

I тур олімпіади з математики
КПІ імені Ігоря Сікорського
РТФ, ФЕЛ
перший курс

1. Знайти найбільший кут між векторами $\vec{a} = (-1, x, 2)$ та $\vec{b} = (x, 1, -1)$.

2. Розв'язати нерівність

$$\begin{vmatrix} x & 1+x & x^2 \\ 1+x & x & x \\ x & 1+x & x \end{vmatrix} < 0.$$

3. Знайти $f'(2018)$, якщо $f(x) = x(x-1)(x-2) \cdot \dots \cdot (x-2018)$.

4. Знайти найменшу відстань між точками ліній

$$3x^2 + y^2 = 3 \quad \text{та} \quad x + y = 5.$$

5. Позначимо через B_r круг з центром в точці (r, r) та радіусом $\sqrt{r^2 + 1}$.

Описати множину $\bigcup_{r \in \mathbb{R}} B_r$ у якомога простішому вигляді та зобразити її.

6. Нехай $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ — точки з цілими координатами. Позначимо $\alpha = \angle ABC$. Довести, що $\sin(2018\alpha)$ та $\cos(2018\alpha)$ — раціональні числа.

*Розбір завдань I туру олімпіади відбудеться на засіданні математичного гуртка.
Деталі на <https://www.facebook.com/groups/math.olymp.kpi/>*

Результатами олімпіади будуть опубліковані на сайті <http://matan.kpi.ua/>

I тур олімпіади з математики
КПІ імені Ігоря Сікорського
РТФ, ФЕЛ
старші курси

1. Знайти таку неперервну функцію $(f(x), x \geq 1)$, для якої

$$\int_1^x \frac{dt}{f^4(t)} = f(x) - 1, \quad x \geq 1.$$

2. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n(n+2)} \right).$$

3. Розв'язати рівняння $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$ в множині комплексних чисел.

4. Знайти найменшу відстань між точками ліній

$$3x^2 + y^2 = 3 \quad \text{та} \quad x + y = 5.$$

5. Для $n \in \mathbb{N}$ позначимо через $\theta(n)$ сумарну кількість дільників всіх дільників числа n . Наприклад, число 6 має чотири дільники — 1, 2, 3 та 6. Перший з них має один дільник, другий та третій — по два, а четвертий — чотири. Тому $\theta(6) = 1 + 2 + 2 + 4 = 9$.

Визначити область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta(n)}{n^x}$ та знайти його суму для $x = 2$.

6. Позначимо через A трикутник з вершинами $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, через $B_{x,y}$ — круг одиничного радіуса з центром в точці (x, y) , а через $\mathcal{S}(\cdot)$ — площину області.

Знайти

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{S}(A \cap B_{x,y}) dx dy.$$

Розбір завдань I туру олімпіади відбудеться на засіданні математичного гуртка.

Деталі на <https://www.facebook.com/groups/math.olymp.kpi/>

Результатами олімпіади будуть опубліковані на сайті <http://matan.kpi.ua/>