.$$

Если проводник с током бесконечно длинный, то $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$, тогда

$$B_A = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0}$$

Вектор $\vec{B}_A$ направлен перпендикулярно плоскости листа острием на нас. Следует иметь в виду, что если геометрия системы сложная, то могут возникнуть трудности выбора пути и пределов интегрирования по области пространства, в котором находится проводник, и работа в виртуальной физической лаборатории может быть завершена некорректно.

Решение рассмотренной выше задачи значительно упрощается, если применить закон полного тока, т. е. теорему о циркуляции вектора $\vec{B}$, что в данном случае вполне оправдано, так как магнитное поле прямолинейного проводника с током обладает осевой симметрией.

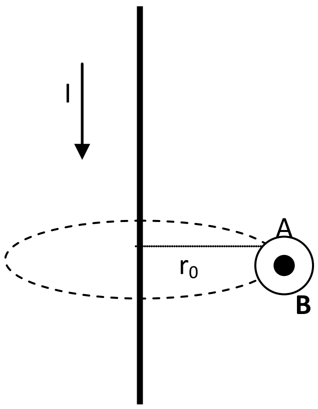


Рис.2

Пусть замкнутый контур имеет форму окружности радиуса r_0, он же является и линией магнитной индукции (Рис. 2). Во всех точках этого контура вектор **B** одинаков по модулю и направлен по касательной к окружности $(\mathbf{B}_l = \mathbf{B})$. Тогда циркуляция вектора **B** равна:

$$\oint_L B_\ell dl = \oint_L B dl = B\oint_L dl = B 2\pi r_0.$$

По закону полного тока циркуляция вектора **B** по произвольному замкнутому контуру равна произведению магнитной постоянной μ_0 на алгебраическую сумму токов, охватываемых этим контуром.

Следовательно, $2\pi r_0 B = \mu_0 I$, и тогда

$$B_A = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0}$$

Закон Био — Савара — Лапласа совместно с принципом суперпозиции позволяет довольно просто рассчитать конкретные поля, создаваемые тонкими проводниками, по которым течет ток, причем расчет магнитных полей значительно упрощается, если *распределение тока* имеет определенную симметрию. Применение закона полного тока оказывается эффективным, если *магнитное поле* обладает симметрией и имеется возможность выбора определенной формы замкнутого контура, охватывающего токи.

Таким образом, применяя различные математические модели и методы расчета характеристик полей и выбирая из них наиболее приемлемые для конкретных условий, студенты получают возможность выработать и закрепить практические навыки, которые потребуются им при изучении специальных дисциплин в сфере их профессиональной деятельности.

Список литературы

Беликов, Б. С. (1986) *Решение задач по физике: Общие методы* (с. 107—110). Москва: Высшая школа.

Потемкина, С. Н. (2010) Математические методы в преподавании курса физики. В *Матеріалах XI Міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука* (Т. 3, с. 240—241). Киев: НТУУ «КПИ».

Розанов, А. В., & Потемкина, С. Н. (2015) Организация самостоятельной работы студентов с использованием информационных и сетевых технологий. В *Материалах II Международной научно-практической конференции «Математика и моделирование в инновационном развитии АПК»* (с. 27—33). Саратов: Буква.

ПОБУДОВА ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ ДО ДОДАТНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ КВАЗІФУНКЦІЙ ГРІНА — РВАЧОВА

М. В. Сидоров

Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків, Україна

maxim.sidorov@nure.ua

Розглядається задача побудови двобічних наближень до додатного розв'язку однорідної задачі Діріхле для нелінійного рівняння $-\Delta u = f(\mathbf{x}, u)$, де $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$. Для розв'язання цієї задачі використовується перехід за допомогою квазіфункції Гріна — Рвачова до еквівалентного нелінійного інтегрального рівняння з подальшим використанням методів теорії нелінійних операторних рівнянь у напівупорядкованих просторах для побудови ітераційного процесу. Ефективність запропонованого методу ілюструється на прикладі чисельного розв'язання крайової задачі з $f(\mathbf{x}, u) = u^p$, де $p \in (0,1)$, в одиничному квадраті.

Ключові слова: нелінійна крайова задача, додатні розв'язки, квазіфункція Гріна — Рвачова, сильно інваріантний конусний відрізок, двобічні наближення.

Дослідження методами математичного моделювання великої кількості фізичних, хімічних, біологічних процесів призводить до необхідності знаходження додатних розв'язків нелінійного рівняння $-\Delta u = f(\mathbf{x}, u)$.

Розглядатимемо нелінійну еліптичну крайову задачу вигляду

$$-\Delta u = f(\mathbf{x}, u) \text{ у } \Omega, \tag{1}$$

$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

де $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — обмежена область з кусково-гладкою межею $\partial\Omega$.

Уважатимемо, що невід'ємна функція $f(\mathbf{x}, u)$ неперервна за сукупністю змінних $\mathbf{x}$, u, якщо $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$, $u \geq 0$. Нас цікавитиме питання існування у задачі (1), (2) додатних розв'язків і побудова двобічних ітераційних процесів, збіжних до цих розв'язків.

У ряді робіт (Красносельский, 1962; Опойцев & Хуродзе, 1984; Колосова & Сидоров, 2013; Колосова та ін., 2013, 2015) для аналізу задачі (1), (2) використовується підхід, заснований на переході до еквівалентного інтегрального рівняння Гамерштейна, ядром якого є функція Гріна першої крайової задачі для оператора $-\Delta$, і подальшого дослідження цього рівняння методами теорії нелінійних операторів у напівупорядкованих просторах. Перевага такого підходу полягає в тому, що в деяких випадках вдається довести існування додатного розв'язку задачі (1), (2) та побудувати ітераційний процес його знаходження, який має двобічний характер збіжності. Проте практичне використання цього підходу блокується тим, що функція Гріна відома лише для незначної кількості класичних областей.

При розгляді задачі (1), (2) в областях некласичної геометрії для побудови відповідного цієї задачі інтегрального рівняння можна використати підхід, заснований на використанні замість функції Гріна відповідної квазіфункції (Рвачев, 1982).

Нехай межа області $\partial\Omega$ складається зі скінченної кількості кусків ліній $\sigma_i(\mathbf{x}) = 0$, $i = 1, 2, ..., n$, де кожна $\sigma_i(\mathbf{x})$ — елементарна функція. Тоді за допомогою методу *R*-функцій (Рвачев, 1982) можна побудувати у вигляді єдиного аналітичного виразу елементарну функцію $\omega(\mathbf{x})$ таку, що:

а) $\omega(\mathbf{x}) > 0$ у Ω;

б) $\omega(\mathbf{x}) = 0$ на $\partial\Omega$;

в) $\left|\nabla\omega(\mathbf{x})\right| \neq 0$ на $\partial\Omega$.

Означення. *Квазіфункцією Гріна — Рвачова* першої крайової задачі для оператора Лапласа у $\mathbb{R}^2$ назвемо функцію

$$G_{\text{quasi}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = g_2(r) - q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}), \tag{3}$$

де $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$, $r = \left|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\right|$, $g_2(r) = \dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{r}$ — фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа у $\mathbb{R}^2$, $q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = g_2\left(\sqrt{r^2 + 4\omega(\mathbf{x})\omega(\boldsymbol{\xi})}\right)$.

Лема. Квазіфункція Гріна-Рвачова (3) має такі властивості:

а) $G_{\text{quasi}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = 0$ на $\partial\Omega$;

б) є симетричною функцією: $G_{\text{quasi}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = G_{\text{quasi}}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})$;

в) має таку ж особливість при $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$, що і звичайна функція Гріна;

г) додатна в області Ω: $G_{\text{quasi}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) > 0$, $\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \in \Omega$, $\mathbf{x} \neq \boldsymbol{\xi}$.

Використовуючи інтегральне подання функції класу C^2 та другу формулу Гріна від задачі (1), (2) переходимо до інтегрального рівняння Урисона

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, u(\boldsymbol{\xi}))d\boldsymbol{\xi}, \tag{4}$$

де $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, u(\boldsymbol{\xi})) = K(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\, u(\boldsymbol{\xi}) + G_{\text{quasi}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\, f(\boldsymbol{\xi}, u(\boldsymbol{\xi}))$, $K(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = -\Delta_{\boldsymbol{\xi}} q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$.

Рівняння (4) розглядатимемо в банаховому просторі $C(\overline{\Omega})$, напівупорядкованому конусом $\mathcal{K}_+$ невід'ємних функцій. Конус $\mathcal{K}_+$ у $C(\overline{\Omega})$ є нормальним, тілесним, відтворювальним і мініедральним (Красносельский, 1962; Опойцев & Хуродзе, 1984).

Введемо до розгляду нелінійний оператор T, що діє у $C(\overline{\Omega})$ за правилом

$$T(u) = \int_{\Omega} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, u(\boldsymbol{\xi}))d\boldsymbol{\xi}. \tag{5}$$

З результатів робіт (Красносельский, 1962; Опойцев & Хуродзе, 1984) випливає, що оператор T вигляду (5) буде цілком неперервним.

Позначмо

$$K_+(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \max\{0, K(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\},\ K_-(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \max\{0, -K(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})\}.$$

Тоді $K(\mathbf{x},\xi) = K_+(\mathbf{x},\xi) - K_-(\mathbf{x},\xi)$ і оператор (5) набуває вигляду

$$T(u) = \int_\Omega K_+(\mathbf{x},\xi)\,u(\xi)d\xi - \int_\Omega K_-(\mathbf{x},\xi)\,u(\xi)d\xi + \int_\Omega G_{\text{quasi}}(\mathbf{x},\xi)\,f(\xi,u(\xi))d\xi.$$

Припускаємо, що функція $f(\mathbf{x},u)$ дозволяє діагональне подання $f(\mathbf{x},u) = \hat{f}(\mathbf{x},u,u)$, де функція $\hat{f}(x,v,w)$ монотонно зростає за v і монотонно спадає за w для всіх $\mathbf{x} \in \Omega$. Тоді оператор T буде гетеротонним із супровідним оператором

$$\hat{T}(v,w) = \int_\Omega K_+(\mathbf{x},\xi)\,v(\xi)d\xi - \int_\Omega K_-(\mathbf{x},\xi)\,w(\xi)d\xi + \int_\Omega G_{\text{quasi}}(\mathbf{x},\xi)\,\hat{f}(\xi,v(\xi),w(\xi))d\xi.$$

Зауважмо, що для випадку, коли функція $f(\mathbf{x},u)$ монотонно зростає для всіх $\mathbf{x} \in \Omega$, можна обрати $\hat{f}(x,v,w) = f(\mathbf{x},v)$, а для монотонно спадної $f(\mathbf{x},u)$ можна покласти $\hat{f}(x,v,w) = f(\mathbf{x},w)$.

У конусі $\mathcal{K}_+$ невід'ємних у $C(\overline{\Omega})$ функцій виділяємо сильно інваріантний для гетеротонного оператора T конусний відрізок $\langle \alpha\omega(\mathbf{x}),\, \beta\omega(\mathbf{x})\rangle$, де $0 \le \alpha < \beta$, за допомогою умов

$$\alpha\int_\Omega K_+(\mathbf{x},\xi)\,\omega(\xi)d\xi - \beta\int_\Omega K_-(\mathbf{x},\xi)\,\omega(\xi)d\xi +$$
$$+\int_\Omega G_{\text{quasi}}(\mathbf{x},\xi)\,\hat{f}(\xi,\alpha\omega(\xi),\beta\omega(\xi))d\xi \ge \alpha\omega(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \Omega, \qquad (6)$$

$$\beta\int_\Omega K_+(\mathbf{x},\xi)\,\omega(\xi)d\xi - \alpha\int_\Omega K_-(\mathbf{x},\xi)\,\omega(\xi)d\xi +$$
$$+\int_\Omega G_{\text{quasi}}(\mathbf{x},\xi)\,\hat{f}(\xi,\beta\omega(\xi),\alpha\omega(\xi))d\xi \le \beta\omega(\mathbf{x}) \text{ для всіх } \mathbf{x} \in \Omega. \qquad (7)$$

Якщо система нерівностей (6), (7) розв'язна, то побудуємо ітераційний процес за формулами

$$v_{n+1} = \hat{T}(v_n,w_n), \quad w_{n+1} = \hat{T}(w_n,v_n),\; n = 0,1,2,\ldots, \qquad (8)$$

де покладемо $v_0(\mathbf{x}) = \alpha\omega(\mathbf{x})$, $w_0(\mathbf{x}) = \beta\omega(\mathbf{x})$.

Теорема. *Нехай система нерівностей* (7), (8) *має розв'язок* (α,β) *такий, що* $0 \le \alpha < \beta$. *Тоді конусний відрізок* $\langle \alpha\omega(\mathbf{x}),\, \beta\omega(\mathbf{x})\rangle$ *є сильно інваріантним для гетеротонного оператора* (5) *та ітераційний процес* (8) *збігається:* $v_n \to v^*$, $w_n \to w^*$, *причому*

$$v_0 \leqslant v_1 \leqslant \ldots \leqslant v_n \leqslant \ldots \leqslant v^* \leqslant w^* \leqslant \ldots \leqslant w_n \leqslant \ldots \leqslant w_1 \leqslant w_0.$$

Якщо при цьому $v^* = w^* = u^*$, *то* u^* *— єдина на* $\langle \alpha\omega(\mathbf{x}),\, \beta\omega(\mathbf{x})\rangle$ *нерухома точка оператора* (5).

Отже, для знаходження додатних розв'язків задачі (1), (2) побудовано ітераційний процес з двобічним характером збіжності. Перевагою цього процесу перш за все є те, що на n-й ітерації ми маємо зручну оцінку похибки для наближеного розв'язку

$$u_n(\mathbf{x}) = \frac{w_n(\mathbf{x}) + v_n(\mathbf{x})}{2}:$$

$$\left\| u^* - u_n \right\|_{C(\bar{\Omega})} \le \frac{1}{2} \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} (w_n(\mathbf{x}) - v_n(\mathbf{x})).$$

Розглянемо задачу (1), (2) з $f(\mathbf{x}, u) = u^p$. Доведено (Колосова та ін., 2015), що вона має єдиний додатний розв'язок для всіх p таких, що $0 < p < 1$. Обчислювальний експеримент було проведено в області

$$\Omega = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) : 0 < x_1, x_2 < 1\}$$

для значень параметра p від 0,1 до 0,9 з кроком 0,1. Функція $\hat{f}(x, v, w)$ обрана у вигляді $\hat{f}(x, v, w) = v^p$, а

$$\omega(\mathbf{x}) = [x(1-x)] \wedge_0 [y(1-y)],$$

де $\wedge_0$ — знак R-кон'юнкції (Рвачев, 1982). Критерієм припинення ітерацій слугувало виконання умови

$$\max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} (w_n(\mathbf{x}) - v_n(\mathbf{x})) < 2\varepsilon.$$

Наприклад, при $p = 0{,}2$ знайдено, що $\alpha = 0{,}0622$, $\beta = 0{,}274$, при цьому

$$(\beta - \alpha) \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \omega(\mathbf{x}) = 0{,}031017.$$

Для досягнення точності $\varepsilon = 10^{-6}$ було зроблено 18 ітерацій

$$(\max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} (w_{18}(\mathbf{x}) - v_{18}(\mathbf{x})) = 0{,}11 \cdot 10^{-5}).$$

На рис. 1 наведено графіки $w_n(x_1, 0{,}5)$ (суцільна лінія) і $v_n(x_1, 0{,}5)$ (пунктирна лінія) для $n = 0, 2, \ldots, 16, 18$, а на рис. 2 наведено лінії рівня наближеного розв'язку $u_{18}(\mathbf{x})$ ($\left\| u_{18} \right\|_{C(\bar{\Omega})} = 0{,}035230$).

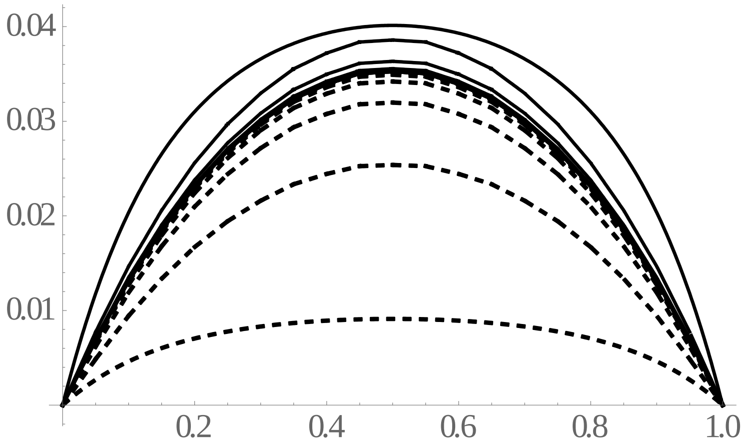


Рис. 1

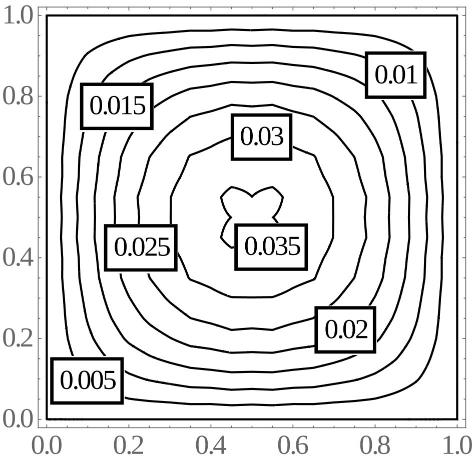


Рис. 2

Список літератури

Колосова, С. В., Луханин В. С., & Сидоров М. В. (2013). О построении итерационных методов решения краевых задач для нелинейных эллиптических уравнений. *Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки,* (1), 35—42.

Колосова, С. В., Луханин, В. С., & Сидоров, М. В. (2015). О построении двусторонних приближений к положительному решению уравнения Лане — Эмдена. *Вісник Запорізького національного університету. Серія: фізико-математичні науки*, (3), 107—120.

Колосова, С. В., & Сидоров, М. В. (2013) Применение итерационных методов к решению эллиптических краевых задач с экспоненциальной нелинейностью. *Радиоэлектроника и информатика*, (3), 28—31.

Красносельский, М. А. (1962). *Положительные решения операторных уравнений*. Москва: Физматгиз.

Опойцев, В. И., & Хуродзе, Т. А. (1984). *Нелинейные операторы в пространствах с конусом*. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та.

Рвачев, В. Л. (1982). *Теория R-функций и некоторые её приложения*. Киев: Наукова думка.

ДО ПОБУДОВИ ІНТЕГРАЛЬНИХ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО ВИЗНАЧЕНИХ ПРОСТОРОВО РОЗПОДІЛЕНИХ ВЕКТОРНО-ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

В. А. Стоян, С. Т. Даниш

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

v_a_stoyan@ukr.net, danysh@i.ua

Сформульована і розв’язана складна задача тривимірної теорії пружності — задача дослідження поля пружних динамічних зміщень точок пружного тіла з довільною геометрією його поверхні за наявності інформації про стан точок цієї поверхні й початковий стан внутрішніх точок усього тіла на заданому часовому інтервалі. Побудовано математичні моделі динаміки такого тіла, які, точно задовольняючи класично відомим рівнянням Ляме тривимірної теорії пружності, за середньоквадратичним критерієм узгоджуються з наявними початково-крайовими спостереженнями за ним.

Ключові слова: математичне моделювання, неповно спостережувані динамічні системи, просторові задачі теорії пружності.

Викладені у роботі Стоян (2011) методи математичного моделювання динаміки просторово розподілених неповно спостережуваних за початково-крайовим станом систем були спрямовані на дослідження функції стану $y(s)$ динамічної системи, яка функціонує в заданій просторово-часовій області S_0^T за умови, що її залежність від функції $u(s)$ просторово розподілених зовнішньодинамічних збурень визначається рівнянням

$$L(\partial_s)y(s) = u(s), \tag{1}$$

де $L(\partial_s)$ — лінійний диференціальний оператор, у якому $s = (x,t) = (x_1,..,x_n,t)$ — вектор просторово-часових змінних, а $\partial_s = (\partial_{x_1},...,\partial_{x_n},\partial_t)$ — вектор частинних похідних за цими змінними. Основою для дослідження динаміки системи (1), доповненої початково-крайовими спостереженнями за нею, був інтегральний еквівалент моделі, визначений співвідношенням

$$y(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(s-s')u(s')ds'. \tag{2}$$

Метою даного повідомлення є поширення методик дослідження системи (1) через інтегральну модель (2) на випадок, коли $y(s) \in \mathbb{R}^n$, $u(s) \in \mathbb{R}^m$, а $L(\partial_s)$ — матричний диференціальний оператор відповідної розмірності. Будуть запропоновані та досліджені методи побудови матричного ядра $G(s-s') \in \mathbb{R}^{n\times m}$ інтегральної математичної моделі (2), яка відповідає системі диференціальних рівнянь (1).

Отримані математичні результати з переходу від диференціальних математичних моделей просторово розподілених векторно-динамічних систем вигляду (1) до їх інтегрального еквіваленту (2), як і у статті Стоян та Даниш (2017), будуть проілюстровані на диференціальній математичній моделі динаміки пружно-деформованого середовища у формі рівнянь Ляме

$$\begin{aligned}
&\mu\Delta u_1(x,t) + (\lambda+\mu)\partial_{x_1}\theta(x,t) - \rho\partial_t^2 u_1(x,t) = -f_1(x,t);\\
&\mu\Delta u_2(x,t) + (\lambda+\mu)\partial_{x_2}\theta(x,t) - \rho\partial_t^2 u_2(x,t) = -f_2(x,t);\\
&\mu\Delta u_3(x,t) + (\lambda+\mu)\partial_{x_3}\theta(x,t) - \rho\partial_t^2 u_3(x,t) = -f_3(x,t),
\end{aligned} \tag{3}$$

де ρ — питома вага матеріалу середовища, λ та μ — пружнодинамічні характеристики середовища, $f_i(x,t)\ (i=\overline{1,3})$ — об'ємно визначені зовнішньо динамічні збурювальні фактори, $u_i(x,t)\ (i=\overline{1,3})$ — зміщення в напрямку координатних осей $x_i\ (i=\overline{1,3})$,

$$\theta(x,t) = \sum_{i=1}^{3}\partial_{x_i}u_i(x,t), \quad \Delta = \sum_{i=1}^{3}\partial_{x_i}^2,$$

а символами $\partial_{x_i}\ (i=\overline{1,3})$ та ∂_t позначені похідні за просторовими координатами та часом t.

При цьому (Стоян, 2011)

$$u(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(s-s')f(s')ds', \tag{4}$$

$$G(s-s') = \frac{1}{(2\pi i)^4}\int_{-i\infty}^{+i\infty} A^{-1}(p,q)D(p,q,s-s')dpdq = \sum_{k=1}^{K}\operatorname{Re}s(\Phi(\overline{p}),\overline{p}_k), \tag{5}$$

де

$$u(s) = \operatorname{col}(u_1(s),u_2(s),u_3(s)),$$
$$f(s) = \operatorname{col}(f_1(s),f_2(s),f_3(s)),$$

$s=(x,t)),\ \overline{p}=(p,q)=(p_1,p_2,p_3,q), dp=dp_1dp_2dp_3, \overline{p_k}=(p_k,q_k) \quad (k=\overline{1,K})$ — полюси матричної функції $\Phi(\overline{p}) = A^{-1}(p,q)D(p,q,s-s')$ при

$$A(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} (\lambda+2\mu)\xi_1^2+\mu(\xi_2^2+\xi_3^2)-\rho\eta^2 & (\lambda+\mu)\xi_1\xi_2 & (\lambda+\mu)\xi_1\xi_3 \\ (\lambda+\mu)\xi_2\xi_1 & (\lambda+2\mu)\xi_2^2+\mu(\xi_1^2+\xi_3^2)-\rho\eta^2 & (\lambda+\mu)\xi_2\xi_3 \\ (\lambda+\mu)\xi_3\xi_1 & (\lambda+\mu)\xi_3\xi_2 & (\lambda+2\mu)\xi_3^2+\mu(\xi_1^2+\xi_2^2)-\rho\eta^2 \end{pmatrix},$$

$$D(p,q,s-s') = \operatorname{diag}(e^{p(x-x')+q(t-t')}, \quad l=\overline{1,3}),$$

а $\operatorname{Re}s(\Phi(\overline{p}),\overline{p}_k)$ — інтегральний лишок матричної функції $\Phi(\overline{p})$ в точці $\overline{p_k}$.

Зауважмо, що на особливостях реалізації представлення (4) ми детально зупинялись в Стоян (2011). Залишається нагадати, що в співвідношенні (4) обчислена згідно (5) функція $G(s-s')$ повинна бути неперервною (Стоян, (2011), симетричною відносно точки s' и задовольняти умовам затухання на нескінченності.

Отримане згідно (4) інтегральне представлення диференціальних рівнянь (3) динаміки пружного середовища дозволило знайти розв'язок цих рівнянь, який за середньоквадратичним критерієм узгоджується з наступними початково-крайовими умовами

$$L_r^0(\partial_t)u(s)\Big|_{t=0} = U_r^0(x) \quad (r=\overline{1,R_0}),$$
$$L_\rho^\Gamma(\partial_x)u(s) = U_\rho^\Gamma(s) \quad (\rho=\overline{1,R_\Gamma}), \tag{6}$$

де $U_r^0(x)$, $L_\rho^\Gamma(\partial_x)$ — (3×3)-вимірні матричні диференціальні оператори, а $U_r^0(x),\ U_\rho^\Gamma(s)\in\mathbb{R}^3$ — задані вектор-функції.

Як і в Стоян (2011), виходитимемо з того, що початково-крайові збурення (5) моделюються значеннями

$$f_{0m}=f_0(s_m^0)\ \ (m=\overline{1,M_0}),\ f_{\Gamma m}=f_\Gamma(s_m^\Gamma)\ \ (m=\overline{1,M_\Gamma})$$

моделюючих функцій $f_0(s)$ та $f_\Gamma(s)$ в точках $s_m^0\in\mathbb{R}^3\times(-\infty,0]$ $\quad(m=\overline{1,M_0})$ та $s_m^\Gamma\in(\mathbb{R}^3\setminus S_0)\times[0,T]$ такими, що при заданій вектор-функції $f(s)$

$$\Phi=\Phi_0+\Phi_\Gamma\to\min_{f_0,f_\Gamma}$$

при

$$\Phi_0=\sum_{r=1}^{R_0}\int_{-\infty}^{+\infty}(L_r^0(\partial_t)u(s)\Big|_{t=0}-U_r^0(x))^2dx,$$
$$\Phi_\Gamma=\sum_{\rho=1}^{R_\Gamma}\int_\Gamma dx\int_{-\infty}^{+\infty}(L_\rho^\Gamma(\partial_x)u(s)-U_\rho^\Gamma(s))^2dt.$$

При цьому

$$u(s)=\int_{S_0}dx'\int_0^T G(s-s')f(s')dt'+\sum_{m=1}^{M_0}G(s-s_m^0)f_{0m}+\sum_{m=1}^{M_\Gamma}G(s-s_m^\Gamma)f_{\Gamma m}. \tag{7}$$

Тут $G(s-s')$ — матрична функція, визначена нами в (5), а вектори

$$f_0=\mathrm{col}(f_{0m},\quad m=\overline{1,M_0})$$

та

$$f_\Gamma=\mathrm{col}(f_{\Gamma m},\quad m=\overline{1,M_\Gamma})$$

визначаються середньоквадратичним оберненням системи лінійних функціональних рівнянь

$$A(s)f=U(s),$$

у яких

$$f = \mathrm{col}(f_0, f_\Gamma),$$

$$A(s) = \begin{pmatrix} (A_{11}(x) \quad (x \in S_0)) & (A_{12}(x) \quad (x \in S_0)) \\ (A_{21}(s) \quad (s \in \Gamma \times [0,T])) & (A_{22}(s) \quad (s \in \Gamma \times [0,T])) \end{pmatrix},$$

$$U(s) = \begin{pmatrix} (U_0(x) \quad (x \in S_0)) \\ (U_\Gamma(s) \quad (s \in \Gamma \times [0,T])) \end{pmatrix}.$$

при

$$U_0(x) = \mathrm{col}(U_r^0(x), \quad r = (\overline{1, R_0})$$

$$U_\Gamma(s) = \mathrm{col}(U_\rho^\Gamma(s), \quad \rho = \overline{1, R_\Gamma})$$

$$A_{11}(x) = \mathrm{col}(\mathrm{str}(L_r^0(\partial_t)G(s - s_m^0)\Big|_{t=0}, \quad m = \overline{1, M_0}), \quad r = \overline{1, R_0}),$$

$$A_{12}(x) = \mathrm{col}(\mathrm{str}(L_r^0(\partial_t)G(s - s_m^\Gamma)\Big|_{t=0}, \quad m = \overline{1, M_\Gamma}), \quad r = \overline{1, R_0}),$$

$$A_{21}(x) = \mathrm{col}(\mathrm{str}(L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s - s_m^0), \quad m = \overline{1, M_0}), \quad \rho = \overline{1, R_\Gamma}),$$

$$A_{22}(x) = \mathrm{col}(\mathrm{str}(L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s - s_m^\Gamma), \quad m = \overline{1, M_\Gamma}), \quad \rho = \overline{1, R_\Gamma})$$

При цьому

$$f_0 = (Q_{11}, Q_{12})A_U + v_0 - (Q_{11}, Q_{12})Pv,$$
$$f_\Gamma = (Q_{21}, Q_{22})A_U + v_\Gamma - (Q_{21}, Q_{22})Pv,$$

де за довільних $3M_0$ и $3M_\Gamma$-мірних векторів v_0 та v_Γ

$$v = \mathrm{col}(v_0, v_\Gamma),$$

$$[Q_{ij}]_{i,j=1}^{i,j=2} = P^+,$$

$$P = \int_{(\cdot)} A^T(s)A(s)ds,$$

$$A_U = \int_{(\cdot)} A^T(s)U(s)ds,$$

а знаком $(\cdot)$ позначено інтегрування за областю зміни аргументу підінтегральних матричної та векторної функцій:

Однозначність $(v \equiv 0)$ побудованої математичної моделі динаміки розглядуваного пружного тіла буде визначатися умовою (Стоян, 2011)

$$\det P > 0,$$

а точність інтегральної моделі по відношенню до диференціальної моделі (3) — величиною

$$\varepsilon^2 = \min_{u(s)} (\Phi_0 + \Phi_\Gamma) = \min_{f_0, f_\Gamma} (\Phi_0 + \Phi_\Gamma) = \int_{(\cdot)} U^T(s)U(s)ds - A_U^T \mathrm{P}^+ A_U.$$

Висновок. Таким чином, сформульована й розв'язана складна задача тривимірної теорії пружності — задача дослідження поля пружних динамічних зміщень точок пружного тіла з довільною геометрією його поверхні за наявності інформації про безперервно визначений стан точок цієї поверхні, та початковий стан внутрішніх точок усього тіла на заданому часовому інтервалі. Побудовані математичні моделі динаміки такого тіла, які, точно задовольняючи класично відомим рівнянням Ляме тривимірної теорії пружності, за середньоквадратичним критерієм узгоджуються з наявними початково-крайовими спостереженнями за ним.

Список літератури

Стоян, В. А. (2011). *Математичне моделювання лінійних, квазілінійних і нелінійних динамічних систем*. Київ: ВПЦ «Київський університет».

Стоян, В. А., & Даниш, С. Т. (2017). О математических моделях динамики трехмерных упругих тел. Часть 1. Тела с непрерывно наблюдаемым начально-краевым состоянием. *Проблемы управления и информатики*, (3), 37—44.

ПРО КОМБІНАТОРНУ ПРИРОДУ ПРОБЛЕМИ САМООРГАНІЗАЦІЇ

Н. К. Тимофієва
МННЦІТіС НАН та МОН України, Київ,Україна
TymNad@gmail.com

Показано, що природним просторам властиві закони комбінаторики. Відповідно, процеси самоорганізації в живій природі та процеси впорядкування комбінаторних множин — подібні. Для обох випадків їхнє утворення характеризується як безладною структурою так і строгим порядком. В обох випадках утворюються фрактальні структури.

Ключові слова: комбінаторна множина, знакові комбінаторні простори, самоорганізація, фрактали, безлад, порядок.

Вступ. Аксіоми знакових комбінаторних просторів справедливі для різних просторів, якими описується жива природа (Тимофієва, (2015). Показано, що вони мають комбінаторну природу. Під самоорганізацією у природі розуміють процес спонтанного виникнення ладу з безладу (хаосу) та утворення фрактальних структур. Із дослідження комбінаторних множин можна побачити, що останні мають різноманітне впорядкування як хаотичне так і строге, виконане за певними правилами. Вони впорядковуються рекурсивно та мають фрактальну структуру. Оскільки природним просторам властиві закони комбінаторики, то з використанням властивостей комбінаторних множин проводиться спроба пояснити проблему самоорганізації в природі.

Постановка задачі. Центральною проблемою кібернетики вважають вирішення проблеми самоорганізації. Її дослідженню присвячено багато робіт. Як було зазначено, під *самоорганізацією* у природі розуміють процес спонтанного виникнення ладу з безладу у відкритих нерівноважних системах. За рахунок росту флуктуацій при поглинанні енергії з оточуючого середовища система досягає деякого критичного стану та переходить у новий стійкий стан з більш високим рівнем складності та порядку в порівнянні з попереднім. Але найскладнішим положенням самоорганізації є спроба пояснити, як система мимовільно переходить із стану хаосу (безладу) у стан порядку, як і завдяки чому проходить її самоорганізація. Сучасна наука поки що на ці питання не відповіла.

Для пояснення цього явища існує багато теорій, зокрема теорія самоорганізованих зростаючих автоматів, евристична самоорганізація (Ивахненко, 1971; Юревич, 2007). Під *евристичною самоорганізацією* розуміють системи та програми обчислювальних машин, які містять у собі генератори гіпотез, порогові самовідбори корисної інформації та процедуру оптимізації порогів. Оскільки в генераторі гіпотез у процесі самовідбору має місце перебір варіантів, то цю задачу розв’язують з використанням математичного апарату комбінаторики, переважно повним перебором. Теорія автоматів ґрунтується на ітераціях, у яких наступне значення отримується рекурсивно з урахуванням попереднього результату. Евристична самоорганізація пов’язана з генеруванням комбінацій та використанням порогових самовідборів за евристичними критеріями.

Підхід, що пропонується. У природі існує скінченне число множин комбінаторних конфігурацій одного й того ж типу, кожна з яких може бути упорядкована різними способами з використанням рекурентних правил . Такий процес характерний і при самоорганізації у природі. Тому для пояснення цього явища використовуємо знакові комбінаторні простори та генерування комбінаторих множин, правила яких розроблено досить ґрунтовно.

Основна частина. Жива природа являє собою самопристосовну (адаптивну) систему. Як було зазначено, під самоорганізацією розуміють процес спонтанного виникнення ладу з хаосу (безладу). Аналогічно з живою природою в теорії управління розроблено адаптивні системи автоматичного керування. У цих системах автоматично змінюється алгоритм керування з метою збереження показників якості при довільному зміщенні характеристик керованого об'єкта.

Упорядкована структура, яка виникає з хаосу, є результатом конкуренції множини всіляко можливих станів, що закладені в системі. У результаті конкуренції проводиться мимовільний відбір структури найбільш адаптованої в умовах, що склалися. Мінливість навколишнього світу обумовлюється випадковістю та невизначеністю. Сьогодення й майбутнє, визначається минулим. Ступінь залежності від минулого визначається «пам'яттю» системи, яка теоретично може набувати значення в діапазоні від нуля (хаотичні утворення) до максимально нескінченної величини (жорсткі причинно обумовлені системи). Отже, у процесі самоорганізації природи проходить перебір варіантів. Це говорить про те, що тут мають місце закони комбінаторики.

Самоорганізацію у природі пов'язують із процесами, які породжують фрактальні структури. Їх вивчають у математиці та фізиці. Це — звичайні процеси зі зворотнім зв'язком, у якій одна й та ж операція виконується знову і знову. Результат однієї операції є початком значень наступної операції. Якщо почати ітераційний процес з деякого довільного значення x_0 то результатом буде послідовність $x_1, x_2, \ldots$, поведінку якої з часом необхідно дослідити.

Аналогічне спостерігаємо при генеруванні комбінаторних конфігурацій. Під *комбінаторною конфігурацією* розуміємо будь-яку сукупність елементів, яка утворюється з усіх або з деяких елементів базової множини $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ (Тимофієва, 2007). Позначимо її впорядкованою множиною $w = (w_1, \ldots, w_\eta)$, $\eta \in \{1, \ldots, n\}$ — кількість елементів у $w \in W$, W — множина комбінаторних конфігурацій. *Рекурентним комбінаторним оператором* назвемо сукупність правил, за допомогою яких з елементів базової множини A утворюється комбінаторна конфігурація $w \in W$.

Різноманітні типи комбінаторних конфігурацій утворюються за допомогою трьох рекурентних комбінаторних операторів: вибирання, транспозиція, арифметичний.

Множини комбінаторних конфігурацій одного і того ж типу упорядковуються різними способами. Частина з них генерується випадковими алгоритмами. У цьому разі отримана структура — безладна (хаотична). Значна їхня частина впорядковується за строгими правилами. Як показує аналіз комбінаторних множин, існують певні закономірності їхнього впорядкування. Одна з таких закономірностей, що характерна для різних типів комбінаторних конфігурацій, є *властивість періодичності*. Вона випливає з рекурентного способу їхнього утворення та полягає в тому, що ці множини упорядковані інтервалами, у кожному з яких комбінаторні конфігурації утворюються за одними і тими самими правилами. Отримані комбінаторні множини *самоподібні*, тому що їхні елементи утворюються одним і тим же рекурентним комбінаторним оператором, а їхнє впорядкування проводиться за одними і тими ж правилами. Одночасно вони є як скінченними, так і нескінченними. Така властивість характерна для фракталів. Тобто, утворені комбінаторні множини характеризуються фрактальною структурою.

Для генерування множин комбінаторних конфігурацій використаємо рекурентно-періодичний метод, робота якого ґрунтується на властивості періодичності, що випливає з рекурентного способу утворення $w \in W$, а W — упорядковані інтервалами, у кожному з яких комбінаторні конфігурації утворюються за одними і тими ж правилами. У цьому разі необхідно сформулювати три правила, за якими утворюються (Тимофієва, 2010):

а) інтервал нульового рангу;

б) обмежувальна комбінаторна конфігурація (перша в інтервалі нульового рангу);

в) інтервал σ-го рангу.

Аксіоми знакових комбінаторних просторів. Виходячи з утворення та впорядкування комбінаторних конфігурацій, сформулюємо аксіоми, яким задовольняють знакові комбінаторні простори.

1. Знакові комбінаторні простори існують у двох станах: спокої (згорнутий) та динаміці (розгорнутий).

2. Згорнутий простір задається інформаційним знаком $R = < A, T, \Upsilon, \Xi >$, який містить властивості розгорнутого простору певного типу, де A — одна або кілька базових множин, з елементів $a_{(l_j)} \in A_l \subset A$, яких утворюються розгорнуті комбінаторні простори, $j \in \{1, ..., n\}$, $l \in \{1, ..., q\}$, q — кількість базових множин; T — тип комбінаторного простору; Υ — правила розгортання комбінаторного простору; Ξ — правила згортання простору певного типу з точок як одного так і кількох просторів. Згорнутий простір має властивості просторів, з яких він згорнувся.

3. Утворення зі згорнутого розгорнутих комбінаторних просторів проводиться за рекурентними правилами. Точкою розгорнутого простору є комбінаторна конфігурація певного типу.

4. Розгортанню комбінаторного простору характерна властивість періодичності, яка випливає з рекурентного способу утворення та впорядкування комбінаторних конфігурацій.

Якщо правила розгортання ґрунтуються на строгих законах, то розгорнутий комбінаторний простір є структурований.

Якщо правила розгортання простору не підпорядковані строгим законам, то розгорнутий простір утворюється безладно.

Отже, для утворення та впорядкування комбінаторних множин необхідно задати одну або кілька базових множин, тип певної комбінаторної конфігурації, правила за якими розгортається ця множина. Згорнутий простір має властивості просторів, з яких він згорнувся. Аналогічно утворюються і природні простори (біологічні, інформаційні, мовленнєві, фізичні).

Якщо порівняти процес самоорганізації ладу з безладу, то він подібний до процесу розгортання знакових природних просторів за строгими законами. В обох випадках процес є рекурсивний, проводиться пошук оптимального стану за строгими оптимальними для життєдіяльності системи правилами. Цьому процесу характерна властивість періодичності.

Висновок. Отже, самоорганізацію у природі можна змоделювати з використанням комбінаторного аналізу. Комбінаторні множини можуть бути впорядковані як хаотично так і за строгими правилами. Процеси самоорганізації та розгортання комбінаторних просторів є рекурсивні, пошук оптимального стану проводиться за строгими оптимальними для життєдіяльності системи правилами. Цьому процесу характерна властивість періодичності та в обох випадках маємо фрактальні структури.

Список літератури

Ивахненко, А. Г. (1971). *Системы эвристической самоорганизации в технической кибернетике*. Киев: Техніка.

Тимофієва, Н. К. (2007). *Теоретико-числові методи розв'язання задач комбінаторної оптимізації* (Дис. докт. техн. наук). Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, Київ.

Тимофієва, Н. К. (2010). Рекурентно-періодичний метод для генерування комбінаторних конфігурацій. У *Матеріалах Десятого міжвузівського науково-практичного семінару «Комбінаторні конфігурації та їх застосування»*, 15—16 жовтня 2010 р., Кіровоград (с. 138—141). Кіровоград: Кіровогр. техн. ун-т.

Тимофієва, Н. К. (2015). Знакові комбінаторні простори та штучний інтелект. *Штучний інтелект*, (1—2), 180—189.

Юревич, Е. И. (2007). *Теория автоматического управления*. Санкт-Петербург: БХВ-Петербург.

НАБЛИЖЕННЯ КВАЗІСПЕКТРАЛЬНИМИ ПОЛІНОМАМИ РОЗВ'ЯЗКІВ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ СТОКСА

П. С. Янчук

Міжнародний економіко-гуманітарний університет імені академіка Степана Дем'янчука, Рівне, Україна

janchukp@ukr.net

Застосовано новий метод до побудови поліноміальних наближень розв'язку крайової задачі для системи рівнянь Стокса. Метод ґрунтується на застосуванні розвинення в ряди Фур'є функцій двох змінних за ортогональними квазі-спектральними поліномами.

Ключові слова: апроксимаційний метод Дзядика, квазіспектральні поліноми, ортогональні поліноми, ряди Фур'є, рівняння Нав'є — Стокса, крайова задача Стокса.

Поява методу квазіспектральних поліномів зумовлена розвитком апроксимаційного методу В. К. Дзядика (Дзядик, 1988; Янчук, 1989). Квазі-спектральні поліноми широко використовуються до розв'язування крайових задач для диференційних рівнянь, систем звичайних нелінійних рівнянь та інших задач Янчук (1999, 2000, 2011, 2012а, 2012б). У пропонованій доповіді застосовано раніше вивчені властивості квазіспектральних поліномів та відповідних рядів Фур'є до розв'язування крайової задачі для системи рівнянь Стокса.

Задачі для системи рівнянь Стокса виникають при математичному описанні повільних встановлених течій нестискуваної в'язкої рідини та стаціонарних деформованих станів пружних не стискаючих матеріалів.

Запропонований метод відноситься до класу високоточних та ненасичених методів розв'язування задач математичної фізики. Класи таких методів розглядаються у відомих класичних монографіях Бабенко (1986), Ладыженская (1970), Флетчер (1988) та багатьох інших.

Розглянемо внутрішню задачу Стокса: два рівняння динаміки для вектора $z=\left(u,v\right)$ швидкості

$$\begin{aligned} &-\left(h_x^{\,2}u_{xx}+h_y^{\,2}u_{yy}\right)+h_xp_x=f\left(x,y\right),\\ &-\left(h_x^{\,2}v_{xx}+h_y^{\,2}v_{yy}\right)+h_yp_y=q\left(x,y\right),\quad -1<x,y<1, \end{aligned} \tag{1}$$

поверхнева потужність потоку ($g=0$ — умова нерозривності)

$$h_xu_x+h_yv_y=g\left(x,y\right),\quad -1\le x,y\le 1, \tag{2}$$

на межі області $-1\le x,y\le 1$ — крайові умови першого роду

$$u=\varphi\left(x,y\right),\quad v=\psi\left(x,y\right), \tag{3}$$

де h_x, h_y — деякі, додатні числа, $\varphi=\varphi\left(x,y\right)$, $\psi=\psi\left(x,y\right)$ — відомі функції. Припустимо, що крайові умови (3) узгоджені з рівнянням нерозривності в усіх кутових точках $\left(\pm1,\pm1\right)$ квадрата $-1\le x,y\le 1$. Припустимо, що задача (1)—

(3) має єдиний розв'язок u, v, p при умові, що $p\left(-1,-1\right) = p_0$, де p_0 — деяке число.

Квазіспектральні поліноми першого та другого родів $K_i^{\circ}\left(x\right), K_i^{\bullet}\left(x\right)$ задовольняють квазіспектральні диференційні та інтегральні рівняння та мають ряд інших цікавих властивостей Янчук (1999, 2000, 2011, 2012а, 2012б).

Функціям u, v, p поставимо у відповідність скінчені ряди Фур'є за квазіспектральними поліномами

$$u^n = \sum_{i=0}^{2n} \sum_{j=1}^{2n+2} u_{i,j}^{\bullet\ \circ} K_i^{\bullet}\left(x\right) K_j^{\circ}\left(y\right), \quad u_{i,j}^{\bullet\ \circ} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} u K_i^{\bullet}\left(x\right) K_j^{\circ}\left(y\right) dxdy,$$

$$v^n = \sum_{i=1}^{2n+2} \sum_{j=0}^{2n} v_{i,j}^{\circ\ \bullet} K_i^{\circ}\left(x\right) K_j^{\bullet}\left(y\right), \quad v_{i,j}^{\circ\ \bullet} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} u K_i^{\circ}\left(x\right) K_j^{\bullet}\left(y\right) dxdy, \tag{4}$$

$$p^n = \sum_{i=1}^{2n+2} \sum_{j=1}^{2n+2} p_{i,j}^{\circ\ \circ} K_i^{\circ}\left(x\right) K_j^{\circ}\left(y\right), \quad p_{i,j}^{\circ\ \circ} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} u K_i^{\circ}\left(x\right) K_j^{\circ}\left(y\right) dxdy.$$

У подальшому опускатимемо індекс n, оскільки вважатимемо його фіксованим і звичайно однаковим для всіх формул. Тут вважається, що n не менше двох. Випадок $n = 1$ розглядається простіше, ніж даний, але його ми опускаємо.

Між коефіцієнтами Фур'є функцій та їх похідних існує простий зв'язок для кожної із систем квазіспектральних поліномів Янчук (2012а, 2012б). Вкажемо деякі найважливіші з них для функцій однієї змінної:

$$u_{xx,i}^{\circ} = -\lambda_i u_i^{\circ} + d_{\circ}^i \Delta^i u, \quad i = 1,...,2n, \tag{5}$$

$$u_{xx,i}^{\bullet} = -\lambda_i u_i^{\bullet} + d_{\bullet}^i \Delta^i u_x, \quad i = 0,...,2n, \tag{6}$$

$$u_{x,i}^{\circ} = -\mu_i u_i^{\bullet}, \mu_i = \sqrt{\lambda_i}, \quad i = 1,...,2n, \tag{7}$$

$$u_{x,i}^{\bullet} = \mu_i u_i^{\circ} + \delta_{\bullet}^i \Delta^i u, \quad i = 0,...,2n, \tag{8}$$

де $\Delta^i u = u\left(1\right) - \left(-1\right)^i u\left(-1\right)$ для довільної функції $u = u\left(x\right)$, $\lambda_i > 0, d_{\circ}^i$ — наперед відомі параметри диференціювання.

Числа $\Delta_x^i u_j^{\circ}, \Delta_y^j v_i^{\circ}$, які є очевидним чином узагальненням чисел $\Delta^i u$, обчислюються із крайових умов (3). Коефіцієнти Фур'є поліномів (4), знаходитимемо з алгебраїчних рівнянь, які нижче побудуємо. Прямо із крайових умов знаходяться $\left(8n + 4\right)$ коефіцієнтів Фур'є.

Лема 1. Формули (5), (7), (8) справджуються для будь-яких поліномів однієї змінної степені $\leq 2n + 1$, а формула (6) для поліномів степені $\leq 2n$.

Для коефіцієнтів Фур'є з рівнянь динаміки (1), дістанемо

$$
\begin{aligned}
&\left(\lambda_i^x + \lambda_j^y\right) u_{i,j}^{\bullet\ \circ} + \left(\mu_i^x p_{i,j}^{\circ\ \circ} + \delta_{\bullet x}^i \Delta_x^i p_j^{\circ}\right) = F_{i,j}^{\bullet\ \circ}, \quad i = 0,\dots,2n, j = 1,\dots,2n,\\
&\left(\lambda_i^x + \lambda_j^y\right) v_{i,j}^{\circ\ \bullet} + \left(\mu_j^y p_{i,j}^{\circ\ \circ} + \delta_{\bullet y}^j \Delta_y^j p_i^{\circ}\right) = Q_{i,j}^{\circ\ \bullet}, \quad i = 1,\dots,2n, j = 0,\dots,2n,
\end{aligned} \tag{9}
$$

де $\lambda_i^x = h_x{}^2 \lambda_i$, $\mu_i^x = h_x \mu_i$, $d_{\bullet x}^i = h_x{}^2 d_{\bullet}^i$, $d_{\circ x}^i = h_x{}^2 d_{\circ}^i$, $\delta_{\bullet x}^i = h_x \delta_{\bullet}^i$, $\delta_{\circ x}^i = h_x \delta_{\circ}^i$,

$$
F_{i,j}^{\bullet\ \circ} = f_{i,j}^{\bullet\ \circ} + \left(d_{\circ y}^j \Delta_y^j u_i^{\bullet} + d_{\bullet x}^i \Delta_x^i u_{x,j}^{\circ}\right), Q_{i,j}^{\circ\ \bullet} = q_{i,j}^{\circ\ \bullet} + \left(d_{\circ x}^i \Delta_x^i v_j^{\bullet} + d_{\bullet y}^j \Delta_y^j v_{y,i}^{\circ}\right). \tag{10}
$$

Крайові коефіцієнти Фур'є $\Delta_x^i u_{x,j}^{\circ}$ та $\Delta_y^j v_{y,i}^{\circ}$ будемо називати *крайовими другого роду*, бо вони тісно пов'язані із крайовими умовами другого роду, тобто нормальними похідними для u при $x = \pm 1$ і нормальними похідними для v при $y = \pm 1$. Згадані нормальні похідні знаходяться з рівняння нерозривності (потужності потоку) (2) та крайових умов першого роду (3). Відповідь запишемо для крайових коефіцієнтів Фур'є другого роду функцій u, v:

$$
\begin{aligned}
h_x \Delta_x^i u_{x,j}^{\circ} &= \Delta_x^i g_j^{\circ} - h_y \Delta_x^i v_{y,j}^{\circ} = \Delta_x^i g_j^{\circ} + \mu_j^y \Delta_x^i v_j^{\bullet},\\
h_y \Delta_y^j v_{y,i}^{\circ} &= \Delta_y^j g_i^{\circ} - h_x \Delta_y^j u_{x,i}^{\circ} = \Delta_y^j g_i^{\circ} + \mu_i^x \Delta_y^j u_i^{\bullet}.
\end{aligned} \tag{11}
$$

У формули (11) увійшли відомі крайові коефіцієнти першого роду для u, v при $y = \pm 1, x = \pm 1$, відповідно. Тому, для обчислення коефіцієнтів Фур'є (10) потрібно використовувати крайові значення обох функцій u, v на сторонах квадрата $-1 \le x, y \le 1$. Із рівнянь динаміки одержуємо $8n^2 + 4n$ алгебраїчних рівнянь (9) для коефіцієнтів Фур'є.

Із рівняння тиску

$$
h_x{}^2 p_{xx} + h_y{}^2 p_{yy} = G, \tag{12}
$$

яке випливає із рівнянь (1), (2), дістанемо

$$
-\left(\lambda_i^x + \lambda_j^y\right) p_{i,j}^{\circ\ \circ} + d_{\circ x}^i \Delta_x^i p_j^{\circ} + d_{\circ y}^j \Delta_y^j p_i^{\circ} = G_{i,j}^{\circ\ \circ}, i = 1,\dots,2n, j = 1,\dots,2n, \tag{13}
$$

де

$$
G_{i,j}^{\circ\ \circ} = -\mu_i^x f_{i,j}^{\bullet\ \circ} - \mu_j^y q_{i,j}^{\circ\ \bullet} - \left(\lambda_i^x + \lambda_j^y\right) g_{i,j}^{\circ\ \circ} + d_{\circ x}^i \Delta_x^i g_j^{\circ} + d_{\circ y}^j \Delta_y^j g_i^{\circ}.
$$

Система лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) для обчислення коефіцієнтів Фур'є зводиться до СЛАР для обчислення коефіцієнтів Фур'є лише функції тиску і лише на краю області, точніше для коефіцієнтів Фур'є

$$
p_j^1 = \Delta_x^i p_{2j-j'}^{\circ}, \quad p_i^2 = \Delta_y^j p_{2i-i'}^{\circ}, \quad i, j = 1,\dots,n
$$

справджуються формули

$$
p_j^1 + \sum_{i=1}^{n} A_{j,i} p_i^2 = F_j^x, \quad j = 1,\dots,n, \quad \sum_{j=1}^{n} B_{i,j} p_j^1 + p_i^2 = F_i^y, \quad i = 1,\dots,n, \tag{14}
$$

де числа $A_{i,j}$, $B_{i,j}$ не залежать від конкретної задачі Стокса, а залежать лише від h_x, h_y та параметрів диференціювання квазіспектральних поліномів.

Поширено новий, економний, швидкий та високоточний метод квазіспектральних поліномів на випадок наближеного розв'язування внутрішньої крайової задачі Стокса у прямокутнику. Проведені розрахунки для конкретних задач Стокса показують, що характер поведінки похибок схожий до того, який спостерігався у випадку задачі Діріхле для рівняння Пуассона. Найбільші обчислювальні затрати стосуються розв'язування чотирьох систем лінійних алгебраїчних рівнянь розміром $2n \times 2n$ для обчислення крайових коефіцієнтів Фур'є функції тиску p, а всі інші коефіцієнти Фур'є знаходяться шляхом послідовного використання формул (13), (11), (9) для прямих обчислень. Для заданого n розв'язок задачі Стокса подається через $m = 3\left(2n+1\right)^2$ коефіцієнтів Фур'є. Застосування методів типу Гальоркіна з базисом у вигляді класичних ортогональних поліномів вимагало б розв'язання системи лінійних рівнянь із щільною матрицею такої ж розмірності m. Цей метод нескладно поширити на випадок внутрішньої крайової задачі Стокса в паралелепіпеді, тобто на тривимірний просторовий випадок.

Список літератури

Бабенко, К. И. (1986). Основы численного анализа. Москва: Наука.

Дзядык, В. К. (1988). Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. Киев: Наукова думка

Ладыженская, О. А. (1970). Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. Москва: Наука.

Флетчер, К. (1988). Численные методы на основе метода Галеркина. Москва: Мир.

Янчук, П. С. (1989). Использование А-метода при решении эллиптических и параболических уравнений. В кн. *Гармонический анализ и развитие аппроксимационных методов,* (с. 112—121). Киев: Институт математики АН УРСР.

Янчук, П. С. (1999). Квазіспектральні многочлени та крайові задачі. *Волинський математичний вісник, 6,* 183—187.

Янчук, П. С. (2000). Метод многочленних рядів Фур'є для задачі Діріхле для рівняння Пуассона в квадраті [-1,1]×[-1,1]. *Волинський математичний вісник, 7,* 193—208.

Янчук, П. С. (2011). Поліноміальна апроксимація розв'язку задачі Діріхле для рівняння Пуассона з неоднорідними крайовими умовами. *Волинський математичний вісник, 8,* 213—239.

Янчук, П. С. (2012а). Про оцінки похибок поліноміальної апроксимації розв'язку задачі Неймана для рівняння Пуассона. *Волинський математичний вісник, 9,* 189—207.

Янчук, П. С. (2012б). Про спектральний метод наближеного розв'язування рівняння Пуассона. *Питання прикладної математики і математичного моделювання,* 261—268.

ЗАДАЧА КООПЕРАТИВНОГО КЕРУВАННЯ ГРУПОЮ БЕЗПІЛОТНИКІВ

В. О. Яценко, Ф. Г. Гаращенко, В. М. Петрович, Н. М. Требіна

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

v.yatsenko@gmail.com

Досліджується сучасний стан та актуальні проблеми в системах керування безпілотними літальними апаратами (БПЛА). Проведено огляд та вибір програмних інструментів (операційна система, система авто пілотування, наземна система збору та обробки інформації), моделювання та оптимізацію систем. Розроблено ефективні алгоритми стабілізації БПЛА з урахуванням зовнішніх впливів, алгоритми обробки фотознімків, отриманих з БПЛА, та їх просторова прив’язка, алгоритми розпізнавання та обробки оптичної інформації.

Ключові слова: моделювання та оптимізація систем керування, лазерне випромінювання, розпізнавання, ідентифікація, обробка оптичної інформації.

В умовах екологічної нестабільності важливим є створення оптичних систем, побудова математичних моделей для дистанційного виявлення небезпечних хімічних і біологічних загроз навколишнього середовища.

Пропонується сучасна автоматизована система на базі безпілотних літальних апаратів (БПЛА). Розв’язуються задачі динаміки руху, стабілізації, керування і навігації літальних апаратів. Ряд комерційних організацій (таких як Google, Samsung, DJI, 3D Robotics та інші) проводять активні дослідження в цьому напрямку. Але актуальною проблемою досі залишається точність позиціонування та орієнтації БПЛА у просторі. На даний момент одні з найкращих характеристик демонструють літальні апарати компанії DJI, точність позиціонування яких у вертикальній площині складає 0.5 м, а у горизонтальній — 2.5 м. Задачі створення 3D-карт місцевості та просторової прив’язки фотознімків потребують суттєво вищої точності позиціонування БПЛА.

Розглядається нова концепція щодо кооперативного керування БПЛА та використання дуального принципу виявлення біологічних і хімічних компонент за рахунок використання лазерного випромінювання, що діє на агенти для якісної ідентифікації (див. список літератури). Технологія базується на дистанційних спектральних вимірюваннях (рис. 1):

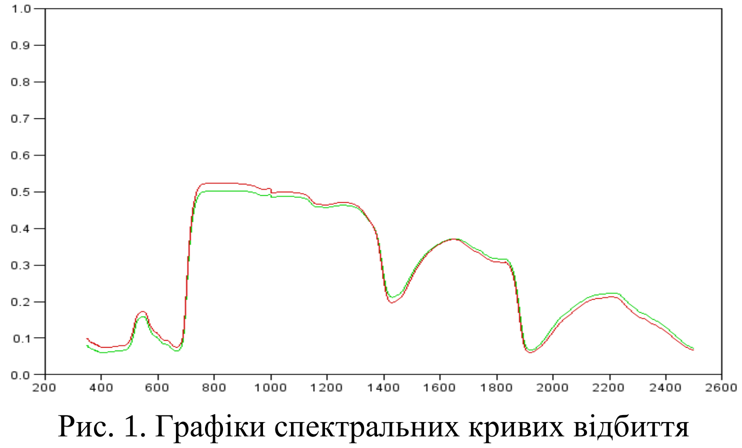


Рис. 1. Графіки спектральних кривих відбиття

Авторами розроблено та апробовано нові підходи апроксимації експериментальних даних. Обробка даних проводиться в реальному часі. До розроблених алгоритмів висуваються чіткі умови: вони повинні бути конструктивними у програмуванні, оптимальні за швидкодією і в реальному часі розв'язувати поставлені задачі.

Цим вимогам відповідають адаптивні алгоритми, що базуються на градієнтних підходах. Запропоновано підходи до апроксимації неперервних процесів, але на їх основі легко отримуються дискретні аналоги. Як правило, у прикладних задачах вимірюються сигнали в дискретні моменти. Тому різницеві схеми можуть виявитися більш вдалими для їх використання.

При користуванні запропонованими алгоритмами виникають питання аналізу збіжності таких ітераційних процедур. Це можна робити на основі методів Ляпунова, практичної стійкості та використання спеціальних критеріїв стійкості.

Запропоновані методи можна ефективно застосувати для виявлення хімічних та біологічних компонент при аналізі спектральних даних. Приводяться чисельні модельні приклади для апроксимації неперервних сигналів.

Виготовлено макет оптичного приладу: Бортовий спектрометр для виявлення уражених зон рослинності: Патент № 110814 / Яценко В. О., Донець В. В., Лапчук В. П. Державний реєстр патентів України на винаходи 25.02.2016.

У результаті проведеного дослідження розроблено ефективні алгоритми стабілізації БПЛА з урахуванням зовнішніх впливів, алгоритми обробки фотознімків, отриманих з БПЛА, та їх просторова прив'язка, алгоритми розпізнавання та обробки оптичної інформації. Створено апаратурно-програмний комплекс для вимірювання вмісту пігментів листків рослин в наземних польових умовах.

Список літератури

Yatsenko, V. A., Pardalos, P. M., & Kochubey, S. M. (2004). Monitoring of Agricultural Crops Using Optimization Methods and Data Analysis. In *SPIE Defence & Security Symposium,* 12–16 April, Orlando, 5416.

Геращенко, Ф. Г., Пичкур, В. В., & Харченко, И. И. (2002). Оптимальное по быстродействию гашение угловых скоростей космического аппарата на основе метода динамического программирования. *Кибернетика и вычислительная техника*, *134,* 51—59.

Петрович, В. М. (2007). Побудова оцінок параметрів математичної моделі на базовому інтервалі часу змінної довжини. *Журнал обчислювальної та прикладної математики*, *2*(95), 97—98.

V

ІСТОРІЯ І МЕТОДИКА ВИКЛАДАННЯ МАТЕМАТИКИ ТА ІНФОРМАТИКИ

FOUNDATIONS OF MATHEMATICS: RETROSPECTIVE AND PERSPECTIVE

P. P. Trokhimchuck
Lesya Ukrayinka East European University, Lutsk, Ukraine
trope1650@gmail.com

Problems of foundations of mathematics are discussed. Short historical analysis of this problem is represented. Various ways of resolution this problem are analyzed. Basic conditions for theory of foundations of mathematics are formulated. Basis of polymetric analysis as universal system of formalization of knowledge and possible way of resolution this problem is represented.

Keywords: foundation of mathematics, formalism, intuitionism, number, open system, polymetric analysis.

The problems of calculation and foundation of mathematics have long history (Bogachevskiy, 1937; Ruzha, 1981; Trokhimchuck, 2014). This problem is connected with problem simplicity-complexity, which is central problem for each science. Roughly speaking it is the problem of optimal formalization of knowledge. This problem is beginning from famous Archimedes phrase: “Give me fulcrum and I’ll reverse Universe” (Trokhimchuck, 2014).

Therefore, this problem is basic for the creation new science. It was used by Aristotle, Descartes, Newton and other researches (Trokhimchuck, 2014). But each science must be optimal system. This problem must be beginning from the Newtonian four rules of conclusions in the physics (Trokhimchuck, 2014):

Rule 1. Do not require natural reasons than those that are true and sufficient to explain the phenomena.

Rule 2. Therefore, as far as possible, the same reason we should attribute displays the same kind of nature.

Rule 3. Such properties of bodies which can not be either amplified or weaken and are all bodies over which you can do the test, must properties considered for all bodies in general case.

Rule 4. In experimental philosophy, propositions derived from phenomena through a common induction must be considered for accurate or approximately correct, despite the possibility of opposing their hypothesis until there are phenomena that are more to be specified or are found to be invalid.

Determination of mathematics with numerical (measured) point of view was formulated by Ch. Volf (Trokhimchuck, 2014): “Mathematics is the science to measure everything that can be measured. Of course, it is described as the science of numbers, the science of value, i.e. the things that can increase or decrease. Since all finite things can be measured in all that they have a finite, that is what they are, then nothing is, what cannot be applied math, and because you cannot have any more precise knowledge than when the properties of things can be measured, the math leads us to the most perfect knowledge of all possible things in the world”.

This same concept of measured value was formulated by “king” of mathematics of XVIII century, L. Euler (Trokhimchuck, 2014): “First value called everything that can increase or decrease, or something that you can add anything or subtract anything which can be ... There are many different kinds of values that cannot be account, and from them come the various branches of mathematics, each of which has to do with their native values. However, it is impossible to determine whether a measured value except as known to take as another value of the same type and specify the ratio in which it is to her.”

In determining whether the measurement values of any kind so we come to that first established some known value of the same kind, called the measure or unit and depends solely on our choice. Then determined in what respect the value is corresponding to the extent that it is always expressed in numbers. Thus, measurement is no more than an attitude, which is one size to another, taken as a unit. Mathematics in general case is nothing but the science of the quantities involved finding ways to measure past.

But in XX century the three concepts of foundation of mathematics were observed. Logical concept (B. Russel and A. N. Whitehead) is based on logical formalization of knowledge; formal concept is based on axiomatic aspects of formalization and third, intuitionist, is based on constructive (analytic) aspects of mathematics (Bogachevskiy, 1937; Ruzha, 1981; Trokhimchuck, 2014). First two concepts are based on closed theories and third concept is based only in analysis and therefore it isn’t optimal. Logical concept is corresponded of Leubnizian way of search the universal calculation (Trokhimchuck, 2014). One of founder of logical concept A. N. Whitehead refused from his concept and expresses an opinion about “organism” concept of mathematics (Whitehead, 1948).

The theory of foundation of mathematics must be based on its nature: analysis, synthesis and formalization of whatever chapter of knowledge. All three concepts of foundation of mathematics aren’t corresponded to its nature in toto (Ruzha, 1981).

Therefore, we must again to address to Pythagor, Newton, Volf and Euler. This problem now is one of central in modern cybernetics and computer science.

Foundation of mathematics must be corresponded to fourth rules of Newtonian conclusions and must be open system (Trokhimchuck, 2017). The mathematical formulation of this result is Gödel incompleteness theorem (Trokhimchuck, 2014).

Polymetric analysis (PA) (Trokhimchuck, 2014) was created according to these conditions (Trokhimchuck, 2017). Basic elements of polymetric analysis are: functional numbers (generalizing quadratic forms); generalizing mathematical transformations (only 15 minimal types); informative lattices; theory of information calculations and hybrid theory of systems (HTS) (Trokhimchuck, 2014). For the inner bonds in informative lattice parameter of connectedness was introduced. It allows expanding PA on all possible famous knowledge and science.

The basic elements and place PA in modern science may be represented in the next form (Fig. 1).

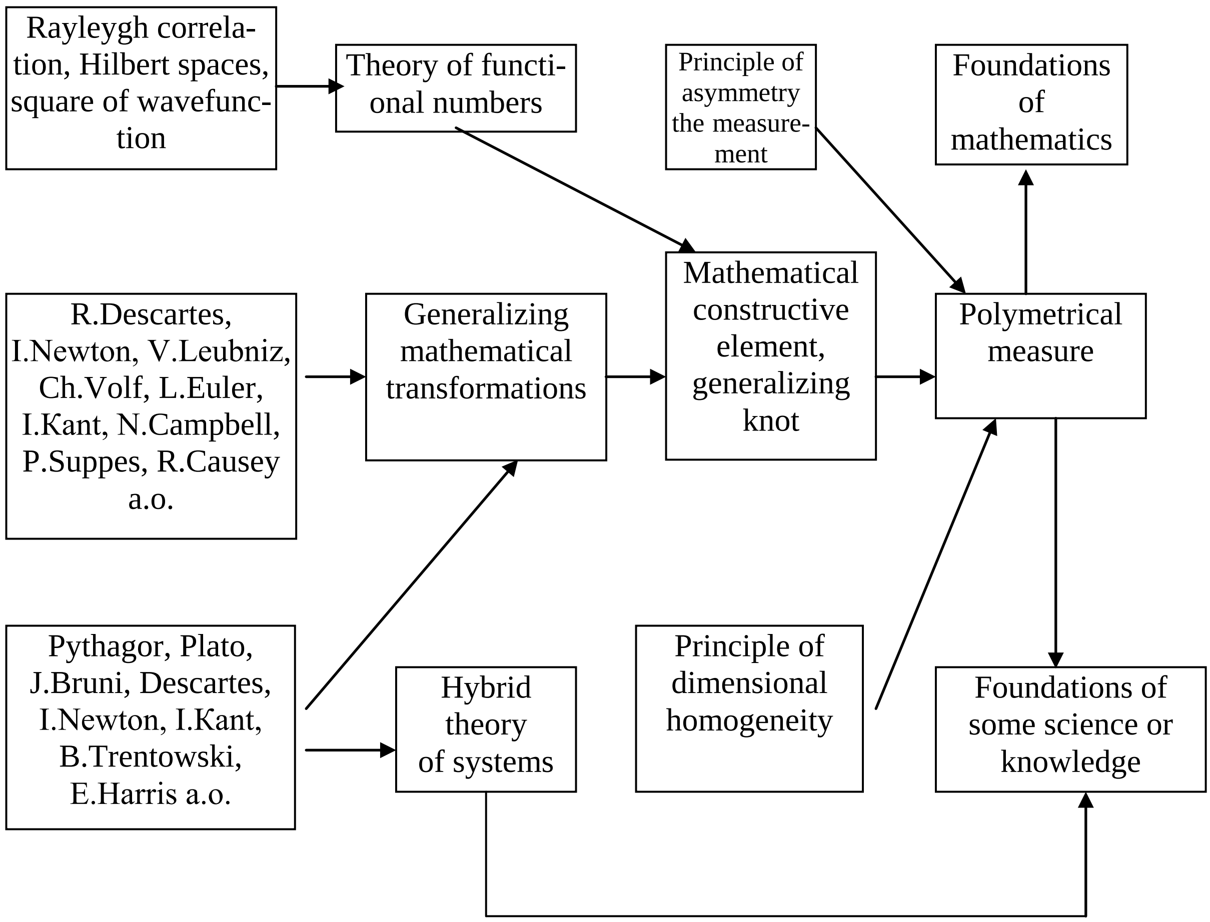


Fig. 1. Schema of polymetric method and its place in modern science (Trokhimchuck, 2014).

HTS has basic value for the foundations of mathematics. This theory is based on two criterions: criterion of reciprocity — principle of creation of proper formal system, and criterion of simplicity — principle of optimality of this creation. For “inner” bond of two elements of informative lattice a parameter of connectedness was introduced. Principle of optimal informative calculation is basic principle of the theory of informative calculations) is included in criterion of simplicity. The hybrid theory of systems was created on the basis the criteria of reciprocity and simplicity and parameter of connectedness. Only 10 minimal types of hybrid systems are existed. After including basic minimal types of generalizing mathematical transformations we have 150 minimal types of formalization the knowledge (Trokhimchuck, 2014). Hybrid theory of systems is open theory. Parameters of openness are number of generalizing mathematical transformations and parameter of connectedness. Thereby we have finite number of types of systems, but number of systems may be infinite. Hybrid theory of systems allows considering verbal and nonverbal knowledge with one point of view (Trokhimchuck, 2016). Roughly speaking this theory may be represented as variant of resolution S. Beer centurial problem in cybernetics (problem of complexity) (Trokhimchuck, 2016). According to Castey this problem must be resolved with help computation. PA is corresponded to this condition (Trokhimchuck, 2016).

Mathematical constructive element may be represented as generalizing knot of informative lattice. Generalizing mathematical transformations are classified as quantitative and qualitative, left and right. Calculative (quantitative) transformations are corresponded to primary measurement and qualitative transformations — to derived (secondary) measurements. It allows formalizing N. R. Campbell concept (Trokhimchuck, 2014) about primary and derived measurements. Basic principles of this theory are principle of asymmetry of measurement for calculative transformations and principle of dimensional homogeneity. This theory is optimal synthesis of all famous theories of measure and measurements and dimensional analysis (Trokhimchuck, 2017). N. R. Campbell concept is more general as "measuring" part of quantum mechanics. Therefore L.I. Mandelstam called Quantum Mechanics as science of derivative measurements (Trokhimchuck, 2014).

Modern science is the realization of the R. Bacon — Descartian concept "Science is so science, how many mathematics is in her" (Trokhimchuck, 2014). Development of modern science practically isn't possible without computers. Basic motto of modern computing science according A. Ershov is formalization of Canadian philosopher phrase "Everything, which go from head, is reasonable" (Trokhimchuck, 2016). Therefore, we must created theory, which is included these peculiarities of modern science. PA is corresponded to these conditions in full sense.

PA may be represented as universal theory of synthesis in Descartian sense (Trokhimchuck, 2014). For resolution of this problem we must select basic notions and concepts, which are corresponded to PA. The universal simple value is unit symbol, but this symbol must be connected with calculation. Therefore, it must be number. For the compositions of these symbols (numbers) in one system we must use system control and operations (mathematical operations or transformations). After this procedure we received the proper measure, which is corresponding system of knowledge and science.

PA may be represented as optimal synthesis three types of Plato numbers (mathematical, sensitive and ideal) in one system too (Trokhimchuck, 2014).

References

Bogachevskiy, Yu. (1937). Formalism and intuitionism in mathematics. *Transactions of Shevchenko Scientific Society, 31,* 81–98 (In Ukrainian).

Ruzha, I. (1981). *Foundation of mathematics*. Kiev: Vyshcha shkola. (In Russian)

Trokhimchuck, P. P. (2014). *Mathematical foundations of knowledge. Polymetrical doctrine.* 2-d ed. Lutsk: Vezha-Print. (In Ukrainian)

Trokhimchuck, P. P. (2016). Problem of Simplicity-Complexity in Modern Science and Polymetrical Analysis. *International Journal of Engineering Research and Management, 3*(7), 86–95.

Trokhimchuck, P. P. (2017). Theories of Open Systems: Realities and Perspectives. *International Journal of Innovative Science and Research Technology, 2*(4), 51–60.

Whitehead, A. N. (1948). *Science and the modern World.* New York: Pelican Mentor Books.

ПРО НЕОБХІДНІСТЬ РОЗВИТКУ КОМПЕТЕНТНОСТІ ЩОДО ОЦІНЮВАННЯ ЯКОСТІ ТЕСТУ ВИКЛАДАЧА ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, А. Ф. Дудко, Н. Р. Коновалова, Л. Б. Федорова

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ, Україна

a.dyx@ukr.net

У доповіді обґрунтовано необхідність розвитку компетентності щодо оцінювання якості тестів викладачів вищої математики. Наведено переваги комп’ютерного тестування з вищої математики. Наголошено на необхідності поєднання традиційних форм контролю знань та тестування.

Ключові слова: контроль знань, тестування, вища математика, компетентність, оцінювання якості тестів.

У часи модернізації системи освіти особливої актуальності набуває проблема покращення контролю знань студентів. Контроль знань є одним з найважливіших елементів навчального процесу. Його основне призначення — установити «зворотній зв’язок» для оцінки динаміки засвоєння навчального матеріалу, рівня володіння системою знань, умінь і навичок, і на основі їх аналізу внести відповіді корективи в організацію навчального процесу.

На сьогоднішній день до числа найбільш визнаних методів контролю знань у світовій практиці належить тестування. Починаючи з 2008 року, завдяки впровадженню системи ЗНО на національному рівні, використання тестів опинилося у фокусі освітянського інтересу. Тестування все ширше застосовується у вищій та середній школах під час підсумкового контроля, культура тестування стає більш розповсюдженою. Деякі освітні установи видають сертифікати на основі даних комп’ютерного тестування. Також зростає роль дистанційного навчання, у якому все більше тестування застосовується як форма контролю рівня знань студентів. У зв’язку з реформуванням вітчизняної освітньої галузі й упровадженням інформаційно-комп’ютерних технологій (ІКТ), які відповідають викликам сучасного інформаційного суспільства, особливого значення набуває комп’ютерне тестування.

Основними *перевагами комп’ютерного оцінювання навчальних досягнень* студентів є:

— автоматизація та оперативність обробки результатів тестування;

— прискорення зворотного зв’язку за результатами тестування, що дозволяє студенту самостійно виявляти прогалини у структурі своїх знань і вживати заходів до їх ліквідації;

— забезпечення об’єктивності оцінки;

— можливість регулярно поповнювати та модифікувати систему тестових завдань;

— звільнення викладача від виконання рутинних робіт.

При цьому тестування не слід розглядати як ідеальний і єдиний метод об'єктивного контролю знань. Тестування не заміняє й не скасовує традиційних форм педагогічного контролю, заснованих на безпосередньому спілкуванні викладача зі студентом. Для зростання ефективності навчального процесу тестування повинно не підміняти, а доповнювати традиційні форми контролю успішності.

Обмежене застосування тестування з вищої математики на технічних спеціальностях має місце у зв'язку з тим, що викладачі сприймають тести лише як певні психодіагностичні методики, більше придатні до гуманітарних наук. Це зумовлено недостатнім упровадженням математичної теорії, яка може забезпечити розробку надійних та валідних тестів.

Також спостерігається помилкове стереотипне уявлення викладачів про нібито елементарність процесу оцінювання знань студентів. Прихильність традиційних методів контролю, заперечення інновацій та недовіра до спроможностей тестування та його об'єктивності призводять до відмови викладачів від тестування, як засобу контролю знань.

В Україні спостерігається тенденція, коли у практичній діяльності з'являється величезна кількість псевдотестів та прикладів псевдотестування навчальних досягнень. Це пов'язано з низьким рівнем компетентності викладачів щодо розроблення та оцінювання якості тестів. Псевдотести наносять значну шкоду як іспитнику, так і викладачу. У першому випадку, іспитник отримує неправильні результати оцінювання його навчальних досягнень, у другому — некомпетентний у створенні тестів викладач зазнає не тільки морального, але і професійного краху. Звідси, у суспільстві формується хибне уявлення про тестування як методу оцінювання знань та зневіра в його можливостях.

Для застосування тестів як засобу контролю знань необхідною умовою є використання лише тих тестів, надійність, валідність та ефективність яких була підтверджена (Аванесов, 1994). При цьому викладачі, які розроблятимуть тести, повинні пройти відповідне навчання з метою розвитку компетентності щодо оцінювання якості тестів.

Розвиток компетентності викладача вищої математики щодо оцінювання якості тестів сприятиме:

- покращенню якості тестів з вищої математики;
- покращенню якості контролю знань студентів у цілому;
- підвищенню ефективності роботи викладача;
- покращенню навчальних досягнень студентів.

Отже, можна зробити висновок про необхідність розвитку компетентності викладача вищої математики щодо оцінювання якості тестів.

Список літератури

Аванесов, В. С. (1994). *Научные проблемы тестового контроля знаний*. Москва: Исслед. центр. пробл. кач. подгот. спец.

ПОКРОКОВІ ТЕСТИ З КУРСУ «МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОЇ ЕКОНОМІКИ»

І. В. Алєксєєва, І. В. Орловський, Ю. В. Сорокіна
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ, Україна
alexir1@ukr.net, i.v.orlovsky@gmail.com, vad_sorokin@rambler.ru

Доповідь присвячено покроковим тестам, їх особливостям та перевагам, які продемонстровано на прикладі розроблених тестових завдань у рамках курсу «Методи математичної економіки». Тести розроблені із застосуванням відкритої освітньої платформи Moodle.

Ключові слова: покрокові тести, дистанційні курси, Moodle, лінійне програмування, теорія ігор, методи математичної економіки.

Комп’ютерне тестування є одним із сучасних способів перевірки рівня підготовки студентів з математичних дисциплін і може успішно застосовуватись разом із традиційними формами контролю. На кафедрі математичного аналізу та теорії ймовірностей КПІ ім. Ігоря Сікорського існує багаторічний досвід складання та аналізу тестових завдань з усіх розділів вищої математики, які викладають для інженерно-технічних та економічних спеціальностей університету (Алєєксєєва та ін., 2010a, 2010б, 2013). У доповіді зосереджено увагу на новому типі так званих *покрокових тестів*, які дозволяють перевіряти не тільки відповідь на поставлене запитання чи задачу, а й проміжні кроки і проконтролювати практично весь процес розв’язання задачі. Такі тести розроблено для розділів «Елементи лінійного програмування та теорії ігор» дисципліни «Методи математичної економіки» для студентів-математиків, що навчаються за новою спеціалізацією «Страхова та фінансова математика». Тести розроблено з застосуванням відкритої освітньої (Open Source) системи управління навчанням Moodle та мови розмітки веб-сторінок HTML.

У рамках курсу вже були створено й апробовано контрольні роботи на основі тестів відкритого та закритого типів, які дозволяють оцінити мінімально необхідний рівень знань теоретичних основ та алгоритмів розв’язку задач з лінійного програмування та матричних ігор, уміння економічно інтерпретувати та аналізувати одержані результати. Детальний аналіз указаних тестових завдань проведено в Алєксєєва (2017). Але специфіка задач лінійного програмування та теорії ігор не дає можливості в повній мірі перевірити вміння та навики студентів у розв’язанні цих задач за допомогою стандартизованих тестових завдань, таких як, наприклад, тести відкритого та закритого типів. Крім того, традиційні контрольні роботи потребують від викладача значних витрат часу і зусиль, оскільки пов’язані з перевіркою великої кількості одноманітних обчислень. Тому виникає потреба в розробленні такого формату тестів, який міг би з одного боку замінити звичайні контрольні та розрахункові роботи, а з іншого — володів би всіма перевагами комп’ютерного тестування. Слід зауважити, що подібні тести виключають суб’єктивний характер оцінювання робіт, дозволяють отримати оцінку відразу після виконання комп'ютерної тестової роботи, а також дають можливість перегляду помилок та правильних відповідей по розв'язку задачі покроково. Таким чином, студент може відразу після виконання роботи проаналізувати свої помилки, що значно покращує навики в розв'язанні задач відповідного типу і сприяє засвоєнню матеріалу курсу. Приклад тестового завдання з розв'язування задачі лінійного програмування симплексним методом наведено на рис 1.

Розв'язати задачу лінійного програмування симплекс методом.

$$Z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 \rightarrow \max;$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1. \\ x_1 + x_2 + x_5 = 2 \end{cases}$$
$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}$$

Дана задача має початковий опорний план з наступним одиничним базисом (обрати правильну відповідь):

- $A_1,\ A_2,\ A_3$
- $A_2,\ A_3,\ A_4$
- $A_3,\ A_4,\ A_5$
- $A_1,\ A_4,\ A_5$

У Відповідності до Вашого вибору одиничного базису заповніть симплекс-таблицю 1-ї ітерації.

ВАЖЛИВО! В 1-й ітерації вектори базису у 1-му стовпці слід записувати у порядку зростання індексу

ІТЕРАЦІЯ № 1

Базис		C	C_j / $A0$	2 / $A1$	-1 / $A2$	3 / $A3$	-2 / $A4$	1 / $A5$	θ_i
	$\rightarrow$								
	$\rightarrow$								
	$\rightarrow$								
Δ_j				$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	

ІТЕРАЦІЯ № 2

Базис	C	C_j / $A0$	2 / $A1$	-1 / $A2$	3 / $A3$	-2 / $A4$	1 / $A5$
Δ_j							

Відповідь: Оптимальний план: $X = (\ ; \ ; \ ; \ ; \ )^T$, $Z_{\max} =$.

Отправить

Рис 1.

Покрокові тести покликані наблизити комп'ютерні тестові роботи до традиційних. Вони представляють собою послідовність тестів різних типів, побудованих так, щоб структурно відображати процес розв'язування поставленої задачі. Використання наведеного формату тестів потребує складання банку типових завдань однакової розмірності, однакової кількості ітерацій у процесі розв'язання й ретельної перевірки еталонного розв'язку. Головною складністю створення подібних тестів є індивідуальний підхід до кожної задачі, який вимагає окрім правильної постановки задачі, побудову такого алгоритму розв'язання задачі, який ураховував би обмеженості інструментарію обраної платформи по створенню тестів.

Список літератури

Алєксєєва, І. В. (2017). Про розробку тестових контрольних робіт з курсу «Методи математичної економіки». У *Дистанційна всеукраїнська наукова конференція «Математика у технічному університеті XXI сторіччя»,15—16 травня 2017 р., Краматорськ: Матеріали конф.* (С. 284—287). Краматорськ: ДДМА.

Алєксєєва, І. В., Гайдей, В. О., Диховичний, О. О. та ін. (2010б). Застосування математичних моделей тестів у комплекті дистанційної освіти «Вища математика». *Математичні машини та системи*, (4), 89—98.

Алєксєєва, І. В., Гайдей, В. О., Диховичний, О. О., Коновалова, Н. Р., & Федорова, Л. Б. (2010а). Застосування сучасних математичних моделей педагогічного тестування у формуванні та аналізі тестових завдань комплекту «Вища математика». *Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт*, *33*, 50—56.

Алєксєєва, І. В., Гайдей, В. О., Диховичний, О. О., Коновалова, Н. Р., Федорова, Л. Б., & Дудко, А. Ф. (2013). Про досвід застосування тестових контрольних робіт з вищої математики. У *Міжнародна науково-практична конференція «Математика в сучасному технічному університеті», 19—20 квітня 2013 р., Київ: Матеріали конф.* (с. 442—445). Київ: НТУУ «КПІ».

СТАНОВЛЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ШКОЛИ В ЛУЦЬКОМУ ПЕДАГОГІЧНОМУ ІНСТИТУТІ

О. П. Антонюк
Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна
antonjukoks@gmail.com

Робота присвячена описанню основних моментів становлення математичної школи в Луцьку в 50-х роках минулого століття. У ній йдеться про ключові чинники появи наукової математичної традиції на теренах фізико-математичного факультету педінституту та про внесок окремих осіб у розбудову математичної школи.

Ключові слова: математична школа, теорія функцій, чебишовські наближення, компакт, апроксимація.

Появу та розвиток окремих наукових шкіл важко підпорядкувати певним правилам чи закономірностям, однаковим для всіх випадків. Виникаючи часто завдяки одній людині чи ряду обставин, що сприяють об'єднанню зусиль багатьох людей в одне ціле, наукові спілки існують так довго, скільки є потреба у спільній роботі для подолання певних теоретичних чи прикладних проблем. Іноді традиції, закладені впродовж нетривалого часу, лишаються актуальними досить довго, утягуючи у вир діяльності нових членів, виховуючи все нові наукові кадри. Іноді одна непересічна особистість здатна змінити характер діяльності всього колективу, повести за собою, стати прикладом для наслідування. Такі наукові школи багатократно збільшують результативність роботи над розв'язанням викликів, ніж діяльність окремих осіб, а також здатні самовідновлюватись, визначаючи інтереси молодих вчених, залучаючи їх до спільної роботи. Тому історія виникнення та діяльності окремих наукових шкіл є багатим масивом для дослідження їх впливу на науку в цілому.

До появи математичної школи в Луцьку привів ряд позитивних чинників, серед яких і цілеспрямована робота керівництва факультету та інституту, і, звичайно, величезні організаторські здібності окремих вчених.

Заснований у 1940 році, Луцький учительський інститут вперше випустив спеціалістів у 1948 році. Очевидно, що діяльність інституту була спрямована перш за все на забезпечення вчителями шкіл регіону, відновлення нормальної роботи системи середньої освіти, поруйнованої війною. У той час на кафедрі математики працювало всього три викладачі: А. І. Костюк, П. І. Радченко та А. П. Завгородня. У найближчі роки викладацький склад став поповнюватися, але гостро постало питання організації наукової роботи. Ось як вказується у матеріалах збірника (Волинський державний університет імені Лесі Українки: 65 років, 2005, с. 111): «…із заснуванням учительського інституту математичну наукову культуру в Луцьку почали плекати на цілині. Ані математичного середовища, ні наукових математичних традицій у Луцьку в той час не було.» Тому очевидно, що поява в інституті в 1952 році Симона Ізраїлевича Зуховицького, відомого вже на той час математика, стала великим шансом для фізмату.

Треба сказати, що блискучий початок кар'єри Симона Ізраїлевича після закінчення екстерном (за півтора роки!) Київського інституту народної освіти, захисту кандидатської з теорії наближень функцій, активної педагогічної діяльності, сприяння перекладу українською мовою двох книг з теорії функцій дійсної змінної був перерваний війною, причому Зуховицький одразу в червні 1941 року добровольцем пішов на фронт. Йому довелось пережити полон, втечу та тривале переховування в окупованому Києві (Горбачук & Ескін, 2008). Удруге отримавши в 1943 році можливість працювати у виші (Київському університеті ім. Т. Г. Шевченка), Симон Ізраїлевич уже в 1950 році захищає докторську дисертацію з питань чебишовських наближень, розробляє класичну теорію чебишовських наближень на компакті.

Здібності свого молодого колеги високо оцінював видатний математик М. М. Боголюбов (член-кореспондент АН УРСР, професор, доктор фіз.-мат. наук), який був його безпосереднім начальником до війни, займаючи посаду декана механіко-математичного факультету Київського держуніверситету. Він у характеристиці на Зуховицького зауважував про математичні обдарування останнього, які виявились ще під час навчання, високо оцінював наукові результати, зазначаючи, що кандидатська дисертація містить ряд абсолютно нових та оригінальних результатів, а в період з 1938 до 1941 рік той опублікував аж 10 робіт з теорії функцій та функціонального аналізу.

Не зважаючи на ці заслуги, через тогочасну антисемітську політику влади у 1952 році Зуховицький лишається без роботи, тому сприяння колишньої студентки С. С. Калиновської щодо роботи в Луцьку було для Симона Ізраїлевича чи не єдиним реальним виходом із ситуації.

Перед новим співробітником керівництво Луцького інституту, крім звичних обов'язків, поставило завдання сприяти підготовці викладацьких кадрів для факультету та організувати наукову роботу. Цим Зуховицький займався з величезним успіхом, працюючи одразу в кількох напрямках. Звичайно, перш за все він залучав молодих викладачів та студентів до спільних наукових досліджень; організував науковий семінар; редагував статті до «Наукових записок Луцького педінституту»; сам проводив математичні дослідження та розробляв питання методики вищої школи. У трудовій угоді від 25 червня 1953 року між Луцьким педінститутом в особі М. М. Бабляка та С. І. Зуховицьким останній зобов'язувався також брати участь у підготовці та проведенні наукових конференцій, підготувати для науково-дослідної роботи не менше чотирьох випускників, керувати науковою роботою 1—2 асистентів кафедри. Цікавою вимогою до Симона Ізраїлевича було поставлено без згоди інституту в інших навчальних чи науково-дослідних закладах не працювати. А інститут зобов'язувався представити Зуховицького до звання професора, що й було зроблено. У довідці, поданій у Вищу Атестаційну Комісію від Луцького педінституту згадується, крім іншого, що за присвоєння звання Зуховицькому проголосували всі 14 членів ради. Відповідне рішення Вищої Атестаційної Комісії при міністерстві культури СРСР датоване 4 липня 1953 року.

Директор інституту М. М. Бабляк йшов назустріч побажанням Симона Ізраїлевича, сім'я якого лишилась у Києві і в наказі на зарахування вказано, що навчальне навантаження треба розподілити так, щоб три чверті його випадало на перший семестр, а ще чверть — на період літньої сесії на заочному відділенні. Це дало змогу Зуховицькому більше перебувати з рідними, і, водночас, не відволікаючись працювати над математичними дослідженнями, маючи під рукою можливості, яких не було в Луцьку (від знайомства з новими публікаціями до консультацій та співпраці з іншими вченими). Крім того, з 7 лютого 1953 року Симону Ізраїлевичу було надано творчу відпустку, після закінчення якої він вказав у звіті від 26 травня 1953 року, що підготував дві статті для друку в «Математичному збірнику» (Москва); одну — у «Наукових записках Луцького педінституту»; а також підготував до публікування роботу «Про одну геометричну задачу». Крім того, він працював у квітні у бібліотеці Математичного Інституту АН СРСР (Москва) з матеріалами з теорії апроксимації функцій і обговорював питання, пов'язані з науковою роботою, із провідними спеціалістами, зокрема, з М. М. Боголюбовим, С. М. Нікольським, Б. С. Стєчкіним.

Про активну участь в організації наукової роботи Луцького інституту свідчить і лист С. Зуховицького до директора М. Бабляка, в якому висловлюється сподівання на приїзд останнього в Київ аби вирішити ряд організаційних питань щодо видання наукових записок вузу. У цьому ж листі від 26.05.1953 року згадується про В. К. Дзядика, адже саме завдяки зусиллям С. Зуховицького вдалось подолати спротив у прийомі Владислава Кириловича на фізмат Луцького педінституту. Дослівно, Зуховицький стверджує у листі: «Дуже радий, що у нас буде працювати В. К. Дзядик і що Ви залучаєте ще кваліфікованих працівників. Можна буде навчальну та наукову роботу факультету підняти на таку висоту, що іншим буде завидно».

Симон Ізраїлевич підтримав В. Дзядика, якого допускали тільки до викладання у школі, ставлячи у вину перебування під час війни у полоні. Тим самим він сприяв злету самого Владислава Кириловича, який за п'ять років захистив і кандидатську, і докторську дисертації, створив і очолив відділ теорії функцій в Інституті математики НАН УРСР та вніс неоціненний вклад у розв'язання ряду математичних проблем та створення важливих методів досліджень (Зарицька та ін., 2009). Крім того, цим призначенням було закладено основи майбутньої математичної школи у Луцьку.

Треба зазначити, що в 1955 році Владислав Кирилович ледве не покинув Луцьк, бо отримав запрошення від Дніпропетровського держуніверситету. Тоді ректор Луцького педінституту Д.М. Цимбалюк через звернення до влади в собі першого секретаря Луцького обкому партії домігся покращення умов для В. К. Дзядика, розуміючи значення і важливість його роботи в Луцьку.

Серед учнів В.К. Дзядика знаходимо 10 докторів і 37 кандидатів фізико-математичних наук, серед яких — сім випускників Луцького педінституту, які стали аспірантами Владислава Кириловича та захистили кандидатські дисертації. Це В. І. Білий, Р. М. Ковальчук, О. І. Швай, П. Є. Антонюк, В. О. Панасович, Л. І. Філозоф, Л. Б Шевчук-Нестерович. В. К. Дзядик уже після переїзду в Київ часто повертався до Луцька, допомагаючи та співпрацюючи з викладачами факультету, разом організовуючи конференції та готуючи публікації. Наприклад, Д. М. Бушев досліджував проблематику, яку започаткував В. Дзядик щодо наближення періодичних функцій.

Значення впливу Владислава Кириловича переоцінити важко. Адже роботу, яку проводив С. Зуховицький, продовжив на його посаді В. К. Дзядик, а пізніше — його учні. Упродовж наступних десятиліть на фізматі Луцького педінституту підтримувались традиції математичних досліджень, сформовані ще за роботи В. Дзядика, учні намагались високо тримати планку, підняту своїм вчителем як у навчальній, так і в науковій роботі.

Окремо в контексті існування математичної наукової діяльності в Луцьку варто згадати науково-організаційну роботу, яку проводив професор В. Й. Горбайчук. Йому довелось у 90-х роках створювати й очолювати нову кафедру диференційних рівнянь та математичної фізики, керувати роботою студентів та аспірантів. Він любив відкривати для молоді в науці нові горизонти, відшукувати у студентів математичні здібності й таланти, розвивати їх. Його аспірантами були Н. Й. Падалко, О. М. Піддубний, С. Б Гембарська, Р. В. Товкач, які нині працюють на кафедрі свого вчителя.

У травні цього року була зустріч студентів з випускниками 1957 року, які оповідали про період навчання, викладачів (серед яких тепло згадували С.І. Зуховицького), власні професійні долі. До слова, якраз із ними навчався В. Й. Горбайчук. Так тісно переплелись долі різних поколінь математиків.

На сьогодні зв’язки з випускниками вузу, що працюють в Інституті математики НАН України, провідних вишах країни створюють базу та можливості подальшої наукової співпраці у різних галузях математичних досліджень. І тому на факультеті інформаційних систем, фізики і математики нашого вишу активно ведеться робота по відбору та заохоченню здібних студентів до наукової роботи, допомога у здійсненні власних кроків на цій нелегкому, але цікавому шляху. І важливо пам’ятати прізвища тих, хто першими закладав міцний фундамент у майбуття рідного факультету.

Список літератури

Волинський державний університет імені Лесі Українки: 65 років: *Рекламно-презентаційний збірник.* (2005). Луцьк: РВВ «Вежа».

Горбачук, В. І., & Ескін, Г. І. (2008). Семен Ізраїлевич Зуховицкий (до сторіччя від дня народження). *У світі математики*, *14*(4), 79—82.

Зарицька, З. В., Ковальчук, І. Р., Коренков, М. Є., Дзядик, С. Ю., Дзядик, Ю. В., & Філозоф, Л. І. (2009). Біографія і стислий огляд творчості члена-кореспондента НАНУ, заслуженого діяча науки і техніки, доктора фізико-математичних наук, професора Владислава Кириловича Дзядика. *Науковий вісник Волинського національного університету імені Лесі Українки. Розділ ІІІ. Історія фізики*, *18*, 80—96.

ЦИФРОВИЙ ІНФОРМАЦІЙНИЙ СУПРОВІД ОЦІНЮВАННЯ СТУДЕНТІВ

О. І. Баліна[1], І. С. Безклубенко[1], Ю. П. Буценко[2]

[1]Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ, Україна

[2]Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського», Київ, Україна

armchairdoc@ukr.net

Пропонується супроводження вивчення студентом навчального предмету числовою характеристикою певної структури. Розглянуто переваги такого методу. Для елементів вказаної числової характеристики наведено правила їх визначення.

Ключові слова: рейтингова система оцінювання, показник особистих досягнень, показник часової пунктуальності, показник стабільності засвоєння.

Після приєднання України до Болонської конвенції основою для оцінювання студентів став їх індивідуальний рейтинг. Він, як відомо, складається з балів, накопичених студентом протягом семестру та отриманих за виконання екзаменаційної чи залікової роботи (у разі, коли підсумкова оцінка не виставляється «автоматом») зрозуміло, що формальна реалізація такої процедури демонструє чимало недоліків. Відзначимо основні з них.

По-перше, суто адитивний характер рейтингу не дозволяє виділяти такі знання та уміння студента, які є критично важливими для засвоєння предмета і, відповідно, розглядаються як необхідні для отримання позитивної оцінки.

По-друге, набрана кількість балів не відображає повністю дотримання студентом графіка навчального процесу — виконання видів робіт, за які нараховуються бали, саме у встановлені строки (при цьому мається на увазі, звичайно, отримання ним позитивних оцінок за такі роботи).

По-третє, для створення об'єктивної характеристики роботи студента протягом семестру важливо враховувати стабільність його результатів, тобто те, наскільки вони коливаються протягом вивчення навчального матеріалу.

На наш погляд, саме врахування таких трьох позицій дозволяє при підсумковому контролі (проведенні екзамену чи заліку) максимально об'єктивно оцінити здобутки студента, а також проаналізувати загальну картину вивчення предмету в групі, на потоці, на факультеті.

По першому пункту слід зауважити, що стандартна форма положення про оцінювання студента на заліку (іспиті) не передбачає мультиплікативності, тобто, наприклад, не дає формальних підстав для не допуску до його здачі студента, який протягом семестру не зміг продемонструвати володіння таблицею похідних та правилами диференціювання. На практиці виявляється неможливим надати цьому показнику такої ваги (у балах), щоб просте підсумовування балів відобразило його принципову важливість для остаточної оцінки здібностей студента та його ставлення до предмету. На жаль, формальні міркування наразі майже ніколи не дозволяють ввести до РСО таку позицію як «колоквіум», що з усіх точок зору було б найкращим, на наш погляд, вирішенням проблеми.

По другому пункту, перш за все, слід констатувати неможливість стійкого засвоєння знань, умінь та навичок (а також — компетенцій!) при порушенні належного часового режиму, визначеного робочою навчальною програмою. При цьому має місце скорочення часу на вивчення частини розділів, непідготовленість до сприйняття поточного матеріалу через незасвоєння попереднього та інші негативні явища. Додатковою обставиною в такому випадку виступає ускладнення роботи викладачів (через неоднорідність аудиторії, необхідність багаторазового повторення контрольних заходів), що неминуче веде до зниження ефективності їх діяльності. Зауважимо, що інформація про кількість пропущених годин (аудиторних занять) та наявність для цього поважних причин, попри її важливість з адміністративної точки зору, не є істотною в даному випадку, як нам здається.

По третьому пункту зазначимо, що стабільність досягнутих результатів є само собою зрозумілою у випадках найкращих та найгірших студентів. Що ж стосується студентів проміжних категорій (а їх більшість), то для викладача завжди було і є важливим розрізнення «твердих» трієчників та «хорошистів» у порівнянні з перспективними у плані підвищення успішності студентами. Поточна успішність останніх вирізняється наявністю високих оцінок по окремих позиціях рейтингу.

Ураховуючи вищезазначене, нам здається раціональним запровадження паралельно із традиційною «табличною» інформацією про хід навчального процесу із предмету у групі, на потоці, факультеті, таких цифрових показників, що можуть бути названі «показниками особистих досягнень» студента — ПОД (або *personal achievements index*, PAI). Такий показник обов’язково має включати в цифровому вигляді наступні дані:

— «координати» студента (наприклад, номер залікової книжки чи студентського білета), що дозволяє визначити решту його персональних даних;

— «координати» предмета та забезпечення його викладання (випускна та забезпечуюча кафедри, місце в навчальному плані, викладачі, що ведуть заняття із предмету).

Зрозуміло, що ПОД повинен містити поточний (або проміжний перед екзаменом чи заліком, остаточний — після їх проведення) рейтинг студента. Він має обов’язково доповнюватись даними про максимально можливий для студента в даний час рейтинг та його місце в рейтингу групи (курсу) за набраними балами.

Що ж стосується вищезгаданих, додаткових показників, то перший з них (засвоєння «критичних» розділів) може бути відображений послідовністю нулів та одиниць (відповідно до встановленої попередньо наявності таких розділів). Для відображення другого, пропонується запровадити показник часової пунктуальності — ПЧП (*time punctuality index,* TPI), який може бути обчислений, наприклад, за формулою:

$$TPI = \sum_{k=1}^{n(t)} \left(\overline{t_k} - t_k \right),$$

де t_k — передбачена робочою навчальною програмою дата k-го контрольного заходу, $\overline{t_k}$ — реальна дата проходження його студентом з позитивною оцінкою, $n(t)$ — номер останнього контрольного заходу, проведеного до поточної дати. Таким чином, цей параметр навчальної діяльності студента демонструє сумарний час «прострочки» ним здавання розділів типового розрахунку чи курсової роботи, колоквіумів, виконання контрольних робіт тощо. Він може бути доповнений місцем студента в рейтингу групи (потоку), виведеному за його зростанням.

Нарешті, для характеристики стабільності навчальної діяльності студента може бути запропонований показник стабільності засвоєння — ПСЗ (Index of stability of assimilation — ISA), що обчислюється за формулою:

$$ISA = \sum_{k=1}^{n(t)} \left(\frac{\overline{N}}{N} - \frac{N_k - \overline{N}_k}{N_k} \right)^2,$$

де N_k — максимальна сума балів, що може бути набрана на k-му контрольному заході, $\overline{N_k}$ — реально набрана студентом у цьому випадку сума балів, $n(t)$ — було запроваджено раніше, $\overline{N}$ — загальна кількість набраних студентом балів, N — максимально можлива їх кількість, цей показник природно доповнюється місцем студента в рейтингу групи (потоку), сформованому за його зростанням.

Остаточно зауважимо, що на наш погляд, супроводження навчального процесу запровадженням для кожного студента такого цифрового супроводу, дозволить повноцінно інформувати як викладачів, так і адміністрацію про стан справ як кожного конкретного студента, так і у групі (потоці) в цілому.

Список літератури

Balyna, O., Bezklubenko, I., & Butsenko, Yu. (2017). Additional parameters are in informative providing of educational process. In *Fourth International Scientific-practical conference "Management of development of technologies", Ministry of education and science of Ukraine, Kyiv, 19–20 May 2017.* Київ: Київський національний університет будівництва і архітектури.

Бордовський, Т. А., Нестеров, А. А., & Трапицын, С. Ю. (2011) *Управление качеством образовательного процесса*. Санкт-Петербург: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена.

Золотухин, Ю. П., & Кряквина, И. Б. (2003) Рейтинговая система: конструирования и практика применения. *Высшая школа*, (6), 13—16.

ЗАСТОСУВАННЯ ДИСКРЕТНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА І Z-ПЕРЕТВОРЕННЯ В МАТЕМАТИЧНОМУ МОДЕЛЮВАННІ ІНЖЕНЕРНИХ ЗАДАЧ

Г. Г. Барановська[1], Л. В. Барановська[2]

[1]*Національний технічний університет України*
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ, Україна
[2]*ННК «ІПСА» КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна*
lesia@baranovsky.org

Розглядається можливість використання дискретного перетворення Лапласа і Z-перетворення в задачах автоматичного керування, в обробці сигналів, в задачах імпульсної техніки та до розв'язання різницевих рівнянь.

Ключові слова: перетворення Лапласа, Z-перетворення, дельта-функція, обернене перетворення Лапласа, дискретне перетворення Лапласа.

Обчислювальна математика є основою математичного моделювання та комп'ютерного розв'язання інженерних і наукових задач. У системах зв'язку носіями інформації є сигнали. Сигнал — це функція, що містить інформацію про фізичні властивості, стан або поведінку деякої фізичної системи і призначена для її передачі. У практиці комп'ютерного моделювання досить поширеними є задачі обробки сигналів. Мета обробки сигналів полягає в перетворення їх у форму зручну для передавання, сприйняття і подальшого використання їх інформаційних відомостей. Невипадкові моделі сигналів називають *детермінованими,* а випадкові описують стохастичними функціями. Сигнал називається *аналоговим,* якщо його функція є неперервною, зокрема, це мовні, музичні радіотрансляції, сигнал від мікрофона. Сигнал називають *дискретним,* якщо його функція є дискретною величиною. Дискретизовані у часі сигнали називають *цифровими.* Їх прикладами є сигнали сучасних систем зв'язку, зокрема цифрової телефонії, цифрового телебачення, мобільного зв'язку, комп'ютерних мереж тощо. При математичному моделюванні аналогових сигналів використовують ряди Фур'є, перетворення Фур'є, перетворення Лапласа, а також сплайни й системи ортогональних поліномів.

Методи комп'ютерної обробки сигналів зазвичай є цифровими. Перехід від аналогових до цифрових електричних систем дозволяє досягти більшої гнучкості в керуванні об'єктами, яка притаманна сучасним програмним засобам. На сьогодні майже всі побутові електронні пристрої є цифровими, що значно спрощує організацію їхньої роботи та керування ними.

Дискретні сигнали отримують з аналогових за допомогою функції дискретизації, в якості якої використовують одиничну *функцію Гевісайда*

$$\eta(t) = \left[\begin{array}{l} 1,\ t > 0, \\ 0,\ t < 0, \end{array}\right.$$

а також *дельта-функцію Дірака*

$$\delta(t) = \begin{bmatrix} 0, \ t \neq 0, \\ \infty, \ t = 0, \end{bmatrix} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) d\tau = 1.$$

Функція $\eta(t)$ диференційовна для всіх t, крім $t = 0$.

Лоран Шварц у 1945 р. запровадив поняття розподілу, що є узагальненням поняття функції, яке виявилось досить ефективним в інженерних науках і дозволило уникнути багатьох труднощів класичного математичного аналізу. Такий підхід дозволяє знаходити узагальнену похідну функцій, недиференційовних у класичному розумінні. Для узагальнення похідної $\eta(t)$ при $t = 0$ розглянемо послідовність

$$\eta_n(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} nt,$$

яка апроксимує одиничну функцію

$$\lim_{n \to \infty} \eta_n(t) = \eta(t).$$

Ця послідовність виражається через дельта-функцію наступним чином:

$$\frac{d}{dt}\left(\eta_n(t)\right) = \frac{n}{\pi\left(n^2 t^2 + 1\right)} = \delta_n(t), \quad \lim_{n \to \infty} \delta_n(t) = \delta(t), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(t) dt = 1.$$

Значення $\delta_n(0) = \frac{n}{\pi}$ – це нескінченний імпульс при $n \to \infty$, площа від якого рівна одиниці незалежно від n. Такий підхід дозволяє визначити дельта-функцію як узагальнену похідну одиничної функції

$$\frac{d}{dt}\left(\eta(t)\right) = \delta(t).$$

Зображення Лапласа для дельта-функції і її похідних дорівнюють відповідно

$$\delta(t) \to 1, \ \delta'(t) \to p, \ \ \delta''(t) \to p^2, \ldots, \delta^{(n)}(t) \to p^n.$$

Ці функції називають *імпульсними функціями 1-го, 2-го, ...,* $(n+1)$-го порядків.

У курсі математичного аналізу вивчають перетворення Лапласа і його широке застосування до розв'язання лінійних диференціальних рівнянь, інтегральних рівнянь типу згортки, рівнянь математичної фізики з частинними похідними, до яких зводяться задачі перехідних процесів в електротехніці, радіотехніці, імпульсній техніці, теорії автоматичного керування, задачі проектування тощо.

Важливою перевагою перетворення Лапласа є те, що операції над зображеннями є зазвичай простішими, ніж над оригіналами, розв'язання диференціальних рівнянь і їх систем зводиться до розв'язання алгебраїчних рівнянь. При зображенні кусково-неперервних функцій використовується одинична функція $\eta(t)$ і теорема запізнення. У математичних моделях цифрових сигналів використовують *дискретне перетворення Лапласа і* Z *–перетворення* (Мартыненко, 1990). Імпульсна система реагує лише на дискретні значення неперервної функції. Імпульсний елемент перетворює неперервний вхідний сигнал $f(t)$ у *решіткову* функцію: обчислюють її значення у деякі рівновіддалені дискретні моменти часу nT, $n = 0,1.2,\ldots$. Площі окремих прямокутників зберігають своє значення, а при переході через nT змінюються стрибкоподібно, тобто від функції беруться миттєві вибірки $f(nT)$. У таких випадках під імпульсом у техніці вважають явище, при якому деяке значення функції обчислюють і потім утримують сталим протягом скінченного проміжку часу. Оптимальне значення періоду квантування (дискретизації) T вибирають залежно від спектру функції згідно теореми Котельникова — Найквіста:

$$T \leq \frac{\pi}{\omega},$$

де ω — найбільша частота, вище якої модуль частотної характеристики функції можна вважати рівним нулеві.

Щоб скористатись перетворенням Лапласа для дискретної решіткової функції, розгляньмо розподіл $f^*(t)$, який отримуємо як результат дії імпульсів $\delta(t - nT)$, що в моменти $t = nT$ здійснюють вибірку $f(nT)$:

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\delta(t - nT).$$

Оскільки дельта-функція дорівнює нулеві, крім точок $t = nT$, то її перетворення Лапласа дорівнює

$$\int_0^{\infty} \delta(t - nt)e^{-pt}dt = e^{-pnT}.$$

Для решіткових функцій $f(nT)$ *дискретне перетворення Лапласа* (*ДПЛ*), *або* D*-перетворення* визначають наступним чином:

$$D[f(nT)] = F^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)e^{-pnT}, \quad p = s + i\sigma. \tag{1}$$

Ряд (1) збіжний при $\operatorname{Re} p > s_0$, s_0 — показник росту функції $f(t)$. Функція $F^*(p)$ має період $2\pi i$, у смузі

$$s > s_0, \ -\frac{\pi}{T} \leq \operatorname{Im} p \leq \frac{\pi}{T}$$

є однозначною аналітичною функцією.

Обернене дискретне перетворення Лапласа знаходять за формулою

$$f(nT) = D^{-1}\left[F^*(p)\right] = \frac{T}{2\pi i}\int\limits_{a-\frac{i\pi}{T}}^{a+\frac{i\pi}{T}} F^*(p)e^{pnT}dp,\ a > s_0.$$

Будемо користуватись знаком відповідності: $f(nT) \div F^*(p)$.

Для знаходження $f(nT)$ використовують теорію лишків:

$$f(nT) = \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Re}s[F^*(p)e^{pnT}, p_k],$$

де p_k — полюси функції.

Наведімо приклади D-зображень деяких функцій.

Приклад 1. $\eta(nT) \div \sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-pnT} = \dfrac{e^{pT}}{e^{pT}-1}$.

Приклад 2. $e^{\alpha nT} \div \sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{\alpha nT}e^{-pnT} = \dfrac{e^{pT}}{e^{pT}-e^{\alpha T}}$.

Для складніших решіткових функцій ДПЛ є громіздким, а тому на сьогодні воно витіснене з практики простішим Z-перетворенням.

Z*-перетворення* решіткової функції отримують з ДПЛ заміною $z = e^{pT}$:

$$Z\left[f(nT)\right] = F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)z^{-n}.$$

Позначають $f(nT) \div F(z)$.

Властивості Z-перетворень (Деч, 1971):

1) (лінійності) $k_1 f(nT) + k_2 g(nT) \div k_1 F(z) + k_2 G(z)$;

2) (запізнення) $f((n-m)T) \div z^{-m}F(z),\ 0 < m < n$;

3) (випередження) $f((n+k)T) \div z^k\left(F(z) - \sum\limits_{r=0}^{k-1} f(rT)z^{-r}\right),\ k = 1,2,\ldots$;

4) (загасання) $F(\alpha z) \div \alpha^{-n} f(nT),\ \alpha \neq 0, \alpha \in \mathbb{C}$;

5) (диференціювання зображення) $z\dfrac{dF}{dz} \div -nTf(nT)$;

6) (згортка) $\sum\limits_{k=0}^{n} f(kT)g((n-k)T) \div F(z)G(z)$;

7) (суми функцій) $\sum_{k=0}^{n-1} f(kT) \div \frac{1}{z-1} F(z), \quad \sum_{k=0}^{n} f(kT) \div \frac{z}{z-1} F(z);$

8) (скінченні різниці)

$$\Delta f(nT) \div (z-1)F(z) - f(0)z,$$

$$\Delta^2 f(nT) \div (z-1)^2 F(z) - f(0)z(z-1) - z\Delta f(0),$$

$$\Delta^k f(nT) \div (z-1)^k F(z) - z\sum_{m=0}^{k-1} (z-1)^{k-m-1} \Delta^m f(0), \; k = 2,3,4,\ldots$$

Як і в перетворенні Лапласа тут відразу враховуються початкові умови. Якщо

$$\left| f(nT) \right| < Me^{s_0 n},$$

то $F(z)$ аналітична в області $|z| > e^{s_0}$, включаючи $z = \infty$.

Зображення $F(z)$ є, як правило, дробово-раціональною функцією від z, у якій степінь чисельника не перевищує степеня знаменника, наприклад,

$$Z[\eta(nT)] = \frac{z}{z-1}, \quad Z[nT] = \frac{Tz}{(z-1)^2}, \quad Z\left[e^{-\alpha nT}\right] = \frac{z}{z-e^{-\alpha T}}.$$

Обернене Z-перетворення знаходять за формулою:

$$f(nT) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C F(z) z^{n-1} dz, \quad n \geq 1.$$

Замкнений контур C містить всі особливі точки функції $F(z)$. Оригінал відновлюють розкладом раціонального дробу на елементарні або через лишки:

$$f(nT) = \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Res}[F(z) z^{n-1}, z_k],$$

де z_k — особливі точки.

Якщо відоме розвинення функції $F(z)$ у ряд Лорана в околі точки $z = \infty$:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n},$$

то коефіцієнти ряду визначають обернене перетворення $f(nT) = a_n$.

Z-перетворення є досить ефективним при розв'язанні різницевих рівнянь.

Приклад 3. Розгляньмо різницеве рівняння другого порядку

$$y_{n+2} + c_1 y_{n+1} + c_0 y_n = f_n, \; \text{ПУ}: y(0) = y_0, \, y(1) = y_1.$$

Знаходимо його Z-перетворення

$$z^2\left(Y(z) - y_0 - y_1 z^{-1}\right) + c_1 z\left(Y(z) - y_0\right) + c_0 Y(z) = F(z),$$

$$Y(z) = \frac{1}{p(z)}F(z) + y_0\frac{z(z + c_1)}{p(z)} + \frac{y_1 z}{p(z)},$$

де $p(z) = z^2 + c_1 z + c_0$.

Нехай

$$p(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2),\ \alpha_1 \neq 0,\ \alpha_2 \neq 0,\ c_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2),\ c_0 = \alpha_1\alpha_2.$$

Тоді, використовуючи лишки, одержуємо розв'язок рівняння:

при $\alpha_1 \neq \alpha_2$

$$y_n = \sum_{r=2}^{n} f_{n-r}\frac{\alpha_1^{r-1} - \alpha_2^{r-1}}{\alpha_1 - \alpha_2} - y_0 c_0\frac{\alpha_1^{n-1} - \alpha_2^{n-1}}{\alpha_1 - \alpha_2} + y_1\frac{\alpha_1^{n} - \alpha_2^{n}}{\alpha_1 - \alpha_2},$$

при $\alpha_1 = \alpha_2$

$$y_n = \sum_{r=2}^{n} f_{n-r}(r - 1)\alpha_1^{r-2} - y_0 c_0(n - 1)\alpha_1^{n-2} + y_1 n\alpha_1^{n-1}.$$

Приклад 4. Знайдемо загальний член послідовності чисел Фібоначчі:

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ \ldots,$$

у якій кожний наступний член дорівнює сумі двох попередніх. Її загальний член є розв'язком різницевого рівняння

$$y_{n+2} - y_{n+1} - y_n = 0,\ \ y_0 = 0,\ \ y_1 = 1.$$

Застосуємо Z-перетворення:

$$y_n \div Y(z),\ \ y_{n+1} \div zY(z),\ \ y_{n+2} \div z^2\left(Y(z) - z^{-1}\right) \Rightarrow$$

$$Y(z) = \frac{z}{z^2 - z - 1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{z - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{z - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}}.$$

Скористаємось прикладом 2 і теоремою запізнення:

$$e^{\alpha n} \div \frac{z}{z - e^{\alpha}},\ \ a^n = e^{n\ln a} \div \frac{z}{z - a},\ a^{n-1} \div \frac{1}{z - a}.$$

Знаходимо загальний член послідовності

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Список літератури

Деч, Г. (1971). *Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования*. Москва: Наука.

Мартыненко, В. С. (1990). *Операционное исчисление.* Київ: Вища школа.

ДО ПИТАННЯ ПРО ЗАМІНУ ЗМІННИХ У ПОТРІЙНОМУ ІНТЕГРАЛІ

П. П. Баришовець[1], М. М. Білоцький[2], А. С. Муранов[1], О. С. Муранов[1]

[1]Національний авіаційний університет, Київ, Україна

[2]Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ, Україна

pbar@ukr.net

Наводиться варіант основної ідеї доведення теореми про заміну змінних у потрійному інтегралі.

Ключові слова: потрійний інтеграл, заміна змінної, регулярне відображення.

Максимально повна можлива реалізація міжпредметних зв’язків у навчальних програмах і підручниках з вищої математики — один із засобів підвищення ефективності вищої освіти. Постійна увага методичної науки до розвитку міжпредметних зв’язків — один з важливих напрямів дидактичного вдосконалення викладання курсу вищої математики. У межах одного розділу і, тим більше, у межах окремої теми розділу курсу вищої математики різноманітні зв’язки реалізовані в результаті розвитку математики як науки та вдосконалення методики вивчення окремих тем математики. Але зв’язки між різними розділами й напрямами у процесі вивчення всієї вищої математики сьогодні реалізовані недостатньо. Фрагменти інформації, зв’язок між якими не відчувається, розуміються і запам’ятовуються гірше. З урахуванням цього міжпредметні зв’язки між різними напрямами курсу вищої математики (наприклад, алгебри й геометрії, алгебри й математичного аналізу тощо), на нашу думку, заслуговують на увагу під час викладання курсу вищої математики. Розгляд питання про заміну змінних у потрійному інтегралі в курсі математичного аналізу пов’язаний з певними методичними труднощами. Здебільшого при його розгляді жертвують строгістю заради доступності викладу. Інший шлях полягає в накладанні додаткових обмежень на функції, які реалізують заміну змінних (див., наприклад, Грималюк та ін. (2004)).

Пропонується варіант більш тісного зв’язку теорії матриць та визначників з математичним аналізом при одночасній спробі зняти додаткове обмеження, що полягає в неперервній диференційовності оберненого відображення. У якості допоміжних тверджень використовуються властивості регулярних відображень просторових областей і, зокрема, теорема 5.1 (Грауэрт та ін., 1971). Доведення цієї теореми, узяте для випадку $n = 3$, записується на матричній мові й використовує звичайні означення неперервності й диференційовності функції.

Нагадаємо, що *областю* називають усяку зв’язну відкриту множину.

Означення. Нехай задано область $H \subset \mathbb{R}^3$. Відображення $F : H \to \mathbb{R}^3$, задане системою функцій

$$\left.\begin{array}{l} u = f_1\left(\overline{x}\right) \\ v = f_2\left(\overline{x}\right) \\ w = f_3\left(\overline{x}\right) \end{array}\right\} \qquad (1)$$

де $\overline{x} = \left(x, y, z\right) \in H$, називають *регулярним* в області H, якщо функції f_1, f_2 і f_3 мають в області H неперервні частинні похідні першого порядку за x, y та z, причому *визначник Остроградського — Якобі* (*якобіан* відображення (1)):

$$I_F\left(\vec{x}\right) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} & \dfrac{\partial f_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} & \dfrac{\partial f_2}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial x} & \dfrac{\partial f_3}{\partial y} & \dfrac{\partial f_3}{\partial z} \end{vmatrix}$$

відмінний від нуля в цій області H.

Розглянемо спочатку простіші властивості регулярних відображень.

Лема 1. *Регулярне відображення неперервне.*

Лема 2. *Якобіан $I_F\left(\overline{x}\right)$ регулярного відображення (1) в області H є знакосталою (додатною або від'ємною) неперервною функцією в цій області.*

Лема 3. *Нехай H — просторова область. Якщо відображення $F : H \to E \subset \mathbb{R}^3$ взаємно однозначне й регулярне, то обернене відображення $F^{-1} : E \to H$ неперервне.*

Лема 4. *Образ $E = F\left(H\right)$ просторової області H при взаємно однозначному й регулярному відображенні $F : H \to \mathbb{R}^3$ є областю.*

Можна довести такі теореми.

Теорема 1. *Нехай H — просторова область. Якщо відображення $F : H \to E \subset \mathbb{R}^3$ взаємно однозначне і регулярне, то і зворотне відображення $F^{-1} : E \to H$ взаємно однозначне й регулярне.*

Теорема 2. *Нехай H — просторова область. Якщо відображення $F : H \to E \subset \mathbb{R}^3$ взаємно однозначно й регулярно переводить область H у декартових координатах $\left(x, y, z\right) \in H$ на область E в координатах $\left(u, v, w\right) \in E$, то*

$$\iiint\limits_H F\left(x,\ y,\ z\right) dxdydz = \iiint\limits_E F\left(x\left(u,v,w\right), y\left(u,v,w\right), z\left(u,v,w\right)\right)\left|J\right| dudvdw,$$

де J — якобіан перетворення.

Приклад 1 (Давыдов та ін. (1964, с. 143, задача № 2339). Обчислити інтеграл $\iiint\limits_V e^{xyz} x^2 y dxdydz$, де

$$V=\left\{(x,y,z): x\ge 0,\ y\ge 1,\ z\ge 1,\ xyz\le 1\right\}=\left\{(x,y,z):\ y\ge 1,\ z\ge 1,\ 0\le x\le \frac{1}{yz}\right\}.$$

□ Заміна змінних $x=u,\ y=\dfrac{u+v}{u},\ z=\dfrac{u+v+w}{u+v}$ визначає регулярне перетворення з якобіаном, який у внутрішніх точках області

$$U=\left\{(u,v,w): 0\le u\le 1,\ v\le 1-u,\ w\le 1-u-v\right\}$$

має значення

$$J=\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}=\begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -vu^{-2} & u^{-1} & 0 \\ -w(u+v)^{-2} & -w(u+v)^{-2} & (u+v)^{-1} \end{vmatrix}=\frac{1}{u(u+v)}>0.$$

Це перетворення відображає

$$V=\left\{(x,y,z):\ y\ge 1,\ z\ge 1,\ 0\le x\le \frac{1}{yz}\right\}$$

у множину

$$U=\left\{(u,v,w): 0\le u,\ 0\le v,\ 0\le u+v+w\le 1\right\}=\left\{(u,v,w): 0\le u\le 1,\ v\le 1-u,\ w\le 1-u-v\right\}.$$

Заданий інтеграл, який у старих змінних зводиться до обчислення невласних повторних інтегралів

$$\iiint\limits_V e^{xyz}x^2y\,dxdydz=\int\limits_1^{+\infty}dz\int\limits_1^{+\infty}ydy\int\limits_0^{1/yz}e^{xyz}x^2dx,$$

після застосування заміни змінних набуває простішого вигляд і легко обчислюється:

$$\iiint\limits_V e^{xyz}x^2y\,dxdydz=\iiint\limits_U e^{u\left(\frac{u+v}{u}\right)\left(\frac{u+v+w}{u+v}\right)}u^2\frac{u+v}{u}\frac{1}{u(u+v)}dudvdw=$$

$$=\iiint\limits_U e^{u+v+w}dudvdw=\int\limits_0^1 du\int\limits_0^{1-u}dv\int\limits_0^{1-u-v}e^{u+v+w}dw=\int\limits_0^1 du\int\limits_0^{1-u}\left(e-e^{u+v}\right)dv=$$

$$=\int\limits_0^1\left(e^u-eu\right)du=\left.\left(e^u-\frac{eu^2}{2}\right)\right|_0^1=e-\frac{e}{2}-1=\frac{e-2}{2}.$$

Отже, $\iiint\limits_V e^{xyz}x^2y\,dxdydz=\dfrac{e-2}{2}$.■

Приклад 2 (Демидович, 1977, с. 385, задача № 4100). Інтеграл Діріхле

$$\iiint\limits_V x^py^qz^r(1-x-y-z)^s\,dxdydz\quad (p>0,q>0,r>0,s>0),$$

де $V=\{(x,y,z):0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x, 0\le z\le 1-x-y\}$ — замкнена множина, що є трикутною пірамідою, обмеженою площинами:

$$x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1,$$

після застосування регулярного перетворення

$$x+y+z=u,\ y+z=uv,\ z=uvw$$

(як показано в посібнику Ляшко та ін. (1977), с. 517—518) також спрощується і набуває вигляду

$$\iiint\limits_V x^p y^q z^r \left(1-x-y-z\right)^s dxdydz=$$

$$=\left(\int\limits_0^1 u^{p+q+r+2}\left(1-u\right)^s du\right)\left(\int\limits_0^1 v^{q+r+1}\left(1-v\right)^p dv\right)\left(\int\limits_0^1 w^r\left(1-w\right)^q dw\right)=$$

$$=\mathrm{B}\left(p+q+r+3,\ s+1\right)\mathrm{B}\left(q+r+2,\ p+1\right)\mathrm{B}\left(r+1,\ q+1\right)=$$

$$=\frac{\Gamma\left(p+1\right)\Gamma\left(q+1\right)\Gamma\left(r+1\right)\Gamma\left(s+1\right)}{\Gamma\left(p+q+r+s+4\right)},$$

де $\mathrm{B}(x,y)$ та $\Gamma\left(x+1\right)$ $\Gamma(x+1)$ бета- та гама-функція Ейлера, відповідно.

Список літератури

Грималюк, В. П., Кухарчук, М. М., & Ясінський, В. В. (2004). *Вища математика.* Ч. 2. Київ: Віпол.

Грауэрт, Г., Либ, И., & Фишер, В. (1971). *Дифференциальное и интегральное исчисление.* Москва: Мир.

Давыдов, Н. А., Коровкин, П. П., & Никольский, В. Н. (1964). *Сборник задач и упражнений по математическому анализу*. Москва: Просвещение.

Демидович, Б. П. (1977). *Сборник задач и упражнений по математическому анализу*. Москва: Наука.

Ляшко, И. И., Боярчук, А. К., Гай, Я. Г., & Головач, Г. П. (1977). *Математический анализ в примерах и задачах.* Киев: Вища школа.

ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧНИКІВ ТИПУ ВАНДЕРМОНДА

В. О. Білий[1], О. Г. Білий[2]

[1]*Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна*

Національний технічний університет України

[2]*«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ, Україна*

valeri_y@ukr.net, belyi.oleksandr@gmail.com

Розглянуто приклади обчислення визначників Вандермонда, використовуючи визначений інтеграл.

Ключові слова: визначник Вандермонда, теорема Вієта, теорема Лапласа.

Розглянемо класичну задачу *відновлення* многочлена

$$P_{n-1}(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}$$

за його n значеннями в різних точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $x_k \neq x_m$ при $k \neq m$, $P_{n-1}(x_k) = y_k$, $k = \overline{1,\ n}$.

Для розв'язання цієї задачі складаємо систему n лінійних рівнянь з n невідомими $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, а саме:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_{n-1} x_1^{n-1} = y_1 \\ a_0 + a_2 x_2 + \ldots + a_{n-1} x_2^{n-1} = y_2 \\ \hdashline a_0 + a_1 x_n + \ldots + a_{n-1} x_n^{n-1} = y_n \end{cases}$$

Користуючись формулами Крамера, маємо

$$a_l = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^{n} y_k A_{kl} = \frac{\Delta_l}{\Delta},$$

де Δ — головний визначник системи, A_{kl} — алгебраїчне доповнення елемента k-го рядка та $(l+1)$-го стовпчика визначника Δ, Δ_l — визначник, який отримаємо з Δ заміною $(l+1)$-го стовпчика на стовпчик вільних членів $(y_1, y_2, \ldots, y_n)^{\mathrm{T}}$. Тут

$$k = \overline{1,\ n},\ l = \overline{0,\ \ n-1},\ A_{kl} = (-1)^{k+l+1} \Delta_{kl},\ \Delta_{kl} = M_{kl}$$

— відповідний мінор, $\Delta = V_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — визначник Вандермонда n-го порядку.

Якщо з обчисленням визначника Вандермонда за відомою формулою немає проблем:

$$\Delta = V_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \hdashline 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le k < j \le n} (x_j - x_k),$$

то для визначників Δ_{kl} справа дещо складніша. Їх обчислення пов'язано з *визначниками типу Вандермонда*, тобто такими визначниками певного порядку, які утворені з визначника Вандермонда більш високого порядку, шляхом викреслювання одного або більшої кількості стовпчиків та відповідної кількості рядків. Розгляньмо, для прикладу, найпростіший з них, а саме:

$$D_s = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{s-1} & x_1^{s+1} & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{s-1} & x_2^{s+1} & \dots & x_2^n \\ \hdashline 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{s-1} & x_n^{s+1} & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

— це визначник n-го порядку, утворений з визначника Вандермонда $(n+1)$-го порядку, у якого відсутній стовпчик із x_k^s та відповідний рядок. Нагадаємо класичний метод його обчислення. Розглянемо

$$V_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_n, z) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \hdashline 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \\ 1 & z & z^2 & \dots & z^n \end{vmatrix},$$

який обчислюємо двома способами, а саме:

1) як визначник Вандермонда з використанням теореми Вієта;

2) за наслідком з теореми Лапласа, розкладаючи його по елементах останнього рядка.

Прирівнюючи коефіцієнти при z^s, отримуємо шуканий визначник

$$D_s = \sigma_{n-s} \prod_{1 \le k < j \le n} (x_j - x_k),$$

де σ_{n-s}—це сума всіх можливих добутків чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$, узятих за $n-s$.

Пропонуємо *ще один цікавий метод* обчислення визначників типу Вандермонда. У випадку визначника D_s, він ґрунтується на застосуванні формули:

$$\int_0^{2\pi} e^{i(k-s)x} dx = \begin{cases} 0\ , & \text{при } s \ne k, \\ 2\pi, & \text{при } s = k, \end{cases} \quad (i^2 = -1).$$

Детальніше, маємо, використовуючи лінійність інтеграла та властивості визначників:

$$(-1)^{n+s} D_s = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^s & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^s & \dots & x_2^n \\ \hdashline 1 & x_n & \dots & x_n^s & \dots & x_n^n \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} =$$

$$
= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-isx}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^s & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^s & \dots & x_2^n \\ \hdashline 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^s & \dots & x_n^n \\ e^0 & e^{ix} & (e^{ix})^2 & \dots & (e^{ix})^s & \dots & (e^{ix})^n \end{vmatrix} dx =
$$

$$
= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-isx}\prod_{k=1}^{n}(e^{ix} - x_k)\prod_{1\le k<j\le n}(x_j - x_k)dx =
$$

$$
= \frac{1}{2\pi}\prod_{1\le k<j\le n}(x_j - x_k)\int\limits_0^{2\pi} e^{-isx}(e^{ix} - x_1)(e^{ix} - x_2)\dots(e^{ix} - x_n)dx = \left|\begin{matrix}\text{за теоремою}\\ \text{Вієта}\end{matrix}\right| =
$$

$$
= \frac{1}{2\pi}\prod_{1\le k<j\le n}(x_j - x_k)\cdot\int\limits_0^{2\pi} e^{-isx}(e^{inx} - \sigma_{n-(n-1)}e^{i(n-1)x} + \sigma_{n-(n-2)}e^{i(n-2)x} +
$$

$$
+ \dots + (-1)^{n+s}\sigma_{n-s}e^{isx} + \dots + (-1)^n\sigma_n e^0)dx =
$$

$$
= \frac{(-1)^{n+s}}{2\pi}\sigma_{n-s}\prod_{1\le k<j\le n}(x_j - x_k)\int\limits_0^{2\pi} e^{-isx}e^{isx}dx = (-1)^{n+s}\sigma_{n-s}\prod_{1\le k<j\le n}(x_j - x_k),
$$

звідки і випливає, що

$$
D_s = \sigma_{n-s}\prod_{1\le k<j\le n}(x_j - x_k).
$$

Вертаючись тепер до системи n лінійних рівнянь, обчислімо

$$
\Delta_{kl} = M_{kl},\ k = \overline{1,\ n},\ l = \overline{0,\ \ n-1}
$$

одним із розглянутих методів, маємо:

$$
\Delta_{kl} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{l-1} & y_1 & x_1^{l+1} & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{l-1} & y_2 & x_2^{l+1} & \dots & x_2^{n-1} \\ \hdashline 1 & x_{k-1} & x_{k-1}^2 & \dots & x_{k-1}^{l-1} & y_{k-1} & x_{k-1}^{l+1} & \dots & x_{k-1}^{n-1} \\ 1 & x_k & x_k^2 & \dots & x_k^{l-1} & y_k & x_k^{l+1} & \dots & x_k^{n-1} \\ 1 & x_{k+1} & x_{k+1}^2 & \dots & x_{k+1}^{l-1} & y_{k+1} & x_{k+1}^{l+1} & \dots & x_{k+1}^{n-1} \\ \hdashline 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{l-1} & y_n & x_n^{l+1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}_{n-1} =
$$

$$
= (x_n - x_1)\cdot(x_n - x_2)\cdot\dots\cdot(x_n - x_{k-1})(x_n - x_{k+1})\cdot\dots\cdot(x_n - x_{n-1})\cdot
$$

$$
\cdot(x_{n-1} - x_1)\cdot\dots\cdot(x_{n-1} - x_{k-1})\cdot(x_{n-1} - x_{k+1})\cdot\dots\cdot(x_2 - x_1)\sigma_{(n-1)-l}.
$$

Тоді $A_{kl} = (-1)^{k+l+1}\Delta_{kl}$ та після відповідних скорочень обчислюємо a_l за формулою:

$$a_l = \frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n} y_k A_{kl} =$$

$$= (-1)^{n+l+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k\sigma_{(n-1)-l}}{(x_k - x_1)\cdot\ldots\cdot(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdot\ldots\cdot(x_k - x_n)},$$

де $\sigma_{(n-1)-l}$ — сума всіх можливих добутків по $(n-1)-l$ з $n-1$ чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n$; $l = \overline{0,\ \ n-1}$.

Розглянемо тепер інші визначники типу Вандермонда, наприклад $(0 \le s < \tau \le n+1)$:

$$D_{s,\tau} = \left|\begin{matrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{s-1} & x_1^{s+1} & \ldots & x_1^{\tau-1} & x^{\tau+1}_1 & \ldots & x_1^{n+1} \\ 1 & x_2 & \ldots & x_2^{s-1} & x_2^{s+1} & \ldots & x_2^{\tau-1} & x^{\tau+1}_2 & \ldots & x^{n+1}_2 \\ \hline 1 & x_n & \ldots & x_n^{s-1} & x_n^{s+1} & \ldots & x_n^{\tau-1} & x_n^{\tau+1} & \ldots & x_n^{n+1} \end{matrix}\right|_n,$$

це визначник, утворений з $V_{n+2}(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, v)$, шляхом викреслення двох стовпчиків x_k^s та x_k^τ та двох останніх рядків u^μ та v^μ, $0 \le \mu \le n+1$. Як і раніше, з одного боку, за теоремою Лапласа розкладу за двома останніми рядками, маємо:

$$V_{n+2} = \ldots \ \ + (-1)^{(n+2)+(n+1)+(s+1)+(\tau+1)} D_{s,\tau}\begin{vmatrix} u^s & u^\tau \\ v^s & v^\tau \end{vmatrix} + \ldots \ \ =$$

$$= \ldots \ \ (-1)^{s+\tau+1} D_{s,\tau}(u^s v^\tau - v^s u^\tau) + \ldots \qquad (1)$$

З іншого боку,

$$V_{n+2} = \prod_{1 \le k < j \le n+2}(x_j - x_k),\ x_{n+1} = u,\ x_{n+2} = v,$$

тобто:

$$V_{n+2} = V_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\cdot(u - x_1)(u - x_2)\times\ldots$$

$$\times(u - x_n)\cdot(v - x_1)(v - x_2)\cdot\ldots\cdot(v - x_n)(v - u) =$$

$$= V_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)P_n(u)\cdot P_n(v)\cdot(v - u) = \prod_{1 \le k < j \le n}(x_j - x_k)\cdot P_n(u)P_n(v)\cdot(v - u).$$

Розгляньмо добуток

$$P_n(u)P_n(v)\cdot(v - u) = (v^{n+1} - \sigma_1 v^n + \sigma_2 v^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-\tau+1}\sigma_{n-\tau+1}v^\tau + \ldots +$$

$$+(-1)^{n-s+1}\sigma_{n-s+1}v^s + \ldots + (-1)^n\sigma_n v)(u^n - \sigma_1 u^{n-1} + \ldots + (-1)^{n-\tau}\sigma_{n-\tau}u^\tau + \ldots +$$

$$+(-1)^{n-s}\sigma_{n-s}u^s + \ldots + (-1)^n\sigma_n) - (u^{n+1} - \sigma_1 u^n + \ldots + (-1)^{n-\tau+1}\sigma_{n-\tau+1}u^\tau + \ldots +$$

$$+(-1)^{n-s+1}\sigma_{n-s+1}u^s + \ldots + (-1)^n\sigma_n u)(v^n - \sigma_1 v^{n-1} + \ldots +$$

$$+(-1)^{n-\tau}\sigma_{n-\tau}v^\tau + \ldots + (-1)^{n-s}\sigma_{n-s}v^s + \ldots + (-1)^n\sigma_n) =$$

$$= \left| \text{коефіцієнт при } u^s v^\tau - v^s u^\tau \right| =$$

$$= \ldots + (-1)^{s+\tau+1}(\sigma_{n-s} \cdot \sigma_{n-\tau+1} - \sigma_{n-\tau} \cdot \sigma_{n-s+1})(u^s v^\tau - v^s u^\tau) + \ldots \qquad (2)$$

Із (1) і (2), маємо:

$$(-1)^{s+\tau+1} D_{s,\tau} = (-1)^{s+\tau+1} V_n(\sigma_{n-s} \cdot \sigma_{n-\tau+1} - \sigma_{n-\tau} \cdot \sigma_{n-s+1}),$$

або

$$D_{s,\tau} = \prod_{1 \le k < j \le n} (x_j - x_k)(\sigma_{n-s} \cdot \sigma_{n-\tau+1} - \sigma_{n-\tau} \cdot \sigma_{n-s+1}).$$

Наприклад, при $s = n-1,\ \tau = n$, маємо:

$$D_{s,\tau} = D_{n-1,n} = \prod_{1 \le k < j \le n} (x_j - x_k)(\sigma_1^2 - \sigma_2 \cdot \sigma_0),$$

де

$$\sigma_0 = 1,\ \sigma_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n,\ \sigma_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n.$$

Тепер обчислімо $D_{s,\tau}$ іншим методом:

$$(-1)^{n+s+2}(-1)^{n+\tau+3} D_{s,\tau} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^s & \ldots & x_1^\tau & \ldots & x_1^{n+1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^s & \ldots & x_2^\tau & \ldots & x_2^{n+1} \\ \hdashline 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^s & \ldots & x_n^\tau & \ldots & x_n^{n+1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} e^{-isx} \int_0^{2\pi} e^{-i\tau y} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^s & \ldots & x_1^\tau & \ldots & x_1^{n+1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^s & \ldots & x_2^\tau & \ldots & x_2^{n+1} \\ \hdashline 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^s & \ldots & x_n^\tau & \ldots & x_n^{n+1} \\ e^0 & e^{ix} & (e^{ix})^2 & \ldots & (e^{ix})^s & \ldots & (e^{ix})^\tau & \ldots & (e^{ix})^{n+1} \\ e^0 & e^{iy} & (e^{iy})^2 & \ldots & (e^{iy})^s & \ldots & (e^{iy})^\tau & \ldots & (e^{iy})^{n+1} \end{vmatrix} dxdy =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{\Omega: \begin{cases} 0 \le x \le 2\pi \\ 0 \le y \le 2\pi \end{cases}} e^{-i(sx+\tau y)} \prod_{1 \le k < j \le n} (x_j - x_k) \prod_{k=1}^{n} (e^{ix} - x_k) \prod_{k=1}^{n} (e^{iy} - x_k)(e^{iy} - e^{ix}) dxdy =$$

$$= \begin{vmatrix} e^{ix} = u \\ e^{iy} = v \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \prod_{1 \le k < j \le n} (x_j - x_k) \iint\limits_{\Omega} e^{-i(sx+\tau y)} (P_{n+1}(v) P_n(u) - P_{n+1}(u) P_n(v)) dxdy =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \prod_{1 \le k < j \le n} (x_j - x_k) \iint_{\Omega} (0 + e^{-i(sx+\tau y)} u^s v^\tau ((-1)^{n-s} \sigma_{n-s} \cdot (-1)^{n-\tau+1} \sigma_{n-\tau+1} -$$

$$-(-1)^{n-s+1} \sigma_{n-s+1} (-1)^{n-\tau} \sigma_{n-\tau}) dxdy =$$

$$= \frac{(-1)^{s+\tau+1}}{4\pi^2} \prod_{1 \le k < j \le n} (x_j - x_k) \iint_{\Omega} (\sigma_{n-s} \sigma_{n-\tau+1} - \sigma_{n-\tau} \sigma_{n-s+1}) e^0 dxdy =$$

$$= \frac{(-1)^{s+\tau+1}}{4\pi^2} \prod_{1 \le k < j \le n} (x_j - x_k)(\sigma_{n-s} \sigma_{n-\tau+1} - \sigma_{n-\tau} \sigma_{n-s+1}) \cdot 4\pi^2 =$$

$$= (-1)^{s+\tau+1} \prod_{1 \le k < j \le n} (x_j - x_k)(\sigma_{n-s} \sigma_{n-\tau+1} - \sigma_{n-\tau} \sigma_{n-s+1}),$$

Звідки знову

$$D_{s,\tau} = \prod_{1 \le k < j \le n} (x_j - x_k)(\sigma_{n-s} \sigma_{n-\tau+1} - \sigma_{n-\tau} \sigma_{n-s+1}).$$

На закінчення, пропонуємо читачеві розглянути також інші варіанти обчислення визначників типу Вандермонда, наприклад $D_{s,\,\tau,\,r}$, де

$$0 \le s < \tau < r \le n + 2,$$

використовуючи відповідні кратні інтеграли.

Список літератури

Курош, А. Г. (1971). *Курс высшей алгебры*. Москва: Наука.

Проскуряков, И. В. (1984). *Сборник задач по линейной алгебре*. Москва: Наука.

Фаддєєв, Д. К., & Сомінський, І. С. (1971). *Збірник задач з вищої алгебри.* Київ: Вища школа.

ОСОБЛИВОСТІ СТВОРЕННЯ НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНОГО КОМПЛЕКСУ З ФУНКЦІОНАЛЬНОГО АНАЛІЗУ ДЛЯ МАЙБУТНІХ УЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ ТА ІНФОРМАТИКИ

Д. Є. Бобилєв

Криворізький державний педагогічний університет, Кривий Ріг, Україна

dmytrobobyliev@gmail.com

Науково обґрунтувано доцільність створеного навчально-методичного комплексу з функціонального аналізу, спрямованого на формування загальних і фахових компетентностей майбутнього вчителя математики та інформатики. Підсумовано результати створення навчально-методичного комплексу з дисципліни. Зазначено рекомендації щодо його використання.

Ключові слова: функціональний аналіз, навчально-методичний комплекс, професійна спрямованість навчання.

Предметом курсу «Функціональний аналіз» є простори функцій та їх відображення. Функціональний аналіз як самостійний розділ математики склався на початку минулого століття в результаті узагальнення конструкцій математичного аналізу, лінійної алгебри та геометрії. Вивчення функціонального аналізу характерно для математичних спеціальностей класичних університетів. Але й у педагогічних ВНЗ цей курс включено до навчальних планів спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика) з додатковою спеціальністю 014.09 Середня освіта (Інформатика). Освітня програма бакалаврату, за вказаними спеціальностями, передбачає вивчення елементів функціонального аналізу. Зазвичай це базова частина фундаментального циклу, час вивчення курсу складає один семестр, кількість аудиторних годин невелика.

Рамки навчального часу, прикладна спрямованість і рівень базової підготовки сучасних студентів педагогічних ВНЗ не дозволяють їм засвоїти таку складну математичну дисципліну з позицій класичного підходу, який передбачає фундаментальність і самодостатність подачі суто теоретичного матеріалу. Для майбутніх вчителів математики та інформатики необхідно акцентувати прикладну роль функціонального аналізу, що зводиться до аналітичного обґрунтування ефективності застосування чисельних методів.

Серед опублікованих навчальних ресурсів недостатня частина таких, що ставлять і вирішують схожу методичну проблему. Наприклад, підручники Треногіна (2007), Лебедєва (2005) орієнтовані на прикладні спеціальності. Однак, вони занадто об’ємні, складні (особливо Треногин (2007)) і, хоча висвітлюють функціональний аналіз з точки зору чисельних методів, проходять не повністю шлях від ідеї до розрахункової формули, що ускладнює їх використання в педагогічному ВНЗ. Потрібна істотна адаптація вказаних підручників.

У задачниках з функціонального аналізу не прийнято акцентувати ні обчислювальну, ні навіть алгоритмічну компоненту й тим більше не прийнято активно залучати комп’ютерні технології. В існуючих збірниках переважають теоретичні задачі. Переважна більшість таких задач є антиподами типових розрахунків. Утіленням такого підходу є збірник Кірілова та Гвішіані (1988), рекомендований для класичних університетів, проте в тій чи іншій мірі всі задачники з функціонального аналізу тяжіють до занурення у формально-логічний апарат. При постановці навчальних завдань майбутнім учителям математики та інформатики, як мінімум, слід було б змінити форму подачі традиційних задач: перейти від абстрактних до конкретних просторів, норм, операторів і від задач на доведення до більш типових, алгоритмічних обчислень і побудов. Цей шлях реалізований у практикумі Білоруського державного університету (Антоневич и др., 2003), хоч і не до кінця: в асортименті завдань не вистачає найпростіших однокрокових вправ, націлених на відпрацювання елементарних інструментів дисципліни.

Для вирішення вказаних проблем проведено науково-методичне дослідження й розроблено комплекс із двох навчальних посібників: конспект лекцій Бобилєв (2016) і збірник задач Бобилєв (2017) з функціонального аналізу для педагогічних ВНЗ. Сформулюємо основні концепції, покладені в основу цієї розробки:

— адаптація навчального матеріалу до рівня підготовки й аналітичних здібностей студентів;

— культивування прикладної складової дисципліни, яка реалізується поєднанням функціонального аналізу та обчислювальної математики;

— модернізація курсу під використання обчислювальних засобів (прикладних математичних пакетів).

Конспект лекцій містить короткі теоретичні відомості про основні модулі функціонального аналізу: теорія стискуючих операторів, теорія рядів Фур'є в гільбертовому просторі й теорія лінійних операторів. Причому з розгляду виключені деякі складні конструкції з суто академічним значенням, які не мають наочного застосування в обчислювальній практиці.

Наприклад, виключено багато елементів топології й усі суміжні з ними теореми, поняття спряженого простору й оператора, теорема Банаха про обернені оператори, теорема про доповнення метричного простору (залишена на рівні формулювання), теореми про продовження оператора, функціоналу та інші.

Поняття обмеженості лінійного оператора, ключове для більшості підручників з функціонального аналізу, замінено на еквівалентне йому поняття неперервності. Причина заміни полягає в тому, що традиційне означення обмеженого лінійного оператора не відповідає прийнятому в курсі математичного аналізу означення обмеженої функції, тоді як універсальне поняття неперервності для оператора в метричних просторах узгоджується з неперервністю функції з курсу математичного аналізу. Неперервність оператора визначена як здатність зберігати збіжність послідовності, оскільки це означення найпростіше й використовується в чисельних методах.

Курс обходиться тільки описом інтеграла Лебега, включеним заради розгляду просторів Лебега, і будується без опори на теорію міри, оскільки даний розділ бакалаврського курсу математичного аналізу в більшості педагогічних

ВНЗ не викладається для майбутніх вчителів математики та інформатики, і його ніяк не можна розглянути в невеликому курсі функціонального аналізу.

Виклад функціонального аналізу орієнтується на два базових завдання, які стоять на перетині фундаментальної і прикладної математики: апроксимацію функцій і розв'язання операторних рівнянь. У задачах на апроксимацію функцій за допомогою ортогональних систем порушуються питання точності і якості наближення. Під час розв'язання операторних рівнянь виділені на перший план питання збіжності чисельних методів і контролю точності наближеного розв'язку. Проблема єдиності розв'язку теж не опускається з поля зору. А ось проблема існування, нелегка для сприйняття, відведена на другий план і в деяких місцях замовчується.

У кожному модулі конспекту лекцій лінія викладу теоретичного матеріалу проходить шлях від запровадження основних понять до доведення ключових теорем, що мають прямий вихід до широко відомих чисельних методів. Ці «виходи», як правило, описані в останніх параграфах модулів. Для їх складання була проаналізована база з декількох десятків існуючих підручників як з функціонального аналізу, так і з різних розділів обчислювальної математики.

Перший модуль присвячений метричним просторам і стискуючим операторам. Він завершується оглядом задач, у яких можливе застосування принципу стискуючих операторів і методу простих ітерацій для наближеного розв'язання рівнянь різного типу.

Другий модуль представляє теорію рядів Фур'є в гільбертовому просторі. Значну увагу приділено різноманітності ортогональних систем: тригонометричних, поліноміальних, систем ступінчастих функцій. Модуль завершується описом зв'язку ряду Фур'є з завданням апроксимації й поясненням таких істотних особливостей, як характер збіжності ряду Фур'є, специфіка тригонометричної і поліноміальної апроксимацій, відмінності між рядами Фур'є та Тейлора.

Третій модуль присвячений теорії лінійних операторів і охоплює суміжні питання оптимізації функціоналу. Виклад завершується описом варіаційного і проекційного підходу до наближеного розв'язання лінійних операторних рівнянь. Детально розібрані метод найменших квадратів і метод Гальоркіна. Крім того, у третьому модулі є й інші виходи до обчислювальної математики, представлені в різних параграфах: пошук розв'язку рівняння у вигляді ряду Фур'є за власними функціями оператора, розв'язок інтегрального рівняння методом заміни ядра на вироджене, наближена мінімізація функціоналу методом Рітца.

Таким чином, курс не претендує на повноту теорії, але робить акцент на алгоритмічну складову функціонального аналізу. Виклад теоретичних конструкцій спрощено до елементарного при спробі зберегти класичну якість даної дисципліни і не упустити ніде того, що закладено в цей розділ математики. Абстрактна енергія функціонального аналізу істотно приборкана в порівнянні з академічним курсом, але витримана в такому обсягу, щоб її можна було б обґрунтовано застосовувати.

Збірник задач містить великий банк різнорівневих завдань з великою кількістю варіантів і розроблений для зручного розподілу балів при оцінюванні: наприклад, від 1 бала за найпростішу однокрокову задачу до 10 балів за багатокроковий розрахунок з реалізацією в математичному пакеті.

Розглянутий навчально-методичний комплекс конспект лекцій — збірник задач дозволяє й частково змушує реорганізувати навчальний процес з дисципліни «Функціональний аналіз».

Доцільне використання комп'ютерів і кваліфікована інтерпретація результатів повинні стати однією з основних цілей навчання не тільки функціонального аналізу, але взагалі математики в педагогічному ВНЗ. Запропонований збірник задач дає можливість, з одного боку, повторити раніше набуті навички розв'язання різних задач, з іншого боку, дозволяє студентам навчитись використовувати математичні пакети. Збірник задач включає 58 задач (по 20 варіантів кожної), усі завдання мають зразки або вказівки до розв'язання й посилання на конспект лекцій.

У навчально-методичному комплексі залишились не відпрацьовані специфічні проблеми, пов'язані з відмінностями схоластичної (навчальної, книжкової) і комп'ютерної математики, які вимагають уваги на початковому етапі експлуатації математичних пакетів. У збірнику Бобилєв (2017) недостатньо задач, що показують типові труднощі, які виникають у студентів, коли комп'ютер видає відповідь у вигляді символьного виразу, який може містити спеціальні функції, багато з яких студент бачить вперше. Прикладні математичні пакети вимагають набагато більш відповідального ставлення до роботи з типами даних (числами, змінними, виразами, функціями), ніж це прийнято у швидких розрахунках на папері.

Список літератури

Антоневич, А. Б., Ваткина, Е. И., Мазель, М. А., & Радыно, Я. В. (2003). *Функциональный анализ и интегральные уравнения: Лабораторный практикум: Учеб. пособие для матем. спец. вузов*. Минск: БГУ.

Бобилєв, Д. Є. (2016). *Функціональний аналіз*. Кривий Ріг: Dionat.

Бобилєв, Д. Є. (2017). *Функціональний аналіз: збірник задач*. Кривий Ріг: Dionat.

Кириллов, А. А., Гвишиани, А. Д. (1988). *Теоремы и задачи функционального анализа: Учебное пособие для вузов*. (2-е издание, перераб. и доп.). Москва: Наука.

Лебедев, В. И. (2005). *Функциональный анализ и вычислительная математика*. (4-е изд.). Москва: Физматлит.

Треногин, В. А. (2007). *Функциональный анализ: Учебник для студ., обуч. по спец. «Математика» и «Прикладная математика»*. Москва: Физматлит.

ПРОФЕСІЙНО ОРІЄНТОВАНА ПРОПЕДЕВТИЧНА СИСТЕМА МАТЕМАТИЧНОЇ ОСВІТИ МОЛОДШИХ СПЕЦІАЛІСТІВ-ПРОГРАМІСТІВ

Т. Ю. Бохонова[1], О. Л. Лещинський[2], В. В. Тихонова[2], О. П. Томащук[3], В. А. Гроза[3]

[1]Київський науково-природничий ліцей № 145, Київ, Україна

[2]Промислово-економічний коледж Національного авіаційного університету, Київ, Україна

[3]Національний авіаційний університет, Київ, Україна

valentina.groza@gmail.com

Розглянуто сучасну теорію пропедевтики, основні чинники, що визначають зміст і особливості пропедевтики у процесі надання математичної освіти молодшим спеціалістам-програмістам. Досліджено систематизацію підрівнів пропедевтичної системи.

Ключові слова: пропедевтика, ступенева освіта, теорія розвивального навчання.

У процесі інтеграції в європейський (зокрема, освітній) простір, в українській математичній освіті прослідковуються об’єктивні тенденції реформування, розвитку й саморозвитку, які формуються під впливом соціально-економічних і науково-технічних тенденцій розвитку українського суспільства. У свою чергу, поява, розвиток і зникнення певних тенденцій пояснюється системою закономірностей. Вивчення й розуміння системи закономірностей допомагає розуміти, систематизувати і кластеризувати процеси розвитку й самоорганізації математичної освіти. Сучасні тенденції розвитку математичної освіти автори статті уявляють у вигляді схеми оптимізаційного процесу (рис. 1).

У сучасних педагогічних теоріях зазначається, що концепція ступеневої освіти ґрунтується на об’єктивних необхідних суттєвих нелінійних зв’язках, які, з одного боку, відображають сутність процесу пізнання, а з іншого — визначають принципи і правила організації. Зміст і характер закономірностей при переході від одного етапу ступеневої освіти до іншого, ускладнюючись, спирається на більш прості, раніше пройдені ступені пізнання. Концепція такої освіти включає наступні характеристики:

1) констатаційну (признання відмінності ступеневої освіти від самоосвіти та інших форм навчання);

2) феноменологічну (вивчення феномену ступеневої освіти, визначення основних цілей і методів оцінювання їх досягнення);

3) методологічну (наявність концепції ступеневої освіти).

Базисом концепції ступеневої освіти в межах теорії розвивального навчання є закон динамічного розвитку. Ступенева освіта як розвивальна система складається з послідовно зв’язних етапів, кожен з яких реалізує умови для переходу на вищий рівень розвитку. Наступність окремих етапів розвитку системи сприяє збереженню й розвитку основних елементів цілісної системи. Спадкоємні зв’язки як у змісті математичної освіти, так і в організації видів навчально-пізнавальної діяльності, забезпечує, зокрема, пропедевтика, яка є необхідною дидактичною умовою ступеневої освіти. Спадкоємні зв’язки здійснюються на основі об’єктивних законів і правил адаптації та трансформації змісту математичної освіти.

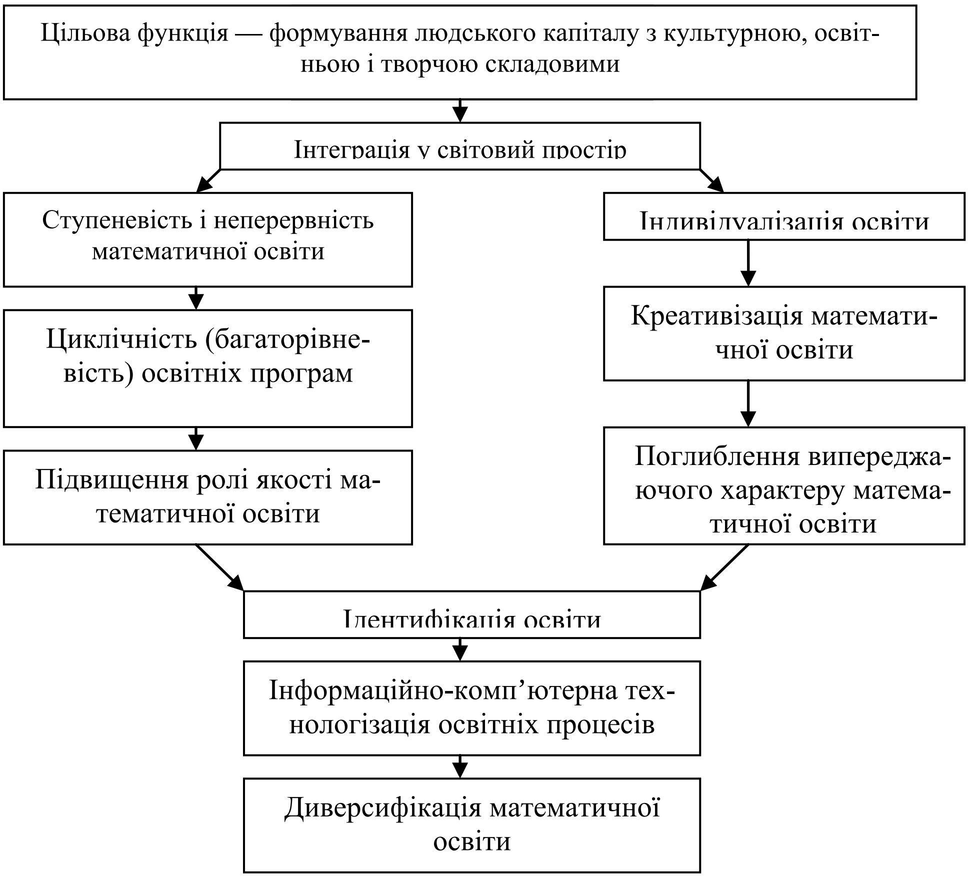


Рис. 1. Сучасні тенденції розвитку математичної освіти

Будь-який перехід до нового етапу ступеневої освіти пов’язаний з об’єктивними закономірностями й чинниками еволюції не тільки змістовної та процесуальної сторін навчання, але й психолого-педагогічною, яку співвідносять із процесами адаптації. Будь-який перехід (трансформація) системи пов’язаний зі змінами методики навчання й психолого-віковими особливостями студента. У зв’язку з цим випереджальний характер адаптації проявляється, зокрема, у трансформації структурних компонентів системи, що, у свою чергу, впливає на ефективність освітнього процесу. Пропедевтика як процес попереднього навчання має пряме відношення як до адаптації, так і трансформації освітніх систем, які є методологічною основою ступеневого освітнього процесу.

Одним з найяскравіших основоположників сучасної теорії пропедевтики автори вважають Марину Володимирівну Потапову. Згідно її теоретичних засад (Потапова, 2008), питання цілісності, єдності, неперервності у ступеневій освіті є актуальним у зв’язку з переосмисленням основних її компонентів. Вивчення закономірностей функціонування й розвитку освітнього процесу взагалі і математичного зокрема, можливе на основі провідних принципів навчання: науковості, послідовності, системності, наступності, фундаменталізації та інтеграції. Вони визначають розвиток освітньої системи, який передбачає шляхи від простого до складного, від сутностей першого порядку до сутностей вищих порядків, а реалізація математичної освіти здійснюється від прикладів, фактів, понять до ідей, концепцій, теорій, а від них — до нових математичних знань.

Таблиця 1

Чинники, що визначають зміст і особливості пропедевтики у процесі надання математичної освіти молодшим спеціалістам-програмістам

Чинники	**Обумовленість**
Методологічний	Зв'язками методів наукового й навчального пізнання, принципів і методів психолого-педагогічного дослідження
Логічний	Причинно-наслідковими, індуктивними й дедуктивними, аналітичними й синтетичними зв'язками
Інформаційний	Зв'язками структурних елементів знань, фактів, понять, законів, теорій
Процесуальний	Зв'язками компонентів процесу навчання, методів, форм, засобів, видів навчально-пізнавальної діяльності, форм контролю знань, умінь, навичок, сформованих компетенцій
Часовий	Зв'язками концентрів навчання: класичного й випереджального
Еволюційний	Зміною парадигм освіти, модельним характером навчального пізнання, загальним характером методів дослідження й оновленням змісту математичної освіти

Сутність пропедевтики як складної дидактичної категорії розкривається за допомогою чинників, що визначають зміст і властивості пропедевтичної системи, основних принципів побудови пропедевтичної системи (наступність, персоналізація), підходів (інтегративного, системного, індивідуального, особистісно орієнтовного), функцій управління пропедевтичною системою (регулятивно-адаптаційною, регулятивно-корекційною, мотиваційно-змістовною, планово-прогностичною, контрольно-діагностичною), формами пропедевтики (адаптацією, корекцією, відстроченим повторенням), дидактичними засобами. Кожний з компонентів, у свою чергу, є складною підсистемою. Згідно з рівневою структурою пропедевтики М. В. Потапової, елементи пропедевтичної системи математичної освіти молодших спеціалістів-програмістів можна представити табл. 2.

Система пропедевтичної підготовки, як необхідна дидактична умова ступеневої математичної освіти, включає спадкоємні зв'язки як змістовного, так і процесуального характеру навчання. При цьому процес самостійної пізнавальної діяльності здійснюється на основі принципу персоналізації. Тому однією з основних вимог реалізації пропедевтики в системі ступеневої освіти є виконання двох принципів: спадкоємності й персоналізації. Принцип спадкоємності забезпечує взаємозв'язок елементів складної системи й неперервності математичної освіти, а принцип персоналізації створює умови для розвитку особистості, зокрема, її пізнавальної самостійності, професіонального і життєвого досвіду.

Таблиця 2

Систематизація рівнів, підрівнів пропедевтики

Рівні	**Підрівні**	**Зміст зв'язків**	**Реалізація**
I загальноосвітній	I	Концентричний зв'язок тем з дисципліни «Математика» 1-го курсу	Випереджаючі вправи на наступні теми навчальної програми
	II	Концентричний зв'язок тем з дисципліни «Математика» 1, 2-го курсів	Випереджаючі та елективні вправи на наступні теми навчальної програми
II професійно-орієнтовний	I	Концентричний зв'язок тем дисципліни «Математика» з професійно-орієнтовними математичними дисциплінами	Випереджаючі та елективні вправи на теми з професійно-орієнтовних математичних дисциплін
	II	Концентричний зв'язок тем дисципліни «Математика» з професійно-орієнтовними нематематичними дисциплінами	Випереджаючі та елективні вправи на теми з професійно-орієнтовних нематематичних дисциплін
III професійно-спрямований	I	Концентричний зв'язок математичних дисциплін з професійно-спрямованими дисциплінами	Випереджаючі та елективні вправи на теми з професійно-спрямованих дисциплін
	II	Концентричний зв'язок математичних дисциплін з курсовим та дипломним проектуванням	Розгляд базових положень математичних теорій як основи курсового та дипломного проектування

Важливість пошуку, вивчення й дослідження сучасних спеціальних методів надання математичної освіти підтверджується специфікою професійної діяльності фахівців-програмістів. Вона майже вся здійснюється в когнітивній сфері та віртуальному середовищі (Нуриев, 2005).

Список літератури

Нуриев, Н. К. (2005). *Дидактическое пространство подготовки компетентных специалистов в области программной инженерии*. Казань: Изд-во Казанского университета.

Потапова, М. В. (2008). *Пропедевтика в непрерывном физическом образовании в школе и педвузе*: Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора педагогических наук. Челябинск: ЧГПУ.

ПРО АКТИВІЗАЦІЮ ЛОГІЧНОГО МИСЛЕННЯ СТУДЕНТІВ ПРИ ВИВЧЕННІ КУРСУ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

В. О. Варивода, О. М. Гришко

Національний авіаційний університет, Київ, Україна

viktoriana@ukr.net

У доповіді розглядається проблема формування креативного мислення у студентів інженерних спеціальностей. Пропонується застосовувати апарат математичної логіки в якості інструмента для становлення свідомого продуктивного рівня використання накопичених знань.

Ключові слова: репродуктивний рівень, активний рівень, логіко-математична символіка, міжпонятійні зв'язки.

Вивчення математики відіграє особливу роль у підготовці майбутніх фахівців з інженерних спеціальностей. Під впливом математичних дисциплін відбувається формування наукового світогляду і математичної культури майбутніх випускників.

Проте, останнім часом у наведених категоріях студентів спостерігається зниження рівня мотивації до вивчення курсу «Вища математика». Серед передумов цієї тенденції можна виділити застосування новітніх інформаційних технологій у вигляді прикладних математичних пакетів з набором уже розв'язаних прикладів, наслідком чого є невміння та небажання студентів працювати самостійно. Крім того, модульна система навчання передбачає структурування учбового матеріалу по окремих темах з кінцевим контролем степеня засвоєння основних понять того чи іншого модуля, що послаблює комплексне понятійне мислення.

У навчальній діяльності простежуються чотири рівні засвоєння матеріалу:

1) запам'ятовування — пізнавання об'єкта за його істотними ознаками;

2) розуміння навчального матеріалу — усвідомлення функціональної залежності між вивченими об'єктами;

3) практичне застосування — вміння учнів практично використовувати засвоєне при вирішенні завдань;

4) творче перенесення знань — свідома трансформація матеріалу в нових умовах (Волкова, 2001).

Технологія навчання в середній школі, на наш погляд, зазвичай базується на переписуванні й запам'ятовуванні матеріалу з різних галузей. При цьому особлива увага зосереджена на розв'язанні стандартних задач, які подібні до завдань зовнішнього незалежного оцінювання. Спираючись на власний досвід, відмічаємо демонстрацію математичних знань студентами перших курсів на репродуктивному рівні. Метою математичної освіти у виші має бути завершення переходу від репродукції накопичених знань, умінь та навичок до продуктивного, творчого мислення.

Одним із засобів становлення активного рівня знань студентів, уміння доказово обґрунтовувати свою думку під час спільного пошуку відповіді на проблемне питання може стати використання на лекційному занятті завдань з логічним навантаженням. Як варіант, пропонується застосовувати апарат математичної логіки в математичних формулюваннях, а також наведених прикладах. Логіко-математична символіка спрощує цілий ряд означень, доведень, спонукає студентів встановлювати міжпонятійні зв'язки та підходити до будь-якої задачі творчо.

Наведемо ряд прикладів.

Приклад 1. Розглядаючи теми «Диференціальне числення» та «Інтегральне числення», позначимо через x, y, z елементарні висловлювання: x — «функція неперервна на $[a,b]$», y — «функція диференційовна на $[a,b]$», z — «функція має первісну на $[a,b]$». Запишемо логічну структуру деяких математичних тверджень:

а) «якщо функція не є неперервною на $[a,b]$, то вона і недиференційовна на $[a,b]$»: $\neg x \to \neg y$;

б) «неперервна на $[a,b]$ функція — або диференційовна на $[a,b]$, або недиференційовна на $[a,b]$»: $(x \to y) \vee (x \to \neg y)$;

в) «диференційовна на $[a,b]$ функція — неперервна на $[a,b]$; неперервна на $[a,b]$ функція має первісну; отже, диференційовна на $[a,b]$ функція має первісну на $[a,b]$»: $(y \to x) \wedge (x \to z) = y \to z$.

Приклад 2. У теорії СЛАР складне висловлювання щодо наявності у системи безлічі розв'язків матиме таку логічну структуру: $x \equiv y \wedge \neg z$, якщо елементарними висловлюваннями будуть: x — «СЛАР є невизначеною», y — «ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці», z — «кількість невідомих дорівнює рангу основної матриці».

Приклад 3. Логічна структура складного висловлювання «для того, щоб паралелограм *ABCD* був квадратом, необхідно, проте недостатньо, щоб його діагоналі були рівні між собою» буде такою: $(x \to y) \wedge \neg(y \to x)$, де x — «паралелограм *ABCD* є квадратом», y — «діагоналі паралелограма рівні між собою».

Приклад 4. У розділі аналітичної геометрії «Пряма на площині» логічна структура складного висловлювання «необхідна і достатня умова паралельності прямих, що задані на площині рівняннями з кутовим коефіцієнтом, полягає в рівності їх кутових коефіцієнтів» має вигляд: $x \equiv y$, де x — «прямі — паралельні», y — «прямі мають рівні кутові коефіцієнти».

Приклад 5. При розгляді теми «Дослідження графіків функцій» можна пропонувати подати формулами логіки висловлювань твердження про:

а) необхідні умови існування екстремуму в точці для функції $f(x)$;

б) достатні умови існування екстремуму в точці для функції $f(x)$;

в) необхідні й достатні умови існування екстремуму в точці для функції $f(x)$.

Висновок. Супровід викладення нового навчального матеріалу задачами з елементами математичної логіки активізує формування у студентів критичного мислення, систематизує їхні функціональні знання, ілюструє прикладну спрямованість математичних знань, що є актуальним для майбутніх фахівців з інженерних спеціальностей.

Список літератури

Волкова, Н. П. (2001). *Педагогіка: Навчальний посібник.* Київ: Видавничий центр «Академія».

Гладкий, А. В. (2007). *Введение в современную логику*. Москва: МЦНМО.

Товтул, М. Г. (2003). *Логіка*. Київ: Видавничий центр «Академія».

Хромой Я. В. (1978). *Збірник вправ і задач з математичної логіки.* Київ: Вища школа.

ЗАСТОСУВАННЯ ТАБЛИЧНОГО ЗАПИСУ ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ В ОПЕРАЦІЙНОМУ ЧИСЛЕННІ

В. О. Гайдей, Л. Б. Федорова
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ, Україна
victor144169@gmail.com

У статті розглянуто застосування поширеного в англомовних підручниках табличного запису узагальненого інтегрування частинами в операційному численні.

Ключові слова: узагальнене інтегрування частинами, перетворення Лапласа, операційне числення.

1. Операційне числення є одним з ефективних методів математичного аналізу, що дозволяє зводити дослідження диференціальних і деяких типів інтегральних операторів і рівнянь до розгляду алгебричних задач.

Пряме перетворення Лапласа перетворює функцію-оригінал $f(t)$ у перетвір (зображення) за Лапласом за формулою

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(p) = F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt,\ p = s + i\sigma \in \mathbb{C}.$$

2. Техніка табличного інтегрування дозволяє успішно інтегрувати частинами інтеграли вигляду

$$\int f(x)g(x)dx\,,$$

а, отже може бути застосована в операційному численні

Метод інтегрування частинами є інструментом обчислення інтегралів, що базується на узагальненій формулі (Фихтенгольц, 2003), яка реалізує n-кратне інтегрування частинами

$$\int uv^{(n+1)}dx = uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{(n-2)} - ... +$$
$$+(-1)^n u^{(n)}v + (-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}vdx.$$

Якщо позначити $u(x) = f(x)$, а $v^{(n+1)} = g(x)$, то формулу можна переписати так:

$$\int f(x)g(x)dx = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k f^{(k)}(x)g^{(-k-1)}(x) + (-1)^{n+1}\int f^{(n+1)}g^{(-n-1)}(x)dx, \qquad (2)$$

де $f^{(k)}(x)$ — похідна k-го порядку функції $f(x)$, а $g^{(-k)}(x)$ — первісна k-го порядку від $g(x)$:

$$g^{(-1)}(x) = \int g(x)dx, g^{(-2)}(x) = \int g^{(-1)}(x)dx, ..., g^{(-k-1)}(x) = \int g^{(-k)}(x)dx.$$

Знаходження послідовних похідних і первісних зручно оформлювати в *табличному* вигляді, що водночас зменшить і кількість можливих помилок. Цей метод запису інтегрування був запропонований у статті Folley (1947) і широко використовується в англомовній навчальній літературі, приміром Anton, Bivens та Davis (2013), Larson та Edwards (2013).

Почережні знаки		$f(x)$ та її похідні		$g(x)$ та її первісні
$+$	$\to$	$f(x)$	$\searrow$	$g(x)$
$-$	$\to$	$f'(x)$	$\searrow$	$g^{(-1)}(x)$
$+$	$\to$	$f''(x)$	$\searrow$	$g^{(-2)}(x)$
...	...	....	....	...
$(-1)^n$	$\to$	$f^{(n)}(x)$	$\searrow$	$g^{(-n)}(x)$
$(-1)^{n+1}$	$\to$	$f^{(n+1)}(x)$	$\to$	$g^{(-n-1)}(x)$

3. Приклад 1. Запишімо в табличному вигляді безпосереднє знаходження зображення $F(p)$ для оригіналу $f(t) = t^2$. Двократне інтегрування частинами в інтегралі $\int\limits_0^\infty t^2 e^{-pt} dt$ оформлюємо в таблиці

Почережні знаки		$f(t)$ та її похідні		$g(t)$ та її первісні
$+$	$\to$	$f(t) = t^2$	$\searrow$	$g(t) = e^{-pt}$
$-$	$\to$	$f'(t) = 2t$	$\searrow$	$g^{(-1)}(t) = \dfrac{e^{-pt}}{-p}$
$+$	$\to$	$f''(t) = 2$	$\searrow$	$g^{(-2)}(t) = \dfrac{e^{-pt}}{p^2}$
$.-..$	$\to$	$f''' = 0.$	$..\searrow..$	$.g^{(-3)}(t) = \dfrac{e^{-pt}}{-p^3}..$

Отже, зображенння

$$F(p) = \left. \left(-t^2 \frac{e^{-pt}}{-p} - 2t \frac{e^{-pt}}{p^2} - 2 \frac{e^{-pt}}{p^3} \right) \right|_0^\infty = \frac{2}{p^3},$$

де враховано, що $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-pt} = 0, p = s + i\sigma, s > 0$

Так само можна зображення для оригіналу

$$f(t) = t^n \to F(p) = L(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

4. Табличний запис інтегрування частинами також полегшує і робить елегантним доведення деяких теорем і властивостей. Наприклад, доведімо властивість диференціювання оригіналу перетворення Лапласа.

Якщо $f(t)$ є оригіналом з порядком росту s_0 і функції $f', f'', \dots, f^{(n)}$ — також функції-оригінали з порядками росту відповідно $s_1, s_2, \dots, s_n$, то

$$f^{(n)}(t) \to F(p) = \int_0^\infty f^{(n)}(t) e^{-pt} dt.$$

Застосуємо для знаходження зображення метод інтегрування частинами і заповнимо таблицю (Horowitz, 1990)

Почережні знаки		$g(t)$ та її похідні		$f^{(n)}(t)$ та її первісні
$+$	$\to$	$g(t) = e^{-pt}$	$\searrow$	$f^{(n)}(t)$
$-$	$\to$	$g'(t) = -pe^{-pt}$	$\searrow$	$f^{(n-1)}(t)$
$+$	$\to$	$g''(t) = p^2 e^{-pt}$	$\searrow$	$f^{(n-2)}(t)$
...	...	....	....	...
$(-1)^n$	$\to$	$g(t) = (-1)^n p^n e^{-pt}$	$\to$	$f\ \ (t)$

Отже,

$$F(p) = \left(e^{-pt} f^{(n-1)}(t) + p e^{-pt} f^{(n-2)}(t) + \dots + p^{n-1} e^{-pt} f(t) \right)\Big|_0^\infty +$$

$$+ p^n \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt = -(f^{(n-1)}(0) + p f^{(n-2)}(0) + \dots + p^{n-1} f(0)) + p^n L(p),$$

якщо $\operatorname{Re} p = s > \overline{s} = \max\{s_0, s_1, \dots, s_n\}$, то $\left| f(t) e^{-pt} \right| \le M e^{-(s-\overline{s})t} \to \infty, t \to 0.$

Отже маємо формулу

$$f^{(n)}(t) \to F(p) = p^n L(p) - (f^{(n-1)}(0) + p f^{(n-2)}(0) + \dots + p^{n-1} f(0)).$$

5. Раціонально застосовувати табличний метод також при застосуванні *теореми множення*. Так, якщо $F(p)$ є зображенням оригіналу $f(t)$, а $G(p)$ є зображенням оригіналу $g(t)$, то добуток зображень $F(p)G(p)$ має оригіналом *згортку* відповідних функцій:

$$F(p)G(p) \leftarrow (f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau = \int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau.$$

Приміром, знаходячи оригінал функції $F(p)=\dfrac{48}{p^5(p^2+4)}$ розкладаємо її на множники

$$F(p)=\frac{24}{p^5}\cdot\frac{2}{p^2+4},$$

що мають такі оригінали:

$$F(p)=\frac{24}{p^5}\to f(t)=t^4, G(p)=\frac{2}{p^2+4}\to g(t)=\operatorname{sh}2t.$$

Тоді за теоремою Бореля (множення) оригіналом зображення $F(p)$ є згортка

$$t^4*\operatorname{sh}2t=\int_0^t(t-\tau)^4\operatorname{sh}2\tau d\tau=$$

Запишімо в табличному вигляді знаходження інтеграла зі змінною верхньою межею за допомогою інтегрування частинами:

Почережні знаки		$f(t)$ та її похідні		$g(t)$ та її первісні
$+$	$\to$	$f(t)=(t-\tau)^4$	$\searrow$	$g(t)=\operatorname{sh}2\tau$
$-$	$\to$	$f'(t)=-4(t-\tau)^3$	$\searrow$	$g^{(-1)}(t)=\dfrac{\operatorname{ch}2\tau}{2}$
$+$	$\to$	$f''(t)=12(t-\tau)^2$	$\searrow$	$g^{(-2)}(t)=\dfrac{\operatorname{sh}2\tau}{4}$
$.-..$	$\to$	$f'''=-24(t-\tau)$	$..\searrow..$	$.g^{(-3)}(t)=\dfrac{\operatorname{ch}2\tau}{8}..$
$+$	$\to$	$f^{(4)}=24$	$\searrow$	$g^{(-4)}(t)=\dfrac{\operatorname{sh}2\tau}{16}$
$-$	$\to$	$f^{(5)}=0$	$\searrow$	$g^{(-5)}(t)=\dfrac{\operatorname{ch}2\tau}{32}$

$$t^4*\operatorname{sh}2t=$$

$$=\left((t-\tau)^4\frac{\operatorname{ch}2\tau}{2}+4(t-\tau)^3\frac{\operatorname{sh}2\tau}{4}+12(t-\tau)^2\frac{\operatorname{ch}2\tau}{8}+24(t-\tau)\frac{\operatorname{sh}2\tau}{16}+24\frac{\operatorname{ch}2\tau}{32}\right)\Bigg|_0^t=$$

$$=\frac{3}{4}\operatorname{ch}2t-\left(\frac{1}{2}t^4+\frac{3}{2}t^2+\frac{3}{4}\right).$$

Так само можна одержати загальні формули для зображень вигляду

$$F(p)=\frac{1}{p^n(p^2+a^2)}.$$

Список літератури

Anton, H., Bivens, I., & Davis, S. (2013). *Calculus: Early transcendents* (10 ed.). Wiley Publishing, Inc.

Brown, J. W. (1960). An extension of integration by parts. *The American Mathematical Monthly*, *67*(4), 372.

Folley, K. W. (1947). Integration by Parts. *The American Mathematical Monthly*, *54*(9), 542–543.

Gillman, L. (1991). More on tabular integration by parts. *The College Mathematics Journal*, *22*(5), 407–410.

Horowitz, D. (1990). Tabular Integration by Parts. *The College Mathematics Journal*, *21*(4), 307–311.

Khattri, S. K. (2008). Fourier series and Laplace transform through tabular integration. *The Teaching of Mathematics*, *11*(2), 97–103.

Kowalski T. Tabular IBP http://www.mcs.sdsmt.edu/tkowalsk/notes/calc-2/calc-2-(12).pdf

Larson, R., & Edwards, B. (2013). *Calculus* (10 ed.). Brooks Cole.

Mrayyan, S. (2014). Tabular integration by parts the best short cut to perform integration. *International Journal of Current Research*, *6*(11), 9676–9684.

Murty, V. N. (1980). Integration by parts. *The Two-Year College Mathematics Journal*, *11*(2), 90–94.

Nicol, S. J. (1993). Integrals of products of sine and cosine with different arguments. *The College Mathematics Journal*, *24*(2), 158–160.

Гайдей, В. О., Федорова, Л. Б. (2017). Про застосування табличного запису інтегрування частинами. У *Збірнику наукових праць за матеріалами дистанційної всеукраїнської наукової конференції «Математика у технічному університеті XXI сторіччя»*, 15—16 травня, 2017 р., Донбаська державна машинобудівна академія, Краматорськ (с. 94—96). Краматорськ : ДДМА.

Гайдей, В. О., Федорова, Л. Б. (2017). Про табличний запис інтегрування частинами. *Математика в сучасному технічному університеті, 2, 1—14*. http://mmtu.in.ua/

Курант, Р. (1967). *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. (Т. 1.). (4-е изд., перераб. и доп.). Москва: Наука.

Трофіменко, В., & Федорова, Л. Б. (2016). Про табличний запис інтегрування частинами Математика в сучасному технічному університеті : матеріали IV Міжнар. наук.-практ. конф. (Київ, 24—25 груд. 2015 р.). — Київ : НТУУ «КПІ», 2016. с. 208—211

Фихтенгольц, Г. М. (2003). *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. (Т. 2). (8-е изд.). Москва: Физматлит.

ШЛЯХАМИ ПАМ'ЯТІ АКАДЕМІКА МИХАЙЛА КРАВЧУКА

І. О. Глущук, Л. М. Каширець, Т. М. Луць, Л. Л. Новосад
Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки,
Луцьк, Україна
iruna.glushchuk@gmail.com

Волинська земля зростила багато відомих діячів культури, талановитих учених, визначних громадських діячів. Одне з найпочесніших місць серед них належить видатному українському математику, академіку ВУАН, автору фундаментальних праць у різних галузях математики Михайлові Кравчуку.

З 2001 року кращих учителів природничо-математичних дисциплін Волині відзначають за високу майстерність і значний внесок у розвиток освіти і нагороджують премією обласної державної адміністрації імені Михайла Кравчука.

Першим лауреатом премії став у 2001 році І. Н. Харкевич. Більше 30 років працював у Лобачівській середній школі Горохівського району вчителем математики Іліодор Никодимович Харкевич, заслужений вчитель України, нині пенсіонер. Добросовісна праця з повною віддачею сил і знань, надзвичайне вміння вчитися і вчити було притаманне цьому чудовому педагогу. І не тільки вчити, а систематично й наполегливо прищеплювати любов до одного з найважчих шкільних курсів — математики.

Своїм вихованцям любов до математики він прищеплював з дитинства, переконував їх у необхідності набуття знань. Між учителем і його учнями встановлювались довірливі стосунки, засновані на глибокій вірі вчителя в можливості молоді. Вчитель поєднував у собі високу вимогливість з повагою до учнів. Багато й наполегливо працював він зі школярами, які по-справжньому любили математику, прагнули поглибити свої знання з математики. З такими учнями, організовував роботу з розв'язування задач підвищеної складності. Потім вони ставали неодноразовими призерами обласних математичних олімпіад, учасниками всеукраїнських олімпіад юних математиків. Тому не дивно, що багато його випускників обирали своєю спеціальністю математику, серед них є доктори й кандидати наук, викладачі вишів і шкіл.

Іліодор Никодимович розробив систему алгоритмів, ефективне застосування яких на уроках математики розвиває логічне мислення учнів, пробуджує інтерес до математики, сприяє виробленню міцних навичок у розв'язуванні задач.

Усім, чим багатий сам, охоче ділився з іншими. Протягом багатьох років він проводив авторські курси для вчителів математики області у Волинському інституті післядипломної педагогічної освіти.

Одним з учнів Іліодора Никодимовича є кандидат фізико-математичних наук, доцент, який більше 30 років очолював кафедру математичного аналізу СНУ імені Лесі Українки Л. І. Філозоф. Леонтій Іванович протягом більше 20 років готує учнів нашої області до обласних і Всеукраїнських олімпіад юних математиків, є постійним членом журі цих олімпіад і турнірів.

Наслідує традиції свого батька й декан факультету інформаційних систем, фізики та математики СНУ імені Лесі Українки — кандидат фізико-математичних наук, професор Ю. І. Харкевич, який впродовж багатьох років керує семінаром з теорії наближення функцій, студенти-учасники якого беруть участь у Всеукраїнських конкурсах наукових робіт і займають призові місця.

Премією імені М. Кравчука нагороджені: заслужений учитель України, учитель-методист Ковельської ЗОШ І—ІІІ ступенів № 3 Л. Й. Макарук, учитель-методист гімназії № 21 м. Луцька С. В. Сватко, учитель інформатики Затурцівської ЗОШ І—ІІІ ступенів А. М. Глова, учитель математики Волинського обласного ліцею-інтернату Г. І. Євтушина, заслужений учитель України, учитель математики гімназії № 14 м. Луцька Л. В. Жумик, заступник директора Волинського обласного ліцею-інтернату, учитель математики, яка стала лауреатом премії у 2011 році О. М. Присяжна.

Диплом
лауреата обласної премії імені
Михайла Кравчука

№ 11
м. Луцьк

ВОЛИНСЬКА ОБЛАСНА ДЕРЖАВНА АДМІНІСТРАЦІЯ
УПРАВЛІННЯ ОСВІТИ І НАУКИ
НАГОРОДЖУЄТЬСЯ
ПРИСЯЖНА
Ольга Миколаївна,
учитель математики Волинського ліцею-інтернату,
за високий професіоналізм та значний внесок
у розвиток освіти області

Начальник управління освіти і науки — Михайло Попович

2011 р.

Математичну освіту Ольга Миколаївна здобула в Луцькому педінституті імені Лесі Українки. Перший учительський вишкіл пройшла в Нововолинській школі-інтернаті, потім викладала математику — і у профтехучилищі у Володимирі-Волинському, і в сільських школах Іваничівського району. З 1998 року працює заступником директора Волинського ліцею-інтернату, викладає математику.

Високий рівень засвоєння учнями навчального матеріалу в ліцеї є результатом праці О. М. Присяжної. Найбільше вчителька радіє успіхам своїх ліцеїстів від перемог на всеукраїнських та обласних математичних олімпіадах, від того, що вони викладають математику, стають аспірантами та викладачами вищих навчальних закладів. А ще більше від того, що виросли вони освіченими й культурними людьми, які мають свої амбіції та життєві цілі.

Ольга Присяжна все життя керується кредо Михайла Кравчука: «Моя любов — Україна і математика», а своїм учням радить обирати життєвий шлях за покликанням душі, саме так і сама обрала професію.

Диплом лауреата премії у 2013 році отримала Т. Г. Коць, учитель математики Луцького НВК № 26, заслужений учитель України, яка є випускницею Луцького педагогічного інституту імені Лесі Українки.

Тамара Григорівна впродовж останніх десяти років є головою методичного об'єднання вчителів математики, інформатики, ділиться педагогічним досвідом з колегами міста та області через презентацію відкритих уроків та семінарів. Автор низки методичних збірників, педагогічних публікацій у фахових виданнях, у 2011 році ініціювала випуск у Луцькому НВК № 26 «Математичного вісника», є його активним дописувачем.

Значне місце в роботі педагога займає індивідуальна робота з обдарованими школярами: розроблено комплекс завдань підвищеної складності для підготовки дітей до олімпіад, змагань, турнірів. Учні Тамари Григорівни є постійними переможцями предметної олімпіади міського, обласного та Всеукраїнського етапів.

У рамках днів пам'яті академіка М. Кравчука у Луцькому НВК № 26 проходить тиждень математики, присвячений цій видатній людині. Дев'ятикласники здійснюють математичний «десант» у 2—6-класах «Математика — його життя», де розповідають про життєвий шлях М. П. Кравчука, а також розв'язують задачі, які Михайло Пилипович пропонував своїм учням. Восьмикласники проводять гру-математичний бій «Михайло Кравчук», а десятикласники — математичне «Поле чудес». Запитання, які ставлять на цих іграх, у цікавій формі знайомлять учнів з життям і науковими працями М. П. Кравчука. Одинадцятикласники організовують вечір «М. П. Кравчук — гордість української математики». Також протягом цього тижня у школі проводяться вікторини «Чи знаєте ви Михайла Кравчука?», виставки творчих робіт учнів та вчителів, екскурсія в с. Човницю, виховні години «Він присвятив себе найдивовижнішій з наук — математиці», проходять математичні змагання ім. М. П. Кравчука. Переможців нагороджують медалями «За досягнуті успіхи у вивченні математики» та цінними подарунками — книгами.

У 1993 році на факультеті інформаційних систем, фізики та математики заснована іменна стипендія імені М. Кравчука, яка призначається студентам, що вчаться на «відмінно» і мають вагомі успіхи в науковій і громадській роботі. Стипендіатами в різні роки були Л. П. Дмитрук, Г. М. Губаль, В. В. Миронюк, Т. А. Степанюк, К. В. Швай, Т. М. Луць та інші.

Г. М. Губаль — випускниця 2002 року Волинського державного університету імені Лесі Українки за спеціальністю «Математика», здобула кваліфікацію магістра математики й отримала диплом з відзнакою.

Під час навчання була нагороджена дипломом переможця конкурсу «Студент року-2001» у номінації «Студент-науковець природничник» (2001 р.), дипломом I ступеня за зайняте I місце в конкурсі «Інтелектуал Волині» в номінації «Кращий студент ВДУ» та «Краща студентська наукова робота» (математика) (2002 рік), дипломом I ступеня за перемогу в конкурсі аспірантських наукових робіт Волинського державного університету ім. Лесі Українки» (2003 рік).

З вересня 2008 року по теперішній час — доцент кафедри вищої математики Луцького національного технічного університету. Автор 85 наукових праць з математики, 5 навчальних посібників, 3 одноосібних електронних навчальних посібників, 20 одноосібних навчально-методичних праць.

В. В. Миронюк — випускник 2011 року Волинського державного університету імені Лесі Українки. Під час навчання в університеті був переможцем Всеукраїнських олімпіад та конкурсів наукових робіт. У 2014 році захистив дисертацію «Апроксимативні характеристики класів функцій багатьох змінних» в Інституті математики НАН України, науковим керівником якої був А. С. Романюк. З 2014 року й по теперішній час є молодшим науковим співробітником відділу теорії функцій Інституту математики НАН України.

Т. А. Степанюк — випускниця 2011 року Волинського державного університету імені Лесі Українки. Автор більш ніж 50 наукових публікацій. На сьогодні Тетяна Анатоліївна — кандидат фізико-математичних наук, старший викладач кафедри диференціальних рівнянь та математичної фізики в СНУ імені Лесі Українки.

К. В. Швай — випускниця 2015 року СНУ імені Лесі Українки, здобула кваліфікацію магістра математики й отримала диплом з відзнакою. За роки навчання на математичному факультеті тричі була стипендіатом імені М. Кравчука, переможцем Всеукраїнської студентської олімпіади з математики (III місце), переможцем Всеукраїнського конкурсу наукових робіт (I місце). У 2015 році вступила до аспірантури Інституту математики НАН України. Навчається у відділі теорії функцій, яким керує її науковий керівник професор А. С. Романюк. Її дослідження стосуються наближення класів функцій багатьох змінних типу Соболєва та Нікольського — Бесова.

Т. М. Луць — магістрант факультету інформаційних систем, фізики та математики, активна учасниця студентської наукової роботи, неодноразово брала участь у міжнародних наукових конференціях.

ВНЕСОК МИХАЙЛА КРАВЧУКА В РОЗВИТОК УКРАЇНСЬКОЇ МЕТОДИКИ МАТЕМАТИКИ

О. В. Гнепа[1], О. М. Кравчук[2] , О. Л. Швай[2]

[1]*Волинське державне училище культури і мистецтв імені І. Ф. Стравінського, Луцьк, Україна,*

[2]*Східноєвропейський національний університет ім. Лесі Українки, Луцьк, Україна*

olchik_gnepa@ukr.net, olikr@rambler.ru

У статті автори розглядають методико-математичну спадщину Михайла Кравчука та можливості її використання у процесі реформування сучасної освіти.

Ключові слова: методика математики, педагогічна спадщина, викладання математики, методичний підхід, аналіз підручників, розв’язування задач.

Досвід таких країн, як Корея, Китай, Казахстан та інші, змінив уявлення світової громадськості про можливі шляхи розвитку людства, переконливо довів важливість формування інтелектуального потенціалу нації для підвищення конкурентоспроможності держави. Інтеграція української економіки у світову вимагає кардинальних змін в освітній галузі, постійне оновлення її змісту. На цьому у свій час акцентував увагу академік М. Кравчук (1892—1942): «Держава, піднісши … освіту і науку … на височінь незрівнянну з попередніми періодами, має право і підстави сподіватися у ближчому майбутньому… таких наукових кадрів, що зроблять нашу … школу осередком світового значення» [4, с. 67].

Загальновизнано, що ім’я Михайла Кравчука асоціюється з вагомими математичними дослідженнями. Проте, поряд із плідною науковою діяльністю, він був також знаним фахівцем з методики математики, що розкрито в наукових розвідках Б. Білого, Н. Вірченко, А. Войцеховського, О. Гнепи, В. Добровольського, О. Кравчук, П. Тадеєва, Я. Шевченко.

Метою даної статті є аналіз внеску М. Кравчука в розвиток української методики математики.

Упродовж своєї освітньої діяльності Михайло Кравчук постійно наголошував на необхідності забезпечення учителів методичною літературою. Зокрема, на засіданні ради природничого відділу Українського наукового товариства (УНТ) 14 березня 1920 року М. Кравчук запропонував видавати природничо-математичний журнал з педагогічних питань. Хоча пропозиція була схвалена товариством, публікація журналу залишилась на рівні задумів у зв’язку з приєднанням УНТ до Академії наук у 1921 році.

У 1925 році створено Державний науково-методичний комітет, функції якого полягали в організації науково-методичної роботи, перегляді програм і підручників. М. Кравчук активно співпрацював з секцією професійної освіти Держнаукметодкому з моменту його появи. Ураховуючи професійну спрямованість тогочасної освіти, М. Кравчук розробив програму з курсу «Елементи вищої математики в пристосуванні до сільського господарства» і написав підручник «Математика для сільськогосподарських профшкіл» (у співавторстві з

І. Біликом). Характерними рисами книги були доступність, змістовність і наступність при вивченні математики у профшколі й вищому навчальному закладі, використання міжпредметних зв'язків і фузіонізму, що полегшувало сприйняття матеріалу, сприяло економії сил і часу. Кожен розділ підручника містить теорію (пояснення якої здійснювалося на конкретних задачах), завдання для самостійного опрацювання і зразки їх розв'язання. «Математика…» мала тісний зв'язок з життям, була написаний доступною мовою, а тому легко сприймалася читачем. Важливим виховним моментом було розв'язання задач попередніх параграфів іншими способами відповідно до нової теми. Це привчало учнів не формально виконувати певні дії, а замислюватись, як діяти, шукати інші шляхи розв'язання, що сприяло розвитку їх логічного мислення, пізнавальної самостійності [1, с. 180; 7].

У 1928 році М. Кравчук знову порушує питання про видання спеціального журналу, присвяченого викладанню та методиці математики. У 1930 році вчений очолив кафедру математики у Київському педагогічному інституті, що сприяло забезпеченню навчальних закладів кваліфікованими вчителями.

У 1929—1930 опубліковано «Робочі книги з математики» для V—VII років навчання за редакцією Михайла Кравчука. Цікавою була послідовність розташування матеріалу: а) роботи-завдання за комплексною тематикою; б) виклад відповідного математичного матеріалу; в) вправи та задачі. Останні широко використовувалися також у процесі безпосереднього викладу матеріалу. Зміст підручника доповнював довідник з таблицями, софізмами, математичними головоломками, відомостями з історії математики. Усе це сприяло підвищенню інтересу учнів до вивчення математики, полегшувало її засвоєння. Матеріал підручника для сьомого класу, на відміну від робочих книг тих самих авторських колективів, подано в логічній послідовності згідно з традиційною програмою з математики, у ньому відсутнє штучне прив'язування до комплексів [9, с. 233].

З 1935 року М. Кравчук співпрацював з Українським науково-дослідним інститутом педагогіки, де під керівництвом академіка й на основі його методичних поглядів проводилась експериментальна робота. Михайло Кравчук був одним з ініціаторів проведення першої в Україні математичної олімпіади, яка відбулася в червні 1935 року в Київському університеті. На відкритті олімпіади вчений виступив перед учнями і вчителями київських шкіл з доповіддю «Про завдання і методи математичних наук». У серпні 1936 року в Києві відбулася нарада вчителів-математиків, на якій обговорювалися засоби ефективного засвоєння учнями програмового матеріалу. Секцією старших (8—10) класів керував академік Кравчук разом з доцентом Д. Тополянським. М. Кравчук виступив на пленарному засіданні з доповіддю «Наближені обчислення». Під час наради було дано цінні вказівки щодо використання наочності у викладанні математики та методики вивчення окремих тем, зокрема наближених обчислень, функцій і рівнянь, усної лічби та інших. Учасники наради висловили пропозиції щодо вдосконалення програм з таких питань, як функціональна залежність, теорія вимірювання величин, теорія границь, поширення поняття про число, логарифмічна і показникова функції, поняття дійсного числа та інші [1, с. 179].

У 1936—1937 роках М. Кравчук опублікував у журналі «Комуністична освіта» ряд статей з актуальних питань методики викладання математики. Перша з цих публікацій — «Новий метод викладання логарифмів в середній школі» (у співавторстві з Б. Маліновою) — була присвячена новому підходу до викладання логарифмів. Детально вивчалася показникова функція як основа теорії логарифмів, існування яких пояснювалося наочно-графічним та конкретно-індуктивним методами [1, с. 181; 9, с. 232; 6].

У статті «Наближені обчислення в середній школі», написаній у співавторстві з аспірантами М. Гельфандом і О. Вулах, М. Кравчук розглянув наближені обчислення як органічний елемент курсу математики середньої школи. Педагог рекомендував поступово вводити поняття наближеного числа: почати з конкретних прикладів вимірювання або зважування, перейти до ділення цілих чисел з остачею і перетворення звичайних дробів у десяткові. Згідно з поглядами М. Кравчука, вчителям при виборі задач недоцільно обмежуватися завданнями з точними числами. Як наслідок, коли відповідь «негарна», учні, а інколи і вчителі, переконані, що або задача розв'язана неправильно, або неправильно сформульована її умова. Михайло Кравчук наголошував, що головне правило наближених обчислень: «в умі заокруглено прикинути відповідь задачі», щоб уникнути помилок під час розв'язання. М. Кравчук наголошував на важливості наближених обчислень при опануванні понять ірраціонального числа, границі, логарифма, розв'язання рівнянь вищих степенів, обчислення об'ємів та поверхонь [1, с. 179; 9, с. 232; 5, с. 27].

Остання зі статей М. Кравчука — «Теорія подібності у середній школі» — вирізняється новизною й цінністю для сучасної методики викладання математики. У ній автор запропонував свій підхід до вивчення подібності фігур, відмінний від викладених у сучасних підручниках з геометрії. Основні ідеї цього способу полягали у використанні координатної площини і графіка лінійної функції, у розгляді подібного перетворення фігур у якості вихідного пункту теорії. Усе це, на думку М. Кравчука, сприяло доступності й наочності викладу, легко поширювалось на тривимірний простір [1, с. 184; 8, с. 76].

Значний інтерес становлять погляди М. Кравчука на методику початкового ознайомлення учнів з основними поняттями вищої математики. Талановитий методист уважав, що початковий курс вищої математики обов'язково повинен бути пропедевтичним і побудованим на мінімальному обсязі матеріалу. Водночас вчений широко використовував наближені обчислення як основу для запровадження ірраціонального числа, похідної, інтеграла і границі. Останнє поняття розкривав через нескінченно малу. М. Кравчук зовсім не розглядав означення границі функції через його складність для сприймання. Пропедевтику похідної та інтеграла здійснював на основі лінійної і квадратичної функцій. Щоб переконати учнів, що знання похідної дає змогу розв'язувати задачі з інших галузей наук, розглядав найпростіші застосування диференціального числення до алгебри. Формування поняття про диференціал як добуток похідної на довільний приріст аргументу починалось із простих прикладів. М. Кравчук вважав, що поняття визначеного інтеграла найкраще означити як приріст первісної функції на проміжку інтегрування. Площі, об'єми й поверхні пропонував обчислювати за допомогою як невизначеного, так і визначеного інтеграла. Значну увагу приділяв М. Кравчук зв'язку формул для обчислення площ, об'ємів і поверхонь різних геометричних фігур, що економило час і полегшувало розуміння та запам'ятовування. Одразу після вивчення невизначеного інтеграла вчений розглядав найпростіші диференціальні рівняння. Зауважимо, що його методична концепція була новаторською, оскільки елементи математичного аналізу були запроваджені у шкільну практику лише в сімдесятих роках XX століття [2; 3, с. 113—114; 9, с. 232].

На основі детального аналізу наукової літератури та педагогічної спадщини вченого зроблено висновок про вагомий внесок Михайла Кравчука в розвиток української методики математики та виділено його наступні складові:

1) створення навчальних програм, підручників і посібників;
2) розробка власних методичних ідей;
3) упровадження цих ідей у навчальний процес;
4) організація олімпіад з метою виявлення обдарованої молоді;
5) керівництво кафедрою математики Київського педагогічного інституту.

Методичні роботи М. Кравчука, новаторські за висловленими ідеями та актуальні в наш час, ще раз свідчать про необхідність реформування освіти в Україні, що полягає у корінних змінах програм, змісту підручників і посібників.

Список літератури

1. Білий, Б. М. (1967). Про методичну спадщину М. П. Кравчука. *Методика викладання математики*, *3*, 177—189.
2. Білий, Б. М., & Войцеховський, А. П. (1970). Про погляди М. П. Кравчука на методику початкового ознайомлення учнів з елементами математичного аналізу. *Методика викладання математики*, 6, 178—182.
3. Войцеховський, А. П. (1968). До методики викладання вузлових питань аналізу в загальноосвітній школі. *Методика викладання математики*, *4*, 109—118.
4. Кравчук, М. (1935). Математика та математики в Київському Університеті за сто років (1834—1934). У М. А. Кушнарьов (Відп. ред.), *Розвиток науки в Київському університеті за сто років* (с. 34–69). Київ: Видавництво КДУ.
5. Кравчук, М., Гельфанд, М., & Вулах, О. (1936). Наближені обчислення в середній школі. *Комуністична освіта*, (9), 26—35.
6. Кравчук, М., & Малінова, Б. (1936). Новий метод викладання логарифмів в середній школі. *Комуністична освіта*, (1—2), 96—104.
7. Кравчук, М. П., & Білик, І. П. (1925). *Математика для сільськогосподарських профшкіл*. Харків: ДВУ.
8. Кравчук, М. (1937). Теорія подібності в середній школі. *Комуністична освіта*, (1), 76—80.
9. Сухомлинська, О. В. (Ред.). (2005). *Українська педагогіка в персоналіях: Навч. посібник*. (Кн. 2). Київ: Либідь.

ЗАСТОСУВАННЯ ДЕЯКИХ КОМАНД ДЛЯ ВНУТРІШНЬОТЕКСТОВИХ І ВИКЛЮЧНИХ ФОРМУЛ У СИСТЕМІ LATEX

Г. М. Губаль
Луцький національний технічний університет, Луцьк, Україна
niik-g@yandex.ru

Розглянуто систему LATEX для створення математичних текстів. Проаналізовано деякі особливості створення довгих внутрішньотекстових і багаторядкових виключних математичних формул у цій системі.

Ключові слова: система LATEX, внутрішньотекстова формула, виключна формула, команда вертикального фантома.

Робота з системою LATEX, призначеною для створення математичних текстів подібна до програмування (Губаль, 2013; Ширяева, 2010). Розглянуто деякі особливості створення довгих внутрішньотекстових і багаторядкових виключних математичних формул у математичних текстах засобами LATEX.

При створенні довгої внутрішньотекстової формули LATEX автоматично переносить її частини на інший рядок (наприклад, після знаків «бінарного відношення» або «бінарної операції»). Якщо необхідно уникнути автоматичних переносів у частині внутрішньотекстової формули, то беремо її у фігурні дужки. При цьому ускладнюється верстка абзаців, внаслідок чого можливі переповнення в рядках. Щоб під час верстки абзаців було менше переповнень, у преамбулі документа слід записати такі оператори:

```
\binoppenalty=10000
\relpenalty=10000
```

Ці оператори визначають ступінь небажаності розриву рядка після знаків «бінарної операції» і «бінарного відношення» відповідно.

При створенні багаторядкової виключної формули часто необхідно застосовувати механізм вибору розміру дужок. Команди \left і \right дозволяють автоматично вибирати розміри відкриваючої й закриваючої дужок відповідно. При цьому перед переходом на наступний рядок необхідно закрити команду \left або \right відповідною командою \right. або \left.

Наприклад, код

```
\begin{multline*}
  \int\limits_{{\mathbb{R}^\nu} \times {\mathbb{R}^\nu}}
{\differential{d}{x_2}\{ {H_2},\;{F_2}(t,{x_1},{x_2}|{F_1}(t))\} }=
\int\limits_{{\mathbb{R}^\nu } \times {\mathbb{R}^\nu }}
{\differential{d}{x_2}
\left\{{\sum\limits_{i = 1}^2 {\frac{p_i^2}{2} + \Phi ({q_1} - {q_2})} ,}
\right.} \\
\left. {{F_2}(t,{x_1},{x_2}|{F_1}(t))} \right\}.
```

\end{multline*}
генерує таку формулу:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}^\nu} \mathrm{d}x_2\{H_2,\;F_2(t,x_1,x_2 \mid F_1(t))\} = \int\limits_{\mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}^\nu} \mathrm{d}x_2 \left\{\sum\limits_{i=1}^2 \frac{p_i^2}{2} + \Phi(q_1 - q_2),\right. \\ \left. F_2(t,x_1,x_2 \mid F_1(t))\right\}.$$

Як бачимо, розмір дужок для кожної пари команд \left і \right генерується незалежно. У цьому випадку необхідно знайти найвищий елемент у формулі. Для наведеного прикладу найвищим елементом є $\sum\limits_{i=1}^2 \frac{p_i^2}{2}$. Використаємо екзотичну команду вертикального фантома \vphantom, яка шукає найвищий елемент. Тоді код

```
\begin{multline*}
  \int\limits_{{\mathbb{R}^\nu} \times {\mathbb{R}^\nu}}
  {\differential{d}{x_2}\{ {H_2},\;{F_2}(t,{x_1},{x_2}|{F_1}(t))\} }=
  \int\limits_{{\mathbb{R}^\nu } \times {\mathbb{R}^\nu }}
  {\differential{d}{x_2}
  \left\{{\sum\limits_{i = 1}^2 {\frac{p_i^2}{2} + \Phi ({q_1} - {q_2})} ,}
  \right.} \\
  \left. {{F_2}(t,{x_1},{x_2}|{F_1}(t))}
  \vphantom {\sum\limits_{i = 1}^2 {\frac{p_i^2}{2} }}\right\}.
\end{multline*}
```

генерує таку формулу:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}^\nu} \mathrm{d}x_2\{H_2,\;F_2(t,x_1,x_2 \mid F_1(t))\} = \int\limits_{\mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}^\nu} \mathrm{d}x_2 \left\{\sum\limits_{i=1}^2 \frac{p_i^2}{2} + \Phi(q_1 - q_2),\right. \\ \left. F_2(t,x_1,x_2 \mid F_1(t)) \vphantom{\sum\limits_{i=1}^2 \frac{p_i^2}{2}}\right\}.$$

Іншим способом вирішення цієї проблеми є використання фіксованої висоти дужок за допомогою команд \Bigl і \Bigr замість пошуку найвищого елемента у формулі.

Отже, у цій статті проаналізовано деякі особливості створення довгих внутрішньотекстових і багаторядкових виключних математичних формул у математичних текстах у системі LaTeX.

Список літератури

Губаль, Г. М. (2013). Створення математичних текстів і програмування в LaTeX. У *Матеріали Міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті»,* НТУУ «КПІ», Київ, 19—20 квітня (с. 474–477). Київ: НТУУ «КПІ».

Ширяева, Е. В. (2010). *Введение в TeX–программирование: Учебное пособие.* Ростов-на-Дону: Издательство ЮФУ.

ПРО НЕОБХІДНІСТЬ ДИФЕРЕНЦІЙОВАНОГО ПІДХОДУ В ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ СТУДЕНТІВ У СУЧАСНОМУ ВИШІ

В. В. Дем'яненко[1], О. О. Дем'яненко[2]

[1]*Київський національний економічний університет ім. В. Гетьмана, Київ, Україна*

[2]*КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна*

w.dem@ukr.net, o.dem@ukr.net

У доповіді розглянута одна з проблем сучасної вищої освіти, а саме неоднорідність підготовки студентів-першокурсників. Пропонується один з можливих підходів до вирішення цієї проблеми.

Ключові слова: диференційований підхід, компетенції, рівні підготовки, рейтингові оцінки.

Останніми роками спостерігається зниження середнього рівня математичної та комп'ютерної підготовки студентів-першокурсників, які були зараховані за результатами зовнішнього незалежного тестування. Причин, що призвели до цього багато. Не наша задача їх досліджувати, але загалом можна констатувати, що на даний момент освіта в Україні, і середня, і вища, знаходиться у кризовому стані. Безумовно потрібні реформи, сподіваємось, що вони будуть запроваджені, але на це потрібний час. Нині, у кризовій ситуації, що склалася, перед викладачами постають нові проблемі, яких раніше не було і їх треба вирішувати. Зокрема, зараз часто в одній аудиторії опиняються студенти з дуже різними рівнями підготовки, мотивації та усвідомлення того в якому виші вони опинились та наскільки їм потрібна саме ця освіта. З одного боку, зважаючи на те, що абітурієнтів стало менше, бажано зберегти наявну кількість студентів, з іншого боку збереження кількості не може відбуватись за рахунок якості освіти. Ось тут, на нашу думку, і потрібний диференційований підхід у процесі навчання студентів.

Проведення додаткових занять, на яких можна було б приділити додатковий час слабшим студентам, показали свою неефективність. Студенти такі заняття, як правило, не відвідують, або ставляться до них формально. Рейтингова система оцінювання знань студентів, що запроваджена нині в усіх вишах країни, націлена на диференційований підхід до оцінювання результатів навчання і, безумовно, стимулює й мотивує студентів підвищувати власні результати, але ми хочемо докладніше зупинитись саме на процесі навчання.

Під час розроблення навчальних робочих програм викладачі визначають компетенції, які повинні набути студенти після вивчення даного курсу. Доцільно визначати компетенції не тільки по навчальній дисципліні в цілому, а й по кожні темі окремо. Це спонукає виділити ряд означень, формулювань та, можливо, типів задач, без засвоєння яких не можна вважати матеріал вивченим. Фактично, це встановлює той мінімум знань та навичок, без якого отримати позитивну оцінку неможливо. При цьому забезпечення пристойної, так би мовити «нижньої планки», не повинно ставати самоціллю. Це необхідна, але не достатня умова забезпечення належного рівня освіти. Звичайно, найбільшу зацікавленість та увагу повинні викликати сильні студенти. Їм, при умові виконання найлегшого рівня завдань бажано пропонувати додаткові цікаві задачі, спонукати їх до самостійного вивчення якихось тем, або пропонувати поглиблено дослідити вже розглянуті в загальному курсі розділи. Корисно пропонувати ознайомлення з історією виникнення тієї чи іншої задачі, або поняття. Необхідно звертати увагу на походження термінів — це, у свою чергу, спонукає дослідити і історичні аспекти, і проблему по суті. Усі вдало виконані завдання мають бути обов'язково оцінені в рейтингових балах і враховані при виставленні результуючої оцінки. Якщо ж проведена студентом робота може бути розцінена як самостійне, хоч і невеличке дослідження, треба пропонувати студенту або зробити доповідь на студентській конференції, або оформити як статтю у відповідному виданні. Заохочення такої дослідницької студентської діяльності принципово змінює самооцінку студентів, відношення до навчального процесу, дозволяє їм відчути свою приналежність до наукової спільноти. Причому це стосується всіх студентів у групі, навіть тих, хто не має таких власних здобутків.

Повертаючись до методичного забезпечення диференційованого підходу в процесі навчання, автори пропонують після визначення компетенцій за кожною темою складати білети двох рівнів для самостійних аудиторних та модульних контрольних робіт. Тобто, у білеті можуть пропонуватись задачі різного рівня складності. Правила виконання таких робіт можуть бути різними. Можна вимагати обов'язкового виконання найпростішого рівня всіма і після цього дозволяти спробу розглядати складніші задачі. Можна різним студентам одразу пропонувати задачі різного рівня складності. Причому, можна вказувати самому хто які завдання виконує, а можна запропонувати студентам самостійно оцінити свої сили й обрати відповідний рівень. Безумовно, при оцінюванні таких робіт не повинно бути *дискримінації*, але повинно бути *заохочення*. Даючи домашні завдання та завдання для самостійних, розрахункових робіт, також необхідно пропонувати задачі підвищеної складності. Дуже корисно пропонувати задачі теоретичного характеру. Найлегший рівень повинен забезпечити отримання тих 60% з максимального рейтингу, що дають змогу отримати студенту задовільну оцінку. Вищий рівень дозволяє викладачу якісно та об'єктивно виставляти високі бали.

Усі запропоновані методичні прийоми, на думку авторів, можна використовувати під час навчання в семестрі. Екзаменаційні білети повинні бути для всіх однакові і відповідати загальним вимогам. Якщо студент не може упоратись із завданнями нижчого рівня й не спроможний знайти відповіді на екзаменаційні питання, то доцільність подальшого навчання цього студента є сумнівною.

Автори сподіваються, що запропонований диференційований підхід до процесу навчання студентів позитивно вплине на результат навчання.

Список літератури

Вірченко, Н. О. (2003). *Вибрані питання методики вищої математики.* Київ: НТУУ «КПІ».

Репета, В. К., & Репета, Л. А. (2016). *Нестандартний погляд на стандартну задачу.* У *Матеріали Сімнадцятої міжнародної наукової конференції ім. акад. Михайла Кравчука,* 19—20 травня, Київ (Т. 3, с. 312—313). Київ: НТУУ «КПІ».

ЗАСТОСУВАННЯ МОВИ R У СТАТИСТИЧНОМУ АНАЛІЗІ ЯКОСТІ ТЕСТІВ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

О. О. Диховичний, А. Ф. Дудко, Н. В. Прохоренко
КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
a.dyx@ukr.net

У роботі розглянуто гніздову логістичну IRT-модель для аналізу тестових завдань множинного вибору. Представлено переваги застосування мови статистичного програмування R для оцінювання параметрів моделі.

Ключові слова: IRT, завдання множинного вибору, гніздова логістична модель, мова R, латентні параметри.

Питання аналізу якості різноманітних педагогічних тестів і, зокрема з вищої математики, є одним із ключових у розробці та проведенні тестового контролю знань студентів КПІ ім. Ігоря Сікорського. Це зумовлено, з одного боку, збільшенням масштабів тестового контролю, його широким упровадженням у навчальний процес, з іншого — різноманіттям форм самих тестових завдань та збільшенням їхньої кількості. Значущість тестового контролю потребує застосування сучасних статистичних математичних методів в аналізі якості тестів як у цілому, так і окремих тестових завдань.

Кафедрою математичного аналізу та теорії ймовірностей КПІ ім. Ігоря Сікорського у зв'язку зі створенням комплекту дистанційної освіти «Вища математика» значну увагу було приділено аналізу якості тестових завдань комплекту із застосуванням як класичних методів статистичного аналізу, так і сучасної математичної теорії параметризації тестових завдань, яка носить назву *Item Response Theory* (IRT) (Van der Linden & Hambleton, 1997).

В основу аналізу якості тестових завдань комплекту «Вища математика» було покладено дихотомічні моделі Г. Раша та А. Бірнбаумана, політомічну модель Мастерса, а також модель із множинним вибором Тіссена — Стейнберга (Van der Linden & Hambleton, 1997).

Спільним для всіх цих моделей є набір латентних параметрів, що визначають відповідні ймовірності й оцінюються на підставі розв'язання певних нелінійних систем. Програмна реалізація алгоритмів розв'язання зроблена як частина системи автоматизованого аналізу якості тестових завдань. Програмну реалізацію системи здійснено на базі мови програмування С#.

У тестах з вищої математики, які пропонуються студентам КПІ ім. Ігоря Сікорського, є завдання із множинним вибором, які передбачають вибір однієї правильної відповіді із декількох:

Особливістю цього завдання є те, що для відповіді на нього достатньо обчислити похідну й упізнати правильний варіант (С), який явно відокремлюється від інших відповідей, які називають *дистракторами*. Ці дистрактори об'єднують у групу, яку називають «гніздо».

Знайдіть похідну функції $\operatorname{tg} e^{\cos x}$. Оберіть один з варіантів:	
A $\dfrac{e^{\cos x}\sin x}{\cos^2 e^{\cos x}}$;	**C** $-\dfrac{e^{\cos x}\sin x}{\cos^2 e^{\cos x}}$;
B $-\dfrac{e^{\sin x}}{\cos^2 e^{\cos x}}$;	D $-\dfrac{e^{\sin x}\cos x}{\cos^2 e^{\cos x}}$.

Для аналізу таких завдань американськими математиками Су та Болтом була запропонована гніздова логістична модель (Suh & Bolt, 2010). Нехай L — кількість завдань в тесті, h_j — кількість варіантів відповіді в j-му завданні, $j = 1, 2, \ldots, L$. Тоді ймовірність вибору правильного варіанту відповіді визначають за формулою

$$P_j\left(\theta_i\right) = \gamma_j + (1-\gamma_j)\left[\frac{1}{1+\exp\left\{-(\beta_j + \alpha_j\theta_i\right\}}\right], i = \overline{1,N}, j = \overline{1,L},$$

де

- θ_i — підготовленість іспитника,
- γ_j — імовірність угадування відповіді,
- β_j — складність варіанту відповіді,
- α_j — диференціююча спроможність варіанту відповіді,
- $j = \overline{1,L}$ — номер завдання.

Стратегія вибору правильного варіанту відповіді відображається формулою ймовірності вибору правильного варіанту, який може бути або вгаданий з імовірністю γ_j або не вгаданий, а вибраний свідомо відповідно до підготовленості іспитника, складності варіанту відповіді і його диференціюючої спроможності.

Натомість імовірність вибору k-го дистрактора обчислюють за формулою повної ймовірності і є добутком імовірності «не вибору» правильної відповіді на ймовірність вибору відповідного дистрактора за наступною ймовірністю

$$P_{jk}\left(\theta_i\right) = \left\{1 - \left[\gamma_j + (1-\gamma_j)\frac{1}{1+\exp\left\{-(\beta_j + \alpha_j\theta_i)\right\}}\right]\right\}\left[\frac{\exp\left\{Z_{jk}(\theta_i)\right\}}{\sum_{s=1}^{h_j}\exp\left\{Z_{js}(\theta_i)\right\}}\right],$$

$$i = \overline{1,N}, j = \overline{1,L}, k = \overline{1,h_j},$$

де $z_{jk}(\theta_i) = \zeta_{lk} + \lambda_{jk}\theta_i$ — багатовимірний логіт.

Оцінка латентних параметрів гніздової логістичної моделі здійснюється на підставі метода максимальної вірогідності.

У 2016 році у магістерській дипломній роботі Н. М. Кузмич було зроблено експериментальну програму оцінки параметрів гніздової логістичної моделі. Але, як показали подальші дослідження, для оцінки параметрів логістичної моделі можливе застосування пакету mcIRT який написано мовою статистичного програмування R, і відповідний код розміщено на сайті

http://cran.us.r-project.org.

Це дало можливість:

1) використати перевірений алгоритм оцінки параметрів;

2) уточнити відповідні оцінки латентних параметрів, що покращило базу «каліброваних» завдань;

3) розширити можливості графічного аналізу характеристичних кривих дистракторів;

4) скористатись запропонованими в пакеті можливостями з моделювання результатів тестування;

5) скоротити час обчислення;

6) уточнити вибір початкових значень параметрів.

Список літератури

Cran.us.r-project.org. (2017). *The Comprehensive R Archive Network*. [online] Available at: http://cran.us.r-project.org

Suh, Y, & Bolt, D. M. (2010). Nested logit models for multiple-choice item response data. *Psychometrika*, *75*, 454–473.

Van der Linden, W. J., & Hambleton, R. K. (Eds.). (1997). *Handbook of modern item response theory*. Springer New York.

МОДЕЛЮВАННЯ ДАНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ ТЕСТУВАННЯ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ЗА ДОПОМОГОЮ МОВИ R

О. О. Диховичний, А. Ф. Дудко, Н. В. Прохоренко
КПІ ім. Ігоря Сікорського , Київ, Україна
a.dyx@ukr.net

У роботі розглянуто моделювання результатів тестування згідно з заданими IRT-моделями із застосуванням мови статистичного програмування R.
Ключові слова: тест, IRT, матриця відповідей, латентний параметр, мова R.

Аналіз якості різноманітних тестів, зокрема з вищої математики, неможливий без застосування сучасних комп'ютерних технологій, основу яких складають методи сучасної математичної теорії параметризації тестових завдань, яка носить назву *Item Response Theory* (IRT) (Van der Linden & Hambleton, 1997).

IRT побудовано на ідеї Г. Раша впровадження так званих латентних параметрів (Van der Linden & Hambleton, 1997), а саме:

— підготовленості іспитника θ_i, $i = \overline{1,N}$, де N — кількість іспитників;

— складності завдання тесту β_j, $j = \overline{1,K}$, де K — кількість завдань у тесті.

Зв'язок між цими параметрами задається імовірністю правильної відповіді i-го іспитника на j-те завдання тесту і для моделі Раша визначають за формулою

$$P_{ij} = \frac{1}{1 + \exp(-(\theta_i - \beta_j))},\ i = \overline{1,N}, j = \overline{1,K}.$$

У роботі пропонується моделювання результатів тестування на підставі IRT-моделей за допомогою мови статистичного програмування R. Актуальність такого підходу зумовлена такими чинниками.

А. Математичні методи оцінювання латентних параметрів використовують результати тестування (матрицю відповідей). Розрахунок латентних параметрів оснований на досить складних математичних процедурах розв'язання нелінійних систем високої розмірності переважно ітераційними методами. Такий розрахунок можливий лише за допомогою застосування комп'ютерних технологій, відповідна програмна реалізація яких потребує ретельного тестування.

На цьому етапі виникає багато складних і важливих проблем, зокрема: вибір оптимальних початкових значень, випадки розбіжності або «зациклювання» ітераційного процесу та інші. Розв'язання цих проблем потребує достовірних вихідних даних, які б були схожі на реальні результати тестування й відповідали певним значенням латентних параметрів. Використання результатів справжнього тестування не вирішить цієї проблеми оскільки: по-перше, проведення справжнього тестування є громіздким і витратним; по-друге, не завжди забезпечить достатньо репрезентативну вибірку результатів, і, головне, справжні значення латентних параметрів ніколи не відомі.

B. Моделювання результатів тестування дозволяє спрогнозувати базові статистичні показники тесту, який складено із завдань з визначеними параметрами для середовища іспитників певного рівня підготовленості.

C. Розвиток компетентності викладача, який проводить тестування, передбачає отримання певного досвіду в інтерпретації та аналізі результатів. Набуття такого досвіду можна забезпечити лише шляхом обробки достатнього обсягу певних результатів тестування з відомими параметрами, отримати такі дані вдається лише шляхом моделювання.

D. Особливістю характеру даних, що представляють результати тестування, є те, що вони математично описуються відповідними логістичними моделями (у найпростішому випадку моделлю Раша), які встановлюють залежність імовірності правильної відповіді від латентних параметрів. Тому застосування для моделювання матриці відповідей стандартних імовірнісних розподілів, таких як нормальний або рівномірний тощо, є неможливим.

Моделювання результатів тестування може бути зроблено з використанням статистичної мови програмування R [2], причому не тільки у випадку дихотомічної моделі Г. Раша, а також для моделі А. Бірнбаума, політомічної моделі Мастерса й моделі із множинним вибором Тіссена — Стейнберга (Van der Linden & Hambleton, 1997). При написанні кодів ми використовували наступні пакети з сайту http://cran.us.r-project.org/:

1) eRm (звичайна модель Раша для дихотомічних данних, модель Мастерса);

2) lme4 (узагальнена модель Раша);

3) ltm (модель Раша, модель Бірнбаума);

4) plink (модель Тіссена — Стейнберга).

Висновки. 1. Мова статистичного програмування R надає ефективні засоби моделювання результатів педагогічного тестування, зокрема з вищої математики.

2. Моделювання репрезентативних вибірок даних тестування із заданими параметрами дозволяє ретельно перевірити програми оцінювання латентних параметрів.

3. Використання даних, отриманих статистичним моделюванням, дозволяє прогнозувати основних статистичних показників тесту.

4. Робота викладача з перевіреними даними надає практичний досвід з аналізу та інтерпретації результатів тестування й дозволяє суттєво підвищити компетентність викладача.

Список літератури

Cran.us.r-project.org. (2017). *The Comprehensive R Archive Network*. [online] Available at: http://cran.us.r-project.org

Van der Linden, W. J., & Hambleton, R. K. (Eds.). (1997). *Handbook of modern item response theory*. Springer New York.

ПРОБЛЕМА ЛУЗІНА ТА ЛЕННАРТ КАРЛЕСОН

В. В. Дрозд
КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
slava572@ukr.net

Доповідь присвячена історії розв'язання відомої проблеми М. М. Лузіна про достатні умови збіжності майже скрізь тригонометричного ряду Фур'є.

Ключові слова: тригонометричні ряди, ряд Фур'є, збіжність майже скрізь.

Відомо, що будь-якій 2π-періодичній сумовній функції можна однозначно поставити у відповідність її ряд Фур'є

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx .$$

Числовий ряд вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)\lambda(n)$$

називатимемо *рядом Вейля*, де функція $\lambda(n)$ є додатною та монотонно неспадною. Називатимемо її *функцією Вейля*. У 1906 році Фату (Fatou, 1906) показав, що зі збіжності ряду Вейля при $\lambda(n) = n$ випливає збіжність ряду Фур'є майже скрізь на проміжку $[0;2\pi]$. У 1909 році сам Вейль (Weyl, 1909) показав, що це твердження залишається правильним при $\lambda(n) = \sqrt[3]{n}$.

Оскільки Вейль першим звернув особливу увагу на подібні твердження, російський математик М. М. Лузін запропонував називати *ознакою типу Вейля* наступне твердження: якщо при певному значенні функції Вейля ряд Вейля збігається, то ряд Фур'є збігається майже скрізь на проміжку $[0;2\pi]$.

У 1913 році Гобсон (Hobson, 1913) показав, що ознака Вейля має місце, коли

$$\lambda(n) = n^{\alpha}$$

при будь-якому додатному α. У тому ж 1913 році Планшерель (Plancherel, 1913) довів, що ознака Вейля діє при

$$\lambda(n) = \ln^3 n.$$

Після цього Харді (Hardy, 1913) показав, що твердження правильне при

$$\lambda(n) = \ln^2 n.$$

У 1915 році М. М. Лузін, розуміючи, що чим повільніше зростає функція Вейля, тим сильнішою є ця ознака, підкреслював важливість задачі про зниження порядку зростання множника Харді. Він висунув припущення, що збіжність ряду Вейля при $\lambda(n) = 1$ є достатнім для збіжності ряду Фур'є майже скрізь на проміжку $[0;2\pi]$. Це еквівалентно твердженню, що ряд Фур'є збігається майже скрізь на проміжку $[0;2\pi]$ для будь-якої функції, інтегровної із квадратом.

На вирішення цієї проблеми на протязі п'ятдесяти років було витрачено багато зусиль. Зокрема у 1925 році в роботі Колмогорова та Селіверстова (Kolmogorov & Seliverstov, 1925) і незалежно від них у роботі А. Плесснера (Plessner, 1925) було показано, що ознака Вейля має місце при $\lambda(n) = \ln n$.

Протягом наступних сорока років зменшити порядок зростання цього множника нікому не вдавалось. Але й неможливість такого зменшення не було доведено.

Нарешті в 1966 році шведський математик Леннарт Карлесон (Carleson, 1966) підтвердив гіпотезу Лузіна. Тобто, він довів, що

$$\left(f \in L_p\right) \Rightarrow \left(\lim_{n\to\infty} S_n\left(f;x\right) = f(x)\right)$$

для $p = 2$ та майже для всіх $x \in [0;2\pi]$ (під знаком границі стоїть часткова сума Фур'є). Пізніше Хант (R. A. Hunt) довів, що це твердження правильне для будь-якого $p > 1$.

Крім того, Карлесон значно посилив відому оцінку Літлвуда та Пелі:

$$\left(f \in L_p, 1 \le p \le 2\right) \Rightarrow S_n\left(f;x\right) = o\left((\ln n)^{1/p}\right)$$

майже для всіх $x \in [0;2\pi]$. У тій же роботі він довів, що майже для всіх $x \in [0;2\pi]$

$$\left(f \in L_p, p > 1\right) \Rightarrow S_n\left(f;x\right) = o\left(\ln\ln\ln n\right).$$

Уважають, що ці фундаментальні результати були головною підставою того, що у 2006 році Леннарт Карлесон був нагороджений Абелевською премією.

У рамках розв'язання проблеми Лузіна ряд математиків вивчали таке цікаве питання: якщо збігається ряд Вейля при певному $\lambda(n)$, то що можна сказати про множину точок розбіжності ряду Фур'є? Відомо, наприклад, що при $\lambda(n) = \ln n$ існує така неперервна функція, ряд Фур'є якої розбігається в точках, які утворюють нескінченну множину.

Вивчення цього питання призвело до необхідності класифікації числових множин, лебегова міра яких дорівнює нулеві. У зв'язку з цим виникло поняття *місткості* таких множин, а саме логарифмічної місткості, α-місткості, опуклої місткості.

Список літератури

Carleson, L. (1966). On convergence and growth of partial sums of Fourier series. *Acta Mathematica, 116*(1), 135–157.

Fatou, P. (1906). Series trigonometriques et series de Tailor. *Acta Mathematica, 30*, 335–400.

Hardy, G. H. (1913). On the summability of Fourier's series. *Proceedings of the London Mathematical Society, 2*(1), 365–376.

Hobson, E. W. (1913). On the convergence of series of orthogonal functions. *Proceedings of the London Mathematical Society, 2*(1), 297–308.

Kolmogorov, A. N., & Seliverstov, G. (1925). Sur la convergence des séries de Fourier. *CR Acad. Sci. Paris, 178*, 303–305.

Plancherel, M. (1913). Sur la convergence des séries de fonctions orthogonales. *CR Acad. Sci. Paris, 157*, 539-542.

Plessner, A. (1926). Über Konvergenz von trigonometrischen Reihen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, *155*, 15–25.

Weyl, H. (1909). Über die Konvergenz von Reihen, die nach Orthogonalfunktionen fortschreiten. *Mathematische Annalen*, *67*(2), 225–245.

МИХАЙЛО ПИЛИПОВИЧ КРАВЧУК — ГОРДІСТЬ І СЛАВА УКРАЇНСЬКОЇ НАУКИ (до 125-річчя від дня народження)

Н. М. Задерей, Г. Д. Нефьодова
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»,
matan@kpi.ua

«Син неба»
«Поет німого числа»
«Лицар математики»
«Корифей математики»
«Творець музики чисел»
«Математик світової слави»
«Титан математичної думки»
«Велет української науки»
«Учений з обличчям Христа»

Михайло Пилипович Кравчук (1892—1942) — найвидатніший український математик XX століття, всесвітньовідомий учений, педагог, громадський діяч, академік Всеукраїнської академії наук. Земний шлях українського математика пройшов від Волині до Колими. Народився Михайло Пилипович Кравчук 27 вересня (9 жовтня за новим стилем) 1892 року в селі Човниця Ківерцівського повіту на Волині в сім'ї землеміра. Дитячі роки майбутній учений провів у мальовничому селі на березі річки з колоритною українською назвою Конопелька.

Батько його, Пилип Йосипович Кравчук, син селянина-шевця, закінчив Петровсько-Розумовську академію в Москві (нині Московська сільськогосподарська академія імені К. Тімірязєва). Мати, Фредеріка, полька за походженням, була освіченою жінкою, вільно володіла кількома іноземними мовами — польською, французькою, німецькою, грала на фортепіано. Походила Фредеріка зі збіднілої родини, працювала гувернанткою в Рафалівці, де й зустрілася з Пилипом Кравчуком.

У родині Пилипа і Фредеріки Кравчуків було четверо дітей: Костянтин, Вікторія, Михайло та Єва. Вихованням дітей та підготовкою їх до гімназії займалася здебільшого мати, оскільки батько працював, і робота землеміра забирала багато часу. У сім'ї розмовляли українською мовою, хоча мати вчила дітей і польської, і французької, і німецької. Михайло вчився охоче, з дитинства відрізнявся старанністю та охайністю, і якщо в початкових класах подеколи траплялися четвірки, то у старших класах гімназії в загальній відомості про успішність та поведінку рясніли лише п'ятірки[1].

Після закінчення з золотою медаллю гімназії в місті Луцьку в 1910 році Михайло Кравчук вступає на математичне відділення фізико-математичного факультету імператорського Університету Святого Володимира в місті Києві. Такі видатні вчені, як професори В. П. Єрмаков (1845—1922), Д. О. Граве (1863—1939), Г. В. Пфейффер (1872—1946), Б. Я. Букреєв (1859—1962) були першими вчителями студента Михайла Кравчука в університеті. Творча атмосфера наукових семінарів з теорії груп, теорії еліптичних функцій під керівництвом професора Д. О. Граве сприяла розвитку математичних здібностей талановитого юнака, пробуджувала в нього інтерес до нового, впливала на вибір напрямів перших наукових пошуків та досліджень.

Уже у студентські роки Михайло Кравчук опублікував перше самостійне дослідження з теорії комутативних матриць, яке було надруковано в 1914 році в «Записках Харьковского математического общества». У цій роботі узагальнюлась відома теорема німецького математика Шура про верхню границю числа лінійно незалежних матриць n-го порядку переставної групи, причому вказуються типи матриць, відповідних зазначеному узагальненню.

По закінченню університету в 1914 році за клопотанням професорів Д. О. Граве та Б. Я. Букреєва Михайло Кравчук був залишений при університеті для підготовки до професорського звання.

У зв'язку з евакуацією університету на Схід через наближення військових дій та закриття університетської бібліотеки, М. П. Кравчук змушений був на зиму 1915—1916 років переселитися в інше університетське місто. Узимку 1915 року Михайло Кравчук приїхав до Москви, де познайомився з багатьма провідними математиками, відвідував наукові семінари, зокрема, семінар з теорії функцій професора Д. Ф. Єгорова, прослухав цикли лекцій професорів М. М. Лузіна, Б. К. Млодзеєвського та інших.

Повернувшись до Києва й успішно склавши магістерські іспити, Михайло Пилипович прочитав 5 вересня 1917 р. свою першу так звану випробну лекцію

[1] Зі слів жительки села Човниці А. С. Соколюк (1888—1973), що три роки проживала у Луцьку в сім'ї Кравчуків.

із предмету чистої математики «Про функції, що справджують теорему додавання», а згодом, і першу лекцію з теорії множин і здобув звання приват-доцента. З того часу почалася напружена титанічна робота М. П. Кравчука, присвячена розвитку української науки та освіти. Він викладає математичні дисципліни в Українському народному університеті, політехнічному, архітектурному, ветеринарно-зоотехнічному та сільськогосподарському інститутах та в першій і другій українських гімназіях. У цей період М. П. Кравчук публікує свій курс лекцій з геометрії та перший переклад українською мовою відомого підручника з геометрії Кисельова, разом з академіком Федором Калиновичем укладає тритомник українського математичного словника.

У важкі роки громадянської війни М. П. Кравчук виїздить з молодою дружиною Есфірою Йосиповною (1894—1957), з якою він одружися в 1918 році, в село Саварку Богуславського району. Там Михайло Пилипович працює з 1919 по 1921 рік директором школи та вчителем математики. Новий вчитель докорінно змінює методи навчання, пробуджує у школярів інтерес до науки, до самостійної творчості. Одним з його учнів у цій школі був Архип Люлька. У майбутньому Архип Михайлович Люлька (1908—1984) — всесвітньовідомий вчений, академік, генеральний конструктор авіаційних двигунів, творець перших у світі турбокомпресорного і турбореактивного двигунів.

Повернувшись до університету, Михайло Пилипович поринув у наукову діяльність. У першій половині 20-х років він отримав фундаментальні результати з теорії змінних матриць, теорії білінійних форм та лінійних перетворень, які він поклав в основу докторської дисертації, що була успішно захищена 14 грудня 1924 року. Це був перший в УРСР захист докторської дисертації. Згодом М. П. Кравчук зацікавився питаннями узагальненої інтерполяції. У 1925 році М. П. Кравчуку було присвоєне звання професора.

Математичні інтереси вченого розширюються, його праці відзначаються оригінальністю ідей, нестандартністю підходів до математичних проблем. У вересні 1928 року Михайло Пилипович вирушає на Міжнародний математичний конгрес в Італію (м. Болонья). Дорогою виступає на засіданні Математичного товариства в Парижі. На конгресі молодий український професор установлює дружні стосунки з відомими вченими Франції, Італії, Німеччини: Ж. Адамаром, Р. Курантом, Ф. Трікомі, Т. Леві-Чівіта, Д. Гільбертом та іншими.

Ось уривок листа відомого французького математика Жака Адамара (1865—1963) до М. П. Кравчука: «Дорогий друже, нарешті одержав обіцяні Вами ваші ж наукові праці. Як одна, так і друга приємно вразили мене своєю новизною. Такі складні проблеми і такі прості розв'язання! Тільки генію таке під силу! Не відаю, як довго судилося Вам жити, але що б з Вами не сталося — Ваше ім'я вже навічно записане на скрижалях математичної науки...» [1]. Михайло Кравчук — перший українець, що успішно репрезентував разом з колегами вітчизняну математику на міжнародному рівні. Він також брав участь у роботі математичного конгресу в Цюріху в 1932 році, де виступив з доповіддю із проблем моментів.

У 1929 році понад 30 організацій висунули кандидатуру М. П. Кравчука в дійсні члени Всеукраїнської академії наук, і на засіданні Ради Академії його було обрано академіком одностайно. У віці 37-ми років він став наймолодшим академіком ВУАН. Разом з ним на цьому засіданні академіками ВУАН стали Д. Яворницький, П. Тичина, О. Леонтович, Є. Патон, М. Вавілов, О. Богомолець, О. Паладін та багато інших відомих згодом діячів науки та культури України.

Наступні вісім років виявилися найпліднішими у творчості М. Кравчука.

Найбільша (за числом праць) частина наукової спадщини Михайла Кравчука належить до теорії диференціальних та інтегральних рівнянь. Ця тематика була традиційною для київських математиків 20—30-х років XX ст. Досить згадати дослідження М. М. Крилова, М. М. Боголюбова, Г. В. Пфейффера та інших. Великий внесок зробив до цього розділу математики М. Кравчук. Він успішно розвинув метод найменших квадратів у теорії наближеного інтегрування диференціальних та інтегральних рівнянь. Метод найменших квадратів професор Кравчук досліджував у двох напрямках: у напрямку зменшення похибки наближених розв'язків та в напрямку доведення збіжності похідних від цих наближень при відповідних граничних умовах і відповідному наборі функцій, з яких складається наближений розв'язок. Результати цих досліджень М. П. Кравчук доповів на Міжнародному математичному конгресі в Болоньї в 1928 році.

Переважна більшість праць М. П. Кравчука з теорії наближеного інтегрування присвячена розвиткові та застосуванню методу моментів до наближеного розв'язування звичайних лінійних диференціальних рівнянь, лінійних рівнянь математичної фізики, диференціальних рівнянь з частинними похідними та інтегральних рівнянь.

Основна ідея методу моментів — визначити функцію на даному інтервалі через моменти на тому самому інтервалі, тобто через інтеграли

$$\int_a^b f(x)\varphi_i(x)dx \qquad (i = 1,2,\ldots),$$

де $\varphi_i(x)$ — задані функції.

Найзначніші свої результати з теорії моментів М. П. Кравчук виклав у фундаментальній двотомній монографії «Застосування способу моментів до розв'язання лінійних диференціальних та інтегральних рівнянь» (1936 р.).

Перший том — це дослідження методу моментів у його застосуванні до наближеного розв'язування звичайних лінійних диференціальних рівнянь та систем цих диференціальних рівнянь. У другому томі розглядаються лінійні рівняння з частинними похідними математичної фізики.

У 2001 році дослідником праць М. Кравчука Іваном Качановським (США) в архівах Смітсонівського Музею Американської історії у Вашингтоні та університету штату Айова в Еймсі була знайдена перекладена англійською мовою двотомна монографія Кравчука «Застосування способу моментів до розв'язання лінійних диференціальних та інтегральних рівнянь». Переклад здійснено американським математиком і фізиком, винахідником першого електронного комп'ютера Джоном Вінсентом Атанасовим. Ще в 1937 році в листі до академіка Кравчука він писав, що публікації українського математика виявились дуже корисними в його роботі, і він хотів би мати копії всіх праць вченого, вміщених в українських журналах [3].

Скоріше всього, М. П. Кравчуку не судилося дізнатися про це визнання і застосування свого наукового доробку, бо вже розпочався його хресний шлях на Колиму, де він і загинув через чотири роки. Не отримавши відповіді від Кравчука, Д. Атанасов 16 листопада 1937 року надсилає до Києва ще одного листа на адресу Асоціації культурних зв'язків з іноземними країнами. Він просить повідомити, чи дійшов лист до М. П. Кравчука, і чому він не відповів. Водночас Д. Атанасов повідомив, що їхня бібліотека замовила через посередників у Німеччині всі книги М. Кравчука і просить надіслати йому дві монографії вченого. І. Качановський вважає, що монографію, котру Д. Атанасов переклав англійською мовою, він отримав через німецьких посередників. Учені Д. Атанасов і К. Беррі плідно працювали і в листопаді 1939 року з'явилися перші начерки комп'ютера ABC (за першими літерами Atanasoff–Berry Computer). З кінця 1939 року до середини 1942 року вони розробляли та проектували комп'ютер. Машина була сконструйована з єдиною метою — для розв'язання великих систем лінійних алгебричних рівнянь. Атанасов не спромігся отримати патент на свій ABC й існує думка, що Д. Атанасов не заявив авторського права через те, що вважав співавтором і М. Кравчука. Як порядний і ретельний вчений, він визнавав, що математичною основою комп'ютера ABC були ідеї, запозичені в М. Кравчука.

Американський науковець Іван Качановський, уродженець Волині, стверджує, що світ не лише пізнає Україну через Михайла Кравчука, а й має йому багато в чому завдячувати у своєму поступі до прогресу.

Тяжка година випробування настала для М. П. Кравчука у 1937 році.

Особиста трагедія вченого була наслідком ряду подій, що відбувалися в Україні, зокрема і у ВУАН. Академія наук довгий час чинила опір політизації, напруженість у стосунках ВУАН з державою зростала. Самовіддана праця М. П. Кравчука в ім’я розбудови української науки, його авторитет не могли залишитись непоміченими органами тоталітарного режиму, треба було визначатись політично. Восени 1929 року почалися арешти у справі Спілки визволення України (СВУ). Серед арештованих — багато знайомих М. П. Кравчука, людей, із якими він мав наукові та дружні стосунки. Щойно обраному академіку пропонують ганебну роль «громадського обвинувача» на процесі СВУ. М. Кравчук, пославшись на хворобу, відмовляється обвинувачувати віце-президента ВУАН Сергія Єфремова та інших вчених. Було зрозуміло, що цією відмовою його кар’єра закінчується. На жаль, не тільки кар’єра, а й життя...

З того часу почали збирати фальшиві докази його «шпигунської» та «контрреволюційної» діяльності. 14 вересня 1937 року в газеті «Комуніст» було надруковано статтю «Академік Кравчук рекламує ворогів», підписана директором Інституту математики Академії наук України Д. Граве та науковим секретарем інституту К. Бреусом, де повідомлялось про те, що М. Кравчук позитивно оцінив праці математиків, яких НКВД заарештувало, як «ворогів народу», зокрема свого учня В. Можара. З’являються погромні статті, улаштовують відомому вченому ганебні судилища в стінах політехнічного інституту, університету, відвертаються від нього колишні колеги, аспіранти. Ставляться під сумнів його математичні досягнення, указують на нього, як на прихованого націоналіста, який намагається займатися антирадянськими діями.

Небагатьом вистачило громадянської мужності стати на захист вченого. Серед таких сміливців були Й. Погребинський, Ю. Соколов, О. Смогоржевський, М. Чеботарьов, П. Бондаренко, В. Зморович.

21 лютого 1938 року керівництвом НКВС УРСР було підписано ордер № 1699 про арешт М. П. Кравчука. 21 лютого Михайла Пилиповича заарештували, того ж дня співробітники УДБ НКВС УРСР Ладков і Шубняков провели

ретельний обшук у квартирі родини, що мешкала в місті Києві за адресою вул. Енгельса (нині Лютеранська), 21, кв. 23 в будинку наукових співробітників. Уже через два дні, 23 лютого 1938 року Президія Академії наук УРСР на чолі з президентом Академії наук О. Богомольцем ухвалила рішення вивести М. П. Кравчука, члена багатьох закордонних математичних товариств, зі складу дійсних членів АН УРСР.

В обвинувальному вироку М. П. Кравчука визнали активним учасником і керівником націоналістичної організації. У результаті — вирок «виїзної сесії» Військової колегії Верховного Суду СРСР: 20 років тюремного ув’язнення і 5 років позбавлення політичних прав. Михайло Кравчук подавав дві скарги, де пояснював, що ув’язненим обмовив себе за умов тяжкого морального та фізичного впливу, але на жодну скаргу відповідей не було. З Києва він був відправлений через 10 тисяч кілометрів до Владивостока, а звідти, у трюмі суховантажного судна «Джума», до Магадану, а далі у зловісні колимські копальні в нелюдські умови: морози сягали 60°, щоденна норма добування породи гірником становила півтори тони (можна порівняти з нормами царських каторжан у Нерчинську: не більше півсотні кілограмів). Із хворим серцем Михайло Кравчук не міг довго протриматись у забої. Замучений тяжкими умовами, хворобами, отримавши інвалідність, М. Кравчук звертається із третьою скаргою до Москви — до Голови Верховного Суду й Генерального прокурора СРСР. Але відповіді на свою скаргу не дочекався.

Зі слів політв’язня Миколи Попова, якому пощастило вижити: «У цих жахливих умовах зустрів я в 1942 році на Мальдяку українського академіка, знаменитого математика Михайла Пилиповича Кравчука. Було йому, мабуть, літ п’ятдесят. Повернувшись із шахти, він улаштовувався біля залізної пічки, діставав свої папери, робив записи — якісь математичні викладки. Добре пам’ятаю, що свої труди він періодично здавав табірному політкерівнику — лише за таких умов йому вдалось добитись дозволу на заняття такою справою… Його місце на нарах було знизу, а моє зверху над ним. Одного ранку, на оклик старости табору: «Подимайсь!» — Кравчук не схопився, як то завжди бувало. Староста ударив його палицею, яку звали «будильником», однак академік не ворухнувся — він лежав мертвий... »[2]

9 березня 1942 року великого академіка не стало. Так пішов з життя талановитий український вчений, що творив до останнього подиху. Навіки залишився в колимській мерзлоті...

Наукові праці українського математика М. П. Кравчука (понад 180 робіт) стосуються різних розділів математики: алгебри і теорії чисел, математичного аналізу й теорії диференціальних та інтегральних рівнянь, теорії ймовірностей та математичної статистики, історії математики. Його наукові роботи увійшли до скарбниці світової науки і стали зразком для наслідування.

[2] Мемуари Анатоля Костенка «Лук’янівська в’язниця. Зона», 1993 р.

Наукові здобутки видатного українця знаходять застосування в різних розділах теоретичної і прикладної математики:

- випадкові блукання, симетричні матриці Кравчука та біноміальні сподівання;
- мартингали, поліноми Кравчука й мультиноміальні розподіли;
- алгебри Лі та поліноми Кравчука;
- групи Лі, відображення, матриці Кравчука та групові елементи;
- квантова ймовірність та тензорна алгебра, матриці Кравчука як власні вектори;
- коефіцієнти Клебша — Ґордана та поліноми Кравчука;
- перетворення Кравчука;
- поліноми Кравчука як гіпергеометричні функції;
- Ґаусові квадратури. Нулі поліномів Кравчука. Сумація Ґауса – Кравчука;
- теорія кодування [2].

В останні роки з'явилася ціла низка наукових праць у галузі прикладної математики і комп'ютерних наук, у яких використано ідеї М. П. Кравчука. Так, у 2003-му році науковці університету Малайї (Малайзія) запропонували новий метод оброблення та реконструкції зображень за допомогою моментів Кравчука. У 2006-му році грецькі вчені доповіли про трьохвимірні пошукові алгоритми, побудовані на трьохвимірних моментах Кравчука, для оброблення тривимірних зображень. У 2009-му році група вчених із Франції, США та Німеччини показала ефективність застосування зважених трьохвимірних моментів Кравчука як засобу аналізу даних для розпізнавання характеру пухлин. Використання поліномів та перетворення Кравчука в теорії кодування, розпочате ще в 70-х роках XX століття, активно триває й нині [2].

Нація матиме майбутнє, коли пам'ятатиме й шануватиме своїх великих синів. У фундаменті українського відродження золотими цеглинами закладено здобутки великого громадянина, видатного вченого-математика М. П. Кравчука. Його життя стало легендою для нині сущих та прийдешніх поколінь.

Бездержавна нація, підневільний народ у часи радянської влади втрачав генофонд. Найкращих влада безбожно нищила, як небажаних свідків власної нікчемності, прикриваючись ідеологією химерних ілюзій, у яку

сама не вірила. Цим пояснюється тривале замовчування, навіть і після реабілітації, слави геніального подвижника науки Михайла Пилиповича Кравчука, людини чиїм ім'ям пишається наша рідна Україна [7].

Як непросто було піднімати із забуття ім'я репресованого вченого, по крихті збирати інформацію про його життя та творчість! Адже міру покарання М. П. Кравчуку (це стало відомо із розсекречених документів), персонально визначили такі тирани, як Сталін, Молотов і Жданов [6]. Завдяки зусиллям багатьох науковців, у тому числі й науковців зі США та Австралії, ім'я Михайла Кравчука повернулося в український науковий пантеон. Доктор фізико-математичних наук, професор Київського політехнічного інституту ім. Ігоря Сікорського Ніна Опанасівна Вірченко присвятила майже 50 років свого життя вивченню життєвого шляху, наукової творчості українського вченого Михайла Пилиповича Кравчука. Не можливо повністю оцінити її внесок в увічнення його пам'яті! Вулиці й гімназії, названі у честь М. Кравчука, документальний фільм про нього, пам'ятники та меморіальні дошки, видання творів вченого та книг про його життя, вісімнадцять міжнародних наукових конференцій імені академіка М. П. Кравчука — у всіх цих великих справах тепло серця Ніни Опанасівни.

«Оглядаючись на пройдений життєвий шлях, кредо якого було "Моє життя — Україна і математика", тепер додаю ще: "Михайло Кравчук і студентство», — зі слів Ніни Вірченко.

Наукові ідеї Михайла Кравчука вивчатимуться, поглиблюватимуться розвиватимуться, адже геній його далеко випередив свій час. Його наукові праці американські та японські вчені застосовували у проектуванні телеапаратури [8]. «Тільки в 2001 році у 15-ти наукових статтях в США були використані праці

Кравчука», — зазначає І. Качановський. У 1992 році ЮНЕСКО внесла ім’я М. Кравчука до переліку найвизначніших осіб.

Як добре те, що смерті не боюсь я
і не питаю, чи тяжкий мій хрест.
Що вам, богове, низько не клонюся
в передчутті недовідомих верств…
Народе мій, до тебе я ще верну,
і в смерті обернуся до життя
своїм стражденним і незлим обличчям,
як син, тобі доземно поклонюсь…

Василь Стус

Список літератури

1. Возняк, Г. М. (2012). *Михайло Кравчук: «Моя любов — Україна і математика»*. Тернопіль: Навчальна книга — Богдан.
2. «Моя любов — Україна і математика». Ювілейна сесія Загальних зборів національної академії наук України, присвячена 120-ій річниці від дня народження академіка М. П. Кравчука. (2013). *Вісник НАН України*, (1), 25—28.
3. Вірченко, Н. О. (2007). *Велет української математики*. Київ: Задруга.
4. Вірченко, Н. О., Гайдей В. О., & Міхно, О. П. (Упоряд.). (2014). *Михайло Кравчук. Вибрані праці: Історія і методика математики*. Київ: НТУУ «КПІ».
5. Вірченко, Н. О. (Упоряд.). (2000). *Михайло Кравчук. Науково-популярні праці*. Київ: НТУУ «КПІ».
6. Кратко, М. І. (Упоряд.). (2011). *Голгофа академіка Кравчука*. Луцьк: ВІППО.
7. Сорока, М. О. (1991). Колимська теорема Кравчука: Біограф. роман (2-ге вид. доп.). Київ: Молодь.
8. Качановський, І. (2002). Український математик М. Кравчук та винахід першого електронного комп’ютера. У *Матеріали IX Міжнародної конференції ім. академіка М. Кравчука* (с. 6). Київ: НТУУ «КПІ».
9. Задерей, Н. М., & Нефьодова, Г. Д. (2013). Про відзначення ювілею академіка М. П. Кравчука. У *Тези доповідей Всеукраїнської літньої науково-методичної математичної школи «Математичний аналіз та теорія ймовірностей»*, 4—7 липня 2013 р., с. Плюти (с. 14—15).
10. Задерей, Н. М., & Нефьодова, Г. Д. (2013). Академік Михайло Кравчук — зірка української математики XX століття. У *Материалах XVIII международной научно-методической конференции «Проблемы совершенствова-ния фундаментального образования»*, Севастополь, 23—27 сентября 2013 г. Севастополь: Изд-во СевНТУ.
11. Задерей, Н. М., & Нефьодова, Г. Д. (2016). Михайло Кравчук, геніальний український математик. У *Матеріалах XVII Міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука*, 19—20 травня 2016 р., Київ (Т. 3, с. 225—232). Київ: НТУУ «КПІ». http://matan.kpi.ua/public/files/kk2016/kravchuk2016-volume3.pdf

ПЕРШИЙ МІЖНАРОДНИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ ФОРУМ ПАМ'ЯТІ АКАДЕМІКА МИХАЙЛА КРАВЧУКА
(до сторіччя від дня народження, 1992 рік)

Н. М. Задерей, Г. Д. Нефьодова
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ, Україна
matan@kpi.ua

У цьому році відбувається ювілейна Вісімнадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука, присвячена 125-річчю від дня народження видатного вченого. Міжнародні математичні форуми, присвячені пам'яті Михайла Кравчука (International Scientific Mykhailo Kravchuk Conference) науковий захід, який з 1992 року збирає у стінах КПІ імені Ігоря Сікорського найкращих представників світової математичної науки. Мета таких форумів, конференцій — стимулювати та узагальнювати наукові пошуки математиків, віддаючи належну шану великому вченому й патріоту України академіку Михайлу Пилиповичу Кравчуку, знищеному тоталітарним режимом.

Постать видатного вченого М. П. Кравчука настільки значима в історії української та світової математичної науки, настільки цікава та багатогранна, що й через десятки років він буде об'єктом дослідження, прикладом, взірцем для багатьох поколінь. Талант науковця-математика поєднувався в нього з високими моральними якостями, різнобічною обдарованістю, незламною силою духу. Михайло Кравчук дуже багато зробив для розбудови математичної освіти та науки в Україні: перші українські школи в місті й у селах, перші курси, перші українські університети, українська математична термінологія, наукова мова, перша всеукраїнська математична олімпіада, перша презентація української математичної школи на міжнародному рівні!

15-го жовтня 1956 року Михайло Кравчук був реабілітований «за відсутністю складу злочину».

Як легко за сталінських часів нелюди засуджували справжніх патріотів і так просто пізніше виправдовували! Та скасований вирок не скасовує страждання і смерті! Реабілітація не означає воскресіння його понівеченої долі, слави, утвердження справедливості по відношенню до імені вченого зі світовим визнанням.

Мине піввіку після трагічної загибелі вченого на Колимі…У травні 1992 року в Київському політехнічному інституті за ініціативою професора Ніни Опанасівни Вірченко, яка провела титанічну роботу відносно повернення з небуття імені вченого, кафедра вищої математики №1 (завідувач професор В. В. Булдигін) організовує першу в світі Міжнародну наукову конференцію, присвячену 100-річчю від дня народження видатного українському математика М. П. Кравчука. З того часу в стінах столичного вишу, де впродовж сімнадцяти років академік М. П. Кравчук викладав математичні дисципліни, міжнародні наукові конференції його імені стали традицією.

М. П. Кравчук відмічав важливість наукових семінарів, з'їздів, конференції в першу чергу для молодих науковців: «З'їзди, на яких зусиллями сотень людей, десятків наукових організацій дається в стислій формі показ найновіших досягнень, найяскравіших зразків методики наукової творчості, взаємовпливів ідей, напрямків, шкіл — це неоцінення школа для молодого науковця, тут він черпає собі теми, виробляє свої методологічні та філософські настанови, тут він критично зважує свої роботи, здобуває наснагу для подальшої роботи».

Нинішній рік теж ювілейний, минає рівно чверть століття з часу першого математичного форуму, присвяченого пам'яті Михайла Кравчука. Передувала цій першій конференції студентська конференція «Студент і науково-технічний прогрес», яка відбувалася 13 - 16 травня 1991 року. Організаторами студентської конференції були професори кафедри вищої математики №1 Київського політехнічного інституту Вірченко Н. О. та Стрижак Т. Г.

На студентській конференції працювали три секції:

— Чисельно-аналітичні методи аналізу.

— Крайові задачі. Інтегральні перетворення.

— Класичні методи математичного аналізу.

Узяти участь у студентській конференції приїхали студенти з різних міст України та колишніх республік СРСР. Були представлені Київ, Львів, Саратов, Куйбишев, Чернівці, Мінськ, Бухара, Уфа, Казань, Душанбе.

Через рік 14 квітня 1992 року велика зала бібліотеки КПІ була вщерть переповнена: там відкривалася І Міжнародна наукова конференція імені акад. М. Кравчука, присвячена 100-річчю від дня народження вченого. Відкрив конференцію ректор КПІ М. З. Згуровський: «Академік Михайло Кравчук створив наукові та духовні цінності, що увійшли в золотий фонд вітчизняної та світової науки. Усе його багатогранне творче і громадське життя було тісно пов'язане з науковими установами, вузами, школами України. Жодне явище в творенні української математичної науки в двадцятих-тридцятих роках XX століття не робилося без найактивнішої участі Михайла Кравчука».

Учасники I Міжнародної наукової конференції
імені академіка Михайла Кравчука (Київ — Луцьк, 1992рік)

Професор кафедри вищої математики № 1 КПІ Ніна Опанасівна Вірченко детально, хвилююче розповіла про складний життєвий та творчий шлях великого українського вченого, про трагічну його загибель у концтаборі на Колимі 9 березня 1942 року.

Про вшанування пам'яті академіка М. Кравчука на Волині повідав директор місцевої школи Лукащук С. Ф. села Човниця, у якому 27 вересня (9 жовтня за н. с.) 1892 року народився майбутній вчений.

Про роботи академіка Кравчука з теорії функцій розповів професор М. Л. Горбачук. Спогадами про непересічну особистість Михайла Кравчука поділилися його колеги, що працювали з вченим у КПІ: професор В. А. Зморович та доцент Р. Й. Демаховська.

На першій конференції ім. М. Кравчука працювали наступні секції:

— Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування.

— Застосування обчислювальної техніки та математичних методів у наукових дослідженнях.

— Класичні та чисельно-аналітичні методи аналізу.

— Теорія ймовірностей та математична статистика.

У роботі першої наукової конференції прийняли участь учені з багатьох країн світу: України, Білорусі, Росії, Казахстану, Узбекистану, Польщі, Німеччини, Туркменії, Грузії, Азербайджану. Було зроблено 204 доповіді, у тому числі вченими з Києва зроблено 84 наукові доповіді. На конференції була присутня також досить представницька делегація вчених з німецького міста Мюнхен, очолювана завідувачем кафедри вимірювань та автоматики Мюнхенського університету Бундесверу професором Н. Тренклером. Німецькі вчені зробили 12 доповідей.

Зазначимо, що було представленого багато міст України: Київ, Львів, Харків, Івано-Франківськ, Одеса, Луцьк, Вінниця, Чернівці, Запоріжжя, Дніпропетровськ (Дніпро), Кіровоград (Кропивницький). Організаторами конференції були Національний технічний інститут України "Київський політехнічний інститут", Інститут математики НАН України, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Національний педагогічний університет імені М. Драгоманова.

І Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука, с. Човниця, зліва направо: 1 ряд: Я.Гілевич (Франція), В. Дзядик; 2 ряд: Є. Сенета (Австралія), Г. Сита, М. Горбачук, Н. Вірченко

Робота першої Міжнародної конференції імені Михайла Кравчука завершилась у місті Луцьку на Волині, де в гімназії навчався Михайло Кравчук. Там було відкрито меморіальну дошку на приміщенні обласної юнацької бібліотеки — колишньої Луцької гімназії, у якій навчався майбутній учений. Учасники конференції побували в селі Човниця, де народився М. Кравчук. Дитячі роки він провів у цьому мальовничому селі, розташованому на березі річки з колоритною українською назвою Конопелька.

В урочистостях на Волині взяли участь члени-кореспонденти НАН України А. Н. Кочубей, В. К. Дзядик, М. Л. Горбачук (Україна, Київ), професори Н. О. Вірченко, В. Г. Самойленко (Україна, Київ), С. Б. Стєчкін (Росія, Москва), Я. Гілевич (Франція), Є. Сенета (Австралія), А. Я. Бомба (Україна, Рівне), С. В. Перевєрзєв (Австрія), В. Л. Маслюченко (Україна, Чернівці), голова комісії з освіти і науки Рівненської міськради народних депутатів кандидат фізико-математичних наук В. В. Ковтунець (з 2016 року перший заступник міністра освіти та науки України) та багато інших.

З Луцького державного педагогічного інституту імені Лесі Українки (нині Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки) взяли участь у першій конференції ректор професор Б. Й. Заброварний та викладачі фізико-математичного факультету Л. І. Філозоф, І. Р. Ковальчук, П. Є. Антонюк, П. Й. Миронюк, В. Я. Ілляшенко, Д. М. Бушев, З. Ф. Зарицька та інші.

Не менш презентабельними та урочистими були й наступні конференції. Найбільша кількість учасників була на XIV Міжнародній науковій конференції ім. акад. М. Кравчука (19.04—21.04 2012 р.) — понад 1500 чоловік. Найбільша кількість країн, що брали участь у конференції становила 22 країни на XII Міжнародній науковій конференції (15.05—17.05 2008 р.).

Нинішня XVIII Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука присвячена 125-тій річниці від дня народження видатного українського вченого. Дана наукова конференція розпочинається у стінах Східноєвропейського університету імені Лесі Українки в місті Луцьку і завершується у стінах КПІ імені Ігоря Сікорського. Планується відвідування учасниками конференції села Човниця Ківерцівського району, де народився Михайло Кравчук, музею академіка М. П. Кравчука.

Могутній інтелект вченого-українця М. П. Кравчука йшов до фундаментальних розробок своїми, ще ніким не торованими шляхами. У подальшому розробки вченого знадобляться для створення перших електронних обчислювальних машин, розвитку телебачення. Минають роки та праці Михайла Кравчука актуальні й досі. На небосхилі математичної науки яскравою зіркою світить ім'я Михайла Кравчука, яким пишається рідна Україна.

Список літератури

«Моя любов — Україна і математика». Ювілейна сесія Загальних зборів національної академії наук України, присвячена 120-ій річниці від дня народження академіка М. П. Кравчука. (2013). *Вісник НАН України*, (1), 25—28.

Вірченко, Н. (2011). *Зернини з доріг життя мого*. Київ: Задруга.

Вірченко, Н. О. (2007). *Велет української математики*. Київ: Задруга.

Вірченко, Н. О., Гайдей В. О., & Міхно, О. П. (Упоряд.). (2014). *Михайло Кравчук. Вибрані праці: Історія і методика математики*. Педагогічні републікації. Київ: НТУУ «КПІ».

Задерей, Н. М., & Нефьодова, Г. Д. (2013). Академік Михайло Кравчук — зірка української математики XX століття. У *Материалы XVIII международной научно-методической конференции «Проблемы совершенствования фундаментального образования»*, Севастополь, 23—27 сентября 2013. Севастополь: Изд-во СевНТУ.

Задерей, Н. М., & Нефьодова, Г. Д. (2016). Славетна дочка України. Життєвий, творчий та просвітницький шлях професора математики Н.О.Вірченко. У *Матеріали XVII Міжнародної наукової конференції ім. академіка М. Кравчука*. 19—20 травня 2016 р., Київ (т. 3, с. 233—239). Київ: НТУУ.

ПРОФЕСОР Н. О. ВІРЧЕНКО. САМОВІДДАНЕ СЛУЖІННЯ УКРАЇНІ

Н. М. Задерей, Г. Д. Нефьодова
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ, Україна,
matan@kpi.ua

Народе мій, моя єдина доле!
Народе мій, я все тобі віддам,
І серце щире, й розум свій, і душу…
В. Нечипорук

Ніна Опанасівна Вірченко — український науковець, математик, доктор фізико-математичних наук, професор, академік-секретар відділення математики АН ВШ України, віце-президент АН ВШ, Соросівський Професор (1997), заслужений діяч науки і техніки України, лауреат I премії НТУУ «КПІ» (1998), заслужений викладач НТУУ «КПІ» (1999), Почесний професор НТУУ «КПІ» (2005), голова Науково-методичної ради Всеукраїнського товариства політв’язнів та репресованих, член НТШ, Українського, Американського, Австралійського, Бельгійського, Единбурзького, Лондонського математичних товариств, видатний громадський діяч. У творчому доробку Н. О. Вірченко понад 350 наукових та науково-методичних робіт, у тому числі 23 книги, виданих українською, російською, англійською та японськими мовами.

Складним та тернистим був початок життєвого шляху Ніни Опанасівни. Під час навчання на механіко-математичному факультеті Київського університету імені Тараса Шевченка в 1948 році активна, розумна, допитлива, патріотична студентка була заарештована з політичних міркувань. Хоча в ті часи юна українка ще не могла уявити всієї страшної правди про сутність тогочасного політичного режиму, не знала про тисячі невинно репресованих та закатованих діячів науки й культури, серце й душа дівчини прагнули справедливості та свободи, думки та слова іскрилися патріотизмом. Сталінські репресивні жорна відбирали найкращих.

А вона завжди була найкраща! Учасниця гуртка радіотехніки та аеродинаміки (єдина дівчина поміж 29 хлопців!), здійснила 10 стрибків з парашутом, випромінювала масу ідей, проектів. Завжди відверто виказувала свої думки щодо історії України, її незалежності, про боротьбу УПА, займалася рукописними листівками, де правдиво висвічувалися ці питання. За доносом найближчої подруги Діни Решетько (такі імена теж мають бути відомі) 28-го червня 1948 року Ніна Вірченко була заарештована, звинувачена у «політичній змові, таємному заколоті». Як доказ був приведений особистий щоденник, який дівчина вела з 15-ти років. Допити витримала гідно, мужньо, нікого не обмовивши!

Ніна Вірченко отримала жорстокий вирок — 10 років у концтаборах за участь в «українсько-націоналістичній банді». Шість страшних років юна дівчина провела в тайшетських концтаборах (Східний Сибір, Іркутська область). Виснажлива робота в жорстоких умовах, лісоповал, каменярні, знущання нелюдей-наглядачів, непросте оточення, хвороби, голод, холод, утрати друзів, повна ізоляція від рідних, зовнішнього світу.

Серед політв'язнів найбільше було дівчат із Західної України. Як вони любили Україну! У більшості з них життя на волі було пов'язане з боротьбою за незалежність своєї країни в лавах ОУН-УПА. Для Ніни їх розповіді та думки — як одкровення! Розмови з ними — як причастя. Повстанські пісні, яким вона навчилася від них, — гімн незламності та мужності. Поезія Івана Франка, Тараса Шевченка, повстанські пісні були цілющими ліками для спраглих сердець політв'язнів.

Шість жахливих років, кожна година з яких — подвиг, відбула юна Ніна в Сибірських таборах. Мінялись колонії, тяжкі роботи — то лісоповал, то вантажили щось на залізниці, то знесилюючі каменярні, морози понад 40°. Усе витримала, не зламалася. Своїм життям завдячує Ніна Опанасівна тим гордим, мужнім, сердечним українкам, із якими звела її доля в тайшетських таборах. Богдана Бійовська, Мартуся Чорна, Оксана Мешко, Ірина Сеник, Надія Солтис, Нуся Катамай, Тоня Сірик, Мирося Румак, Олена Вітер, Стефа Процак, Стефа Хомчак, Юля Дейнека, Дануся Пилипчук та багато інших. Про своїх посестр із сибірських таборів Ніна Вірченко зберегла багато душевних спогадів.

Навіть відбуваючи покарання, молода Ніна Вірченко хотіла бути корисною: проводила уроки математики, крейдою та дошкою слугували паличка й пісок чи сніг, склала 10 заповідей для української жінки-політв'язня, працюючи деякий час у хліборізці, рятувала в'язнів від голоду, а сама в той час хворіла на туберкульоз, у неї послабшав зір. Українські посестри, які поділили з Ніною Вірченко тяжку долю у таборах, допомагали їй витримати незгоди, вижити в неймовірно тяжких умовах, вселяли та підтримували віру у себе, надавали силу боротися, не схибити та не впасти, вони назавжди лишились у серці та житті Ніни Опанасівни.

Батьки Ніни Вірченко завжди підтримували її, намагалися вирвати зі смертельних сталінських кайданів, добивались побачення з рідною дитиною і таки добилися. Батько проїхав тисячі кілометрів до Східного Сибіру, але йому дозволили побачитись з донечкою лише на відстані 200 метрів, коли вона проходила разом з іншими ув'язненими на роботу, тільки й всього що помахали один одному рукою...

«Задави ж, батьку мій,
ти сльозу на очах
за Вітчизну прийми
мою плату!»

У цих жорстоких умовах горда українка не зрадила ні себе, ні друзів, ні мрій. 30-го січня 1954 року була звільнена, як така, що була засуджена малолітньою, повернулася в Україну, а її незабутні дівчата, посестри, надихнули її почати усе знову.

З цього часу починається надзвичайно активна, напружена, творча та педагогічна діяльність Ніни Опанасівни Вірченко, що неперервно триває понад шістдесят років (Задерей & Нефьодова, 2014). Табори загартували мрійливу дівчину, закохану в романтику та героїку подвигу, виховали стійкого, виваженого та мудрого бійця, який знає, що в недовгому житті немає часу ні на вагання, ні на поразки. Невтомна творча праця, невпинна педагогічна та просвітницька діяльність — усе на благо України, у ім'я її свободи. Н. О. Вірченко знову вступає до Київського університету (дозволено було поновитися лише на заочне відділення), блискуче вчиться і за два роки переводиться на стаціонар. Математичні здібності молодої студентки були настільки вагомими, що її зараховують до аспірантури. Українські вчені-патріоти професори Г. М. Положій, І. І. Ляшко, академік І. Т. Швець поручилися за неї.

Завзята та наполеглива Ніна Вірченко блискуче захищає кандидатську та докторську дисертації. Незважаючи на втрачений у таборах час і здоров'я, перешкоди, що чинила радянська влада щодо колишніх політичних ув'язнених (стеження, обшуки, прослуховування), талановитій українці вдається піднятися на високий рівень у науковому та педагогічному середовищі.

Серце цієї великої людини завжди було сповнене гарячою любов'ю до свого покликання-математики: «Математика — чиста, незрадлива, тонка, глибинна, вірна, гарна, сильна, філігранна, така мила, така багата, дорога, така музична, світла, сонцедайна, гармонійна!» Музикою звучать для нас ці слова Ніни Опанасівни.

Ще 1965 року, працюючи над проблемами математичної фізики, у науковій літературі Ніна Опанасівна натрапила на згадку про математика Михайла Кравчука, у такому контексті, що не могла не зацікавитися долею цього вченого. Активно досліджуючи це питання, з'ясувала, що праці М. Кравчука вилучено з бібліотечних фондів, а сам він, як ворог народу, загинув на Колимі в 1942 році. Недарма через роки, долі випало звести українських вчених, що мали багато спільного, для яких жахи сталінських таборів існували не лише як інформація на папері. Людина із кришталево-чистим серцем, справжній патріот, відданий своїй країні, Ніна Вірченко глибоко перейнялася невідомою трагічною долею М. Кравчука. По крихтах збирала архівні матеріали, свідчення людей, що знали академіка Кравчука, розшукувала його родину, їздила на його батьківщину (село Човниця на Волині) та у село Саварку Богуславського району, де працював директором школи та вчителем математики М. П. Кравчук, вивчала наукові праці вченого. Ніна Опанасівна захопилася геніальністю його творчих ідей, які й донині є джерелом дослідницької наукової роботи математиків усього світу. Михайло Кравчук став для Н. О. Вірченко взірцем служіння науці, чесності та патріотизму.

Жодну справу Ніна Опанасівна не вміє робити упівсили, кожного разу докладає максимум зусиль. Вона домоглась, щоб ім'я Михайла Кравчука асоціювалось і в Україні, і за кордоном зі світовою славою української науки. Титанічних зусиль доклала для цього професор Н. О. Вірченко. «Михайло Кравчук — математик широкого масштабу. Його ім'я добре відоме у світовій математичній науці. Світ не знав лише, що він — українець», — сказав професор математики Є. Сенета (Австралія).

З 1992 року у Київського політехнічному інституті проходять Міжнародні наукові конференції імені академіка М. Кравчука, організатором яких є Н. О. Вірченко. Цього року відбувається вже вісімнадцята конференція, що проходить у Луцьку та Києві. Проведення цих конференцій — справа не тільки почесна, а й дуже відповідальна, складна, потребує високої емоційної та професійної напруги. Ніна Опанасівна має велику допомогу та підтримку з боку кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей КПІ імені Ігоря Сікорського, яку очолює професор О. І. Клесов. Без кафедри Н. О. Вірченко не уявляє свого життя. З 1973 року кожного семестру студенти КПІ мають змогу слухати чудові лекції видатного педагога професора Н. О. Вірченко, яка повною мірою реалізувала свої наукові, педагогічні та організаційні здібності, заслужила глибоку повагу та шану колег і студентів, здобула світове наукове визнання, виховала гідну зміну.

На кафедрі математичного аналізу та теорії ймовірностей працюють і учні Ніни Опанасівни. Віктор Олександрович Гайдей — доцент кафедри, який прийняв естафету від свого вчителя в самовідданій праці організації міжнародних конференцій імені академіка М. Кравчука, для привернення математичної громадськості до вивчення спадщини великого вченого, залучення до участі в конференціях вчених з багатьох країн світу. Активна, напружена, високопрофесійна робота В. О. Гайдея є запорукою продовження великої справи. Крім того, Віктор Олександрович є одним із активних засновників та організаторів вже п’ятьох міжнародних науково-практичних конференцій «Математика у сучасному технічному університеті».

У сьомому корпусі КПІ ім. Ігоря Сікорського обладнано аудиторію імені М. Кравчука (2002), біля шостого корпусу на Музейній площі встановлено пам’ятник вченому, одна з вулиць Києва названа його ім’ям, створено документальний телефільм «Голгофа академіка Кравчука», на батьківщині великого математика встановлено пам’ятну стелу, музей М. Кравчука поповнюється експонатами. У всіх цих великих справах — частини серця Ніни Опанасівни Вірченко.

Н. О. Вірченко — активний діяч Всеукраїнського товариства в’язнів і репресованих, що засновано 3 червня 1989 року, з 1999 року очолює Науково-методичну раду товариства. Науково-методична рада веде дослідницьку роботу. Свій багатий досвід колишні політв’язні, репресовані, депортовані використовують в ім’я ствердження й розбудови соборності української держави, для відродження національної самосвідомості, повернення духовної спадщини. З 1992 року видається журнал «Зона», ведеться просвітницько-виховна робота серед молоді.

Особливу цінність для молоді та історії становлять нариси Н. О. Вірченко про колишніх політв’язнів та репресованих — І. Сеник, О. Вітер, О. Мешко, Б. Бійовську, Є. Концевича та інших. Багато досліджень є у Ніни Опанасівни стосовно українських вчених — М. Остроградського, Г. Вороного, А. Люльки, М. Кравчука, Є. Вікторовського та багатьох інших. Не можна не згадати і праці правозахисного характеру — «Про заборону української мови (XVII — XX ст.)», «Дещо про українську математичну термінологію». Важливою та дуже значимою є для нас книга споминів Ніни Опанасівни «Зернини з доріг життя мого...».

Реабілітована професор Вірченко була лише в 1991 році....

Життєва позиція Ніни Опанасівни Вірченко, відданість ідеалам правди, добра, свободи, полум'яна любов до України, незламність духу дають право стверджувати, що вона з того високого ряду, що освячений іменами Василя Стуса, Вячеслава Чорновола, Михайла Кравчука, Ліни Костенко.

Щемить серце, коли чуєш слова Ніни Вірченко: «Краса тішить розум, серце, душу людини. Краса ж науки полягає у відкритті нових істин, у виявленні стрункості та ладу там, де ще недавно панував хаос. Тільки неперервний рух уперед, угору — до нових вершин істини — така формула прекрасного в науці. І саме математика вносить цю красу в будь-яку науку.»

Подвижницька та просвітницька діяльність професора Н. О. Вірченко знаходить усе більше послідовників, служить надихаючим прикладом та є взірцем для наслідування.

Список літератури

Вірченко, Н. О. (2007). *За Бога, за Україну!* Київ: Задруга.

Вірченко, Н. О. (2011). *Зернини з доріг життя мого...*: *Книга споминів*. Київ: Задруга.

Задерей, Н. М., & Нефьодова, Г. Д. (2010). Взірець служіння Україні та математиці. У *Матеріали XIII Міжнародної конференції імені академіка М. Кравчука* (т. 3, с. 190—191). Київ: НТУУ «КПІ».

Задерей, Н. М., & Нефьодова, Г. Д. (2012). Стежинами життя видатної українки-професора математики Вірченко Н.О. *У Матеріалах XIV Міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука*, 19—21 квітня 2012 р., Київ (т. 4). Київ: НТУУ «КПІ».

Задерей, Н. М., & Нефьодова, Г. Д. (2013). Академік Михайло Кравчук — зірка української математики ХХ століття. У *Материалах XVIII Международной научно-методической конференции «Проблемы совершенствования фундаментального образования»*, Севастополь, 23—27 сентября 2013. Севастополь: Изд-во СевНТУ.

Задерей, Н. М., & Нефьодова, Г. Д. (2014). Ніна Вірченко — видатний педагог і математик. У *Матеріали XV Міжнародної наукової конференції імені академіка М. Кравчука* (т. 4, с. 98—101). Київ: НТУУ «КПІ».

Задерей, Н. М., & Нефьодова, Г. Д. (2016). Славетна дочка України. Життєвий, творчий та просвітницький шлях професора математики Н. О. Вірченко. У *Матеріалах XVII Міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука,* 19—20 травня 2016 р., Київ (т. 3, с. 233—239). Київ: НТУУ «КПІ». http://matan.kpi.ua/public/files/kk2016/kravchuk2016-volume3.pdf

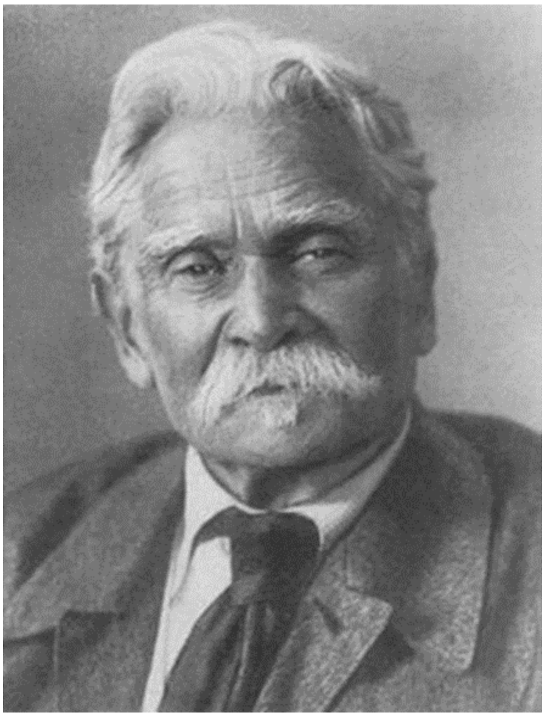
БОРИС ЯКОВИЧ БУКРЕЄВ (06.IX.1859—02.X.1962) — УКРАЇНСЬКИЙ МАТЕМАТИК, ПЕДАГОГ, ТВОРЕЦЬ ТА КЕРІВНИК КИЇВСЬКОЇ ШКОЛИ МАТЕМАТИКІВ

Н. М. Задерей[1], кандидат фізико-математичних наук, доцент
Г. Д. Нефьодова[1], кандидат фізико-математичних наук
І. Ю. Мельник[2], кандидат технічних наук, доцент
[1]НТУУ «Київський політехнічний інститут», Київ, Україна
[2]Київський національний університет культури і мистецтв, Київ, Україна
g.nefyodova@gmail.com, irinam_5656@mail.ru

Столиця України відома в усьому світі як науковий математичний центр завдяки потужним математичним школам та визначним вченим. Математична підготовка в провідних вишах Києва завжди мала фундаментальний характер. Статтю присвячено становленню вищої математичної освіти в Києві в XIX—XX століттях.

Одним з відомих українських вчених, що зробили великий внесок у розвиток навчального та методичного процесу з вищої математики був професор Б. Я. Букреєв. Описується творчий та життєвий шлях вченого-математика.

Ключові слова: історія математики, Київський університет Святого Володимира, Київський політехнічний інститут, Київські Вищі жіночі курси, професор Б. Я. Букреєв, викладання математики у вищій школі.



Математика — богиня наук. У її ніг —
усі науки, і, у першу чергу, — фізика.
Б. Я. Букреєв

Борис Якович Букреєв народився 6 вересня 1859 року в сім'ї штатного доглядача повітового училища в місті Льгові Курської губернії. Батько його закінчив Харківський університет, викладав історію та географію. Початкову освіту Борис Якович отримав удома, а середню — у Курській класичній гімназії, яку закінчив зі срібною медаллю. Досить рано, під впливом вчителя математики гімназії В. Р. Домбровського, у Бориса Яковича проявилися математичні здібності та любов до математики.

Восени 1878 року Б. Я. Букреєв вступив на математичне відділення фізико-математичного факультету Київського університету Св. Володимира. Викладали вищу математику в нього В. П. Єрмаков, М. Є. Ващенко-Захарченко, П. Є. Ромер, фізику — М. П. Авенаріус, механіку — І. І. Рахманінов. Особливо великий вплив на студента Букреєва мав професор В. П. Єрмаков. У 1880 році студентська робота Букреєва «Геометрична теорія руху незмінної плоскої фігури у своїй площині» була нагороджена Великою золотою медаллю. Університет Б. Я. Букреєв закінчив в 1882 році і був залишений готуватися до професорського звання. У цей період (1882—1887 роки) Б. Я. Букреєв вивчає теорію аналітичних функцій та вищу геометрію. У 1884 році вийшла його перша наукова робота «Аналітичне подання однозначних функцій». Увага Б. Я. Букреєва в той час була спрямована на теорію аналітичних функцій Веєрштраса. У цій галузі він вибрав собі тему магістерської дисертації: «Розкладання трансцендентних функцій на часткові дроби» і в 1887 році успішно її захистив.

Дисертація складала помітний внесок у тогочасну математичну науку. Після захисту магістерської дисертації в 1887 році Б. Я. Букреєв їде у творче відрядження за кордон, де стажується в Берлінському університеті та Шарлотенбурзькому політехнікумі.

Там він слухає лекції з теорії гіпереліптичних функцій К. Веєрштраса, з теорії абелевих функцій та лінійних диференціальних рівнянь Л. Фукса, з теорії чисел Л. Кронекера, з фізики Г. Гельмгольца та інших. Під впливом цієї блискучої плеяди найвидатніших математиків та фізиків XIX століття складаються основні математичні інтереси молодого вченого.

Найбільше зацікавили молодого Бориса Букреєва дослідження видатного спеціаліста в галузі теорії функцій німецького математика професора Л. Фукса. Перебуваючи цілковито під впливом його ідей та інтересів, він обирає своїм основним завданням вивчення та розробку теорії так званих фуксових функцій. Під керівництвом Л. Фукса Б. Я. Букреєв готує докторську дисертацію на тему: «Про фуксові функції нульового рангу із симетричним основним полігоном». У цій роботі автор досліджує умови побудови і властивості одного класу так званих фуксових функцій (термін запровадив А. Пуанкаре). Загальну теорію таких функцій побудував А. Пуанкаре, а Букреєв показав їх зв’язок з диференціальними рівняннями, досліджуваними Фуксом. У своїх роботах Б. Я. Букреєв виходив з конформних відображень. Фуксові функції в ті часи, коли працював автор дисертації, лише входили в наукові

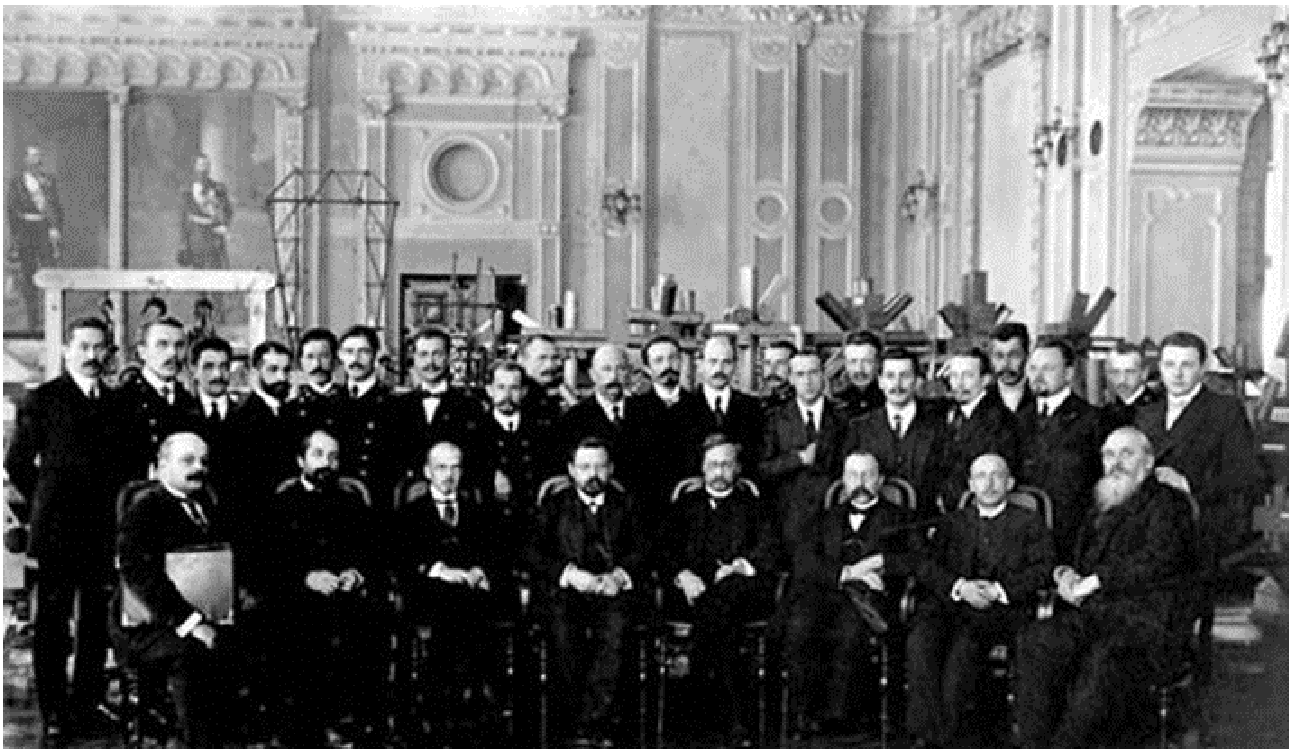
дослідження і були в центрі уваги багатьох математиків. Захист докторської дисертації Б. Я. Букреєвим відбувся 12 травня 1889 року.

Борис Якович отримує звання екстраординарного, а ще за півроку — ординарного професора по кафедрі чистої математики Київського університету. Він читає лекції з математичного аналізу, теорії інтегрування диференціальних рівнянь, вищої алгебри, теорії поверхонь тощо. Лекції Бориса Яковича були оригінально побудовані, пробуджували творчу думку студентів. Його наукова та педагогічна діяльність доповнювали одна одну. Б. Я. Букреєв стежив за всіма досягненнями як вітчизняної, так і закордонної літератури з теорії функцій і математичного аналізу.

Б. Я. Букреєв мав широкий науковий кругозір, працював у різних галузях математики, створював численні посібники для студентів. Першим таким посібником Бориса Яковича був курс «Елементи теорії поверхонь», де розглядались застосування диференціального та інтегрального числення до геометрії. Уперше цей посібник був надрукований у 1900 році і з того часу багато разів перевидавався.

Слід відмітити, що педагогічна діяльність Б. Я. Букреєва не обмежувалась Київським університетом. У 1898 році його запросили викладати в щойно заснований Київський політехнічний інститут. Професор В. Л. Кирпичов, перший директор Київського політехнічного інституту, досвідчений фахівець з організації і створення вищих навчальних закладів, уперше в Росії застосував конкурсний порядок призначення професорів кафедр. На ці посади розглядались виключно особи, що мали наукову ступінь. Це був найдоцільніший метод комплектування кафедр висококваліфікованими спеціалістами. Призначались ординарні та екстраординарні професори. Перші мали ступінь доктора наук (оплата 3 тисячі карбованців на рік), другі — ступінь магістра (оплата 2 тисячі карбованців на рік).

Физическая аудиторія

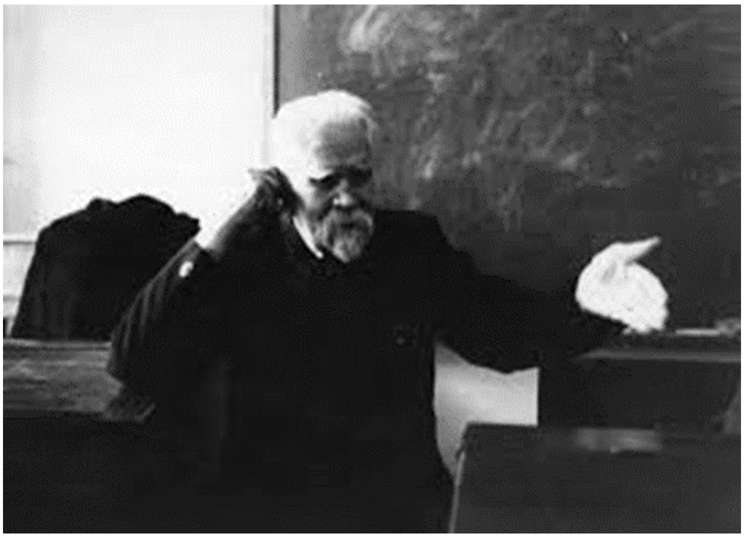


Для роботи в інституті В. Л. Кирпичов запросив багатьох відомих вчених Києва, Москви, Петербургу, Казані, Харкова. Серед них були такі видатні спеціалісти у сфері теоретичної механіки, як О. П. Котельников та О. М. Динник, математики В. П. Єрмаков та Б. Я. Букреєв, один із засновників теорії різання металів К. О. Зворикін (в подальшому ректор КПІ), геолог-мінералог О. В. Нечаєв, відомий металург В. П. Іжевський, теплотехнік А. А. Радціг, видатний фахівець мостобудування Є. О. Патон, хіміки М. І. Коновалов и Л. В. Писаржевський, академік архітектури О. В. Кобелєв, художник М. К. Пимоненко. Ці вчені становили перший педагогічний колектив КПІ. Пізніше на викладацьку роботу в політехнічний інститут були запрошені всесвітньовідомі вчені механіки С. П. Тимошенко, К. К. Симінський, С. В. Серенсен та інші.

З 1922 по 1930 роки професор Борис Якович Букреєв керує кафедрою вищої математики в Київському політехнічному інституті, змінивши на цій посаді члена-кореспондента Петербурзької Академії наук, професора В. П. Єрмакова, який був першим завідувачем кафедри математики (з 1899 по 1919 рік) (Задерей, Нефьодова, 2015). У цей період кафедра поповнилась здібною молоддю, серед якої були М. П. Кравчук, Ю. Д. Соколов, М. Х. Орлов, Л. Г. Іносов.

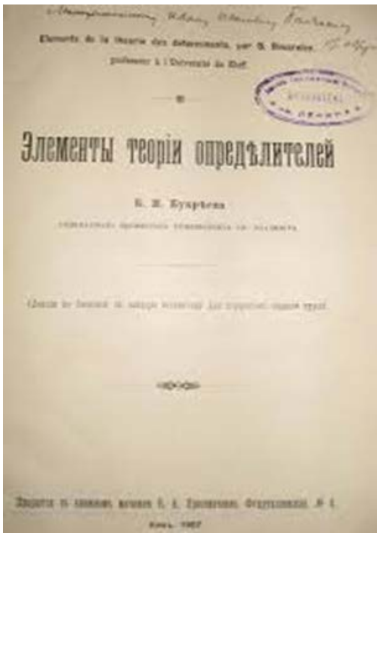
Б. Я. Букреєв плідно працює в політехнічному інституті до 1930 року, займаючись як питаннями суто теоретичного, так і прикладного характеру. Про цей напрямок свідчать його статті: «Матеріали до вивчення кристалізації сахарози» (1922 рік), «Про криву, що зображує річну зміну вологості російських льонів за спостереженнями академіка Шапошникова» (1927 рік) (Грацианская, 1960).

У перші роки після створення політехнічного інституту стабільних програм викладання математики в київській політехніці не було. За основу брали



курси професора В. П. Єрмакова, першого завідувача кафедри. Матеріал вивчали семінарським методом, віддаючи перевагу тому чи іншому розділу за вибором викладача. Але вже 1922 року були опубліковані детальні програми з аналітичної геометрії та математичного аналізу, складені професором Б. Я. Букреєвим. Обсяг матеріалу з аналітичної геометрії у них був майже такий, як і нині. Це ж саме можна сказати і про першу частину програми з математичного аналізу, хоча порядок вивчення цієї математичної дисципліни відрізнявся від сучасного. Так, зокрема, дослідження функцій на екстремум розглядалося після вивчення теорії рядів і одночасно для функцій однієї та багатьох змінних. Деякі розділи математики викладалися дуже стисло. Наприклад, із криволінійними та поверхневими інтегралами студентів знайомили протягом однієї лекції.

Один з найвидатніших математиків XX століття академік Михайло Кравчук, третій завідувач кафедри вищої математики політехнічного інституту (1930—1938 роки), був студентом професора Б. Я. Букреєва. Коли у 1910 році Михайло Кравчук вступає на математичне відділення фізико-математичного факультету Київського університету Св. Володимира, там уже викладав професор Букреєв. Михайло Кравчук бере участь у роботі наукових семінарів, у тому числі і семінару з теорії еліптичних функцій під керівництвом Б. Я. Букреєва. Студент Михайло Кравчук з великим задоволенням працює в спеціальній математичній читальні. Вона називалась *бібліотекою математичного семінару* і містила велику, дбайливо підібрану збірку навчальної та особливо нової і класичної літератури з математики, механіки, математичної фізики, астрономії. Ця бібліотека була організована у 1907 році на зразок подібних закордонних бібліотек. Читачі, переважно студенти, мали змогу самі брати з полиць потрібні книги для користування на місці. Така бібліотека була заснована завдяки енергії та наполегливості Б. Я. Букреєва, на його прохання придбали цінну бібліотеку М. Є. Ващенко-Захарченко, з-за кордону виписали багато геометричних моделей. Протягом довгого часу Букреєв був патроном цієї установи, керував її поповненням. Багатьом студентам ця бібліотека допомогла у своїх перших дослідженнях, заохотила до наукової праці. У ній проводились семінарські заняття, що мали таке велике значення для утворення київської математичної школи в XX столітті.



М. П. Кравчук дав високу оцінку своєму вчителю професору Б. Я. Букреєву: «В своїх університетських викладах Борис Якович був провідником ідей обґрунтування аналізу відповідно до думок Веєрштраса, Дедекінда, Кронекера, розвинених у другий половині XIX століття. Коли ще в курсах та лекціях Єрмакова ми бачимо наївний геометричний інтуїтивізм XVIII — того віку, коли навіть у спеціальних наукових розробках Єрмакова та його сучасників знаходимо досить безжурне ставлення до таких фундаментальних понять, як границя, нескінченно-мала, нескінченно-велика, до належної точності й загальності формулювань, коли, наприклад, Ващенко-Захарченко вже на початку XIX віку в брошурі «Опыт изложения дифференциального и интегрального исчисления без помощи методов бесконечно-малых и пределов» (1908 рік) в розумінні основ аналізу деградує на півтораста років, — в той же час Борис Якович Букреєв у своїх зразкових лекціях вступу до аналізу нескінченно-малих робить натиск на логічно розроблені теорії ірраціонального числа, в своїх лекціях диференціального та інтегрального числення приділяє належну увагу Веєрштрасовій теорії неперервних (суцільних) функцій, критичному розборові понять: лінія, площа, поверхня, глибокому аналізові та узагальненню поняття похідної. Тонким критичним духом нової математики перейняті його виклади та його наукові досліди, і в цьому попередників серед київських математиків Б. Я. Букреєв немає» (Кравчук, 1935). Вплив такої видатної постаті в математиці, як професор Б. Я. Букреєв, на М. П. Кравчука був колосальний, учитель відіграв велику роль у становленні Михайла Пилиповича, як видатного вченого XX століття, і Михайло Пилипович був глибоко вдячний йому.

Діяльність професора Б. Я. Букреєва була багатогранною. Б. Я. Букреєв, був засновником, активним діячем та першим секретарем Київського фізико-математичного товариства, створеного в 1889 році. Це товариство відіграло значну роль у розвитку науки та популяризації математичних знань. Він та його колеги — математики Г. К. Суслов та В. П. Єрмаков зробили найбільшу кількість повідомлень у ті часи. Він розглядав на своїх доповідях конформне відображення, граничне коло Фукса, обернення еліптичних інтегралів, екстремум функцій декількох змінних, трансцендентність числа e та інші задачі. Також Борис Якович був найстарішим членом першого Московського математичного товариства (з 1893 року), його почесним членом.

Слід зазначити, що Борис Якович керував кафедрою геометрії в Київському вищому інституті народної освіти та Фізико-хімічному математичному інституті, викладав математику на Київських вищих жіночих курсах.

У 1920 році на основі Київського університету Св. Володимира був утворений Вищий інститут народної освіти ім. М. П. Драгоманова (ВІНО), Борис Якович обіймав там професорську посаду та викладав різні математичні дисципліни: основи диференціального та інтегрального числення, диференціальну геометрію, варіаційне числення, історію математики.

Ставлення вченого до вищої освіти жінок характеризує його прогресивні погляди. У середині XIX століття перші спроби доступу жінок до вищої освіти були досить успішними. На короткий час (кінець 1850 — початок 1860 років) жінки отримали можливість відвідувати лекції в університетах, зокрема, і в Київському університеті Св. Володимира. Занепокоєність урядом широкою активністю жінок вилилась у запровадженні нового Університетського статуту, що заборонив з 1863 року навчання для жінок, які мусили для навчання в ті часи їхати за кордон, здебільшого до Швейцарії, яка першою надала можливість жінкам навчатися у вищій школі та здобувати вчену ступінь. З того часу почали створюватись окремо від чоловічої вищої школи Вищі жіночі курси. Протягом 1872—1878 років у Російській імперії було створено чотири таких заклади, з яких Київські ВЖК залишилися єдиними в Україні.

Навчання на КВЖК було досить дорогим, складним, наближеним до університетського, але курси не гарантували після їх закінчення прав, пов'язаних з вищою освітою. Загальна кількість слухачок, які певний час навчалися на КВЖК, склала у лютому 1886 року 1097 осіб. Ця цифра є найбільшою, адже з наступного, 1886—1887 навчального року набір на курси було припинено через відтік слухачок, яких не вдовольняли зазначені вище обставини. Завершити навчання змогли лише ті слухачки, що вступили на курси раніше. З 1886 року залишилась можливість вступу жінок лише до Бестужевських ВЖК у Петербурзі, які були завжди переповнені, або навчання за кордоном.

Члени Київського фізико-математичного товариства брали велику участь у організації та відновленні КВЖК. Після відновлення курсів у 1906 році Борис Якович викладав та плідно працював на фізико-математичному факультеті КВЖК до 1919 року, надалі курси були ліквідовані та приєднані до складу Інституту Народної Освіти. Спочатку слухачки КВЖК займались у найманих будівлях, а з 1913 року КВЖК були розташовані у спеціально збудованому для них величному будинку по вулиці О. Гончара, 55А (архітектор О. Кобелєв).

Із математиків на курсах викладали Б. Я. Букреєв, В. П. Єрмаков, М. Є. Ващенко-Захарченко, Д. О. Граве, Г. В. Пфейффер, Г. К. Суслов. У вересні 1908 року Б. Я. Букреєв разом із професорами університету Св. Володимира, серед яких був Д. Граве та В. Словінський, вимагали від уряду обговорити питання про допуск жінок до Київського університету, але не знайшли підтримки, а натомість отримали заборону прийому навіть вільнослухачок (Мірошниченко, 2012). Б. Я. Букреєв написав та видав у 1912 році підручник «Алгебраический анализ. Курс лекций на Высших Женских курсах». Крім цього, Борис Якович брав активну участь в організації математичних кабінетів Київських ВЖК. Борис Якович організував для слухачок математичні семінарії, що було потужною допомогою у складному навчанні. Якщо в 1911—1912 роках у роботі семінаріїв взяли участь лише 15 слухачок старших семестрів, то в 1914—1915 академічному році, після оформлення семінарію як самостійного підрозділу із власною бібліотекою майже в 700 томів, кількість тих, хто займався у ньому, досягла 120 осіб. На фізико-математичному факультеті Київських Вищих Жіночих курсів здобула вищу освіту і Клавдія Латишева, яка згодом стала першою жінкою-професором математики в Київському університеті.

Хвилювали видатного педагога проблеми викладання математики і в середніх навчальних закладах, він проаналізував та видав звіт з цього питання «Отзывы о работах, окончивших среднюю школу Киевского Учебного Округа за годы 1890—1899». З 1907 по 1917 роки він надавав щорічні відгуки про письмові іспити з математики в реальних училищах Київського Навчального Округу.

У 30-тих роках Б. Я. Букреєв завідував відділом геометрії Інституту математики АН УРСР і часто виступав з науковими доповідями на секційних та пленарних засіданнях. У цей час він захопився варіаційним численням і написав підручник «Вступ до варіаційного числення», що витримав три видання. Борис Якович багато займався геометрією Лобачевського, у 1947 році вийшла книга «Неевклідова геометрія в аналітичному викладі». Він одним з перших почав читати лекції українською мовою, збирав і обґрунтовував українську математичну термінологію, досліджував біографії українських математиків.

У 1930 році Б. Я. Букреєв передав кафедру вищої математики в КПІ професору М. П. Кравчуку, сам перейшов у Київський університет, де завідував кафедрою геометрії до 1959 року, поки йому не сповнилося славних 100 років, а потім ще працював на кафедрі до 1962 року. Великим другом та помічником Б. Я. Букреєва в ті роки була його учениця — доцент кафедри геометрії, професор Віра Петрівна Білоусова (сидить на світлині, зробленій на честь святкуванні 100-річчя народження Бориса Яковича біля свого вчителя).

Борис Якович був високоосвіченою людиною, вільно володів, а також писав свої праці та аналізував роботи відомих математиків українською, російською, німецькою, та англійською мовами. Знав італійську та шведську мови (Писаревська, Баштова, 2010).

Борис Якович був одружений на вдові, дворянці Катерині Олексіївні Надєждіній (1864—1945) і мав трьох дітей: дочку Тетяну (8.01.1889—1992), синів Євгена (11.03.1890—1985) та Миколу (16.11.1901 р.н.). Жили вони на Тарасівській, дім 20, квартира 1. З 1908 року переїхали на сусідню вулицю Микільсько-Ботанічну в будинок № 4, пізніше в будинок № 10.

Він був чудовим батьком та чоловіком. Діти його отримали гідне виховання та освіту. Дочка Тетяна Борисівна , як і батько прожила 103 роки, працювала бібліотекарем. Її син Кирило Борисович Толпиго (1916—1994) — був фізиком, широко відомим своїми дослідженнями з теорії твердого тіла, — один із засновників школи теоретичної фізики в Донецьку. Онук її, Олексій Кирилович Толпиго, правнук Б. Я. Букреєва, — кандидат фізико-математичних наук, викладав математику в КПІ.

Син Євген Борисович учився разом з М. Булгаковим, закінчив І Київську гімназію, у 1915 році з відзнакою закінчив медичний факультет Київського університету Св. Володимира, працював лікарем.

Борис Букреєв був великим оптимістом та мав сильний енергійний характер. У голодний 1920-ий рік, після лекцій, професор, якому тоді був 61 рік, брав свого зятя, і вони з фешенебельних Липок пішки чимчикували на Поділ. Там купували в порту дрова, клали на возик і доправляли на гору. Вдома дрова рубали, пиляли, складали у в'язанки та розносили їх клієнтам по квартирах. Катерина Олексіївна, дружина Бориса Яковича, теж допомагала, мала свій ґешефт від випічки житнього хліба із «припічком».

1941-го року під час окупації Борис Якович не зміг залишити Київ разом з евакуйованим університетом, бо дружина після інсульту мала паралізовані ноги. Учений ніде не працював, доглядав дружину. Він продавав речі й так утримав родину. Восени 1943-го, коли німці виганяли всіх, він запасся продуктами, зачинився в себе у квартирі, забарикадував двері та не виходів на постріли. Так разом із дружиною вони пережили окупацію. У той час Б. Я. Букреєву виповнилося вже 84 роки. Борис Якович ніколи нічого не боявся. У 50-х роках він сказав одному зі своїх студентів: «Ви не були в мене на жодній лекції. Інакше б Ви знали, що я не терплю двох речей: векторної геометрії та радянської влади» (Черкаська, б. д.).

Ім'я Б. Я. Букреєва займає одне з почесних місць в історії розвитку математики. За роки своєї багаторічної науково-педагогічної діяльності, що тривала понад 75 творчих років, Б. Я. Букреєв написав 15 монографій про життя та діяльність В. Єрмакова, М. Ващенко-Захарченка, Г. Монжа та інших, понад 150 наукових робіт, 7 підручників для вищої школи, виховав декілька поколінь вчених, педагогів, інженерів. Імена його учнів — М. П. Кравчука, Б. М. Делоне, М. Г. Чеботарьова, Г. В. Пфейфера, В. П. Вельміна, Є. Я. Ремеза та інших відомі в науковому світі (Белоусова и др., 1959).

Заслуги Букреєва були високо оцінені царським урядом. За відмінну і старанну службу його нагороджено орденами Св. Володимира 4 ступеня (1904 р.), Св. Анни 2 ступеня (1900 р.), Св. Станіслава 3 ступеня (1891 р.) та 2 ступеня (1896 р.), медаллю «У пам'ять царювання імператора Олександра III». Указом Урядового Сенату від 19 листопада 1892 р. за № 142 Борис Якович був затверджений за посадою, яку він обіймав у чині статського радника. А 1 січня 1908 р.

Наказом його Величності № 1 за старанну службу йому подарований чин дійсного статського радника.

За радянської влади в 1957 році Б. Я. Букреєв був нагороджений медаллю на честь 250 річчя із дня народження Леонарда Ейлера, у 1941 році йому було присвоєне почесне звання «Заслуженный деятель науки», у 1953 році був нагороджений орденом Леніна, та у 1959 році Орденом Трудового Червоного Прапора до 100-річного ювілею.

Помер видатний український математик у 103-річному віці, похований на Байковому кладовищі.

Багаторічна плідна праця, яскраве, повне великих творчих досягнень життя Б. Я. Букреєва є взірцем справжнього служіння своєму народові, рідній країні, родині, учням та нащадкам. Україна пишається своїм талановитим вченим, педагогом, громадським діячем.

Список використаних джерел

Белоусова, В. П., Добровольский, В. А., Ильин, И. Г., & Смогоржевский, А. С. (1959). Борис Яковлевич Букреев (к 100-летию со дня рождения). *Успехи математических наук, 14*(5(89)), 181—195.

Грацианская, Л. Н. (1960). Борис Яковлевич Букреев (к 100-летию со дня рождения). *Математика в школе,* (2), 83—85.

Задерей, Н. М., & Нефьодова, Г. Д. (2015). Василь Петрович Єрмаков (27.02.1845 — 16.03.1922) — фундатор математичної підготовки в Київському політехнічно-му інституті. *Математика в сучасному технічному університеті: Збірник науково-методичних праць,* 1, 154—161. http://mmtu.in.ua/issues/1/MMTU_Iss1_17.pdf

Кравчук, М. (1935). Математика та математики в Київському університеті за сто років (1834—1934). У *Розвиток науки в Київському університеті за сто років* (с. 34—69). Київ: Видавництво КДУ.

Мірошниченко, О. В. (2012). Діяльність професора Букреєва Б. Я. на Київських вищих жіночих курсах (кінець XIX — початок XX ст.). *Питання історії науки і техніки*, (3), 46—52. http://nbuv.gov.ua/ UJRN/ Pint_2012_3_9

Писаревська, Н. В., & Баштова, Л. С. (2010). Борис Букреєв — людина, що поєднала XIX та XX століття. *Дослідження з історії техніки: збірник наукових праць*, 12, 140—153. http://ela.kpi.ua/handle/123456789/7984

Черкаська, Г. (б. д.). Рекорди справжнього професора. Узято з http://uahistory.com/topics/famous_people/2807

ПАРАДОКС ГИББСА — СЛЕДСТВИЕ НЕАДДИТИВНОСТИ ЭНТРОПИИ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА ПРИ ПОСТОЯННОМ ОБЪЕМЕ

В. Н. Игнатович
КПИ им. Игоря Сикорского, Киев, Украина
v.ihnatovych@kpi.ua

Энтропию i-го идеального газа S_i в термодинамике выражают формулой, которая содержит слагаемое $-Rn_i \ln n_i$ (n_i — число молей газа), вследствие чего не является аддитивной величиной: при постоянном объеме $S(n_1 + n_2) \neq S(n_1) + S(n_2)$. Полагая, что энтропия смеси различных газов равна сумме энтропий компонентов, для смеси n_1 и n_2 молей физики получают формулу, содержащую слагаемое $R\left[\left(n_1 + n_2\right)\ln(n_1 + n_2) - \left(n_1 \ln n_1 + n_2 \ln n_2\right)\right]$, равное разности $S(n_1) + S(n_2) - S(n_1 + n_2)$. Это же слагаемое имеется в формуле для энтропии смешения двух идеальных газов, первоначально разделенных непроницаемой перегородкой. При переходе к смеси (смешению) тождественных газов указанное слагаемое «исчезает». Необъяснимое в рамках физики появления и «исчезновение» указанного слагаемого, обусловленного неаддитивностью энтропии идеального газа, составляет суть различных формулировок парадокса Гиббса, поиски физического объяснения которого длятся более ста лет.

Ключевые слова: парадокс Гиббса, энтропия, идеальные газы, аддитивные свойства.

Парадокс Гиббса возникает при теоретическом рассмотрении вопроса об изменении энтропии при смешении двух идеальных газов, первоначально разделенных непроницаемой перегородкой. Значение энтропии смешения не зависит от свойств смешиваемых газов, пока они различные, однако скачком обращается в нуль при переходе к смешению тождественных газов. Такое поведение энтропии смешения является парадоксальным. Попытки объяснения парадокса Гиббса предпринимаются уже более ста лет (Хайтун, 2010).

В свое время автор проанализировал рассуждения, которые приводят к парадоксу Гиббса, и показал, что заключение о парадоксальном скачке энтропии смешения является следствием двух посылок: «формула для энтропии чистого идеального газа содержит слагаемое $-Rn_i \ln n_i$» и «энтропия смеси идеальных газов равна сумме энтропий компонентов смеси» (Игнатович, 2010). В настоящем сообщении автор намерен показать, что указанные две посылки логически несовместимы: функция, которая выражается формулой, содержащей слагаемое вида $an \ln n$, не является аддитивной.

«АДДИТИВНОСТЬ — свойство величин, состоящее в том, что значение величины, соответствующее целому объекту, равно сумме значений величин, соответствующих его частям при любом разбиении объекта на части» (Виноградов, 1977, с. 94).

$$A = \sum_i A_i\,, \tag{1}$$

где A — значение какой-то аддитивной величины, соответствующее целому объекту, A_i — значения величин, соответствующих его частям.

Теперь уточним, какие свойства в физике называют *аддитивными*.

«Когда численное значение x величины, являющейся представителем данного свойства, может быть вычислено по правилу смешения из численных значений x той же величины, взятых для составных частей, то такое свойство называется аддитивным. В этом случае

$$mx = \sum m_i x_i ,$$

где m_i — массы… составных частей и $m = \sum m_i$» (Хвольсон, 1933, с. 59) (x — удельное значение величины. — *В. И.*).

Удельные значения свойств определяются формулами:

$$a_i = \frac{A_i}{m_i}, \tag{2a}$$

$$a_c = \frac{A_c}{m_c}, \tag{2b}$$

где a_i — удельные значения свойств компонентов смеси, m_i — массы компонентов смеси, a_c — удельные значения свойств смесей, m_c — масса смеси.

$$m_c = \sum_i m_i . \tag{3}$$

Массовая доля компонента смеси x_i определяется формулой:

$$x_i = \frac{m_i}{m_c} = \frac{m_i}{\sum_i m_i}. \tag{4}$$

Из (1)—(4) следует формула, выражающая удельные значения аддитивных свойств смесей через удельные значения свойств компонентов:

$$a_c = \sum_i x_i a_i . \tag{5}$$

Если считать, что a_i обозначает не удельные, а мольные значения параметров компонентов, x_i — их мольные доли, то формулой (5) будут определяться средние мольные параметры смеси.

Для расчета мольных параметров x_i находят по формуле:

$$x_i = \frac{n_i}{n_c} = \frac{n_i}{\sum_i n_i} = \frac{N_i}{N_c} = \frac{N_i}{\sum_i N_i}, \tag{6}$$

где n_i — число молей компонентов, n_c — суммарное число молей в смеси, N_i — число молекул компонентов, N_c — суммарное число молекул в смеси.

Из формулы (5) следует, что удельные (мольные) аддитивные свойства смеси зависят от удельных (мольных) свойств и удельных (мольных) долей компонентов смеси, однако не зависят от массы смеси. Из этого следует, что аддитивными могут быть такие свойства веществ, удельные (мольные) значения которых не зависят от их количества, т. е. такие свойства, значения которых для некоторого количества вещества прямо пропорциональны количеству вещества, т. е. параметрам m_i, n_i, N_i. Из формулы (5) также следует, что удельные свойства смесей тождественных компонентов равны удельным свойствам компонентов.

Аддитивными свойствами смесей идеальных газов являются (см., например Беляев (1987)): масса, вес, теплоемкость, внутренняя энергия, а также — если различные части имеют одинаковые давления — объем, и — если различные части имеют одинаковые объемы — плотность и давление. Легко заметить, что все указанные свойства прямо пропорциональны количествам газов. Обращаем внимание на то, что давление и плотность являются аддитивным свойствами смеси при условии постоянства ее объема, а объем смеси является аддитивным свойством при условии постоянства давления: только при таких условиях указанные свойства идеального газа прямо пропорциональны его количеству (параметрам m, n, N).

Давление, температура и объем идеального газа связаны между собой термическим уравнения состояния идеального газа:

$$p_i V_i = \frac{m_i}{M_i} RT = n_i RT = N_i kT, \tag{7}$$

где p_i — давление, V_i — объем, T — термодинамическая (абсолютная) температура, M_i — молекулярная масса газа, R — универсальная газовая постоянная, k — постоянная Больцмана.

Таким же уравнением связаны соответствующие свойства смесей идеальных газов. Если из формулы (7) вывести формулы, выражающие какое-то аддитивное свойство газа (p_i, V_i, m_i, M_i) через другие свойства газов, то эти формулы будут справедливыми и для аддитивных свойств смесей идеальных газов. И другие формулы, связывающие какие-то аддитивные свойства чистых газов, справедливы для соответствующих аддитивных свойств смесей. Это следует из формулы (5) и пропорциональности аддитивных свойств количествам газов.

Энтропия идеального газа в термодинамике выражается формулой:

$$S_i = n_i \left(c_{Vi} \ln T + R \ln \frac{V}{n_i} + S_{0i} \right), \tag{8}$$

где c_{Vi} — мольная теплоемкость газа при постоянном объеме, S_{0i} — постоянная, зависящая только от природы газа.

Согласно (8), энтропия не является величиной, пропорциональной количеству газа, соответственно, не является аддитивной величиной. Вследствие этого для двухкомпонентной смеси из формулы (8), следует формула (вывод см. Игнатович (2010)):

$$S_1 + S_2 = S_c + R\Big[\big(n_1 + n_2\big)\ln(n_1 + n_2) - \big(n_1 \ln n_1 + n_2 \ln n_2\big)\Big] = \\ = S_c - n_c R\Big(x_1 \ln x_1 + x_2 \ln x_2\Big), \tag{9}$$

где S_c выражение, получаемое на основе формулы (8) при подстановке в нее соответствующих параметров смеси.

Принято считать, что энтропия смеси идеальных газов равна сумме энтропий компонентов смеси, а формула вида (9) выражает энтропию смеси. Поэтому появление второго слагаемого в этой формуле не связывают с неаддитивностью функции энтропии идеального газа, а более 100 лет пытаются объяснить какими-то специфическими свойствами смесей по сравнению с чистыми газами, что составляет одно из направлений поиска решения парадокса Гиббса.

Для случая смешения двух различных идеальных газов с одинаковыми начальными температурами и давлениями из формулы (9) (и ряда других) следует, что значение энтропии смешения равно второму слагаемому в формуле (9). Поскольку в случае тождества компонентов формула (9) не превращается в формулу (8), возникает необходимость объяснить «исчезновение» второго слагаемого в формуле (9) при переходе от смеси (смешения) различных к смеси (смешению) тождественных идеальных газов. Это составляет содержание других формулировок парадокса Гиббса.

Гельфер, Любошиц и Подгорецкий (1975) выводят формулу для энтропии идеального газа, содержащую слагаемое вида $kN\ln(V\ /\ N)$ на основе требования «аддитивности энтропии по отношению к разделению системы на подсистемы» Гельфер и др. (1975, с. 16), причем подсистемы образуются делением объема газа на части. Иначе говоря, называют аддитивной величину, значение которой для целого равно сумме значений для частей не при любом разбиении системы на части, а только при условии равенства давлений в частях. То, что определенная с учетом такого условия функция оказывается неаддитивной при условии постоянства объема, авторами далее рассматривается как парадокс, разрешению которого они прилагают много усилий.

Терлецкий (1984) получает выражение для энтропии идеального газа, содержащее слагаемое $kN\ln V$ и утверждает, что оно не удовлетворяет принципу аддитивности, поскольку энтропия не увеличивается в α раз при одновременном увеличении в α раз N и V (Терлецкий, 1984, с. 3). Чтобы энтропия имела это свойство (аддитивность при равенстве давлений в частях) автор вводит в формулу слагаемое $kN\ln(V\ /\ N)$, а затем начинает обсуждать парадокс, обусловленный неаддитивностью полученной им функции при условии равенства объемов.

Таким образом, в основе парадокса Гиббса лежит вопиющее противоречие. Формулу для энтропии идеального газа получают на основе требование аддитивности энтропии идеального газа при условии равенства давлений частей, что приводит к неаддитивности энтропии при условии равенства объемов частей. Энтропию смеси находят исходя из предположения ее аддитивности при условии равенства объемов частей. Рациональное объяснение результатам, получаемых на основе этих логически несовместимых посылок, ищут более 100 лет.

Список литературы

Беляев, Н. М. (1987). *Термодинамика*. Киев: Вища школа.

Виноградов, И. М. (Гл. ред.). (1977). *Математическая энциклопедия* (Т. 1. А—Г). Москва: Советская Энциклопедия.

Гельфер, Я. М., Любошиц, В. Л., & Подгорецкий, М. И. (1975). *Парадокс Гиббса и тождественность частиц в квантовой механике*. Москва: Наука.

Игнатович, В. Н. (2010). *Парадокс Гиббса с точки зрения математика: Монография*. Киев: Издательская группа «АТОПОЛ.

Терлецкий, Я. П. (1984). Парадокс Гиббса в классической статистической механике. В кн. *Теплофизические свойства метастабильных систем* (с. 3—7). Свердловск: УНЦ АН СССР.

Хайтун, С. Д. (2010). *История парадокса Гиббса* (3-е изд.). Москва: КомКнига.

Хвольсон, О. Д. (1933). *Курс физики* (Т. 1). (7-е изд., доп.). Москва: ГТТИ.

ВЛАДИСЛАВ КИРИЛОВИЧ ДЗЯДИК — ГОРДІСТЬ УКРАЇНСЬКОЇ МАТЕМАТИКИ

В. Я. Ілляшенко
Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна
iraform.16@gmail.com

З усіх обдарувань,
що прикрашають розум людський,
немає жодного, що такою великою
мірою оздоблює і прикрашає його,
як обдарування математичне.
Г. Біллінгелі

В. К. Дзядик (18.02.1919—25.10.1998) — доктор фізико-математичних наук (1960), професор (1961), член-кор. НАН України (1969), заслужений діяч науки і техніки України (1991), нагороджений премією ім. М. Крилова (1991), Соросівський професор (1995—1998).

Народився Владислав Кирилович у селищі Сахновщина Харківської області в сім'ї годинникаря. Навчаючись у школі, захоплювався багатьма предметами, але найбільше любив математику, був переможцем математичних олімпіад різних рівнів. Закінчив школу із золотою медаллю.

У 1937 році вступив на факультет романо-германської філології Київського університету всупереч бажанню вчитись на математичному, на якому студентів не забезпечували гуртожитком, а він з 18 років, коли репресували батька, залишився без матеріальної допомоги рідних.

І тільки після війни, яка понівечила його долю, але не зламала духу, не відбила любові до математики, В. К. Дзядик у 1951 році блискуче закінчив механіко-математичний факультет Дніпропетровського університету. Ще у студентські роки захопився дослідженнями з теорії функцій, мав оригінальні друковані праці. Після закінчення університету був направлений на роботу на Волинь. Спочатку працював у Затурцівській школі, потім у Луківській, Цуманській (1952—1953), де викладав математику, фізику, астрономію і німецьку мову.

У Луцькому педінституті в той час завідував кафедрою математики видатний вчений, професор С. І. Зуховицький, завдяки клопотанням якого Владислава Кириловича було прийнято на посаду асистента кафедри математики.

В. К. Дзядику було 34 роки, коли він уперше переступив поріг Луцького педінституту й почав вести за проф. С. І. Зуховицьким практичні заняття з математичного аналізу. Його одержимість і наполегливість були зразком для студентів і колег. Він швидко підкорив вершини математичної науки.

На початку творчого шляху Владислав Кирилович береться за розв'язання окремих задач теорії наближення функцій, які не піддавались зусиллям першокласних математиків. Так, у серії перших публікацій (1951—1953 рр.) він навів розв'язання знаменитої проблеми Фавара і цим здобув міжнародне визнання [1].

У 1959 р. В. К. Дзядик знову повертається до задачі Фавара і створює новий метод для її розв'язання [2].

У статтях, опублікованих у 1953—1955 рр., досліджені деякі питання, пов'язані з теорією Ролля та її узагальненням і уточненням. Вони виникли у зв'язку із глибокими результатами В. К. Дзядика в теорії точних меж найкращого наближення періодичних функцій тригонометричними многочленами в неперервній та інтегральній метриках.

Завершуючи дослідження акад. С. М. Нікольського і проф. О. П. Тімана, Владислав Кирилович одержав у 1956—1958 рр. конструктивну характеристику неперіодичних функцій класів Гельдера і Зігмунда, над якою раніше працювали такі відомі математики як Д. Джексон, С. Н. Бернштейн, А. Зігмунд та ін. [3, 4].

Відштовхуючись від одержаних результатів для функцій дійсної змінної, В. К. Дзядик уже в 50-х роках почав будувати фундамент тонкої теорії прямих і обернених теорем конструктивної теорії функцій комплексної змінної. Він зробив вагомий внесок у вивчення континуальної проблеми моментів, яка привела до теорії абсолютно монотонних функцій. Велика заслуга належить йому в питанні про продовження неперервних функцій зі збереженням класу гладкості [5—7].

За роки роботи в Луцькому педінституті він поставив кілька рекордів, а саме: 4 кандидатські іспити склав на «відмінно» за 7 місяців, захистив у 1955 р. кандидатську дисертацію, а вже у 1960 р. — докторську, виконуючи при цьому величезне педагогічне навантаження, керуючи після від'їзду у 1957 р. проф. С. І. Зуховицького науковим семінаром з теорії функцій, очолюючи журі олімпіад з математики для учнів. Він не шкодував свого часу і здоров'я для роботи з молоддю, проводив заняття в математичній школі, яка функціонувала протягом усієї історії Луцького педінституту, допомагав молодим викладачам у підготовці до складання екзаменів кандидатського мінімуму.

С. Б. Стєчкін про 8-річний період роботи Владислава Кириловича у Луцьку (1953-1960) сказав: «В. К. Дзядик поставив своєрідний рекорд: на сьогоднішній день йому в теорії функцій належать результати, які найбільш важко доводяться». А Л. Д. Кудрявцев у відгуку на докторську дисертацію «Дослідження апроксимаційних і геометричних властивостей деяких класів функцій» (яку В.К.Дзядик захищав у Математичному інституті ім. В. А. Стєклова АН СРСР) писав, що «…вона є глибоким фундаментальним дослідженням…, у ній розв'язано ряд …задач, над якими трудилось багато першокласних спеціалістів у цій області» [8].

Починаючи з 1956 р., на міжнародних та всесоюзних з'їздах, конференціях, симпозіумах, школах В. К. Дзядик систематично виступає з об'ємними доповідями (часто німецькою, англійською, французькою мовами).

Пізніше на основі досліджень, проведених у Луцьку, професор, член-кор. АН України В. К. Дзядик заклав фундамент створеної ним математичної теорії, яка встановлює зв'язок між структурними властивостями функцій, заданих на замкнених множинах комплексної площини, і швидкістю наближення цих функцій многочленами n-го степеня. Основним орієнтиром для побудови такої теорії були класичні дослідження Джексона, Бернштейна, Вале-Пуссена в теорії наближення періодичних функцій тригонометричними поліномами та їх аналог — теорія наближення неперервних на відрізку функцій алгебраїчними дійсними многочленами, яка до кінця 50-х років набула завершеного характеру завдяки роботам С. М. Нікольського, В. К. Дзядика та О. П. Тімана.

Одержані результати знайшли своє відображення в монографії [9].

Ряд глибоких і закінчених результатів одержані В. К. Дзядиком в інших напрямках комплексного аналізу: аналітичні й гармонійні перетворення, граничні значення інтеграла типу Коші, ряди Діріхле, апроксимація Паде, проблема моментів, посилення декількох класичних результатів [10].

Подальший розвиток теорія наближення функцій комплексної змінної набула в дослідженнях учнів В. К. Дзядика: Г. Алібекова, В. Андрієвського, П. Антонюка, В. Білого, М. Воробйова, Ю. Волкова, А. Голуба, А. Леонтьєва, Р. Полякова, О. Швая, І. Шевчука, П. Тамразова, Л. Філософа та ін. [11—16].

В. К. Дзядиком та його учнями й послідовниками створене одне з найбагатших ідеями та результатами напрямів у теорії наближення.

Майже 30 років життя Владислав Кирилович присвятив розбудові апроксимаційної теорії диференціальних та інтегральних рівнянь [17].

Ним обґрунтовано три взаємно пов'язані обчислювальні апроксимаційні методи:

1) метод лінійних поліноміальних операторів;

2) апроксимаційний метод (α-метод) розв'язування лінійних диференціальних рівнянь із многочленними коефіцієнтами;

3) апроксимаційно-ітерактивний (АІ-метод) розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь при аналітичних умовах.

Джерела розроблених В. К. Дзядиком методів беруть свій початок у класичних працях П. Чебишова, В. Рітца, І. Радона, Б. Гальоркіна, С. Бернштейна, М. Боголюбова, М. Кравчука, Л. Канторовича, М. Келдиша та ін.

Як один з видатних спеціалістів з теорії наближення функцій, що є фундаментом обчислювальної математики, В. К. Дзядик на основі синтезу важливих результатів чебишовської теорії наближення функцій і низки обчислювальних методів розв'язання рівнянь математичної фізики побудував багату перспективними ідеями теорію апроксимаційних методів. Основні положення цієї теорії систематизовані ним у монографії [18].

Свій внесок у розвиток і застосування апроксимаційних методів Дзядика зробили й викладачі СНУ ім. Лесі Українки. Результати, одержані тут, стосуються поліноміальних і раціональних наближень (П. Антонюк, З. Зарицька, Н. Кононова, Л. Філозоф, О. Швай).

Про дослідження В. К. Дзядика знаходимо схвальні відгуки в багатьох авторитетних зарубіжних виданнях. Наприклад, у монографії К. Лоренца «Теорія апроксимації» (1966) та у книзі Гайєра «Лекції з теорії апроксимації», яка перекладена з німецької англійською і китайською мовами. Зокрема, в останній читаємо: «Рівно 100 років тому Рунге довів першу загальну теорему теорії апроксимації в комплесній області. З того часу предмет уже розрісся… На розвиток теорії в останні десятиліття справили величезний вплив визначні дослідження радянських математиків, зокрема С. М. Мергеляна і вірменської школи, В. К. Дзядика й української школи та багатьох ін…».

Учитель В. К. Дзядика академік АН СРСР С. М. Нікольський не один раз називав Владислава Кириловича впливовим і видатним спеціалістом, одним з найкращих своїх учнів. В. К. Дзядик відомий не тільки своїми дослідженнями світового значення, але й неабияким внеском у розвиток академічної науки й вищої школи в Україні.

Він був не тільки видатним вченим, але й талановитим викладачем. Його лекції відзначались чіткістю викладання матеріалу і строгістю доведень, живим спілкуванням з аудиторією. Завжди наводив приклади, намагався показати слухачам красу математичних формул. Коли мова йшла про іменні теореми чи позначення, він розповідав про видатних математиків, наводив цікаві факти з їх життя. Автор цієї публікації і сьогодні пригадує, які позитивні емоції викликали в однокурсників лекції Педагога з великої літери В. К. Дзядика. Він був дещо суворим, але справедливим. Одержати в нього відмінну оцінку було нелегко. Але хто її одержував, гордився тим завжди. «Математик — від Бога, Вчитель — від серця» — таким залишився він у пам'яті своїх учнів.

Плідну наукову роботу Владислав Кирилович поєднував із блискучою педагогічною діяльністю, спрямованою на залучення обдарованої, талановитої молоді до активної математичної роботи. Він володів мистецтвом постановки наукових проблем.

Понад 45 його учнів захистили кандидатські дисертації, 8 — докторські дисертації (Степанець О. І., Шевчук І. О., Коновалов В. М., Білий В. І., Мельник Ю. І., Волков Ю. І., Підлипенко Ю. К., Махомед Ісмаїл Махомед Хусейн (Єгипет)).

Перу В. К. Дзядика належить більше 150 статей, 2 монографії, підручник з математичного аналізу для університетів.

Поряд з науковою й педагогічною діяльністю Владислав Кирилович вів активну громадську роботу: був головою бюро секції товариства «Знання» при Інституті математики НАН України, членом редколегії кількох провідних математичних журналів, заступником головного редактора «Українського математичного журналу».

Владислав Кирилович — здібний організатор, завдяки зусиллям якого в 1963 р. був створений в Інституті математики АН УРСР відділ теорії функцій (керував ним 27 років), відкрита кафедра теорії функцій у Київському університеті ім. Т. Г. Шевченка, він очолював Всесоюзну математичну школу в Кацивелі.

Луцький педінститут (тепер Східноєвропейський національний університет ім. Лесі Українки) пишається тим, що Владислав Кирилович працював і творив у його стінах. Тут розкрився його талант. Ним уперше в історії фізико-математичного факультету була захищена кандидатська, а потім докторська дисертація.

Він помітив математичні здібності у своїх учнів: Ковальчука Р. М. (випуск ник 1955 р.), Швая О. І. (вип. 1956 р.), Панасовича В. О. (вип. 1956 р.), Горбайчука В. Й. (вип. 1957 р.), Антонюка П. Є. (вип. 1957 р.), Білого В. І. (вип. 1960 р.), допоміг у виборі наукового напрямку, захисті дисертацій.

Владислав Кирилович значно підніс рівень наукових досліджень у Луцькому педінституті, з яким він підтримував зв’язки до кінця життя. Ним підготовлено одного доктора фіз.-мат. наук (Білий В. І.) та 6 кандидатів наук, а ще 2 доктори й 5 кандидатів підготовлено у відділі теорії функцій Інституту математики АН УРСР, яким тоді керував Владислав Кирилович. Серед них: Задерей П. В. (вип. 1970 р.), Задерей Н. М. (вип. 1970 р.), Філозоф Л. І. (вип. 1971 р.), Бушев Д. М. (вип. 1973р.), Ковальчук І. Р. (вип. 1978 р.), Харкевич Ю. І. (вип. 1987 р.).

Владислав Кирилович неодноразово приїздив читати спецкурси, лекції, надавав консультації викладачам.

Велике значення у піднесенні математичної культури на Волині мала проведена 31.VIII.—8.IX. 1989 р. в с. Світязь Всесоюзна школа «Теорія наближення функцій», присвячена 70-річчю член-кор. АН УРСР В. К. Дзядика, організована АН УРСР, товариством «Знання» і Луцьким педінститутом. Головою оргкомітету був академік АН СРСР С. М. Нікольський.

У роботі школи взяли участь 143 вчених, серед яких 28 докторів наук, 95 кандидатів наук. Представлено було 32 міста з 10 союзних республік СРСР. Найбільше учасників з України — 100 чол.

Було заслухано 134 доповіді з різних напрямів теорії наближення функцій, у кожному з яких є значний доробок В. К. Дзядика.

Свідченням визнання величезних успіхів у математиці В. К. Дзядика є Міжнародна конференція з теорії наближення функцій та її застосувань, присвячена його пам’яті, що відбулась у Києві 23—31 травня 1999 р., у якій взяли участь понад 130 вчених з різних країн. Доповідачами були науковці з України, Росії, Туреччини, Франції, Польщі, Болгарії, Ізраїлю, Китаю, США, Румунії, Єгипту, Канади, Німеччини.

Результати й методи В. К. Дзядика успішно застосовуються при розв’язуванні складних актуальних прикладних задач в Інститутах загальних проблем моделювання та енергетики, гідродинаміки НАН України, в ОЦ, АН Російської федерації.

Минуло майже 20 років з тієї болючої миті, коли відійшов у Вічність Владислав Кирилович. Але ім’я видатного вченого, талановитого педагога не забуте. Велика кількість **наукових** внуків і правнуків його працюють у різних вишах, наукових центрах України й поза її межами.

Ми горді тим, що школа з теорії функцій, одним із засновників якої був незабутній В. К. Дзядик, у СНУ ім. Лесі Українки щороку поповнюється новими іменами, серед яких учні його наукових правнуків.

Протягом багатьох років постійну допомогу у проведенні наукової роботи на факультеті надавали і надають: учень Владислава Кириловича член.-кор. НАН України О. І. Степанець (1942-2007) та учні Олександра Івановича — доктори фіз.-мат. наук, професори Задерей П. В., Романюк А. С., Сердюк А. С., Савчук В. В. та ін.

У 2016 р. за рішенням Луцької міської ради призначаються стипендії для обдарованих школярів на честь відомих діячів Волині або історичних постатей, діяльність яких пов’язана з нашим краєм. У галузі математики — стипендія імені В. К. Дзядика.

Ім’я В. К. Дзядика є зразком для наслідування та продовження його досліджень у працях сучасних і прийдешніх науковців в Україні та поза Україною.

Список літератури

1. Дзядык, В. К. (1953). О наилучшем приближении на классе периодических функций, имеющих ограниченную s-ю производную ($0 < s < 1$). *Изв. АН СССР. Сер. мат.*, *17*(2), 135—162.
2. Дзядык, В. К. (1959). О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых ядрами, являющимися интегралами от абсолютно монотонных функций. *Изв. АН СССР. Сер. мат.*, *23*(6), 933—950.
3. Дзядык, В. К. (1959). О проблеме С. М. Никольского в комплексной области. *Изв. АН СССР. Сер. мат.*, *23*(5), 697—736.
4. Дзядык, В. К. (1963). К вопросу о приближении непрерывных функций в замкнутых областях с углами и о проблеме С. М. Никольского. *Изв. АН СССР. Сер. мат.*, *27*(5), 1135—1164.
5. Дзядык, В. К. (1963). Обратные теоремы приближения функций в комплексных областях. *Укр. мат. журн.*, *15*(4), 365—375.
6. Дзядык, В. К. (1963). Теоремы о преобразовании и приближении аналитических функций. *Докл. АН СССР*, *151*(2), 269—272.
7. Дзядык, В. К. (1967). Об аналитических и гармонических преобразованиях и о приближении гармонических функций. *Укр. мат. журн.*, *19*(5), 33—57.
8. Степанец, А. И. (1989). Исследования В. К. Дзядыка по теории приближения периодических функций. *Укр. мат. журн.*, *41*(4), 436—441.
9. Дзядык, В. К. (1977). *Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами*. Москва: Наука.
10. Белый, В. И., Голуб, А. П., & Шевчук, И. А. (1989). Исследования В. К. Дзядыка по теории приближения функций комплексного переменного. *Укр. мат. журн.*, *41*(4), 441—454.

11. Дзядык, В. К., & Швай, А. И. (1971). О приближении функций классов Гельдера на замкнутых множествах с острыми внешними углами. В кн. *Метрические вопросы теории функций и отображений* (с. 74—164). Киев: Наукова думка.
12. Дзядык, В. К. (1975). К теории приближения функций на замкнутых множествах комплексной плоскости (по поводу одной проблемы С. М. Никольского). *Тр. Мат. ин-та. им. В. А. Стеклова АН СССР*, *134*, 63—114.
13. Белый, В. И. (1977). Конформные отображения и приближения функций в областях с квазиконформной границей. *Математический сборник*, *102*(3), 331—361.
14. Дзядык, В. К., & Философ, Л. И. (1978). О скорости сходимости аппроксимаций Паде для некоторых элементарных функций. *Математический сборник, 107*(3), 347—363.
15. Дзядык, В. К., & Голуб, А. П. (1981). *Обобщенная проблема моментов и аппроксимаций Паде:* Препринт 81.58. Киев: АН УССР. Ин-т математики.
16. Белый, В. И. (1977). Искажение расстояний при конформных отображениях и прямые теоремы конструктивной теории функций. *Теория приближения функций*. В *Трудах Междунар. конф. по теории приближения функций* (с. 32—37). Москва: Наука.
17. Биленко, В. И., Коновалов, В. Н., Луковский, И. А., Лучка, А. Ю., Пухов, Г. Е., & Ронто, Н. И. (1989). Аппроксамационные методы Дзядыка решения дифференциальных и интегральных уравнений. *Укр. мат. журн.*, *41*(4), 454—465.
18. Дзядык, В. К. (1988). *Аппроксимационные методы решения дифференциальных та интегральных уравнений*. Киев:Наукова думка.
19. Зарицька, З. В., Ковальчук, І. Р., Коренков, М. Є., Дзядик, С. Ю., Дзядик, Ю. В., & Філозоф, Л. І. (2009). Біографія і стислий огляд творчості члена-кореспондента НАНУ, заслуженого діяча науки і техніки, доктора фізико-математичних наук, професора Владислава Кириловича Дзядика. *Науковий вісник Волин. нац. унів. ім. Лесі Українки*, *18*, 80—96.

ІНФОРМАЦІЙНІ СИСТЕМИ Й ТЕХНОЛОГІЇ В НАВЧАЛЬНОМУ ПРОЦЕСІ

С. П. Казнадій, В. П. Мурашковська, Л. А. Руновська
Чернігівський національний технологічний університет, Чернігів, Україна
vmurashkovska@gmail.com

Процес надання технічної освіти передбачає поступові зміни й оновлення в змісті, які зумовлені новою парадигмою освіти, умов навчання, термінів навчання, реалізацією основних завдань даної концепції, урахування новітніх вітчизняних науково-методичних досліджень та зарубіжного досвіду сучасної освіти, розвитком науково-технічного прогресу.

Ключові слова: інтерполяція, програма, математично-статистичні методи, мова **R**.

Для формування у студентів суто професійного інтересу до дослідницької діяльності з використанням математично-статистичних методів потрібно створювати умови, завдяки яким вони одержуватимуть можливості матемізувати реальну ситуацію з якомога повнішим комплексом дослідницьких дій. Використання комп'ютера при проведенні розрахунків зміщує акценти в математичній підготовці фахівця. З появою спеціалізованих математичних програм виникає необхідність вводити в навчання вміння користуватися програмами.

Наприклад, під час вивчення таких дисциплін, як «Математичне моделювання процесів та систем» або «Дослідження технологічних процесів та систем» у процесі проведення й оброблення результатів лабораторних робіт вимагаємо від студента вміти автоматизувати розрахунки, проаналізувати данні, побудувати графіки користуючись такими математичними пакетами, як MS Excel, Mathcad, Matlab, Statistica.

Для «допитливих» студентів, які цікавляться новими програмними пакетами можна запропонувати спробувати програмне забезпечення **R**.

Зараз практично у всіх західноєвропейських і американських університетах вивчають і використовують **R**, щорічно видаються підручники й монографії щодо роботи як з самим пакетом **R**, так і його застосуванням при дослідженні та обробленні даних у статистиці, медицині, екології, фінансовому аналізі, актуарній математиці, інженерних розрахунків та ін. **R** виник як вільний аналог середовища S-PLUS, яке у свою чергу є комерційною реалізацією мови розрахунків **S**. Досить висока вартість запропонованого комерційного статистичного пакету і привела до виникнення **R**.

R — це одночасно і вільно розповсюджене програмне середовище з відкритим кодом, що розвивається в рамках проекту GNU, і мова програмування для статистичної обробки даних і роботи із графікою. **R** можна застосовувати скрізь, де потрібна робота з даними. Це й сама математична статистика в усіх її додатках, і первинний аналіз даних, і математичне моделювання. **R** найкраще проявляється саме при статистичному аналізі даних: від обчислення середніх величин до серйозних операцій з функціональними рядами. За допомогою **R**

можна підготувати дані для дослідження, яке може бути здійснено за допомогою реалізованих у різних функціях статистичних методів, а потім вивести отримані результати для подальшого аналізу.

R — потужна мова й безкоштовне середовище програмування, що найчастіше застосовується для статистичних обчислень, аналізу даних та візуалізації (представлення даних у графічному вигляді). Створена Росом Іхакою (Ross Ihaka) та Робертом Джентлменом (Robert Gentleman), працівниками Оклендського Університету в Новій Зеландії. Це безкоштовний проект, що розповсюджується за ліцензією GNU (General Public License) у вигляді вільнодоступого вихідного коду або відкомпільованих бінарних версій більшості операційних систем: Linux, FreeBSD, Microsoft Windows, Mac OS X, Solaris. Основними перевагами проекту **R** є той факт, що **R** є безкоштовним і що є багато допоміжної інформації, доступної в Інтернеті. Цей проект дуже схожий на інші програмні пакети, такі як MatLab (не безкоштовний), але він більш зручний для користувача, ніж мови програмування, такі як C++ або Fortran.

Особливості мови R

- ✓ Працює практично на будь-якій стандартній обчислювальній платформі/ОС (навіть на PlayStation 3)
- ✓ Часті релізи (річний+релізи з виправленням помилок); активний розвиток.
- ✓ Досить невелике за розмірами програмне забезпечення; Функціональність ділиться на модульні пакети
- ✓ Графічні можливості дуже розвинуті і краще, ніж у більшості статистичних пакетів.
- ✓ Зручний для інтерактивної роботи, але також містить і потужну мову програмування для розробки нових інструментів (користувач --> програміст).
- ✓ Дуже активне й енергійне співтовариство користувачів; R-help і R-Devel списки розсилки і Stack Overflow.
- ✓ Не ідеально підходить для всіх можливих ситуацій (але це недолік усіх програмних пакетів).
- ✓ Простота: Ви можете приступити до її плідного використання, щойно встановили.

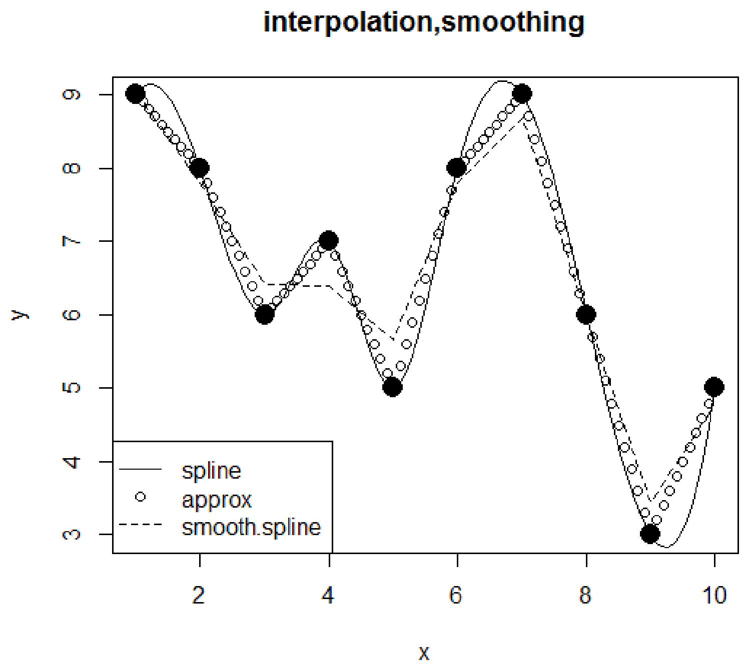
Ураховуючи те, що студентам старших курсів технічних спеціальностей дуже часто доводиться звертатись до інтерполяції, наведемо приклад, як у цьому допомагає **R.**

Інтерполяції і згладжування в **R** можна зробити декількома способами:

- `approx` лінійно інтерполює через точки
- `spline` використовує інтерполяцію сплайн, яка є більш гладкою
- `smooth.spline` розгладжує набори даних; це означає, що цей метод не пов’язує оригінальні точки.

Використання цих функцій ілюструється наступним сценарієм і відповідним результатом:

```
> x <- 1:10
> y <- c(9,8,6,7,5,8,9,6,3,5)
> plot(x,y,pch=16,cex=2,main="interpolation,smoothing")
> lines (spline(x,y, n=100),lty=1)
> points(approx(x,y, xout=seq(1,10,0.1)),pch=1)
> lines (smooth.spline(x,y),lty=2)
> legend("bottomleft",lty=c(1,NA,2),pch=c(NA,1,NA),
+ legend=c("spline","approx","smooth.spline"))
```



Таким чином формування у студентів практичних навичок та умінь застосування різних пакетів програм направлене на підготовку компетентних спеціалістів, які спроможні працювати в сучасних умовах.

Список літератури

Гудирева, О. М. (2010). Впровадження інформаційно-комунікативних технологій у навчальному процесі вищого навчального закладу. *Інформ. технології в освіті: Зб. наук. пр.*, *6*, 101—112.

Жалдак, М. І. (2003). Педагогічний потенціал комп’ютерно-орієнтованих систем навчання математики. *Комп’ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наук. праць*, *7*, С. 3—16. Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова.

ПРО ІНТЕРПОЛЯЦІЮ СУПЕРПОЗИЦІЇ ФУНКЦІЙ

О. Ф. Калайда
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
aleksei_kalaida@comcast.net

Вивчаючи теми апроксимації функцій многочленами колокаційного типу, зосереджуються лише на многочленах незалежних змінних. У випадку великої кількості цих змінних та многочленів із кратними вузлами (многочлена Тейлора, многочленів Маркова — Ерміта) це приводить до значних практичних труднощів. Разом з тим у Калайда (2000) викладено розвинення даної функції в ряд за степенями іншої функції. Особливо це зручно у випадку суперпозиції функцій, причому внутрішні функції залежить від значно більшої кількості незалежних змінних, ніж кількість цих функцій.

Відмітимо цікаві властивості многочлена (ряду) Тейлора $T_n(f;x,x_0)$ з центром x_0 та многочлена С. Бернштейна $B_n(x;f)$. А саме, легко переконатись, що чинні рівності

$$T_n^{(k)}(f;x;x_0) = T_{n-k}(f^{(k)};x;x_0),\ k < n$$

(для ряду Тейлора $T^{(k)}(f) = T(f^{(k)})$),

$$B_1^n(x;1) = B_n(x;1),\ B_n^k(x;1) = B_{kn}(x;1)$$

(детально многочлени С. Бернштейна досліджено в Калайда (2005)).

Отже, нехай потрібно апроксимувати n разів неперервно диференційовну за змінною g, де функція $X \mapsto g(X)$, відповідно, n разів неперервно диференційовна за змінною $X = (x_1,\ldots,x_l)$, $l >> 1$, функцію $g \mapsto f(g)$ многочленом Тейлора. Замість побудови громіздкого l-кратного многочлена за незалежною змінною X (зрозуміла трудомісткість процесу цієї побудови) доречно замінити це многочленом $T_n(f;\ g,\ g_0)$. Аналогічно у випадку багатоцентрових колокант замість побудови таких колокант за незалежною змінною (при цьому потрібно використовувати прямокутну сітку вузлів, про довільне розташування вузлів не доводиться й мріяти) теж доречніше й ефективніше використати колоканти за змінною g (при вибраній та пронумерованій відповідним чином одновимірній системі вузлів g_j).

Аналогічно доречно діяти й у випадку суперпозиції декількох функцій

$$G \mapsto f(G),\ G(g_1, \ldots, g_m),\ m < n.$$

Це речі очевидні, але в навчальній літературі з математичного аналізу та обчислювальної математики про це чомусь не згадується.

Список літератури

Калайда, О. Ф. (2000). *Чисельні методи*. Київ: ВПЦ «Київський університет».

Калайда, О.Ф. (2005). Про многочлени С. Бернштейна. *Вісник Київського ун-ту. Серія: фізико-математичні науки,* (3), 113—117.

ПРО ДЕЯКІ ОЦІНКИ ЗАЛИШКУ ЗНАКОСТАЛИХ СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ

О. Ф. Калайда
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
aleksei_kalaida@comcast.net

Перш за все наведемо найпростіше доведення формули суми та залишку степеневого знакосталого степеневого ряду — геометричної прогресії

$$S(x) = a(1 + x + ... + x^n + ...) = S_n(x) + r_n(x).$$

Отже,

$$S(x) = a + xS(x) \Rightarrow S(x) = \frac{a}{1-x}.$$

А з першої рівності маємо рівність

$$S(x) = S_n(x) + x^{n+1}S(x),$$

звідки

$$S_n(x) = \frac{a(1-x^{n+1})}{1-x}, r_n(x) = ax^{n+1}S(x) = \frac{ax^{n+1}}{1-x}.$$

Ці побудови наводять на думку, що подібним чином можна будувати оцінки залишку інших знакосталих степеневих (у тому числі узагальнених та асимптотичних) рядів (зокрема, рядів Тейлора).

Так, у випадку ряду Тейлора

$$T(x;f) = f_0 + f_0'(x - x_0) + ... + \frac{f_0^{(n)}(x-x_0)^n}{n!} + ..., f_j^{(j)} > 0,$$

залишковий член при відомій функції f є

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}, c \in (x_0, x).$$

Його практично важко використати. Важко й оцінювати похідну $f^{(n+1)}(x)$. Проте, виходячи з очевидної рівності $T^{(n)}(x;\, f) = T(x;\, f^{(n)})$ та знакосталості коефіцієнтів $f_0^{(j)}$, приходимо до висновку, що

$$r_n(x) \le \frac{(x-x_0)^{n+1} f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}.$$

Якщо ж нам задано ряд, а функція, розгорнута в цей ряд, невідома, то для суми ряду можна добути оцінку з нерівності

$$S(x) \le S_n(x) + \frac{(x-x_0)^{n+1}S(x)}{(n+1)!} \Rightarrow S(x) \le \frac{S_n(x)}{1 - \dfrac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}}.$$

Такі підходи можна використати й у випадку узагальнених степеневих та асимптотичних рядів, суму яких можна вважати суперпозицією функцій основної та основи степеня ряду.

ПРО ВИКЛАДАННЯ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ АНГЛІЙСЬКОЮ ІНОЗЕМНИМ СТУДЕНТАМ НАУ В РАМКАХ ПРОГРАМИ «ВИЩА ОСВІТА ІНОЗЕМНОЮ МОВОЮ»

О. В. Карупу, Т. А. Олешко, В. В. Пахненко
Національний авіаційний університет, Київ, Україна
karupu@ukr.net, 111ota@ukr.net, dooremi@ukr.net

Розглянуто проблеми викладання дисципліни «Вища математика» англійською мовою іноземним та українським студентам, які навчаються за технічними спеціальностями в Національному авіаційному університеті.

Ключові слова: вища математика, викладання вищої математики, викладання математики англійською.

Національний авіаційний університет є авторитетним міжнародним центром підготовки спеціалістів для авіаційної та інших галузей. В НАУ завжди велику увагу приділяють вирішенню різноманітних питань, пов’язаних з навчанням іноземних студентів.

Іноземні студенти в Національному авіаційному університеті можуть навчатися українською, російською та англійською мовою. Вибір мови навчання здійснюється ними в залежності від їх мовної підготовки та планів на майбутнє працевлаштування. Англійська мова є однією з офіційних мов ICAO (Міжнародна організація цивільної авіації), тому можливість отримання професійної освіти англійською мовою для майбутніх фахівців у галузі авіації є дуже важливою.

Оскільки більшість студентів Національного авіаційного університета (НАУ) навчаються за технічними спеціальностями, навчальні плани цих спеціальностей містять у різному обсязі математичні дисципліни. Постає проблема методичного забезпечення викладання цих дисциплін, зокрема дисципліни: «Вища математика». Ця проблема має свою специфіку в роботі з іноземними студентами. Певні особливості ця проблема має для викладачів, що працюють у рамках Програми «Вища освіта іноземною мовою».

Кафедра вищої та обчислювальної математики забезпечує викладання англійською мовою таких дисциплін: «Вища математика», «Теорія ймовірностей та математична статистика», «Математичний аналіз», «Лінійна алгебра та аналітична геометрія», «Чисельні методи» та «Дискретна математика». Відмітимо, що традиційно для студентів більшості спеціальностей викладається синтетичний курс вищої математики. Інші перелічені дисципліни викладаються тільки для студентів деяких спеціальностей, що потребують підвищеної математичної підготовки.

Починаючи з 2007 року ми проводимо дослідження з методики викладання математичних дисциплін іноземним та українським студентам у рамках Проекту англомовної освіти НАУ. Деякі особливості викладання окремих розділів вищої математики іноземним та українським студентам розглядалися авторами в Карупу та ін. (2013) і в рамках дослідження з методики викладання англійською мовою математичних дисциплін студентам НАУ (Карупу та ін., 2012). Зокрема, особливості викладання англійською мовою математичного аналізу та диференціальних рівнянь досліджувалися авторами в Карупу та ін. (2015), викладання англійською мовою деяких питань дисципліни «Лінійна алгебра та аналітична геометрія» студентам, що навчаються англійською мовою, досліджувалися авторами в Карупу та ін. (2016).

Аналіз контингенту іноземних студентів НАУ (Карупу та ін., 2012) показує, що рівень знань і обсяг інформації, набутої студентами у школах та коледжах своїх країн, є неоднорідними. Певні розділи шкільної математики або не відомі цим студентам узагалі або відомі в недостатньому обсязі. Це стосується, зокрема, тригонометрії та стереометрії.

Крім того, зазначимо, що в багатьох іноземних студентів погане просторове мислення, унаслідок чого у них виникають проблеми при вивченні тем на застосування визначеного інтеграла, таких, як знаходження площ криволінійних трапецій, об'ємів геометричних тіл, площ поверхонь обертання тощо.

Важливою проблемою, що постає під час викладання дисципліни «Вища математика» є недостатність в іноземних студентів практичних навичок з техніки диференціювання та інтегрування та наявність у них слабкого бажання опановувати ці навички. Частково це пов'язано з тим, що в багатьох країнах, крім відомих нам методів інтегрування заміною змінної та частинами, вивчається ще й третій метод: інтегрування за формулою, що полягає в тому, що студенти підставляють свої значення параметрів у наведені в підручнику формули і зразу отримують результат. Більшість студентів цей метод засвоїли найкраще, унаслідок чого засвоєння перших двох методів здається їм менш важливим. Визначений інтеграл запроваджують у школах як приріст первісної. У багатьох підручниках, призначених для технічних університетів і популярних серед іноземних студентів, виклад матеріалу здійснюється в такій послідовності: похідна, первісна, визначений інтеграл та його властивості, основна формула інтегрального числення, застосування визначеного інтеграла, техніка інтегрування. Це створює ілюзію того, що останнє питання є менш важливим.

При вивченні функцій багатьох змінних та кратних інтегралів даються взнаки недоліки засвоєння попередніх тем математичного аналізу, до яких додаються проблеми, пов'язані з недоліками засвоєння теми «Криві та поверхні другого порядку», унаслідок чого побудова потрібної області дуже часто стає для студентів нездоланною проблемою. Існують проблеми з розв'язуванням прикладних задач. Для студентів Навчально-наукового Аерокосмічного інституту та Навчально-наукового інституту Аеронавігації слід особливу увагу звертати на задачі технічного змісту. Певну специфіку повинні мати задачі для студентів Навчально-наукового інституту Комп'ютерних інформаційних технологій. У той же час під час навчання іноземців у середній школі основна увага приділялась застосуванню похідних та інтегралів до розв'язування економічних задач.

Оскільки для студентів більшості спеціальностей викладається синтетичний курс вищої математики, то в цей курс традиційно включаються основні розділи комплексного аналізу й операційне числення. Деякі особливості викладання цих питань розглядалися в рамках дослідження (Карупу та ін., 2013). При цьому найважливішими для майбутнього застосування студентами є теорія аналітичних функцій і конформних відображень та операційне числення. Ми вважаємо, що проблеми, що постають перед більшістю іноземних студентів при засвоєнні цих питань, пов'язані в основному з особливостями базової математичної підготовки цих студентів.

Студенти деяких спеціальностей вивчають основи теорії ймовірностей і математичної статистики в рамках курсу вищої математики. Відмітимо, що однією з важливих проблем, що постають при вивченні цих питань англомовними студентами, є невміння майже всіх студентів (як іноземних, так і українських) розв'язувати текстові задачі. Як відомо, ця проблема постає і при викладанні вказаного курсу і українською, і російською (а мабуть, і іншими) мовами. Проте, саме в англомовних групах ця проблема постає з надзвичайною гостротою, оскільки накладається на недостатнє знання спеціальних термінів (причому не тільки математичних).

При вивченні англомовними іноземними студентами тем «Неперервні випадкові величини» та «Системи випадкових величин», постає проблема, пов'язана з недостатньо якісним засвоєнням ними диференціального та інтегрального числення. Унаслідок цього значна частина іноземних студентів, що, як правило, непогано розв'язують задачі на знаходження числових характеристик дискретних випадкових величин, стикаються з непереборними для них труднощами при розв'язуванні аналогічних задач на знаходження числових характеристик неперервних випадкових величин.

З нашої точки зору, саме для таких студентів є перспективним використання систем комп'ютерної математики. Крім того, використання цих систем є достатньо ефективним при розв'язуванні задач математичної статистики. Слід відмітити більшу готовність цих студентів використовувати системи комп'ютерної математики й певний рівень навичок застосування цих систем. Також слід відмітити, що іноземні студенти, як правило, дуже активно працюють з підручниками, особливо цінують посібники із прикладами розв'язаних задач.

Студенти, що навчаються в англомовних групах, вивчали англійську в різних країнах. Унаслідок цього їх рівень знань англійської мови може суттєво відрізнятися, зокрема більшість з них має специфічну англійську вимову, є проблеми з математичною термінологією. Тому перед початком вивчення кожної нової теми прийнято надавати в письмовому вигляді перелік нових математичних термінів англійською мовою, пояснювати їх зміст, звертаючи увагу на вимову та написання, а також на термінологічні відмінності в різних мовах.

У цілому необхідно відмітити, що іноземні студенти, як правило, достатньо добре організаційно підготовлені для навчання за кредитно-модульною системою. При їх перевірці та захисті студентами індивідуальних домашніх завдань слід звертати увагу на особливості викладу студентами їхніх знань у письмовій та усній формі, ураховувати як мовну специфіку певних груп студентів, так і специфіку їх менталітету.

Особливо важливим для іноземних студентів, що не володіють або володіють дуже погано російською та українською мовами, є наявність доступних для них підручників англійською мовою, що містять необхідний теоретичний матеріал з великою кількістю розв'язаних прикладів і необхідну термінологію з перекладом.

При роботі у групах з іноземними студентами бажано достатню увагу приділяти виробленню навичок розпізнавання основних видів типових задач, звертаючи їхню увагу на внутрішню математичну структуру задачі.

Рекомендується детальна алгоритмізація викладачем процесу розпізнавання основних форм рівнянь при проведенні практичних занять і консультацій з використанням різноманітних опорних конспектів. Відмітимо, що більшість іноземних студентів дуже добре сприймають опорні матеріали, які, крім рівнянь і рисунків, містять також і словесні описання ознак відповідних об'єктів.

При роботі з іноземними студентами із слабкою математичною й мовною підготовкою рекомендується також надавати цим студентам алгоритми розв'язування найпростіших типових задач. Цей підхід виявляється достатньо ефективним і для певної частини українських студентів. Крім того, ми вважаємо доцільним рекомендувати студентам активне використання символьного ядра однієї з систем комп'ютерної математики. При можливості бажане проведення лекцій в мультимедійній аудиторії. Позитивним є досвід навчання студентів з різних країн в інтернаціональному англомовному середовищі.

Список літератури

Карупу, О. В., Олешко, Т. А., & Пахненко, В.В. (2012). Деякі особливості викладання математичних дисциплін іноземним студентам. *Східно-Європейський журнал передових технологій*, *2*(2), 11—14.

Карупу, О. В., Олешко, Т. А., & Пахненко, В. В. (2013). Аналіз практики викладання вищої математики українським та іноземним студентам в Національному авіаційному університеті. *Science and Education a New Dimension: Pedagogy and Psychology, 5,* 88—92.

Карупу, О. В., Олешко, Т. А., & Пахненко, В. В. (2015). Про деякі особливості викладання математичного аналізу англомовним студентам НАУ. *Вісник Черкаського університету. Серія: Педагогічні науки*, (20), 26—31.

Карупу, О. В., Олешко, Т.А., & Пахненко, В.В. (2016). Про деякі особливості викладання аналітичної геометрії англомовним студентам. *Вісник Чернігівського національного педагогічного університету. Серія: Педагогічні науки, 140,* 17—21.

Карупу, О. В., Олешко, Т. А., & Пахненко, В. В. (2017). Аналіз практики викладання теорії ймовірностей та математичної статистики англомовним студентам в Національному авіаційному університеті. *Science and Education a New Dimension: Pedagogy and Psychology, 113,* 34—37.

ФІЛОСОФ. УЧЕНИЙ. ПАТРІОТ.

Н. Р. Коновалова
КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
konovalovanr@gmail.com

Чому нас завжди цікавить тільки те, що вчений робить, і ми ніколи не замислюємося над тим, що він за людина?

Жан Лерон Д'Аламбер (Jean Le Rond D'Alembert).

У всіх технічних інститутах вивчають принцип д'Аламбера і розв'язують диференціальні рівняння руху матеріальних систем, загальні правила побудови яких дав він, 26-річний д'Аламбер. Офіцери-артилеристи знають це ім'я тому, що він, д'Аламбер, уперше науково пояснив рикошет. Для метеорологів він метеоролог — адже явище повітряних припливів довів він, д'Аламбер. Фізики шанують д'Аламбера — адже трактат про поперечні коливання струни лежить у фундаменті математичної фізики. А для науковців він назавжди залишиться *енциклопедистом*. Жан д'Аламбер разом зі своїм другом Дені Дідро склав 20 томів «Енциклопедії наук, мистецтв та ремесел».

«— Ви, мабуть, не завжди залишитеся філософом? — якось запитала його мати.

— А що таке філософ?– зацікавився Жан.

— Божевільний, який мучить себе все життя для того, щоб про нього говорили після смерті».

Хто ж Ви, Жан д'Аламбер?

Початок буде як у недоброму романі. 16 листопада 1717 року. Ніч. Вітер виє у готичних шпилях собору Паризької Богоматері. На сходах круглої церкви Святого Жана поліцейський помітив маленький пакунок, який тихенько тремтів та попискував. Хлопчика назвали Жаном Лероном (Жаном Круглим) на ім'я церкви та віддали у багатодітну сім'ю скляра Руссо. Коли Жан став дорослим, він сам придумав собі ім'я: Жан Лерон д'Аламбер.

Жан Лерон був позашлюбним сином французького генерала Детуша і письменниці маркізи де Тансен. Названі батьки, подружжя Руссо, були милими людьми, Жану добре жилось серед них. Рідний батько часто навідував його, допомагав сім'ї скляра та піклувався про освіту сина.

Жан добре навчався в пансіоні Бєре, там у нього вперше розкрився літературний талант; у коледжі Мазаріні два роки займався риторикою, захоплювався поезією, філософією. Він відмінно володів латиною, а давньогрецькою мовою настільки, що міг читати в оригіналі Архімеда та Птолемея. Після закінчення коледжу юний магістр вільних наук ніяк не міг вибрати спеціальність до душі. Батьки мріяли бачити його адвокатом або лікарем. Вони із занепокоєнням стежили за безперспективним, на їх погляд, захопленням Жана математикою. І юнак змушений був поступитися їм, він навіть відніс до свого товариша всі свої математичні книги. Д'Аламбер сподівався забрати їх, коли вивчить юриспруденцію або медицину. «Математичні книги, — казав він, — будуть для мене відпочинком».

Але професія адвоката була не для д’Аламбера. Випадків, коли обвинувачений був справді не винний, виявлялось мало, а в інших — Жан Лерон не міг захищати зі спокійною совістю. «Справжня рівність громадян полягає в тому, щоб усі вони були однакові перед законом», — вважав він.

Д’Аламбер закинув адвокатуру та віддався медицині. Але всі його думки були пов’язані з математикою. Він приносив додому ту чи іншу книгу з математики, сидів у бібліотеці над алгебраїчними трактатами. Задачі роїлися в його голові й не давали спокою. Жан закохався в математику. Медицина була закинута, за словами вченого Кондорсе д’Аламбер «віддався математиці та злиденності». Жану Лерону ледь виповнилось двадцять років, коли він вирішив стати математиком, а в двадцять шість років він був уже світилом цієї науки.

Ж. Л. Даламбер
(1717–1783)

Ґете писав: «Математик є досконалим лише тоді, коли він є досконалою людиною, коли відчуває в собі прекрасне, яке притаманне істині; тільки тоді його творчість стає ґрунтовною, чистою, ясною, натхненою, витонченою».

Д’Аламбер справді був визначним математиком та чудовим гострим письменником. У «Досвіді про ставлення літераторів до вельмож» цей математик відстоював честь високого звання письменника. Він писав книги з теорії музики та музикальної естетики, і не дарма йому було присвоєно нащадками звання — енциклопедист. Вольтер писав д’Аламберу: «Ви єдиний письменник, який ніколи не висловлює ні більше того, ні менше того, що хоче сказати». Вольтер визнавав у манері д’Аламбера писати руку математика. І даремно салонні паризькі дотепники насміхались: «Д’Аламбер — визначний письменник серед геометрів та видатний геометр в літературі».

Відомий французький математик Бертран, автор новітньої біографії д’Аламбера писав: важко назвати іншу людину, яка б могла в собі поєднати такий тонкий та складний розум з таким чистим та простим серцем; істинне розуміння різноманітної розумової діяльності Д’Аламбера вимагає багатьох зусиль, але його симпатії, антипатії, узагалі його почуття, погляди на життя, думки та переконання видно як на долоні. Він завжди говорив те, що відчував, не розумів, як можуть інші лицемірити. Ця скромна людина ніколи не підкреслювала своїх заслуг. Обраний у 23 роки до Французької Академії, він одержав тільки почесне звання. Уряд забув про фінансову підтримку молодого таланта. Він жив на 100 ліврів на місяць і, напевно, продовжував би так жити, якби у відповідь на мемуари, які д’Аламбер надіслав до Берлінської Академії, Фрідріх II не призначив йому пенсію у 1200 ліврів на рік. Тоді французький міністр де Ларгансон, який, за свідченням сучасників, «любив розумних людей і не заздрив їм, оскільки сам був розумною людиною», виклопотав вченому таку ж пенсію й на батьківщині. У сім’ї скляра раділи. А д’Аламбер лише тихо посміхався. Потім сказав: «Я не можу вважати законним витрату своїх надлишків у той час, коли інші не мають необхідного».

Для нього це були не просто слова. Так він і жив. Виховував дітей свого першого вчителя, давав гроші студентам. Фрідріх ІІ пропонував д'Аламберу золоті гори та крісло президента академії — він відмовився. У відповідь Жан Лерон попросив короля збільшити пенсію видатному Ейлеру, хоча д'Аламбер та Ейлер не тільки не приятелювали, але не мали навіть поверхневої симпатії один до одного. Катерина ІІ пропонувала 100 тисяч лпіврів на рік за виховання нащадка престолу. Д'Аламбер відмовився, пояснюючи тим, що для нього краще скромно жити на батьківщині, ніж насолоджуватись розкішшю на чужині. Ні за які гроші не міг покинути Париж. Тижня не міг він спокійно прожити д далечині від цього міста.

Її звали мадемуазель Жюлі де Леспінас. Він кохав її пристрасно та без відповіді, одну-єдину все життя. Розумів, звідки квартира та меблі, мучився, але кохав. А вона залишалась байдужою до нього. Лише наприкінці життя вона вибрала д'Аламбера своїм сповідником, просила вибачення. Він вибачив. Це також нагадує сумний роман.

У нього була одинока старість. Умирав довго, важко. За вікном була жовтнева ніч 1783 року. І вітер продовжував вити в готичних шпилях собору Паризької Богоматері.

Д'Аламбер вважав видатною заслугою римського історика Тацита те, що той говорив просто про важливі речі. Так і сам Жан Лерон д'Аламбер став спроможним виконати своє величезне призначення, вчинити важливі послуги людству так просто, зворушливо та природно! Його чисте життя було гідне його великого розуму: «В ньому серце та розум погодились».

Список літератури

Голованов, Я. (1970). *Этюды об ученых*. Москва: Молодая гвардия.

Добровольский, В. А. (1968). *Даламбер*. Москва: Знание.

Литвинова, Е. Ф. (2014). *Жан Лерон Д'Аламбер. Его жизнь и научная деятельность. Биографический очерк*. Москва: Директ-Медиа.

ЯК ОБЧИСЛЮЮТЬ ІСТИНУ І ПРОЕКТУЮТЬ АВТОМАТИ

В. В. Кошманюк

Гімназія №14 імені Василя Сухомлинського, Луцьк, Україна

Математична логіка досліджує способи міркувань, застосовувані в математиці. Утім, є й інший погляд, згідно з яким математична логіка вивчає будь-які міркування, але за допомогою методів математики. Нарешті, якщо математичні методи застосовують для вивчення математичних міркувань, кажуть про *метаматематику, або теорію доведень.*

Елементи математичної логіки можна знайти вже у працях давньогрецьких філософів. У XVII ст. Г. В. Лейбніц висловив ідею про те, що міркування можна звести до механічного виконання певних дій за встановленими правилами. Однак як самостійний розділ математики математична логіка почала формуватися лише із середини XIX ст.

У XX ст. у межах математичної логіки виник новий розділ — *теорія алгоритмів*, де вивчають не способи міркувати, а способи обчислювати в найширшому сенсі цього слова.

Розвиток математичної логіки ознаменувався досягненнями у двох протилежних напрямках. З одного боку, формалізація математики досягла такого ступеню, що нині майже всі теореми справді можна вивести за визначеними чіткими правилами, і, у принципі, це може зробити навіть комп'ютер. З іншого боку, було встановлено неуникну обмеженість будь-якої «механічної» системи отримання математичних результатів. Таким чином, мрія Лейбніца частково здійснилася, а частково лишилася нездійсненою.

Аби міркувати, людина має використовувати якусь мову — українську, англійську, французьку... Не дивно, що математична логіка починалася з аналізу того, як ми говоримо й пишемо природними мовами, а її розвиток ішов шляхом побудови штучних формальних мов.

Знайомство з математичною логікою ми почнемо з того, що розглянемо розповідні речення. Це найменші мовні конструкції, що можуть бути істинними чи хибними.

Всі без вагань погодяться, що наведені нижче твердження правильні:

Два в квадраті дорівнює чотирьом.Земля є третьою від Сонця планетою Сонячної системи.

І ні в кого, очевидно, не буде сумнівів щодо хибності таких речень:

Три в квадраті дорівнює восьми. Свинець не тоне у воді.

Навіть якщо вам буде важко відразу сказати, чи правильні такі твердження, ви зможете з'ясувати це, зазирнувши до відповідного довідника.

Ось іще ряд речень:

На Марсі було життя. Існує нескінченно багато простих чисел вигляду $2^n - 1$. *Динозаври були теплокровними тваринами. 1 березня 1 року нової ери на території сучасного Києва пройшов дощ.*

Дізнатися, які з них правильні, сьогодні не можна з жодної енциклопедії.

Але щодо перших трьох є надія, що коли-небудь це все ж таки стане відомо. І хоча малоймовірно, що істинність чи хибність останнього твердження колинебудь буде встановлено, нема сумніву, що воно є або істинним, або хибним.

Але трапляються й інші твердження. Чи візьметесь ви стверджувати, що такі фрази можна розумно поділити на істинні й хибні:

У тихому болоті чорти плодяться. За допомогою філософського каменя можна перетворити свинець на золото.

Природна мова допускає граматично правильні конструкції, що виглядають як осмислені твердження, але про які тим не менше не можна у принципі вирішити, істинні вони чи хибні. А чи застраховані ми від подібних тверджень-«примар» у математичних доведеннях? Виявляється, ні. На межі XIX—XX століть в одному з фундаментальних розділів математики, теорії множин, було знайдено парадокси — суперечності, що виникають унаслідок, здавалося б, цілком коректних міркувань (наприклад, так званий «парадокс цирульника»).

Подейкують, що був у якомусь селі лише один цирульник. Він голив усіх тих і тільки тих чоловіків, які не голилися самі. Чи голив цей цирульник сам себе?

Суперечність бере початок з набагато давнішого парадокса — парадокса Евбуліда (IV ст. до н. е.).

Як же уникнути парадоксів? Один із запропонованих шляхів — побудова штучної формальної мови, позбавленої «вільностей» мов природних.

Міркувати людям доводиться скрізь і завжди, не лише в науці, а й у повсякденному житті. А що означає — міркувати? Це означає — робити певні обґрунтовані висновки з тих чи інших конкретних умов. Але міркувати можна правильно і неправильно.

Коли ми кажемо: «Сьогодні на дворі холодно, тому треба одягнутися тепліше», то це правильне міркування. Правильним є також висновок: «Діагоналі квадрата взаємно перпендикулярні, бо квадрат — це ромб, а в ромба діагоналі взаємно перпендикулярні». А от таке міркування: «У кожного слона є хвіст, і в миші є хвіст; отже, миша — це слон» явно хибне.

У таких простих прикладах зовсім неважко розібратися, які висновки правильні, а які — ні. Але часто трапляються такі складні міркування, у яких нелегко відрізнити істинні висновки від хибних. Тому існує давня наука —*логіка,* яка вивчає закони й форми правильного мислення і допомагає орієнтуватися в хащах істинних і хибних міркувань.

Закони і правила логіки становлять необхідну основу будь-якої науки, і насамперед — математики. А математика за всіх часів була зразком високої досконалості: вона поєднує неперевершену точність і чіткість з безсумнівною надійністю та переконливістю. Недарма, коли хочуть підкреслити незаперечну істинність якогось висновку, то кажуть, що його «доведено математично», або що він правильний, «як $2 \cdot 2 = 4$».

Особливе значення має питання про математизацію логіки. Адже логіка — це наука про найзагальніші закони мислення, якими користуються всі без винятку: і математик, і інженер, і поет, і хлібороб. Математизувати логіку — це означає великою мірою математизувати всі науки й усі галузі творчої людської діяльності. Унаслідок прагнення до математизації логіки і виникла на стику математики нова наука — *математична логіка,* яка вивчає закони правильних міркувань за допомогою математичного апарату. Висловлюючись образно, можна сказати, що математична логіка народилася тоді, коли класична логіка заговорила чіткою й точною мовою математики.

У наші часи створено математичний апарат для розв'язування багатьох важливих суто логічних задач, створено комп'ютери, які можуть вирішувати будь-які задачі й доводити теореми. Разом з тим доведено, що не кожну задачу можна розв'язувати обчисленнями, і в цьому теж заслуга математичної логіки.

Справжнім основоположником математичної логіки є англійський математик Джордж Буль (1815—1864). Він уперше створив *логічне числення,* тобто застосував математичний апарат до класичної логіки.

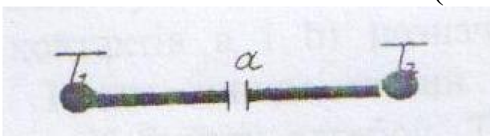
Математична логіка — молода наука, їй більше ста років (тоді як у математики й логіки за плечима тисячоліття!). Після Буля розвиток математичної логіки відхилився від початкового напряму — алгебри логіки. Зусилля логіків і математиків були спрямовані на подолання труднощів, що виникли в математиці в кінці XIX ст. і загрожували зруйнувати її основи. Ці труднощі мали логічну природу, але засобами класичної логіки їх не можна було усунути. Тому доводилося розвивати новий логічний апарат — математичну логіку. Обслуговування математики, обґрунтування її основ стало головним завданням математичної логіки. На цьому шляху вона досягла великих успіхів і високого ступеня досконалості.

Проте математична логіка не була популярною в широких колах спеціалістів — навіть деякі математики до неї ставилися скептично і зневажливо. Це пояснюється тим, що математична логіка вважалася зразком суто теоретичної, відірваної від життя науки, яка не може мати ніяких практичних застосувань.

І раптом сталося несподіване: математична логіка виявила такі якості, про які й не підозрювали її творці — вона знайшла блискучий вихід у техніку! Це трапилося в середині 30-х років нашого століття, коли було відкрито застосування математичної логіки до аналізу і синтезу релейно-контактних схем. Після цього математична логіка стала бурхливо розвиватися й дістала загального визнання. Зараз вона становить теоретичну основу кібернетики. За її допомогою конструюються промислові автомати й сучасні комп'ютери. Вона потрібна не лише математикові, а й інженерові, філологові, історикові — усім, хто користується математикою і кібернетикою, а ці науки пронизують усі галузі життя.

У більшості сучасних обчислювальних машин проблема спочатку описується в математичних термінах, при цьому вся необхідна інформація представляється в двійковій формі (у вигляді одиниць і нулів), після чого дії з її обробки зводяться до застосування простої алгебраїчної логіки. Оскільки практично вся математика може бути зведена до виконання булевих операцій, достатньо швидка електронна обчислювальна машина може бути застосована для вирішення більшості математичних завдань (а також і більшості завдань з обробки інформації, які можуть бути легко зведені до математичних).

Булева алгебра має справу із двома елементами, тому вона придатна для опису будь-якої фізичної системи, яка може перебувати у двох стійких станах, або, як кажуть, працює за принципом «так — ні». Зараз ми розглянемо одну з таких систем, дуже важливу для автоматики. Це — контактна (або релейно-контактна) схема, яка складається з електричних контактів, з'єднаних між собою певним способом. Кожен контакт під впливом зовнішньої дії (вмикання, вимикання) може перебувати у двох стійких станах: замкненому, коли він з'єднує два провідники (пропускає струм), і розімкненому, коли він роз'єднує їх (не пропускає струму). Позначатимемо контакт так (мал. 1):



Мал. 1

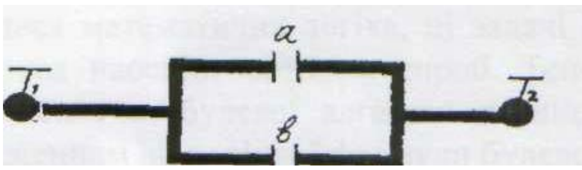
Тут а — знак контакту (а також його стану), T_1 — вхідний полюс, T_2 — вихідний полюс. На вхід T_1 подається струм, на його шляху стоїть контакт а; залежно від стану контакту а, струм пройде на вихід T_2 або не пройде. Позначимо стани контакту цифрами 0 і 1, а саме:

Введемо ще контакт, інверсний для а; він зв'язаний з а так, що коли а замкнений, то а розімкнений, а коли — розімкнений, то а — замкнений.

Очевидно, стан інверсного контакту визначається з булевого доповнення (логічного заперечення).

Контактна схема має один вхід для подачі струму й один вихід. Залежно від станів контактів контактна схема теж може перебувати в одному із двох станів: замкненому (струм проходить на вихід) і розімкненому (струм не проходить). Звичайно, позначення 0 і 1 для станів зберігаються й у випадку контактної схеми. Найпростіші контактні схеми — це послідовне й паралельне з'єднання двох контактів. Послідовне з'єднання подано на мал. 2.

Мал. 2

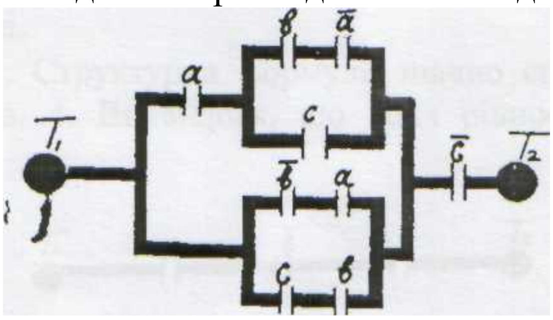


Мал. 3

Коли ця схема буде замкненою? Очевидно, лише тоді, коли обидва контакти a та b замкнені ($a = b = 1$); якщо ж хоч один з них розімкнений ($a = 0$ або $b = 0$), то й уся схема буде розімкнена. Але це означає, що робота нашої схеми відповідає таблиці булевого множення! Тому стан такої схеми (послідовне з'єднання двох контактів a та b) позначатимемо через ab і називатимемо множенням контактів.

Паралельне з’єднання двох контактів показано на мал. 2. Легко побачити, що ця схема розімкнена за умови, що обидва контакти розімкнені ($a = b = 0$) і замкнена, якщо хоч один з них замкнений ($a = 1$ або $b = 1$), тобто вона працює за таблицею булевого додавання. Тому стан такої схеми (паралельне з’єднання контактів a і b) позначимо через $a \vee b$ і назвsмо додаванням контактів. Таким чином, стани електричних контактів і контактних схем утворюють булеву алгебру. Тому й дії над контактами виконуються за правилами і законами булевої алгебри. Множину контактних схем цілком доречно назвати алгеброю контактних схем.

Розглядатимемо лише так звані П-схеми, які утворюються за допомогою послідовних і паралельних з’єднань. Приклад П-схеми подано на мал. 4.



Мал. 4

Однакові букви позначають контакти, які працюють одночасно і однаково (a і a) або інверсно (a і $\overline{a}$).

У теорії контактних схем доводиться розв’язувати три основні задачі.

1. Аналіз контактних схем: за даною контактною схемою вивчити умови її роботи (тобто визначити стан схеми при будь-яких даних станах її контактів), не виконуючи фізичної реалізації цієї схеми.

2. Синтез контактних схем: за даними умовами роботи скласти контактну схему.

3. Спрощення контактних схем: замінити дану контактну схему простішою рівносильною їй схемою, тобто схемою з тими самими умовами роботи. Схема вважається тим простішою, чим менше в ній контактів. Доки в техніці не застосовувалася математична логіка, ці задачі вважали досить трудними і розв’язувалися наосліп, методом спроб. Тепер їх розв’язують єдиним методом за допомогою булевої алгебри: дослідження контактної схеми заміняють дослідженням відповідної формули булевої алгебри.

Справді, для кожної П-схеми можна скласти так звану структурну формулу, яка виражає стан схеми через стани її контактів. Для цього досить застосувати зв’язок між послідовними і паралельними з’єднаннями контактів і булевими операціями. Так, для контактної схеми, поданої на мал. 4, структурна формула, очевидно, буде така:

$$\mathrm{P} = [a(b \vee \mathrm{c}) \vee (\mathrm{a} \vee cb)].$$

Кажуть, що структурна формула описує дану схему, а схема працює за цією формулою, або реалізує її.

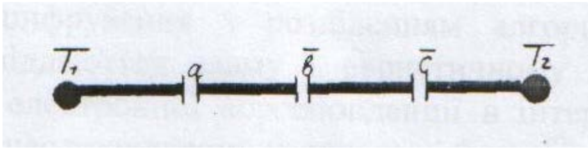
Зв’язок між ними дуже простий: контактна схема замкнена, якщо її структурна формула має значення 1, і розімкнена, якщо має значення 0. Таким чином, стан контактної схеми обчислюється за законами булевої алгебри. Якщо скажімо, у нашому прикладі контакт a замкнений, а контакти b і c розімкнені, тобто $a = 1, b = c = 0$, то $F = 1$.Це означає, що схема в цьому випадку замкнена. Отже, аналіз контактної схеми зводиться до складання і дослідження її структурної формули.

Для спрощення контактної схеми спрощують її структурну формулу за законами булевої алгебри і будують контактну схему за спрощеною формулою. В нашому прикладі маємо:

$$F = [a(b \vee c) \vee (a \vee cb] = (ab \vee ac \vee a \vee cb) = ab \vee ac \vee a \vee cb = a,$$

бо решта членів — нулі.

Отже, $F = a$. Структурна формула значно спростилася, а з нею і контактна схема мал. 4. Виявилося, що вона рівносильна схемі із трьох контактів (мал. 5).



Мал. 5

Математика має одну важливу перевагу над іншими науками — це її могутній апарат — символіка та обчислювальні засоби. У математиці міркування істотно полегшуються за допомогою символічних перетворень і обчислень. Щоб зрозуміти, наскільки це важливо, досить пригадати, як важко розв’язати деякі задачі «арифметично», тобто звичайними міркуваннями, і як просто розв’язуються ці задачі, коли застосувати алгебраїчну символіку і правила розв’язування рівнянь. Рівняння «думають» за нас!

Це не просто фігуральний вираз, він містить глибоку q важливу істину: математичні символи і правила перетворень не лише скорочують записи і спрощують викладки — вони беруть на себе значну частину розумової діяльності людини.

Кожна наука хотіла б мати таке полегшення під час розв’язування своїх задач, а це можливо лише при застосуванні зручного і гнучкого математичного апарату.

У наші дні відбувається справжня революція в наукових дослідженнях, спричинена так званою математизацією світу, тобто проникненням математичних методів у всі інші науки, техніку і життя. Така «математизація», хоч вона й не може повністю замінити спеціальні методи інших наук, подає їм та промисловості велику допомогу, її роль дедалі зростає, а можливості невичерпні.

Сучасна логіка — надзвичайно абстрактна дисципліна, але, оскільки немає нічого більш практичного за гарну теорію, не дивно, що логіка має цілий ряд емпіричних застосувань.

Найочевидніше застосування — електроніка та електротехніка: по-перше, всі сучасні електричні та електронні схеми проектуються засобами алгебри логіки (тобто, зрештою, логіки висловлювань); по-друге, процесори електронних приладів є прямим матеріальним втіленням логічної теорії обчислюваності, теорії алгоритмів. Це - практично матеріалізація логіки. Тому кожного дня, вмикаючи комп'ютер чи приймаючи дзвінок на мобільний телефон, ми неявно визнаємо практичний характер логіки.

Другим полем для застосування вже давно є криптографія. Приміром, сучасні способи шифрування з розділенням алгоритмів зашифровки і розшифровки не піддаються зламу і евристичному аналізу. Кожен, хто створює для своєї електронної кореспонденції в Інтернеті ключ GPG або PGP, тим самим визнає прикладний характер цієї теорії.

Тризначні логіки виявилися незамінним інструментом для представлення геометричних об'єктів; це дозволяє моделювати логічними функціями об'єкти і системи всюди, де потрібна мова геометрії: у механіці, фізиці.

Нарешті, формальні системи, які можна застосовувати до будь-яких процесів емпіричної дійсності, які піддаються дискретизації: в генетиці, економіці, психології та інших науках. Найвідомішим серед них є використання в мовознавстві: тут формальні системи спеціального виду, що були названі граматиками, породили таку масу досліджень, що нині математична лінгвістика нерідко навіть дещо недоречно ототожнюється з теорією граматик (тобто, зрештою, оголошується підрозділом логіки).

Безмежне поле для логічних досліджень відкривають соціальна інженерія, теорія прийняття рішень і психологія, що містять достатньо проблем логічного характеру для того, щоб логіка могла посісти виняткове місце в цих науках.

Список літератури

Аксенова, М., и др. (Ред.). (2007). Аванта+. *Энциклопедия для детей*. (Т.11. Математика). Москва: Мир энциклопедий Аванта+: Астрель.

Гуменяк, О. В. (1998). *Цікаві математичні задачі*. М. Ю. Зубченко (Ред.). Київ: Академія.

Кованцова, Л. (1977). *Математична хрестоматія: Алгебра і початки аналізу*. М. І. Кованцов (Ред.). Київ: Радянська школа.

Хмара, Т. М. (1999). *Шляхами математики: Хрестоматія для учнів 5—9 кл.* Київ: Педагогічна преса.

Хоменко, І. В. (2007). *Логіка: Підручник*. Київ: Центр учбової літератури.

ГЕНЕАЛОГИЧЕСКОЕ ДРЕВО КАРАТЕОДОРИ

Т. В. Маловичко

Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского», Киев, Украина

tatianamtv@rambler.ru

Расмотрены родственные связи выдающегося математика Константина Каратеодори (1873—1950).

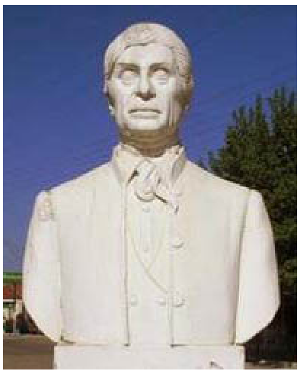
Ключевые слова: Каратеодори, генеалогическое древо.

Константин Каратеодори (греч. Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή, 13 сентября 1873 Берлин — 2 февраля 1950, Мюнхен) — выдающийся греческий математик. Он известен работами по теории функций, вариационному исчислению (построение теории поля экстремалей), теории конформных отображений, теории меры. Также он предложил аксиоматическое построение основ термодинамики. Профессор четырёх немецких университетов, а также Афинского технического института, возглавлял с 1919 по 1922 год Ионийский университет в Смирне (ныне Измир). Ему посвящён музей в Комотини (город на северо-востоке Греции).

Константин Каратеодори происходит из знаменитого рода дипломатов и врачей, более чем заслуживающего внимания.

Основателем рода является Теодор Каратеодори. У него было два сына и две дочери. Старший сын Антониос (1765—1815) занимался, как и отец, торговлей. Женился он на Анне (Anna Sotiriou, Anna Sotirichou), племяннице Кирилла IV, Патриарха Константинопольского (Fritsch, 2002).

Младший сын Стефан (1789—1897) родился уже сиротой через два месяца после смерти отца. Он был врачом, философом, основателем имперского медицинского института в Константинополе, профессором которого он являлся в течение четырех десятилетий. Стефан Каратеодори был с 1827 личным врачом султана Махмуда II, а с 1828 по 1861 г его сына и преемника Абдул-Меджида I, получил титул паши. Он свободно изъяснялся и писал на 17 языках. Похоронен с женой и сыном Александром в греческой православной церкви Панагия Евангелиста в Йеникёе (Сарыйер, Стамбул).



На центральной площади маленькой греческой деревушки Неа-Висса (Νέας Βύσσας) стоит его мраморный бюст. Близлежащая улица также названа в его честь (Οικογένεια Καραθεοδωρή).

У Стефана было семеро детей: пять дочерей и два сына. Причём оба сына в разное время были князьями Самоса.

Самос (греч. Σάμος) — это остров в Греции, в Эгейском море в архипелаге Восточные Спорады. На тот момент Самосу была предоставлена автономия при номинальном турецком суверенитете. В автономном юридическом статусе остров пробыл вплоть до 1913 г., когда он воссоединился с Грецией.

Старший сын Стефана Александр (1833-1906) правил Самосом с 1885 г. по 1895 г., а младший Константин (1841-1922) с июля 1906 г. по сентябрь 1907 г.

Александр Каратеодори (1833—1906)

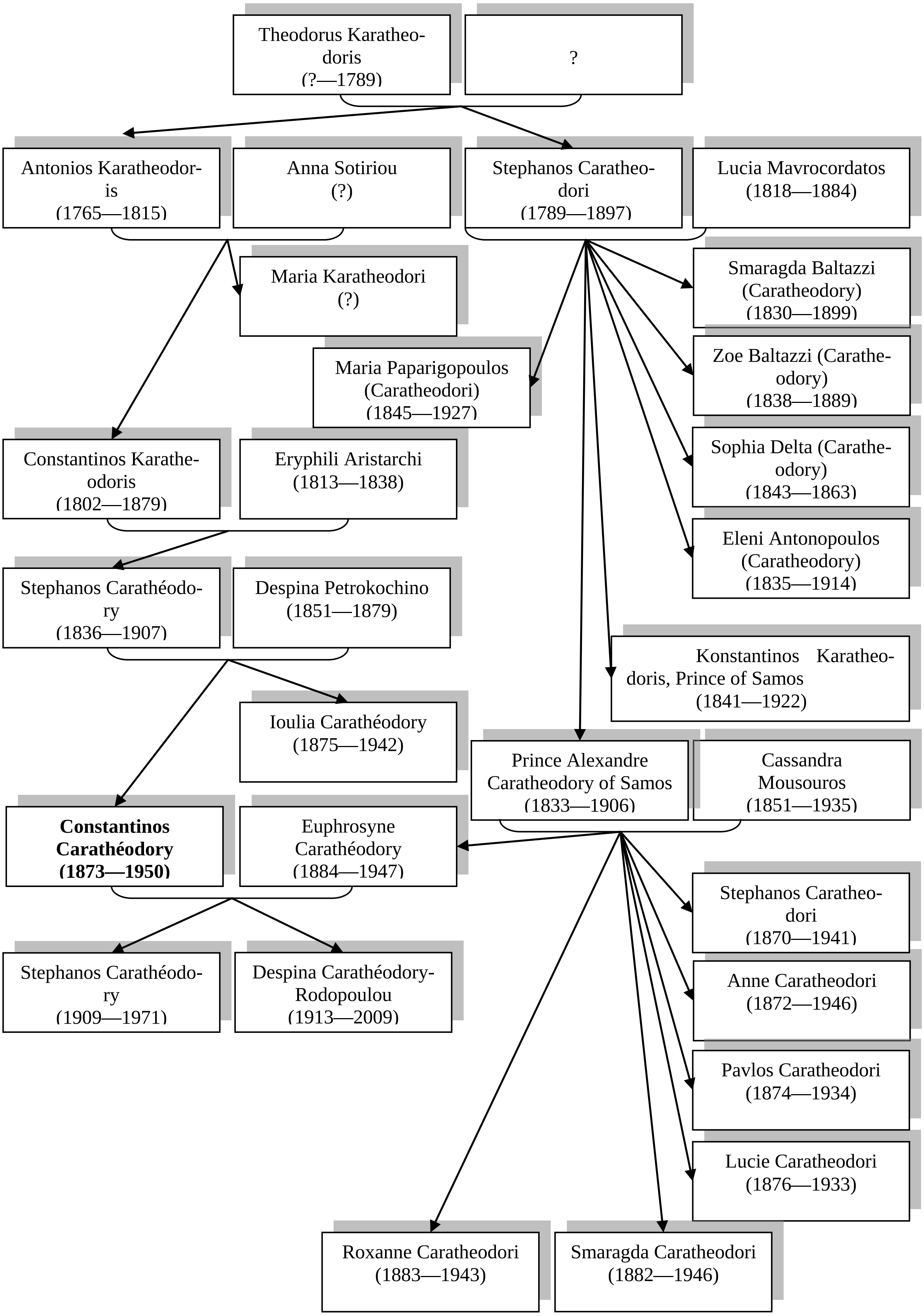
Константин Каратеодори (1841—1922)

Особняк Каратеодори (Сарыйер, Стамбул)

Александр-паша в 1874 г. был назначен послом. Был поверенным великого визиря Суффета-паши, благодаря содействию которого возглавил управление иностранными делами — пост, который до этого не занимал христианин. На Берлинском конгрессе в 1878 году Каратеодори был одним из делегатов Порты и подписал заключительные акты договора 13 июня 1878 года. В ноябре 1878 года он был назначен генерал-губернатором Крита. В декабре 1878 года он был отозван и был османским министром иностранных дел, пока он не оставил эту должность в 1879 году. Как уже было сказано, в течение целого десятилетия (1885-1895) он был князем Самоса. В мае 1895 года вновь был назначен губернатором Крита, но потерпел неудачу в восстановлении порядка и ушел в отставку в декабре.

Константин Каратеодори (1802—1879) — сын Антониоса и дед великого математика. Он был знаменитым турецким врачом, хирургом. Он преподавал в имперской медицинской школе и написал книгу о борьбе с чумой. Был женат дважды. От первой жены у него был сын Стефан, отец великого математика. От второй ещё четверо детей. Но обе жены умерли очень рано.

Стефан (1836—1907) был послом Османской империи. У него было двое детей: знаменитый математик и его сестра Юлия (Ioulia, Loulia, Julia).



Генеалогическое древо Каратеодори (geneanet.org, geni.com)

Юлия (1875—1942) вышла замуж за Георгиуса Штрайта (Georgios Streit, Γεώργιος Στρέιτ; 1868—1948), который был юридическим советником короля Константина I, а также министром иностранных дел накануне Первой мировой войны. Позднее он служил в качестве судьи в Постоянной палате третейского суда в Гааге. Его именем назван целый ряд улиц в Афинах и пригородах. Его правнук — бывший министр культуры и туризма Греции Павлос Геруланос (Georgiadou M., 2004).

Женой математика Константина Каратеодори стала его тётя Ефросинья Каратеодори, дочь Александра-паши, которая была младше Константина на 11 лет. У них было двое детей: сын Стефан (1909—1971) и дочь Деспина (1913—2009).

Деспина была замужем сначала за Теодором Скутари, от которого родила сына Александра, а затем за Стефаном Родопулосом.

И Стефан Катареодори, и Деспина Каратеодори-Родопулос выступали на конференциях, посвящённых памяти их отца. А Деспина даже написала книгу, посвящённую ему (Δέσποινα Καραθεοδωρή-Ροδοπούλου και Δέσποινα Βλαχοστεργίου-Βασβατέκη, Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή, εκδ. Κάκτος, Αθήνα 2001).

Η φωτογραφία της Ευφροσύνης, που βρισκόταν πάντα δίπλα στον Κων/νο μέχρι το θάνατό του, με αφιέρωση στο πίσω μέρος και ημερομηνία Μάιος 1906

Список літератури

Christopherlong.Co.Uk. (2017). *Prince Alexander (Stephanos) Caratheodori of Samos, Pasha & Cassandra (Pavlos) Musurus*. [online] Получено с: http://www.christopherlong.co.uk/gen/maximogen/fg15/fg15_467.html

Fritsch R. (2002) *Constantin Carathéodorys. Herkunft und Leben*. Получено с http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~fritsch/caratheo.pdf

Geneanet. (2017). *Geneanet – Réinventons la Généalogie*. [online] Получено с: http://www.geneanet.org/

Georgiadou, M. (2003). *Constantin Carathéodory*. Springer-Verlag

Prince Alexandre Caratheodory of Samos, P. and Constantinople, T. (2017). *Prince Alexandre Caratheodory of Samos, Pasha*. [online] geni_family_tree. Получено с: https://www.geni.com/people/Prince-Alexandre-Caratheodory-of-Samos-Pasha/6000000011046479946

S-karatheodoris.gr. (2017). Οικογένεια Καραθεοδωρή. [online] Получено с http://www.s-karatheodoris.gr/oikogeneia-karatheodori/stefanos-karatheodoris/

Журнал общества друзей К. Каратеодори. Выпуск 57. [Электронный вариант] Получено с: https://goo.gl/984P8f

ВЕРБАЛЬНО-ГРАФІЧНІ МЕТОДИ НАВЧАННЯ: РЕТРОСПЕКТИВНИЙ АНАЛІЗ СПАДЩИНИ УКРАЇНСЬКИХ ПЕДАГОГІВ ДРУГОЇ ПОЛОВИНИ XIX — ПОЧАТКУ XX ст.

О. І. Москальова[1], О. С. Мелікян[2]
[1]*СЗШ № 316, Київ, Україна*
[2]*СЗШ № 74, Київ, Україна*
Mes.elena84@ukr.net

У статті розглянуто й узагальнено погляди видатних українських педагогів другої половини XIX — початку XX ст. щодо теоретико-методологічних засад вербально-графічних методів навчання. На основі ретроспективного аналізу педагогічного доробку вчених досліджуваного історичного періоду виділено основні тенденції та представлено моделі поєднання вербального способу подання навчального матеріалу з графічною наочністю.

Ключові слова: навчальний процес, наочні методи навчання, форми поєднання слова і графічної наочності, вербально-графічний метод.

На сучасному етапі реформування освіти України особлива увага приділяється оновленню цілей, змісту освіти та методів навчання. В умовах варіативності педагогічної теорії та практики зростає інтерес до витоків становлення вербально-графічних методів навчання.

Проблема використання та вдосконалення наочного матеріалу в навчальному процесі загальноосвітньої школи була і є актуальною. Для кожного історичного етапу характерні власні тенденції, вимоги до використання наочного матеріалу, також позитивні і негативні моменти.

Період, що охоплює другу половину XIX століття — першу чверть XX століття, ознаменувався сплеском розвитку української педагогічної думки, становленням ідей, які створили підґрунтя для розвитку сучасної національної педагогіки. Ціла плеяда діячів освіти, відомих педагогів (Б. Грінченко, О. Духнович, Т. Лубенець, О. Кониський, Я. Мамонтов, С. Русова, С. Сірополко, Я. Чепіга, та інші) плідно працювала на ниві розвитку національної педагогічної думки та відстоювала етнографічно-культурницьку, народницьку світоглядну парадигму. Видатні педагоги проводили велику роботу, спрямовану на становлення української освіти, започаткували створення українських підручників для дітей та дорослих тощо.

Аналіз педагогічного спадку видатних українських вчених другої половини XIX — початку XX ст. висвітлено в працях Т. Беднаржової, Л. Березівської, С. Болтівець, М. Веркалець, В. Волошиної, Г. Головко, Т. Горбунової, Н. Дічек, А. Животенко-Піанків, І. Зайченко, Ф. Науменко, Н. Побірченко, Л. Пироженко, Г. Савицької, Т. Самоплавської, О. Сухомлинської та ін.

Отже, мета статті — проаналізувати та виділити зі спадщини видатних українських педагогів досліджуваного історичного періоду ті аспекти, що відображають історію становлення вербально-графічних методів навчання.

Значний внесок у розробку дидактичних проблем зробив відомий український педагог О. Духнович. Дидактична система О. Духновича відкидала формальне заучування незрозумілого матеріалу, будувалася на врахуванні вікових та індивідуальних особливостях учня. Педагог особливо виділяв наочність, уважав її одним з основних засобів міцного й усвідомленого засвоєння учнями знань. У навчальному процесі вчитель має користуватися як натуральними предметами, так і картинами, малюнками, картами, іншими видами зображень, а також емоційно коментувати, аналізувати графічні зображення, залучати до обговорення учнів, будити допитливість, розвивати їх мислення (Науменко, 1964).

Український педагог, письменник, громадський діяч, організатор недільних шкіл О. Кониський у ґрунтовній розвідці «Наські граматки» (1862) критично проаналізував існуючі підручники української граматики та сформулював вимоги до їх складання, серед яких особливу увагу приділяв художньому оформленню букварів, залученню цікавого графічного матеріалу. Талановитий педагог-методист уважав, що ілюстрації до азбуки потрібно підбирати так, щоб дитині було легше навчатися: малюнки будуть привертати до себе увагу, а дитина, розглядаючи їх, зацікавиться й тим, що коло них (Кониський, 2003, с. 58).

Педагог-просвітник О. Кониський зробив значний внесок у розвиток графічних методів навчання: був автором актуальних педагогічних праць, укладав і видавав українські підручники, розробляв критерії до складання букварів, граматик і читанок на основі цікавого наочного матеріалу, сформулював умови раціонального використання графічного матеріалу тощо.

На розвиток педагогічної думки зазначеного історичного періоду великий вплив справили погляди вітчизняного письменника-просвітителя, педагога, громадського діяча Б. Грінченка. Коло наукових інтересів педагога включало й методичні аспекти навчально-виховного процесу. Так, педагог-практик неухильно стояв на позиціях наочності навчання, свої власноруч створені підручники оздоблював яскравими ілюстраціями, які на його переконання, живили образне й абстрактне мислення, «робили науку розумнішою, цікавішою учневі». Відповідно до цих вимог складені Б. Грінченком підручник «Українська граматка до науки читання й писання»(1907), читанка «Рідне слово» (1912) та інші книжки (Веркалець, 1990).

До проблеми наочності навчання також неодноразово зверталася й видатний український педагог, громадська діячка, просвітителька С. Русова. Аналізуючи нові методи навчання, що відповідають поступовим педагогічним принципам, С. Русова зазначала: «До кожної науки діти додають свої вироби малюнком, ліпінням, графічними діаграмами, картами або що. Через це малярство й ліпіння мусять йти слідом за усіма лекціями» (Русова, 2003, с. 153).

Отже, спираючись на ідеї національного виховання та на вагомі здобутки світового зарубіжного досвіду з педагогіки та психології, С. Русова наголошувала на оновленні методів викладання, поєднанні вербальних методів з наочними, доцільності широкого використання на всіх етапах навчально-виховного процесу різних видів наочного матеріалу: натуральних предметів, ілюстрацій, схем та інших графічних зображень.

Вчений-педагог, історик освіти України, культурно-громадський діяч С. Сірополко у своїх чисельних працях здійснив спробу неупередженого аналізу існуючих методів шкільної роботи, які сприяли або, навпаки, перешкоджали розумовому розвитку дитини. Учений констатував, що сучасна школа дає учням лише певні догматичні істини, страждає відірваністю шкільного матеріалу від життя, від вражень і спостережень учнів (Сірополко, 2003, с. 156). Видатний педагог у ґрунтовній праці «Завдання нової школи» (1919) зазначав: «…реальне та наочне є основа навчання, але не кінець його… Виходячи від наочного, ми … повинні доцільно доводити ученика — по мірі його сил і розуміння — до абстрактного, як до поліпшення його мови, так і до розвитку його думання» (Сірополко, 2003, с. 157).

Відомий український педагог та освітній діяч Т. Лубенець також чимало зусиль віддав справі народної освіти України. Науковий доробок педагога містить велику кількість дидактичних та методичних рекомендацій. Так, в основній своїй педагогічній праці «Педагогические беседы» (1903), Т. Лубенець порушував питання щодо наочних методів навчання мови в українській школі, наголошував на ефективності залучення до викладання різноманітних графічних зображень, моделей: «Дійсний, реальний предмет є початком натурального методу. Але не всі необхідні предмети є в розпорядженні вчителя, то їх можуть заміщувати моделі або добре виконані картини» (Лубенец, 1913, с. 173). У цій роботі Т. Лубенець також закликав учителів до вдосконалення своєї професійної діяльності шляхом систематичного вивчення нових, придатних для певного віку учнів методик вербально-графічного викладання (Лубенец, 1913, с. 174).

В іншому дослідженні «О наглядном преподавании» (1911) педагог надав актуальні вказівки щодо проблеми широкого та вмілого використання наочності : «…наочність в навчанні необхідна для кожної добро організованої школи» (Лубенец, 1911, с. 3). Учений зазначав, що демонстрація малюнків, різних видів графічних зображень та різноманітних моделей, так само як і реальних предметів, є корисним методом наочного навчання. Коло наукових інтересів видатного педагога, психолога, експерта початкових шкіл міста Києва в пореволюційні роки Я. Чепіги (Зеленкевича) охоплювало й питання наочності навчання. На думку педагога, у шкільних підручниках мають бути точні зображення близьких, знайомих з життя речей. Щодо якості графічного матеріалу, то ілюстрації мають відповідати змісту статей, бути образними, логічними, майстерно виконаними, не перевантаженими великою кількістю елементів. Таким чином оформлені шкільні підручники, на переконання педагога, мають позитивно впливати на розвиток творчих здібностей учнів (Березівська, 2005).

Отже, освітня діяльність українських науковців та педагогів-практиків досліджуваного історичного періоду заслуговує на увагу сучасних вчених, оскільки в їх творчості знайшла відображення широка палітра актуальних проблем дидактики. Педагоги вказували на необхідність реформування існуючої системи освіти, розробляли власні педагогічні теорії. Звернення до історико-педагогічних джерел дає змогу зробити висновок про те, що друга половина XIX — початок XX ст. — плідний етап розвитку концепції вербально-графічних методів навчання. Протягом усього цього періоду здійснювалися пошуки оптимальної моделі використання візуального оформлення викладачем і учнями навчальної інформації, формувалося коло вимог ефективного застосування графічного матеріалу в навчальному процесі. Таким чином, досвід видатних педагогів минулого потребує цілісного дослідження та актуалізації на сучасному етапі модернізації української системи освіти.

Список літератури

Березівська, Л. Д. (2005). Чепіга (Зеленкевич) Яків Феофанович. О. В. Сухомлинська (Ред.), *Українська педагогіка в персоналіях*: Навч. посібник. (У 2 кн.) (Кн. 2., с. 89—100). Київ: Либідь.

Веркалець, М. М. (1990). *Педагогічні ідеї Б. Д. Грінченка*. Київ: Товариство «Знання» УРСР.

Кониський, О. Я. (2003). Наські граматки. У Л. Д. Березівська та ін. (Упоряд.), О. В. Сухомлинська (Наук. ред.), *Маловідомі першоджерела української педагогіки (друга половина XIX — XX ст.): Хрестоматія* (с. 51—64). Київ: Науковий світ.

Лубенец, Т. Г. (1913). *Педагогические беседы* (2-е изд., доп. и перераб.). Санкт-Петербург: Изд. П. В. Луковникова.

Лубенец, Т. Г. (1911). О наглядном преподавании. *Оттиск из «Циркуляра по Киевскому учебному округу»*, 2—28.

Науменко, Ф. І. (1964). *Основи педагогіки О. В. Духновича: Лекції з історії педагогіки.* Львів: Вид-во ЛДУ ім. Івана Франка.

Русова, С. Ф. (2003). Ідейні підвалини школи. У Л. Д. Березівська та ін. (Упоряд.), О. В. Сухомлинська (Наук. ред.), *Маловідомі першоджерела української педагогіки (друга половина XIX — XX ст.): Хрестоматія* (с. 150—154). Київ: Науковий світ.

Сірополко, С. О. (2003). Завдання нової школи. У Л. Д. Березівська та ін. (Упоряд.), О. В. Сухомлинська (Наук. ред.), *Маловідомі першоджерела української педагогіки (друга половина XIX — XX ст.): Хрестоматія* (с. 155—164). Київ: Науковий світ.

Сухомлинська О. В. (2003). Переднє слово. У Л. Д. Березівська та ін. (Упоряд.), О. В. Сухомлинська (Наук. ред.), *Маловідомі першоджерела української педагогіки (друга половина XIX — XX ст.): Хрестоматія* (с. 5—9). Київ: Науковий світ.

ПРОБЛЕМИ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ПІДГОТОВКИ В ПОЛІТЕХНІЧНИХ ВНЗ З ТОЧКИ ЗОРУ НАСТУПНОСТІ МАТЕМАТИЧНОЇ ОСВІТИ ШКОЛЯРІВ І СТУДЕНТІВ

І. В. Пасічник, Т. П. Бас, І. В. Щербина

НМетАУ, Дніпро, Україна

i.pasechnik@ukr.net, sherbinaiv@ukr.net

Стаття присвячена проблемам математичної підготовки студентів технічних вузів. Автори аналізують причини проблем і пропонують своє бачення щодо шляхів їх подолання.

Ключові слова: математична підготовка, інженерна технологія, статистика.

Добре відомо, що курс вищої математики в політехнічному вищому навчальному закладі є фундаментом математичної підготовки майбутнього інженера, основою формування його творчої та професійної активності. Однак існує ціла низка причин, які перешкоджають організації цього процесу.

Зазначимо найважливіші з них. По-перше, зазвичай курс вищої математики читається класично, без урахування прикладної спрямованості предмета (Пасічник, Щербина, & Бас, 2016; Пасічник, Щербина, & Татарко, 2008). Підручники, посібники, задачники з математики носять достатньо формальний характер, містять тільки вправи обчислювального характеру і майже не пропонують задач професійного прикладного змісту, розв’язання яких вимагає від викладачів і студентів поєднання математичних і спеціальних знань. По-друге, відбувається перерозподіл навчального навантаження на користь самостійної роботи студентів, отже, на зменшення часу аудиторних занять. По-третє, досить низький рівень математичної підготовки абітурієнтів, значні прогалини у засвоєнні шкільного курсу математики в багатьох студентів-першокурсників і створюють значні труднощі у викладанні математичних дисциплін, що передбачені навчальними планами вищих навчальних закладів.

У 2015—2017 роках було проведено анкетування серед студентів 1—2 курсів технічних спеціальностей академії, під час якого їм було запропоновано визначити у відсотковому співвідношенні причини, які лежать в основі проблем, що виникають у них при засвоєнні математики.

Враховуючи, що 100% складають усі чотири виділених блока причин, отримані наступні результати:

1) математичні дисципліни викладаються в занадто формалізованому, абстрактному вигляді, складно виявити зв’язок між математичними знаннями та професійними задачами (вказали 21,8% опитаних студентів);

2) незатребуваність математики викладачами інших дисциплін та керівниками курсових робіт (16,7% респондентів);

3) низький рівень шкільної математичної підготовки (41,5 % респондентів);

4) низький рівень організації контролю знань студентів (12 % респондентів);

8% студентів відповіли, що не мають проблем.

Акцентуємо нашу увагу й розгляньмо більш детально третю причину, а саме, зниження рівня шкільної математичної підготовки абітурієнтів.

Запровадження зовнішнього незалежного оцінювання знань випускників, безперечно, було прогресивною ідеєю мінімізувати стресову ситуацію для абітурієнтів, оскільки воно об’єднує випускні та вступні екзамени. Однак, у результаті загальний рівень математичної підготовки абітурієнтів не зазнав очікуваного значного підвищення. Часто високий бал ЗНО з математики свідчить не про покращення знань абітурієнтів, а про зниження вимог до них, наприклад, зниження складності завдань (можливість угадати правильні відповіді). Зауважимо, що оцінка, достатня для зарахування до ВНЗ, повинна гарантувати можливість студенту навчатися за існуючими державними програмами. Доводиться викладачам вишів зосереджуватись (особливо під час першого семестру) на усування прогалин, які утворюються на різних етапах шкільного навчання, викладати такі теми як «Вектори», «Границі», «Похідні» тощо. І якщо викладачі вищої школи примушені до виправлення шкільних проблем, то й шкільні вчителі мають, на нашу думку, удосконалюювати викладання математики, сприяти розвитку зацікавленості учнів до предмета. Концептуальні засади більшості досліджень ґрунтуються на наступному положенні: пріоритетним для навчального процесу, який сприяє розвитку творчої особистості учнів та наступному покращенню якості їх знань, є перехід від репродуктивної діяльності до творчої з урахуванням особливостей педагогічного впливу на цей процес.

Розгляньмо, як приклад, варіант викладання розділу «Елементи статистики» у курсі шкільної математики у вигляді популярного у наш час складання «візитки автора» художнього твору (Малютина, 2010).

У кожного автора є своя таблиця розподілу відносної частоти використання букв, слів, словосполучень, прийменників. За такими таблицями можна встановити автора досить точно.

Розглянемо обробку первинних даних на прикладі уривка з вірша Тараса Шевченка.

$$\overset{4}{\text{Реве}}\ \overset{2}{\text{та}}\ \overset{6}{\text{стогне}}\ \overset{5}{\text{Дніпр}}\ \overset{7}{\text{широкий}},$$

$$\overset{8}{\text{Сердитий}}\ \overset{5}{\text{вітер}}\ \overset{6}{\text{завива}},$$

$$\overset{6}{\text{Додолу}}\ \overset{5}{\text{верби}}\ \overset{3}{\text{гне}}\ \overset{6}{\text{високі}},$$

$$\overset{6}{\text{Горами}}\ \overset{5}{\text{хвилю}}\ \overset{7}{\text{підійма}}.$$

Нас цікавить кількість букв у кожному слові. Весь вірш — генеральна сукупність, а уривок — вибірка. На основі аналізу даних вибірки роблять висновок про всю генеральну сукупність.

Число елементів вибірки — це її *об'єм*. У нашому прикладі уривок складається із 15 слів, отже, об'єм вибірки $n = 15$. Різниця між найменшим і найбільшим значенням даних вибірки називають розмахом варіацій: $R = x_{\max} - x_{\min}$. У даному уривку найбільше слово складається з восьми букв, а найменше — із двох. Отже, $R = 6$. Упорядкувавши вибірку, дістанемо варіаційний ряд:

$$2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 5,\ 5,\ 5,\ 6,\ 6,\ 6,\ 6\ ,6\ ,7,\ 7,\ 8.$$

Модою даної вибірки називають те з даних, яке зустрічається в переліку найчастіше, $M_0 = 6$.

Далі обчислимо *середнє значення* вибірки — середнє арифметичне всіх її варіант:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{2+3+4+5+5+5+5+6+6+6+6+6+7+7+8}{15} = 5{,}4.$$

Обчислимо далі *дисперсію* — показник розкиду даних відносно середнього значення за формулою

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}{n} =$$

$$= \frac{\left(2-5{,}4\right)^2 + \left(3-5{,}4\right)^2 + 4\left(5-5{,}4\right)^2 + 5\left(6-5{,}4\right)^2 + 2\left(7-5{,}4\right)^2 + \left(8-5{,}4\right)^2}{15} = 2{,}4$$

У статистиці часто використовується *середнє квадратичне відхилення* σ, яке визначається за формулою

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{2{,}4} \approx 1{,}55.$$

Найчастіше у природі зустрічається нормальний тип розподілу, якщо крива розподілу має вигляд дзвону, а всі показники центральної тенденції співпадають.

Якщо випадкова величина підпорядковується нормальному закону, то ймовірність її відхилення від середнього значення, що більше трьох середніх квадратичних помилок, близька до нуля (правило трьох сигм).

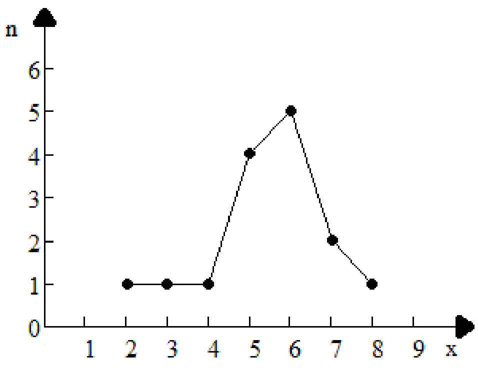


Рис. 1. Полігон частот

У нашому прикладі:

$$\left(M-\sigma;\ M+\sigma\ \right) = \left(5{,}4-1{,}55;\ 5{,}4+1{,}55\right) = \left(3{,}85;\ 6{,}95\right);$$

$$\left(M-2\sigma;\ M+2\sigma\ \right) = \left(5{,}4-3{,}1;\ 5{,}4+3{,}1\right) = \left(2{,}3;\ 8{,}5\right).$$

Отже, маємо наступний висновок: 68% слів з уривка вірша Кобзаря мають від 4 до 7 букв, а 95% складають слова від 2 до 8 букв. Отже, є підстава вважати розподіл вибірки нормальним.

Надамо інформацію про вибірку у графічній формі: стовпчастої діаграми зі з'єднаних прямокутників (гістограми розподілу частот) або полігону частот. Для цього складемо таблицю частот (Таблиця 1).

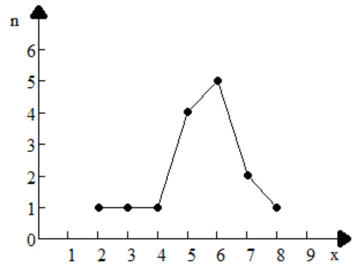
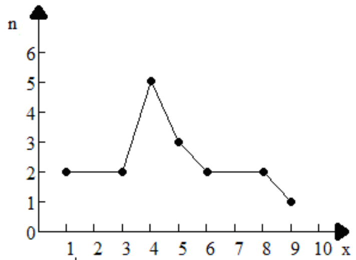
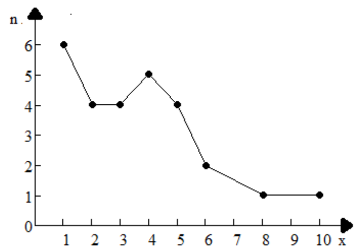
Таблиця 1

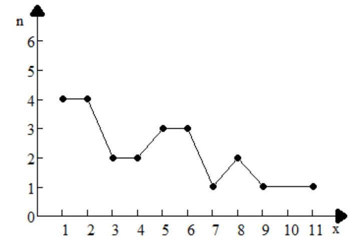
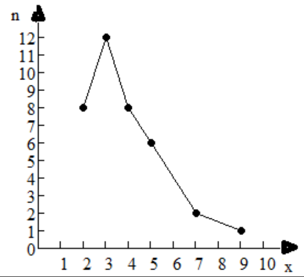
x_i	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
n_i	1	1	1	4	5	2	1

Полігон частот має вигляд (рис. 1).

Були проведені аналогічні дослідження для інших класиків української поезії та сучасних авторів таких, як Леся Українка, Ліна Костенко та Василь Стус. Як приклад світової поезії, був досліджений уривок із сонету № 130 В. Шекспіра В результаті, отримано порівняльну таблицю «візиток авторів» (Таблиця 2).

Таблиця 2

Автори	n	R	$\overline{x}$	M_0	M_e	σ_x	$(\overline{x}-\sigma;\overline{x}+\sigma)$	Полігон
Тарас Шевченко	15	6	5,4	6	6	1,55	(4; 7)	
Леся Українка	17	8	4,7	4	4	2,23	(3; 7)	
Ліна Костенко	27	9	3,5	1	3	2,25	(1; 6)	

Василь Стус	23	10	4,4	12	4	2,5	(2; 7)	
Вільям Шекс-пір	37	7	3,8	3	5	1,61	(2; 6)	

Викладений матеріал є простим та доступним, стимулює інтерес учнів до математики, зокрема, до статистики, сприяє розвитку творчої особистості кожного учня й формуванню мотивації до самонавчання та саморозвитку, тобто тих саме навичок, які необхідні кожному студенту вищого навчального закладу.

Аналіз результатів нашого дослідження надає змогу зазначити, що невідповідність рівня підготовки випускників шкіл до вимог успішного навчання у вищих технічних закладах обумовлена скороченням годин, які відведені на вивчення математики, «механічною» підготовкою по тестах ЗНО, яка не стимулює аналітичного та логічного мислення. Значну роль відіграють також експерименти з новими навчальними програмами, що привели до втрати системності в області знань природничого профілю.

Натомість відсутність прогалин у засвоєнні елементарної математики, вдосконалення змісту завдань незалежного опитування та його оцінювання створює найсприятливіші умови для забезпечення наступності математичної освіти учнів та студентів.

Викладачам вищих навчальних закладів належить вирішальна роль у роз'ясненні студентам-першокурсникам практичної важливості проблеми усунення недоліків шкільної математичної підготовки, у його методичному забезпеченні і контролі якості отриманих знань. Шлях здолає той, хто йде…

Список літератури

Малютина, О. П. (2010). Об особенности преподавания математической статистики. В *Материалах научно-практической конференции учителей математики «Актуальные проблемы преподавания математики»,* Воронеж, 2010 (с. 24 – 30). Воронеж: ВОИПК и ПРО.

Пасічник, І. В., Щербина, І. В., & Бас, Т. П. (2016). Професійна направленість викладання вищої математика в технічному ВНЗ широкого профілю. У *Матеріалах Сімнадцятої міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука,* Київ, 19—20 травня (Т. 3, с. 303—306). Київ: НТУУ «КПІ».

Пасічник, І. В., Щербина, І. В., & Татарко, К. С. (2008). Деякі методи підвищення ефективності викладання вищої математики у вищих технічних навчальних закладах. *Збірник наукових праць «Теорія та методика навчання математики, физики, інформатики», 7,* 267—270. Кривий Ріг: НМетАУ.

ВНУТРІШНЬОПРЕДМЕТНІ ЗВ'ЯЗКИ В КУРСІ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

І. В. Рассоха[1], Л. М. Блажко[1], Т. О. Карпалюк[2]
[1]Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка, Полтава, Україна
[2]Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ, Україна
tamarakarpalyuk@ukr.net

Ключові слова: неперервне навчання, внутрішньопредметні зв'язки, системи рівнянь, полярна система координат.

Неперервне навчання — це засіб життєдіяльності людини, процес придбання нею необхідних знань, умінь, навичок і риса умови виникнення потреби в них, який відбувається протягом усього життя людини. Реалізація принципу наступності в навчанні є частиною загальної концепції неперервності навчання. Цінність ідеї неперервності навчання є беззаперечною, оскільки дозволяє людині протягом усього життя творчо і професійно розвиватися, підвищувати свою компетентність (Старикова, 2008).

Однією з важливих умов реалізації завдання побудови системи неперервної освіти, особливо у природничо-науковому циклі дисциплін, є забезпечення послідовності й системності, оскільки перехід до неї значною мірою трансформує традиційну методичну систему навчання, визначаючи нові фактори та створюючи інакші умови для реалізації наступності в навчанні. Взаємозв'язки між навчанням у середній школі та вищих навчальних закладах досліджували такі науковці, як В. М. Алфімов, В. І. Костенко, Л. О. Філатова (Филатова, 2005). Щодо реалізації принципу неперервності освіти, вважаємо доцільним проілюструвати її за рахунок використання внутрішньопредметних зв'язків. Пропонуємо наступну їх класифікацію:

1) зв'язки, засновані на вивченні одного й того ж об'єкта в різних розділах одного предмета чи дисципліни;

2) зв'язки, засновані на використанні одного й того ж наукового методу чи способу в різних розділах одного предмета чи дисципліни;

3) зв'язки, в основі яких лежить використання однієї теорії (формул, теорем, означень, законів) у різних розділах одного предмета чи дисципліни.

Розгляньмо на прикладі вивчення полярної системи координат у курсі вищої математики реалізацію принципу неперервності навчання через використання внутрішньопредметних зв'язків.

Як відомо, у курсі елементарної математики широко вивчаються різноманітні нелінійні системи рівнянь та методи їх розв'язання. При вивченні вищої математики даний матеріал майже не використовується й тому стоїть осторонь інших тем. Пропонуємо повернутися до даного питання, але вже в дещо іншому аспекті: покажімо студентам застосування полярної системи координат для розв'язання алгебраїчних задач.

Загальновідомо, що методи розв'язання нелінійних систем рівнянь можна розділити на аналітичні (метод підстановки, додавання тощо), прості (метод вгадування, графічний), чисельні (знаходження чисельного розв'язку можливе з певною точністю, тобто зводиться до визначення інтервалу, меншого від наперед заданого числа, у якому функція має принаймні один корінь). Для систем нелінійних рівнянь, на відміну від систем лінійних рівнянь, не знайдено якогось універсального, зручного для застосування на практиці методу розв'язування, а тому, розглядаючи кожну конкретну систему нелінійних рівнянь, доводиться застосовувати спеціальні методи, що ґрунтуються на використанні особливостей алгебраїчних рівнянь, які утворюють дану систему. При цьому може статися, що система має як нескінченну, так і скінченну кількість розв'язків або навіть зовсім не має розв'язків (Савелов, 1960).

Використаймо метод, що базується на переході від декартової системи координат до полярної, для розв'язання систем рівнянь.

Такий метод дозволяє вирішити питання сумісності системи, тобто існування розв'язків. Перевага полярної системи полягає в тому, що для деяких рівнянь вона дозволяє однозначно виразити одну змінну через іншу і завдяки цьому побудувати геометричні образи рівнянь, що входять до системи (Овчинников, Яремчук, & Михайленко, 2000). Після цього легко вирішується питання про існування та кількість розв'язків нелінійної системи. Іноді цей висновок випливає безпосередньо після запису рівнянь у полярній системі. Розгляньмо наступні приклади.

Приклад 1. Дослідити систему на сумісність:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ xy = 6. \end{cases}$$

Розв'язання. Після переходу до полярної системи координат одержуємо систему:

$$\begin{cases} \rho = 2, \\ \sin(2\phi) = 3. \end{cases}$$

Очевидно, щоостаннє рівняння не має розв'язків. Отже, система несумісна.

Наведімо приклади, у яких, зробивши перехід до полярної системи координат, знаходимо точні розв'язки систем рівнянь.

Приклад 2. Розв'язати системурівнянь:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{x^2 - y^2} = y, \\ x^4 - y^4 = 81. \end{cases}$$

Розв'язання. Після переходу до полярної системи за формулами

$$\begin{cases} x = \rho\cos\phi, \\ y = \rho\sin\phi \end{cases}$$

система набуває вигляду

$$\begin{cases} \rho - \rho\sqrt{\cos^2\phi - \sin^2\phi} = \rho\sin\phi, \\ \rho^4\left(\cos^2\phi - \sin^2\phi\right) = 81. \end{cases}$$

Виконавши еквівалентні перетворення, одержимо:

$$\begin{cases} \rho^2 = 27, \\ \sin\phi = \dfrac{2}{3}; \end{cases} \text{або} \begin{cases} \rho^2 = 9, \\ \sin\phi = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = 3\sqrt{3}, \\ \sin\phi = \dfrac{2}{3}, \cos\phi = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{3}; \end{cases} \text{або} \begin{cases} \rho = 3, \\ \sin\phi = 0, \cos\phi = \pm 1; \end{cases}$$

Виконавши обернену заміну, одержимо

Відповідь: $\left(\sqrt{15};2\sqrt{3}\right)$, $\left(-\sqrt{15};2\sqrt{3}\right)$, $\left(3;0\right)$, $\left(-3;0\right)$.

Приклад 3. Серед усіх розв'язків системи

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3, \\ a^2 + b^2 = 25, \\ xb + ya \geq 5\sqrt{3} \end{cases}$$

знайдіть такі, при яких вираз $x + a$ набуває найбільше значення.

Розв'язання. Перейдімо до полярної системи координат, використавши наступну заміну:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\phi, y = \rho\sin\phi, \\ a = r\cos\theta; b = r\sin\theta. \end{cases}$$

Після певних перетворень система набуде вигляду:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{3}, \\ r = 5, \\ 5\sqrt{3}\sin\left(\theta + \phi\right) \geq 5\sqrt{3}. \end{cases}$$

Оскільки $\left|\sin\left(\theta + \phi\right)\right| \leq 1$, то $\theta + \phi = \dfrac{\pi}{2}$, тому

$$x + a = \sqrt{3}\cos\phi + 5\cos(\frac{\pi}{2} - \phi) = \sqrt{3}\cos\phi + 5\sin\phi =$$

$$= 2\sqrt{7}\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}\cos\phi + \frac{5}{2\sqrt{7}}\sin\phi\right) = 2\sqrt{7}\sin\left(\phi + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{5}\right).$$

Значення останнього виразу буде найбільшим, якщо

$$\phi + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{5} = \frac{\pi}{2}.$$

Тому

$$\begin{cases} x = \sqrt{3}\sin\left(\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{5}\right), y = \sqrt{3}\cos\left(\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{5}\right); \\ a = 5\cos\left(\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{5}\right), b = 5\sin\left(\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{5}\right). \end{cases}$$

Отже, вираз $x + a$ набуває найбільше значення, якщо

$$\begin{cases} x = \dfrac{3\sqrt{7}}{14}, y = \dfrac{5\sqrt{21}}{14}; \\ a = \dfrac{25\sqrt{7}}{14}, b = \dfrac{5\sqrt{21}}{14}. \end{cases}$$

Наведені приклади можна використовувати при вивченні вищої математики.

Отже, з вищенаведеного бачимо, що для побудови системи неперервної освіти при вивченні математики у вищих навчальних закладах важливо спиратися на знання. отримані ще в середній школі. Це спрощує сприйняття матеріалу студентами, а отже, допомагає їм здобути нові знання, що базуються на раніше отриманих. Одним з дієвих прийомів при цьому є використання внутрішньопредметних зв'язків, як це було показано вище.

Список літератури

Овчинников, П. П., Яремчук, Ф. П., & Михайленко, В. М. (2000). *Вища математика: Підручник*. Київ: Техніка.

Савелов, А. А. (1960). *Плоские кривые: Систематика, свойства, применения (справочное руководство)*. Москва: Физматлит.

Старикова, Л. Д. (2008). Современная трактовка непрерывности образования. *Высшее образование сегодня,* (10), 76—79.

Филатова, Л. О. (2005). *Развитие преемственности школьного и вузовского образования в условиях введения профильного обучения в старшем звене средней школы*. Москва: Лаборатория Базовых Знаний.

ДЕЯКІ МЕТОДИЧНІ АСПЕКТИ ВИКЛАДАННЯ КУРСУ ТЕОРІЇ ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ СТУДЕНТАМ ТЕХНІЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

В. К. Репета[1], Л. А. Репета[2]

[1]Національний авіаційний університет, Київ, Україна

[2]Національний технічний університет України «КПІ імені Ігоря Сікорського», Київ, Україна

repetavk@gmail.com

Розглядаються деякі проблеми викладання теорії функції комплексної змінної, пов'язані зі специфікою сприйняття матеріалу, рівнем загальної підготовки і сформованим математичним світоглядом студентів.

Ключові слова: функції комплексної змінної, модуль комплексного числа, аргумент комплексного числа, формула Муавра, інтеграл функції комплексної змінної.

Становлення фахівця в галузі радіоелектроніки, електротехніки та багатьох інших технічних спеціальностей неможливе без належного опанування теорії функції комплексної змінної (ТФКЗ). Її методи широко використовуються для розв'язання різноманітних прикладних задач. Зокрема, для інженерних розрахунків коливальних процесів застосовують метод комплексних амплітуд, за допомогою комплексного потенціалу розв'язують задачі обтікання тіл потоками рідини або газу тощо.

У вищих технічних навчальних закладах ТФКЗ, точніше елементи ТФКЗ, здебільшого вивчають на другому курсі як складову курсу вищої математики. На вивчення цього розділу відводиться обмежена, явно недостатня для якісного опанування, кількість лекційних та практичних годин. Не зважаючи на те, що ТФКЗ є логічним продовженням (розширенням) диференціального числення функцій однієї та багатьох дійсних змінних, інтегрального числення функції однієї змінної, теорії рядів та інших розділів вищої математики, курс ТФКЗ належить до найбільш складних математичних курсів. Основна складність пов'язана з необхідністю формування у студента нового погляду на число, функцію та інші математичні поняття. Наприклад, раніше студент знав, що квадратний корінь з від'ємного числа не існує, що кожному аргументу функції відповідає лише одне її значення, що тригонометричні функції синус та косинус набувають значень із проміжку $[-1;1]$, що експонента не є періодичною функцією тощо. У теорії функції комплексної змінної з наведеними фактами все інакше: функції набувають інших властивостей, змінюється множина їх значень.

Виокремимо деякі проблемні моменти та типові помилки, які щороку чи не кожен викладач спостерігає під час вивчення студентами основ ТФКЗ.

1. На прохання вказати уявну частину комплексного числа $z = x + iy$, чимало студентів відповідають iy. У результаті для визначення модуля комплексного числа студенти, по-суті, користуються хибною формулою

$$|z| = \sqrt{x^2 - y^2}\,.$$

Можливо, цього можна уникнути, якщо комплексне число означувати як пару дійсних чисел $(x;y)$.

2. *Визначення аргумента комплесного числа* $z = x + iy$. Досить часто студенти, намагаючись визначити $\arg z$, пишуть:

$$\arg z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x},$$

не враховуючи область значень арктангенса. Рекомендація викладача про доцільність спочатку скористатися геометричною інтерпретацією комплексного числа часто ігнорується.

3. Для багатьох студентів ледь не відкриттям є той факт, що рівняння $\left|z\right| = R$, де $R > 0$, задає коло радіуса R з центром у початку координат, а не точки $z = \pm R$ чи лише точку $z = R$. Особливо часто помилка виникає коли необхідно розв'язати нерівність з модулем, наприклад, $\left|z - z_0\right| \le R$ або $\left|z - z_0\right| \ge R$. Аналогічна ситуація з рівнянням $\left|z - z_0\right| = R$. Інколи кращі студенти починають перетворювати це рівняння і зрештою отримують

$$\left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2 = R^2,$$

проте мало хто зі студентів користується геометричним змістом модуля комплексного числа.

У цілому задачі на зображення на площині множини точок, що задовольняють певну умову (рівняння чи нерівність) для студентів є важкими. Рідко трапляється, коли, наприклад, розглядаючи нерівність

$$\arg\left(z - 1 + i\right) < \frac{\pi}{4}$$

студенти доходять висновку, що краще спочатку розглянути нерівність $\arg z < \frac{\pi}{4}$, після чого скористатися паралельним перенесенням отриманої множини точок на вектор $\left(1;-1\right)$.

4. Під час розв'язування задач пов'язаних із застосуванням формули Муавра перед студентами слід поставити питання про те, чи завжди для піднесення комплексного числа до n-го степеня доцільно користуватися цією формулою, запропонувати, наприклад, знайти дійсну та уявну частини числа $\left(1+i\right)^{17}$ за формулою Муавра та без неї, виконавши, наприклад, арифметичні перетворення:

$$\left(1+i\right)^{17} = \left(\left(1+i\right)^2\right)^8\left(1+i\right) = \left(2i\right)^8\left(1+i\right) = 256 + 256i$$

5. *Відновлення аналітичної функції за відомою дійсною чи уявною частиною*. Після виконання кількох прикладів за стандартною процедурою студентам доцільно поставити проблемне запитання: чи завжди для визначення невідомої уявної чи дійсної частини слід проводити відповідне інтегрування.

Відповідь на це запитання така: ні, не завжди. Якщо, наприклад, $f(z) = u + iv = z^3$, то її дійсна частина $u = x^3 - 3xy^2$ та уявна частина $v = 3x^2y - y^3$ є однорідними функціями виміру 3. Тому, якщо, наприклад, задано уявну частину $v = 6x^2y - 2y^3$ аналітичної функції $f(z)$, то неодмінно $f(z) = 2z^3$.

6. Під час інтегрування функції комплексної змінної студенти часто роблять стандартні помилки. Так з лекційного матеріалу студентам відомо, що якщо $f(z)$ є аналітичною функцією в замкненій однозв'язній області D і L — крива, що лежить в D, то інтеграл $\int\limits_L f(z)dz$ не залежить від форми самої кривої. Саме на цей момент більшість студентів і не звертає уваги, а починає зводити інтеграл до суми двох криволінійних інтегралів. Лише запитання, а що робитимете у випадку, коли замість

$$\int\limits_L \left(z^2 + \cos iz\right)dz \text{ матимете інтеграл } \int\limits_L \left(z^{40} + \cos iz\right)dz,$$

студент починає замислюватися.

Висновки.

1. Спрощення шкільної програми з алгебри та геометрії погіршує стартові можливості для успішного навчання у виші, зокрема на технічних спеціальностях.

2. Кожну тему, і це стосується не лише ТФКЗ, студенти як правило сприймають в обмеженому ракурсі, не розуміючи, що для розв'язання конкретної задачі часто можна використати знання з інших розділів математики, як вищої так і елементарної тим самим спростити процес одержання розв'язку.

3. Використання на лекціях та практичних заняттях з теорії функції комплексної змінної елементів проблемного навчання сприяє встановленню зв'язку між різними розділами математики і більш глибокому загальному розумінню теоретичного та практичного матеріалу.

Список літератури

Алєксєєва І. В., Гайдей, В. О., Диховичний, О. О., & Федорова, Л. Б. (Уклад.). (2014). *Ряди. Теорія функцій комплексної змінної. Операційне числення: Практикум*. Київ: НТУУ «КПІ».

Дем'яненко, В. В., Дем'яненко О. О., & Потапенко, С. Д. (2016). Про деякі особливості вивчення математичних дисциплін у технічному та економічному університетах. У *Матеріалах Сімнадцятої міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука*, 19—20 травня 2016 р., Київ (с. 218—222). Київ: НТУУ «КПІ».

Ординська, З. П., & Репета, Л. А. (2016). *Збірник задач і вправ зі спеціальних розділів вищої математики для студентів технічних спеціальностей*. Київ: НТУУ «КПІ». Узято з http://ela.kpi.ua/handle/123456789/17497

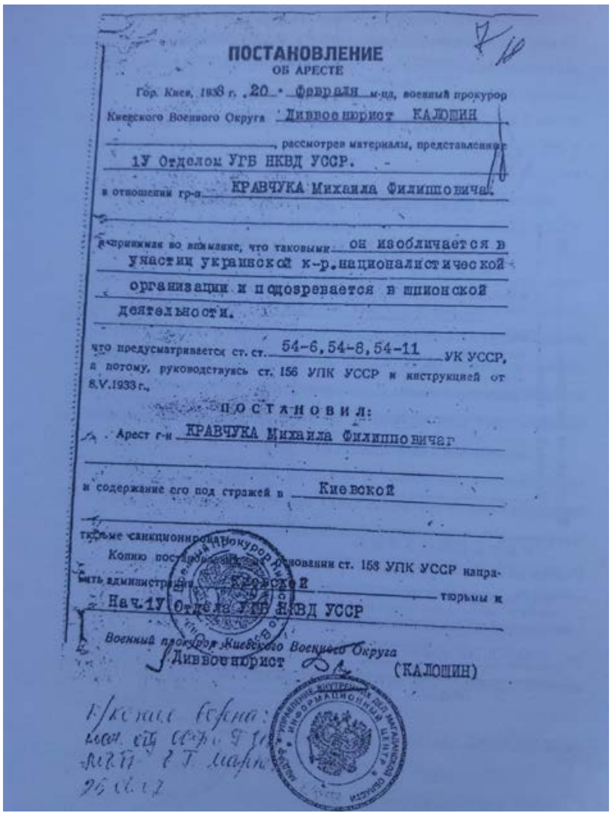
Репета, В. К. (2014). *Вища математика*: *Підручник*. (Ч. 2). Київ: НАУ.

ПАМ’ЯТІ МИХАЙЛА КРАВЧУКА

К. В. Соліч

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна

9 березня, через 128 років після того, як народився Тарас, у той самий день на далекій Колимі помирав наш великий українець М. П. Кравчук. Тож наш святий обов’язок пом’янути Михайла Пилиповича, який зробив за своїх неповних 50 років усе, щоб Україну знав світ.



ПОСТАНОВЛЕНИЕ
ОБ АРЕСТЕ

Гор. Киев, 1938 г. 20 февраля м-ца, военный прокурор Киевского Военного Округа Диввоенюрист КАЛОШИН, рассмотрев материалы, представленные 1У Отделом УГБ НКВД УССР. в отношении гр-н КРАВЧУКА Михаила Филипповича

принимая во внимание, что таковым он изобличается в участии украинской к-р. националистической организации и подозревается в шпионской деятельности.

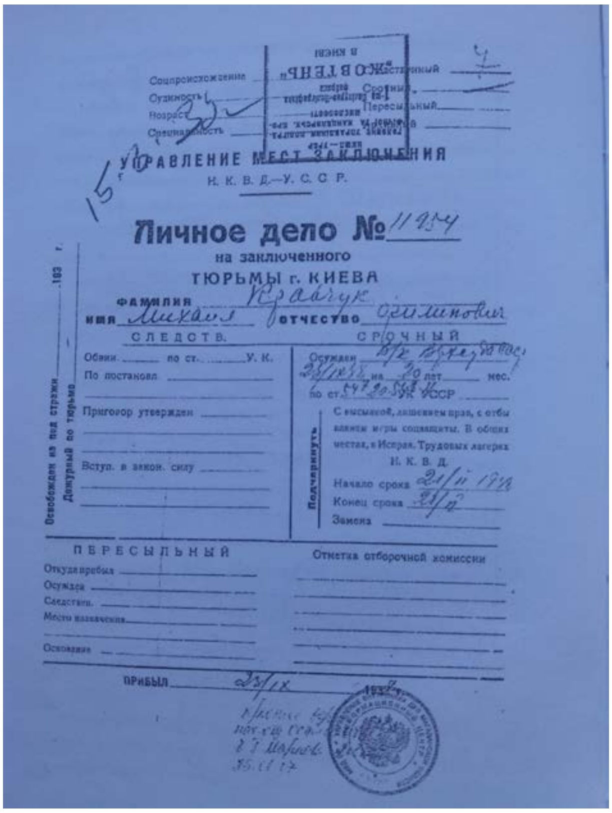
что предусматривается ст. ст. 54-6, 54-8, 54-11 УК УССР, а потому, руководствуясь ст. 156 УПК УССР и инструкцией от 8.V.1933 г.,

ПОСТАНОВИЛ:

Арест гр-н КРАВЧУКА Михаила Филипповича и содержание его под стражей в Киевской тюрьме санкционировать.

Копию постановления на основании ст. 158 УПК УССР направить администрации Киевской тюрьмы и Нач. 1У Отдела УГБ НКВД УССР

Военный прокурор Киевского Военного Округа
Диввоенюрист (КАЛОШИН)



УПРАВЛЕНИЕ МЕСТ ЗАКЛЮЧЕНИЯ
Н. К. В. Д.—У. С. С. Р.

Личное дело № 11954
на заключенного
ТЮРЬМЫ г. КИЕВА

Фамилия Кравчук
Имя Михаил Отчество Филиппович

СЛЕДСТВ. СРОЧНЫЙ

Обвин. по ст. У. К.
По постановл.
Приговор утвержден
Вступ. в закон. силу

Осужден
на 20 лет мес.
по ст. УК УССР
С высылкой, лишением прав, с отбыванием меры соцзащиты. В общих местах, в Исправ. Трудовых лагерях Н. К. В. Д.
Начало срока 21/II 1938
Конец срока
Замена

ПЕРЕСЫЛЬНЫЙ
Откуда прибыл
Осужден
Следствен.
Место назначения
Основание

Отметка отборочной комиссии

ПРИБЫЛ 23/IX 1938 г.

«…Я був приголомшений, — писав Михайло Пилипович уже з далекого Магадана, — цими дикими звинуваченнями, розбитий фізично допитами, зокрема, повним позбавленням сну протягом 11 діб, загостренням хвороби серця, заходами прямих фізичних дій; морально на мене впливали криками, стогонами мордованих у сусідніх кімнатах людей. Зламали мене остаточно погрози — у разі замкнутості й відмови взяти на себе нездійснені злочини заарештувати і знищити мою сім’ю. Заради порятунку сім’ї я вирішив очорнити себе, тим більше, що було цілком ясно: мої обвинувачі самі не вірили своїм звинуваченням, мали зовсім певну мету — зробити з мене злочинця…».

Так почалися для Кравчука в’язничні тортури: студінь, нари, палатка. Кравчук дуже знемагав в умовах гулагівського ярма. Про творчу наукову роботу не могло бути й мови, як і про зв’язок зі світовими вченими.

У таборі, де перебував вчений-в'язень, кожного ранку наглядачі перевіряли спеціальною палицею, торкаючи тіло в'язня, хто затримався в … наметі (при 50 градусному морозі в'язні перебували навіть не в бараках, які не встигали собі будувати, а в наметах) — чи ще хто не одубів.

Так і того сумного холодного ранку на чужині, конвоїри, відхиливши брезентову штору, зайшли до намету. Торкнули нерухоме тіло в'язня Кравчука палицею… Неживий. Примерз волоссям до стіни. Передсвітній промінь ковзнув морозним холодом по задубілому тілу … мерця.

Погасла невтомна сила мрій, наукових звершень на півдорозі до їх здійснення, великого вченого, світоча математики, гордості не лише Волині, а й усієї України, світу!

За короткий період свого життя вчений написав понад 170 наукових праць, які стали фундаментом дальшого розвитку світової математичної науки. Його називали найвидатнішим алгебраїстом XX століття, але він був і видатним педагогом, вільно володів багатьма мовами.

З-під його пера вийшов перший підручник з математики українською мовою, переклад на українську мову геометрії, він уперше запровадив в Україні шкільні математичні олімпіади для обдарованих дітей. Важко перерахувати все те добре, що зробив наш земляк для науки і освіти.

М. П. Кравчук був реабілітований лише в 1967 році. Формально реабілітоване в 1956 р. ім'я М. Кравчука і далі фактично замовчувалось довгі роки. Лише перед 75-річчям від дня його народження почали з'являтися про нього публікації (книжка М. Сороки «Поет німого числа», нариси М. Чайковського, Б. Білого, Н. Вірченко, В. Добровольського та ін.), пізніше — біографічні повісті М. Сороки «Михайло Кравчук» (1985), «Колимська теорема Кравчука» (1991) та ін.

А повернув із забуття добре ім'я вченого і людини український письменник з Києва Микола Олексійович Сорока своєю книгою «Поет німого числа». Більше 30 років віддав М. О. Сорока дослідженню долі і творчості академіка.

Багато сил і творчої енергії для пропаганди життя і діяльності велетня науки віддають вчена Інституту математики НАН України Г. М. Сита, доктор фізико-математичних наук, академік Ніна Опанасівна Вірченко, засновник Човницького музею (тепер уже покійний) Степан Лукашук. Наші волинські журналісти Валентина Штинько, Марія Королюк, богуславська письменниця, член Національної спілки письменників України, Ніна Півторацька.

«Хай із запізненням, але не боячись, ми можемо згадати й пом'янути М. Кравчука, який посланий на цей світ Богом, зробив дуже багато для блага і цивілізації свого народу», — сказала Ніна Півторацька на XI Міжнародній науковій конференції.

Національна телекомпанія України зняла документальний фільм «Голгофа академіка Кравчука», автором сценарію якого є Микола Сорока, режисер Олександр Рябокрис, науковий консультант Ніна Вірченко. Фільм вражаючий, і є своєрідним пам'ятником вченому. У Луцьку і Львові, тепер уже й у Києві (з

2010 р.) є вулиці імені академіка М.Кравчука. В освіті для педагогів і учнів природничо-математичного циклу заснована премія (стипендія) імені М.Кравчука.

У 2010 році Волинською державною телерадіокомпанією створено новий 30-и хвилинний фільм «Світ знає, що він — українець», автор сценарію і режисер М. О. Андрушко, редактор Святослав Пирожко.

Учений світового значення за своє коротке життя зробив так багато! **Пам'ятаймо й цінуймо! Він був українцем, патріотом своєї рідної землі**. Пам'ятаймо, що все те, що робимо для себе вмирає разом з нами, а те, що ми робимо для інших, живе вічно. Ідеї академіка М. П. Кравчука житимуть вічно, а разом з ними і все, що робиться для вшанування його пам'яті.

ЗМІСТ

ІІІ. Теорія ймовірностей та математична статистика

IV. Математичне моделювання, обчислювальні методи та інформаційні технології

V. Історія і методика викладання математики та інформатики

МАТЕРІАЛИ
ВІСІМНАДЦЯТОЇ МІЖНАРОДНОЇ
НАУКОВОЇ КОНФЕРЕНЦІЇ
ІМЕНІ АКАДЕМІКА
МИХАЙЛА КРАВЧУКА
7—10 жовтня 2017 року, Луцьк — Київ

II

Підписано до друку 27.09.2017.
Формат 60x84/16. Папір офсетний.
Ум. друк. арк. 20

Зам. № . Наклад 100 примірників.
Видавництво ТОВ «Спринт-Сервіс»
Свідоцтво: Серія ДК № 4365 від 17.07.2012
м. Київ-70, вул. Почайнинська, 28-б