І ТУР ОЛІМПІАДИ З МАТЕМАТИКИ КПІ ІМ. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО ФММ

2018 р.

Перший курс

1. Знайти границю послідовності

$$\lim_{x\to\infty} x^3\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}\right)$$

2. Скласти рівняння трикутника, якщо відома вершина $A(-5,2)$ та рівняння двох медіан $5x+4y=0$, $3x-y=0$.

3. Обчислити

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ 0 & -2i \end{pmatrix}^{2018},$$

де i - уявна одиниця ($i^2=-1$)

4. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \log_a x - \log_{a^2} y = m \\ \log_{a^2} x - \log_{a^3} y = n \end{cases}$$

5. Позначимо через B_r круг з центром в точці (r,r) та радіусом $\sqrt{r^2+1}$. Описати множину $\bigcup\limits_{r\in\mathbb{R}} B_r$ у якомога простішому вигляді та зобразити її.

6. Нехай $A,B,C\in\mathbb{R}^2$ — точки з *цілими* координатами. Позначимо $\alpha=\angle ABC$. Довести, що $\sin(2018\alpha)$ та $\cos(2018\alpha)$ — раціональні числа.