НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО”
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ ТА ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

“На правах рукопису”
УДК _____________

“До захисту допущено”
Завідувач кафедри
______ Олег КЛЕСОВ
“__”________20__р.

Магістерська дисертація
на здобуття ступеня магістра
за освітньо-науковою програмою «Страхова та фінансова математика»
зі спеціальності 111 Математика
на тему: “Граничні теореми для випадкових величин у трикутнику Паскаля”

Виконала:
студентка VI курсу, групи ОМ-81мн
Стрелець Євгенія Ігорівна ________
Керівник:
Зав. кафедри МАтаТЙ, доктор ф.-м. наук, проф.
Клесов Олег Іванович ________
Рецензент:
Зав. кафедри інформаційних систем і технологій
Національного Транспортного Університету,
доктор ф.-м. наук, проф.
Гавриленко Валерій Володимирович ________

Засвідчую, що у цій магістерській
дисертації немає запозичень з праць
інших авторів без відповідних посилань.
Студентка ________

Київ - 2020 року

Національний технічний університет України
“Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”
Фізико-математичний факультет
Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський) за освітньо-науковою програмою.
Спеціальність (спеціалізація) – 111 «Математика»
Освітньо-наукова програма - «Страхова та фінансова математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри
______ Олег КЛЕСОВ
“__”________20__р.

ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію студенту
Стрелець Євгенії Ігорівні

1.Тема дисертації «Граничні теореми для випадкових величин у трикутнику Паскаля», науковий керівник дисертації Клесов Олег Іванович, доктор фізико-математичних наук, професор, затверджені наказом по університету від “17 ”березня 2020р. № 891-с

2. Термін подання студентом дисертації 11 травня 2020 року.

3. Об’єкт дослідження - суми незалежних випадкових величин у трикутнику Паскаля.

4. Предмет дослідження - Граничні теореми для сум незалежних випадкових величин у трикутнику Паскаля.

5. Перелік завдань, які потрібно розробити - розглянути класичну теорію сумування незалежних випадкових величин, розглянути некласичну теорію сумування випадкових величин, порівняти їх між собою, класифікувати до якого типу відноситься наша задача та довести або спростувати виконання центральної граничної теореми для нашого випадку.

6. Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного) матеріалу - 2 графіки функцій до задач, що стосуються знаходження метрики Леві та 1 графік щільності розподілу стандартної гаусовської випадкової величини.

7. Орієнтовний перелік публікацій - 2 публікації за темою магістерської дисертації:

- Стрелець, Є.І. Умова нескінченої малості для випадкових величин з трикутника Паскаля/ IX Всеукраїнська конференція студентів, аспірантів та молодих вчених з математики – 2020. - с. 17.
- Стрелець, Є.І. Про числові співвідношення у трикутнику Паскаля/ VII Всеукраїнська конференція студентів, аспірантів та молодих вчених з математики – 2018. - с. 31.

8. Дата видачі завдання - 03/02/2020

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1.	Отримання і обговорення основної задачі диплому	03.02-09.02.2020	Виконано
2.	Вивчення літературних джерел щодо тематики дипломного проекту	10.02-23.02.2020	Виконано
3.	Пошук додаткових літературних джерел	24.02-01.03.2020	Виконано
4.	Розв'язання задачі про умову нескінченої малості	02.03-11.03.2020	Виконано
5.	Розв'язання задачі про граничну сталість	12.03-22.03.2020	Виконано
6.	Розв'язання задач на метрику Леві	23.03-31.03.2020	Виконано
7.	Пошук необхідної літератури, що стосується некласичної теорії сумування	01.04-08.04.2020	Виконано
8.	Підготовка тез для конференції молодих вчених	09.04-15.04.2020	Виконано
9.	Написання першого розділу дипломного проекту	16.04-22.04.2020	Виконано

10.	Підготовка матеріалів до попереднього захисту магістерської дисертації	23.04-30.04.2020	Виконано
11.	Доведення або спростування ЦГТ	01.05-06.05.2020	Виконано
12.	Написання другого та третього розділів	07.05-11.05.2020	Виконано
13.	Надання роботи на перевірку керівнику МД та виправлення помилок	12.05.2020	Виконано
14.	Захист МД	18.05.2020	Виконано

Студент Євгенія СТРЕЛЕЦЬ

Науковий керівник дисертації Олег КЛЕСОВ

Реферат

• **Актуальність теми:** В магістерській дисертації наведені теореми, що були доведені впродовж історії існування людства класичної та некласичної теорії сумування незалежних випадкових величин. Порівнюючи їх кількість можемо з впевненістю сказати, що некласична теорія ще не достатньо досліджена, а оскільки у нас саме такий випадок, то дана тема є актуальною.

• **Мета й завдання дослідження:** Довести або спростувати виконання центральної граничної теореми для випадкових величин з трикутника Паскаля.

• **Об'єкт дослідження:** Випадкові величини з трикутника Паскаля.

• **Предмет дослідження:** Центральна гранична теорема для некласичної теорії сумування випадкових величин.

• **Методи дослідження:** Було застосовано наукові методи дослідження, аналітичне та чисельне знаходження розв'язку для поставленої задачі.

• **Апробація результатів дисертації:** Деякі результати з магістерської дисертації було представлено та опубліковано у вигляді тез на "Всеукраїнській конференції студентів, аспірантів та молодих вчених з математики" у 2018 та 2020 роках.

• **Публікації:**

- Стрелець, Є.І. Умова нескінченої малості для випадкових величин з трикутника Паскаля/ IX Всеукраїнська конференція студентів, аспірантів та молодих вчених з математики – 2020. - с. 17.
- Стрелець, Є.І. Про числові співвідношення у трикутнику Паскаля/ VII Всеукраїнська конференція студентів, аспірантів та молодих вчених з математики – 2018. - с.31.

• **Ключові слова:** Центральна гранична теорема, незалежні випадкові величини, трикутник Паскаля, класична теорія сумувань випадкових величин, некласична теорія сумувань випадкових величин, послідовність серій.

• **В роботі наведено:** викорстаної літератури - 28 , сторінок -52 , рисунків -3, таблиць -0.

Abstract

• **Topicality:** The master's thesis contains the theorems that have been proven throughout the history of humanity's classical and non-classical theory of summation of independent random variables. Comparing their numbers, we can be sure that the classical theory has not been sufficiently researched, and since we have such a case, we can say that this topic is very relevant.

• **Purpose and Objectives of the Study:** Prove or simplify the implementation of the central limit theorem for random variables from the Pascal triangle.

• **Research Object:** Limit theorems for random variables from the Pascal triangle.

• **Subject:** Central limit theorem for non-classical random summation theory.

• **Research Methods:** Scientific research methods, analytical and numerical studies of the task were applied.

• **Testing the Results of the Thesis:** Some results of the Master's Thesis were presented and published as abstracts at the "All-Ukrainian Conference of Students, Graduate Students and Young Scientists in Mathematics"
in 2018 and 2020.

• **Posts:**

- Strelets, Y., The condition of infinite smallness for random variables from the Pascal triangle / IX All-Ukrainian conference of students, graduate students and young scientists in mathematics - 2020. - p. 17.
- Strelets, Y., About numerical relations in the Pascal triangle / VII All-Ukrainian Conference of students, graduate students and young scientists in mathematics - 2018. - p. 31.

• **Keywords:** Central limit theorem, independent random variables, Pascal triangle, classical theory of summation of random variables, not classical theory of summation of random variables.

• **The paper provides:** used literature -28, pages -52, figures - 3, tables - 0.

Зміст

ВСТУП

На сьогоднішній день дуже багато проведено досліджень стосовно класичної теорії сумувань незалежних випадкових величин і дуже мало стосовно некласичної, саме тому тема магістерської дисертації дуже актуальна зараз і буде залишатися актуальною ще деякий час.

Перші граничні теореми були отримані Муавром та Лапласом у XVIII сторіччі. У подальшому різні вчені доводили центральну граничну теорему у трохи іншому вигляді,модифікували її, тому зараз ми маємо ЦГТ Ляпунова, Ліндеберга-Леві, узагальнену ЦГТ і т.д.

Над сучасним виглядом центральної граничної теореми працювали такі вчені, як У. Феллер, П. Леві, Б. В. Гнеденко, А. М. Колмогоров. Найбільш загальний варіант ЦГТ доведено Б. В. Гнеденко та А. М. Колмогоровим при виконанні умови нескінченої малості.

В. М. Золотарьов називає некласичною центральну граничну теорему ту, в якій відсутня умова нескінченої малості. Некласичні центральні граничні теореми вивчали: В.М. Золотарьов, Ю.П. Студнєв, В.І. Ротарь, В.В. Сазонов, В.В. Сенатов.

Основною метою цієї магістерської дисертації є дослідження властивостей сум випадкових величин з трикутника Паскаля, а саме ми обрали трикутник у якому на бічних лініях елементи обираються довільним чином рівноймовірно, а всі інші утворюються за класичним правилом.

У першому розділі розглянуто за якими основними принципами будується класична теорія, наведені деякі теореми та означенння, а після цього сформульована наша задача про випадкові величини з трикутника Паскаля. Також, у цьому розділі ми підрахуємо суму усіх елементів в трикутнику включно з n-м рядком. Ми перевіримо чи виконується умова нескінченої малості для наших випадкових величин. На основі результатів наведених у цьому розділі ми зробимо висновок з яким випадком маємо справу: з класичним чи некласичним.

У другому розділі ми розглянемо некласичну теорію сумування випадкових величин, а також наведемо приклади задач на знаходження метрики Леві з використанням випадкових величин Бернуллі, що безпосередньо стосується нашої задачі, бо на бічних лініях трикутника Паскаля елементи обираються довільним чином, а саме Бернулівські випадкові величини з ймовірністю 0,5.

У третьому розділі наведено результати наших досліджень стосовно виконання або спростування центральної граничної теореми для випадкових величин з трикутника Паскаля. Також ми узагальнимо основну теорему магістерської дисертації і з'ясуємо для яких t центральна гранична теорема має місце, а для яких ні.

І наприкінці ми зробимо загальні висновки з того які результати ми отримали і чи було досягнуто основну мету магістерської дисертації.

1 КЛАСИЧНА ТЕОРІЯ СУМУВАННЯ НЕЗАЛЕЖНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

1.1 Нескінченно подільні розподіли

Нехай задано послідовність серій незалежних в кожній серії випадкових величин та нехай $k_n \longrightarrow \infty$ при $n \longrightarrow \infty$. Розглянемо задачу на знаходження усіх граничних розподілів для сум вигляду:

$$\sum_{k=1}^{k_n} X_{nk} \tag{1.1}$$

при $n \longrightarrow \infty$. Ця задача має очевидний розв'язок, а саме будь-яка функція розподілу $F(x)$ може бути граничною для розподілу сум вигляду (1.1). Якщо випадкова величина X_{n1} має функцію розподілу $F(x)$ при довільному n, а $X_{nk} \equiv 0$ для всіх n та $k > 1$, то функція розподілу (1.1) співпадає з $F(x)$ для будь-якого n.

Логічно, що треба ввести обмеження, для того щоб роль кожного доданку в сумі (1.1) була як завгодно малою при $n \longrightarrow \infty$. Це робиться для того, щоб уникнути тих випадків, які подібні до вище наведеної схеми сумування, коли доданки свідомо нерівноправні.Таким обмеженням буде наступна умова.

Означення 1

$$\max_{1 \le k \le k_n} P(|X_{nk}| \ge \varepsilon) \longrightarrow 0, при \quad n \longrightarrow \infty \tag{1.2}$$

називається умовою нескінченої малості для будь-якого $\varepsilon > 0$.

Наведемо деякі фундаментальні теореми без доведення. [1]

Теорема 1 *Множина функцій розподілу, граничних (в сенсі слабкої збі-*

жності) для розподілів сум $\sum_{k=1}^{k_n} X_{nk}$ *незалежних випадкових величин, що задовольняють умові нескінченної малості (1.2), співпадає з множиною нескінченно подільних функцій розподілу. [1]*

Можуть траплятися випадки, коли збіжність розподілів сум (1.1) нескінченно малих незалежних доданків не має місця, але існує така послідовність сталих $\{b_n; n = 1, 2, ...\}$, що розподіли сум

$$\sum_{k=1}^{k_n} X_{nk} - b_n \tag{1.3}$$

збігаються до деякого граничного розподілу.

Теорема 2 *Множина розподілів, що є граничними для розподілу сум вигляду (1.3), де* X_{nk} *- незалежні випадкові величини, що задовольняють умові нескінченої малості, та* b_n *- сталі, співпадає з множиною нескінченно подільних розподілів. [1]*

Поряд з умовою нескінченої малості (1.2) можна розглядати узагальнюючу умову існування такої послідовності сталих $\{l_{nk}; k = 1, ..., k_n; n = 1, 2, ...\}$, що

$$\max_{1 \leq k \leq k_n} P(|X_{nk} - l_{nk}| \geq \varepsilon) \longrightarrow 0 \tag{1.4}$$

для будь-якого фіксованого $\varepsilon > 0$.

Означення 2 *Якщо виконується умова (1.4) для будь-якого фіксованого* $\varepsilon > 0$, *то така умова називається умовою нескінченої сталості. [1]*

Інакше кажучи, випадкові величини X_{nk} гранично сталі, якщо існують такі сталі l_{nk}, що величини $X_{nk} - l_{nk}$ нескінченно малі.

Якщо випадкові величини X_{nk} задовольняють умові (1.4), то $l_{nk} = mX_{nk} + o(1)$ рівномірна відносно k. Дійсно, з (1.4) слідує, що

$$\min_{1 \leq k \leq k_n} P(|X_{nk} - l_{nk}| < \varepsilon) > \frac{1}{2}$$

для будь-якого $\varepsilon > 0$ та достатньо великих n.

Означення 3 *Медіана — це число, що характеризує вибірку. Якщо всі* *елементи вибірки різні, то медіана — це таке число, що половина з цих елементів вибірки більша за нього, а друга менше. Якщо ж вибірка має парну кількість елементів, то медіана як правило, визначається як півсума двох сусідніх елементів, що знаходяться посередині. [2]*

В силу визначення медіани маємо $|mX_{nk}-l_{nk}| < \varepsilon$ для всіх k та достатньо великих n.

Звідси випливає, що якщо умова (1.4) виконується для деякої послідовності сталих $\{l_{nk}\}$, то вона виконується й при використанні заміни l_{nk} на mX_{nk}.

Очевидно, що в теоремах 1 та 2 ми можемо замінити умову нескінченої малості розглянутих випадкових величин умовою граничної сталості цих величин.

1.2 Умова збіжності до заданого нескінченно подільного розподілу

Як показано в попередньому пункті будь-які нескінченно подільні розподіли та при цьому тільки ці розподіли можуть бути граничними для розподілів сум незалежних випадкових величин, що задовольняють умову нескінченої малості або умову граничної сталості. Додаткові роздуми дозволяють отримати необхідні та достатні умови збіжності розподілів таких сум до заданого нескінченно подільного розподілу. У зв'язку з цим наведемо ряд теорем з класичної теорії сумування незалежних випадкових величин,але без доведення, так як у цьому немає необхідності, бо їх доведення наводили багато авторів наукової математичної літератури, які спеціалізувались у цій галузі математики.

Теорема 3 *Нехай $F(x)$ - нескінченно подільна функція розподілу з характеристичною функцією $f(t)$, що задаєтьса рівністю*

$$f(t) = exp\{i\gamma t + \int\limits_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2})\frac{1+x^2}{x^2} dG(x)\}$$

(де γ - дійсна стала, $G(x)$ - не спадна обмежена функція, а підінтегральна функція при $x = 0$ дорівнює $-\frac{t^2}{2}$). Нехай

$$\{X_{nk}; k = 1, ..., k_n; n = 1, 2, ...\}$$

- послідовність серій незалежних в кожній серії випадкових величин, що задовольняють умові нескінченої малості. Покладемо $F_{nk}(x) = P(X_{nk} < < x)$.Для того щоб функції розподілу сум $\sum\limits_{k=1}^{k_n} X_{nk}$ слабко збігались до $F(x)$, необхідно та достатньо виконання умов

$$G_n \rightrightarrows G, \gamma_n \longrightarrow \gamma, \tag{1.5}$$

де

$$G_n(x) = \sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{y^2}{1+y^2} d\overline{F}_{nk}(y), \tag{1.6}$$

$$\gamma_n = \sum_{k=1}^{k_n} \{a_{nk} + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} d\overline{F}_{nk}(x)\}, \tag{1.7}$$

$$a_{nk} = \int\limits_{|x|<\tau} x dF_{nk}(x), \overline{F}_{nk}(x) = F_{nk}(x + a_{nk}), \tag{1.8}$$

τ - довільне додатне число. [3]

Теорему 3 не важко узагальнити таким чином.

Теорема 4 *Нехай виконуються умови теореми 3 та нехай $\{b_n\}$ - послідовність сталих. Для того щоб розподіли сум $\sum\limits_{k=1}^{k_n} X_{nk} - b_n$ слабко збігались до $F(x)$, необхідно та достатньо виконання умов*

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{y^2}{1+y^2} dF_{nk}(y + a_{nk}) \rightrightarrows G(x), \tag{1.9}$$

та

$$\sum_{k=1}^{k_n} \{a_{nk} + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dF_{nk}(x + a_{nk})\} - b_n \longrightarrow \gamma, \tag{1.10}$$

де

$$a_{nk} = \int\limits_{|x|<\tau} x dF_{nk}(x), \tag{1.11}$$

τ - довільна додатна стала. [3]

З теореми 4 випливає

Теорема 5 *Нехай $\{X_{nk}\}$ - послідовність серій незалежних в кожній серії випадкових величин, що задовольняють умові нескінченної малості. Для існування послідовності сталих $\{b_n\}$, такої, що розподіли сум $\sum\limits_k X_{nk} - b_n$ слабко збігаються до граничного розподілу, необхідно та достатньо щоб виконувалась умова (1.9), де $G(x)$ - не спадна обмежена функція.*

Якщо розподіли сум $\sum\limits_k X_{nk} - b_n$ слабко збігаються до граничного розподілу, то

$$b_n = \sum_{k=1}^{k_n} \{a_{nk} + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dF_{nk}(x + a_{nk})\} - \gamma + o(1),$$

де γ - довільна дійсна стала. [3]

Зміни, котрі вносить в отримані результати заміна умови нескінченої малості умовою граничної сталості, очевидні. При цьому в теоремах 3, 4 та 5 треба зробити заміну F_{nk} на $F_{nk}(x + m_{nk})$, де m_{nk} - медіана випадкової величини X_{nk}, та окрім цього в теоремі 3 необхідно замінити суму $\sum\limits_k X_{nk}$ на $\sum\limits_k X_{nk} - m_{nk}$. Беручи до уваги, що заміна умови нескінченої малості більш загальною умовою граничної сталості не пов'язана з будь-якими істотними затрудненнями, але приводить до ускладнення формулювань, ми обмежимося в подальшому тим, що розглянемо послідовності серій незалежних випадкових величин, що задовольняють умові нескінченної малості.

Знайдені необхідні та достатні умови збіжності розподілів сум незалежних доданків до граничного розподілу дозволяють інакше формулювання теорем. Спочатку наведемо теорему, що примикає до теореми 3.

Теорема 6 *Нехай виконуються умови теореми 3. Для того щоб розподіли сум $\sum\limits_{k=1}^{k_n} X_{nk}$ слабко збігались до розподілу $F(x)$ необхідно та достатньо виконання наступних умов:*

$$(A) \quad \sum_{k=1}^{k_n} F_{nk}(x) \longrightarrow \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1+y^2}{y^2} dG(y) \quad \text{при} \quad x < 0,$$

$$\sum_{k=1}^{k_n} (1 - F_{nk}(x)) \longrightarrow \int\limits_{x}^{\infty} \frac{1+y^2}{y^2} dG(y) \quad \text{при} \quad x > 0,$$

у будь-якій точці неперервності функції G(x);

$$(Б) \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \limsup_{n \longrightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k_n} \{ \int\limits_{|x|<\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) - (\int\limits_{|x|<\varepsilon} x dF_{nk}(x))^2 \} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \liminf_{n \longrightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k_n} \{ \int\limits_{|x|<\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) - (\int\limits_{|x|<\varepsilon} x dF_{nk}(x))^2 \} = G(+0) - G(-0);$$

$$(В) \sum_{k=1}^{k_n} \int\limits_{|x|<\tau} x dF_{nk}(x) \longrightarrow \gamma + \int\limits_{|x|<\tau} x dG(x) - \int\limits_{|x|>\tau} \frac{dG(x)}{x}$$

для будь-якого фіксованого $\tau > 0$, такого, що точки $\pm\tau$ є точками неперервності функції $G(x)$. [1]

Теорема 7 *Нехай $F(x)$ - нескінченно подільна функція розподілу з характеристичною функцією $f(t)$, що має представлення Леві-Хінчина (аналогічне, що наведене в теоремі 3). Нехай $\{X_{nk}\}$ - послідовність серій незалежних в кожній серії випадкових величин, що задовольняють умову нескінченної малості та нехай $F_{nk}(x) = P(X_{nk} < x)$, b_n - послідовність сталих. Для слабкої збіжності розподілів сум $\sum\limits_k X_{nk} - b_n$ до розподілу $F(x)$ необхідно та достатньо, щоб виконувались умови теореми 6 (А) та (Б), а також умова*

$$\sum_k \int\limits_{|x|<\tau} x dF_{nk}(x) - b_n \longrightarrow \gamma + \int\limits_{|x|<\tau} x dG(x) - \int\limits_{|x|\geqslant\tau} \frac{dG(x)}{x}$$

для будь-якого фіксованого $\tau > 0$, такого, що точки $\pm\tau$ є точками неперервності функції $G(x)$. [1]

1.3 Центральна гранична теорема

В попередньому параграфі ми досліджували умови збіжності розподілів сумм незалежних випадкових величин, що задовольняють умові нескінченої малості до заданого граничного розподілу, який є нескінченно подільним. Тепер нас цікавитиме випадок нормального граничного розподілу.

В представленні характеристичної функції нормального розподілу з параметрами (a, σ) формулою Леві-Хінчина, що наведено у теоремі 3, маємо $\gamma = a$,

$$G(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \leqslant 0, \\ \sigma^2, & \text{якщо} \quad x > 0. \end{cases}$$

Тому з теореми 6 випливає наступне. Нехай $\{X_{nk}\}$ - послідовність серій незалежних випадкових величин, що задовольняють умові нескінченої малості (1.2) та нехай F_{nk} - функція розподілу випадкової величини X_{nk}. Для слабкої збіжності розподілу сумм $\sum\limits_k X_{nk}$ до нормального розподілу з параметрами (a, σ) необхідно та достатньо, щоб виконувались умови

$$(A) \quad \sum_k P(|X_{nk}| \geqslant \varepsilon) \longrightarrow 0 \quad \text{для будь-якого} \quad \varepsilon > 0,$$

$$(\text{Б}) \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \limsup_{n \longrightarrow \infty} \sum_k \{ \int\limits_{|x|<\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) - (\int\limits_{|x|<\varepsilon} x dF_{nk}(x))^2 \} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \liminf_{n \longrightarrow \infty} \sum_k \{ \int\limits_{|x|<\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) - (\int\limits_{|x|<\varepsilon} x dF_{nk}(x))^2 \} = \sigma^2;$$

$$(\text{В}) \sum_k \int\limits_{|x|<\varepsilon} x dF_{nk}(x) \longrightarrow a \quad \text{для будь-якого} \quad \varepsilon > 0.$$

Ґрунтуючись на цьому результаті, можемо сформулювати наступний.

Теорема 8 *Нехай $\{X_{nk}; k = 1, ..., k_n; n = 1, 2, ...\}$ - послідовність серій незалежних в кожній серії випадкових величин, $F_{nk}(x)$ - функція розподілу X_{nk}. Для того, щоб виконувалась умова нескінченої малості (1.2) та мала місце слабка збіжність розподілів сум $\sum\limits_k X_{nk}$ до нормального (a, σ) розподілу, необхідно та достатньо, щоб для будь-якого фіксованого $\varepsilon > 0$*

виконувались умови [1]

$$\sum_k P(|X_{nk}| \geqslant \varepsilon) \longrightarrow 0, \tag{1.12}$$

$$\sum_k \{ \int\limits_{|x|<\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) - (\int\limits_{|x|<\varepsilon} x dF_{nk}(x))^2 \} \longrightarrow \sigma^2, \tag{1.13}$$

$$\sum_k \int\limits_{|x|<\varepsilon} x dF_{nk}(x) \longrightarrow a. \tag{1.14}$$

Ця теорема є загальною формою центральної граничної теореми для сум незалежних випадкових величин. Ми будемо називати центральною граничною теоремою будь-яке твердження про те, що при деяких умовах функція розподілу суми необмеженно зростаючого числа випадкових величин збігається до нормальної функції розподілу. Сформулюємо теорему 8 інакше.

Теорема 9 *Нехай* $\{X_{nk}\}$ *- послідовність серій незалежних в кожній серії випадкових величин,* $F_{nk}(x)$ *- функція розподілу* X_{nk}*. Для того, щоб виконувалась умова нескінченої малості (1.2) та мала місце слабка збіжність розподілів сум* $\sum\limits_k X_{nk}$ *до нормального* (a, σ) *розподілу, необхідно та достатньо, щоб для будь-якого фіксованого* $\varepsilon > 0$ *та деякого* $\tau > 0$ *виконувались умови [1]*

$$\sum_k P(|X_{nk}| \geqslant \varepsilon) \longrightarrow 0,$$

$$\sum_k \{ \int\limits_{|x|<\tau} x^2 dF_{nk}(x) - (\int\limits_{|x|<\tau} x dF_{nk}(x))^2 \} \longrightarrow \sigma^2,$$

$$\sum_k \int\limits_{|x|<\tau} x dF_{nk}(x) \longrightarrow a.$$

Теорема 10 *Нехай* $\{X_{nk}\}$ *- послідовність серій незалежних в кожній серії випадкових величин. Нехай розподіл суми* $\sum\limits_k X_{nk}$ *слабко збігається до деякого невиродженого граничного розподілу. Для того щоб граничний розподіл був нормальним та виконувалась умова нескінченої малості не-*

обхідно та достатньо, щоб виконувалось співвідношення

$$\sum_k P(|X_{nk}| \geqslant \varepsilon) \longrightarrow 0$$

для будь-якого довільного $\varepsilon > 0$. *[1]*

Теорема 11 *Нехай* $\{X_{nk}\}$ *- послідовність серій незалежних в кожній серії випадкових величин,* $F_{nk}(x)$ *- функція розподілу* X_{nk}. *Для того щоб виконувалась умова нескінченої малості (1.2) та існувала така послідовність сталих* $\{b_n\}$, *що розподіли сум* $\sum\limits_k X_{nk} - b_n$ *слабко збігаються до нормального (0,1) розподілу необхідно та достатньо, щоб виконувалось співвідношення*

$$\sum_k P(|X_{nk}| \geqslant \varepsilon) \longrightarrow 0$$

для будь-якого довільного $\varepsilon > 0$ *та*

$$\sum_k \{ \int\limits_{|x|<\tau} x^2 dF_{nk}(x) - (\int\limits_{|x|<\tau} x dF_{nk}(x))^2 \} \longrightarrow 1$$

для деякого $\tau > 0$. *Якщо останні умови виконані, то можна покласти*

$$b_n = \sum_k \int\limits_{|x|<H} x dF_{nk}(x) + o(1),$$

де H- довільне додатне число. Всі допустимі сталі b_n *задовольняють цю рівність. [1]*

Теорема 11 залишається вірною, якщо в ній замінити слова "для деякого $\tau > 0$" словами "для будь-якого $\tau > 0$".

Покажемо, що умова $\sum\limits_k P(|X_{nk}| \geqslant \varepsilon) \longrightarrow 0$, що неодноразово зустрічається в формулюваннях теорем, рівносильна умові

$$P(\max_k |X_{nk}| \geqslant \varepsilon) \longrightarrow 0.$$

Покладемо $p_{nk} = P(|X_{nk}| \geqslant \varepsilon)$. Ми маємо

$$P(\max_k |X_{nk}| \geqslant \varepsilon) = 1 - P(\max_k |X_{nk}| < \varepsilon) = 1 - \prod_k P(|X_{nk}| < \varepsilon) =$$

$$= 1 - \prod_k (1 - p_{nk}).$$

Наше твердження випливає з нерівностей

$$1 - exp\{-\sum_k p_{nk}\} \leq 1 - \prod_k (1 - p_{nk}) \leq \sum_k p_{nk}.$$

З отриманих теорем загального вигляду дуже просто отримати класичні результати Ліндеберга, Бернштейна та Фелера, що відносяться до центральної граничної теореми для накопичених сум незалежних випадкових величин. Покладемо

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{\frac{-t^2}{2}} dt. \tag{1.15}$$

Теорема 12 *Нехай* $\{X_n; n = 1, 2, ...\}$ *- послідовність незалежних випадкових величин,* $V_n(x)$ *- функція розподілу* X_n *та нехай* $\{a_n\}$ *- послідовність додатних сталих. Для того щоб*

$$\max_{1 \leq k \leq n} P(|X_k| \geq \varepsilon a_n) \longrightarrow 0 \tag{1.16}$$

для будь-якого фіксованого $\varepsilon > 0$ *та*

$$\sup_x |P(\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} X_k < x) - \Phi(x)| \longrightarrow 0, \tag{1.17}$$

необхідно та достатньо, щоб виконувались умови [1]

$$\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x| \geq \varepsilon a_n} dV_k(x) \longrightarrow 0 \quad \textit{для будь-якого фіксованого} \quad \varepsilon > 0, \tag{1.18}$$

$$\frac{1}{a_n^2} \sum_{k=1}^{n} \{ \int\limits_{|x| < a_n} x^2 dV_k(x) - (\int\limits_{|x| < a_n} x dV_k(x))^2 \} \longrightarrow 1 \tag{1.19}$$

і

$$\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x| < a_n} x dV_k(x) \longrightarrow 0. \tag{1.20}$$

Ця теорема є наслідком теорем 8 та 9 при $X_{nk} = \frac{1}{a_n}X_k$ і $F_{nk} = V_k(a_n x)$ $(k = 1, ..., n)$.

У відповідності з теоремою 8 умови (1.19) та (1.20) в теоремі 12 можна замінити на такі умови

$$\frac{1}{a_n^2}\sum_{k=1}^{n}\{\int\limits_{|x|<\varepsilon a_n} x^2 dV_k(x) - (\int\limits_{|x|<\varepsilon a_n} x dV_k(x))^2\} \longrightarrow 1 \tag{1.21}$$

і

$$\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x|<\varepsilon a_n} x dV_k(x) \longrightarrow 0. \tag{1.22}$$

для будь-якого фіксованого $\varepsilon > 0$.

Теорема 13 *Нехай $\{X_n\}$ - послідовність незалежних випадкових величин, $\{a_n\}$ - послідовність додатних сталих. Якщо виконані умови*

$$\frac{1}{a_n^2}\sum_{k=1}^{n}\{\int\limits_{|x|<a_n} x^2 dV_k(x) \longrightarrow 1,$$

$$\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{|x|<a_n} x dV_k(x) \longrightarrow 0$$

та умова (1.18), то має місце співвідношення (1.17). У цьому випадку $V_k(x)$ - функція розподілу X_k. [1]

Ця теорема випливає з теореми 12.

Теорема 14 *Нехай $\{X_n\}$ - послідовність незалежних випадкових величин, $V_n(x)$ - функція розподілу X_n. Для існування послідовностей сталих $\{a_n > 0\}$ та $\{b_n\}$ таких, що [1]*

$$\sup_x |P(\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n} X_k - b_n < x) - \Phi(x)| \longrightarrow 0 \tag{1.23}$$

та виконана умова (1.16), необхідно і достатньо, щоб існувала така по-

слідовність сталих $\{c_n\}$, що $c_n \longrightarrow \infty$,

$$\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|\geq c_n} dV_k(x) \longrightarrow 0 \tag{1.24}$$

і

$$\frac{1}{c_n^2}\sum_{k=1}^{n}\{ \int\limits_{|x|<c_n} x^2 dV_k(x) - (\int\limits_{|x|<c_n} x dV_k(x))^2\} \longrightarrow \infty. \tag{1.25}$$

У випадку існування послідовності $\{c_n\}$ з вказаними властивостями в (1.23) можна покласти

$$a_n^2 = \sum_{k=1}^{n}\{ \int\limits_{|x|<c_n} x^2 dV_k(x) - (\int\limits_{|x|<c_n} x dV_k(x))^2\}, \tag{1.26}$$

$$b_n = \frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|<c_n} x dV_k(x). \tag{1.27}$$

Теорема 15 *Нехай $\{X_n\}$ - послідовність незалежних випадкових величин, де хоча б одна з яких має невироджений розподіл. Нехай X_n має скінченну дисперсію $\sigma_n^2 (n = 1, 2, ...)$. Покладемо*

$$V_n(x) = P(X_n < x), a_n = EX_n,$$

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2, F_n(x) = P(\frac{1}{\sqrt{B_n}}\sum_{k=1}^{n}(X_k - a_k) < x).$$

Для того щоб

$$\frac{\max\limits_{1\leq k\leq n} \sigma_k^2}{B_n} \longrightarrow 0 \tag{1.28}$$

і

$$\sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \longrightarrow 0, \tag{1.29}$$

необхідно та достатньо виконання умови Ліндеберга:

$$\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x-a_k|\geq\varepsilon\sqrt{B_n}} (x - a_k)^2 dV_k(x) \longrightarrow 0 \tag{1.30}$$

для будь-якого фіксованого $\varepsilon > 0$. *[1]*

Умова Ліндеберга виконується, якщо випадкові величини, що розглядаються мають однаковий розподіл зі скінченою дисперсією.

Легко побачити, що $B_n \longrightarrow \infty$ є наслідком умови (1.28). В силу теореми 15 звідси випливає, що якщо виконана умова Ліндеберга, то $B_n \longrightarrow \infty$.

Не важко також показати, що достатньою для виконання умови Ліндеберга є умова

$$\frac{1}{B_n^{1+\frac{\delta}{2}}} \sum_{k=1}^{n} E|X_k - EX_k|^{2+\delta} \longrightarrow 0$$

для деякого $\delta > 0$ (умова Ляпунова). Саму умову Ліндеберга можно записати інакше, а саме вона рівносильна умові, яку ми отримуємо при заміні в лівій частині (1.30) області інтегрування $|x - a_k| \geq \varepsilon\sqrt{B_n}$ областю $|x - a_k| \geq \varepsilon\sqrt{B_k}$.

1.4 Постановка задачі

Розглянемо узагальнений трикутник Паскаля.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & x_{1,1} & & & \\
 & & x_{2,1} & & x_{2,2} & & \\
 & x_{3,1} & & x_{3,2} & & x_{3,3} & \\
... & & ... & & ... & & ...
\end{array}
$$

Будемо вважати, що значення на бічних лініях обираються довільним чином, а правило утворення інших значень є класичним.

$$x_{3,2} = x_{2,1} + x_{2,2}$$

$$...$$

$$x_{n,k} = x_{n-k,k-1} + x_{n-1,k}$$

Твердження 1 *Сума елементів в усіх рядках включно до n-того дорівнює [4]*

$$S_n = x_{n,1} + x_{n,n} + x_{n-1,1} + x_{n-1,n-1} + \sum_{k=2}^{n-2} 2^{k-1}(x_{n-k,1} + x_{n-k,n-k}). \qquad (1.31)$$

Доведення:
Сума елементів в n-му рядку трикутника Паскаля має вигляд: [4]

$$S_n = x_{n,1} + x_{n,n} - x_{n-1,1} - x_{n-1,n-1} + 2S_{n-1} \quad (*)$$

Розглянемо випадок, коли n=4:

$$S_4 = x_{4,1} + x_{4,4} + x_{3,1} + x_{3,3} + 2(x_{2,1} + x_{2,2})$$

Використовуючи формулу (*) для n=5 отримаємо:

$S_5 = x_{5,1}+x_{5,5}-x_{4,1}-x_{4,4}+2S_4 = x_{5,1}+x_{5,5}-x_{4,1}-x_{4,4}+2(x_{4,1}+x_{4,4}+x_{3,1}+$

$$+x_{3,3}+2(x_{2,1}+x_{2,2}))=x_{5,1}+x_{5,5}-x_{4,1}-x_{4,4}+2(x_{4,1}+x_{4,4})+2(x_{3,1}+x_{3,3})+$$

$$+4(x_{2,1}+x_{2,2})$$

n=6:

$$S_6=x_{6,1}+x_{6,6}-x_{5,1}-x_{5,5}+2S_5=x_{6,1}+x_{6,6}-x_{5,1}-x_{5,5}+2(x_{5,1}+x_{5,5}+x_{4,1}+$$

$$+x_{4,4}+2(x_{3,1}+x_{3,3})+4(x_{2,1}+x_{2,2}))=x_{6,1}+x_{6,6}+x_{5,1}+x_{5,5}+2(x_{4,1}++x_{4,4})+$$

$$+4(x_{3,1}+x_{3,3})+8(x_{2,1}+x_{2,2}).$$

Продовжуючи таким чином для різних цілих n ми отримаємо нашу формулу (1.31).▲

Означення 4 *Покладемо:*

$$X_{n,1}=0,$$

$$X_{n,n}=x_{n,1}+x_{n,n},$$

$$X_{n,n-1}=x_{n-1,1}+x_{n-1,n-1},$$

$$X_{n,k}=2^{k-1}(x_{n-k,1}+x_{n-k,n-k}).$$

Таку схему серій будемо називати схемою серій Паскаля.

Тоді (1.31) матиме вигляд:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}X_{n,k}.$$

Припустимо, що $x_{i,j}$ — незалежні випадкові величини з розподілом Бернуллі, де

$$P(x_{i,j}=0)=P(x_{i,j}=1)=\frac{1}{2}.$$

Твердження 2 *Математичне сподівання суми S_n дорівнює: [4]*

$$E[S_n]=\mu 2^{n-1}.$$

Доведення:

Покладемо $E[x_{n-k,1}] = \mu$ тоді й $E[x_{n-k,n-k}] = \mu$.

$$E[S_n] = Ex_{n,1}+Ex_{n,n}+Ex_{n-1,1}+Ex_{n-1,n-1}+\sum_{k=2}^{n-2} E[2^{k-1}(x_{n-k,1}+x_{n-k,n-k})] =$$

$$= 4\mu + 2\mu \sum_{k=2}^{n-2} 2^{k-1} = 4\mu + 2\mu \frac{2(2^{n-3}-1)}{1} = 4\mu + 2\mu(2^{n-2}-2) = \mu 2^{n-1}.\blacktriangle$$

Твердження 3 *Дисперсія суми S_n дорівнює: [4]*

$$\operatorname{var}[S_n] = \frac{2\sigma^2}{3}(5 + 4^{n-3}).$$

Доведення:
Аналогічно $var[x_{n-k,1}] = \sigma^2$ та $var[x_{n-k,n-k}] = \sigma^2$.

$$var[S_n] = var[x_{n,1}] + var[x_{n,n}] + var[x_{n-1,1}] + var[x_{n-1,n-1}]+$$
$$+\sum_{k=2}^{n-2} var[2^{k-1}(x_{n-k,1} + x_{n-k,n-k})] = 4\sigma^2 + 2\sigma^2 \sum_{k=2}^{n-2} 2^{2k-2} =$$
$$= 4\sigma^2 + 2\sigma^2 \frac{2^{2n-6}-1}{3} = \frac{2\sigma^2}{3}(5 + 4^{n-3}).\blacktriangle$$

Умова нескінченої малості

Перевіримо чи виконується умова (1.2) для нашого випадку. Для цього перепишемо нашу суму (1.31) у такому вигляді:

$$S_n = \sum_{k=2}^{n-2} 2^{k-1}(x_{n-k,1} + x_{n-k,n-k}) = \left|{}^{n-k=m,}_{k=n-m}\right| = \sum_{m=n-2}^{2} 2^{n-m-1}(x_{m,1} + x_{m,m}) =$$

$$= |\,\text{нехай}\, x_{m,1} + x_{m,m} = Y_m| = \sum_{2}^{m=n-2} 2^{n-m-1} Y_m = |2^{n-m-1} Y_m = X_{nm}| =$$

$$= \sum_{2}^{m=n-2} X_{nm}$$

Перепишемо умову нескінченої малості (1.2) у такому вигляді:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \forall n \geq n_0 \; sup\{P(|X_{nm}| > \varepsilon) : m \geq 1\} < \varepsilon.$$

Перевіримо виконання цієї умови в нашому випадку:

$$sup\{P(|2^{n-m-1}Y_m| > \varepsilon) : 2 \leq m \leq n-2\} < \varepsilon.$$

Y_m має такий розподіл:

$$Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

тоді

$$supP((|2^{n-m-1}Y| > \varepsilon) : m \geq 1) < \varepsilon = supP((Y > \frac{\varepsilon}{2^{n-m-1}}) : 2 \leq m \leq$$

$$\leq n-2) < \varepsilon = P((Y > \frac{\varepsilon}{2^{n-m-1}}) : 2 \leq m \leq n-2) < \varepsilon.$$

Оскільки $\frac{\varepsilon}{2^{n-m-1}} < 1$ для великих n, то

$$P(Y > 1) < P(Y > \frac{\varepsilon}{2^{n-3}}).$$

Отже, можемо зробити висновок, що для нашого випадку умова нескінченої малості не виконується. Звідси можемо сформулювати теорему.

Теорема 16 *Умова нескінченої малості (1.2) не виконуеться для схеми серій Паскаля. [5]*

В нашому випадку умова нескінченої малості (1.2) не виконується, а значить ми маємо випадок некласичної теорії сумувань випадкових величин.

Умова рівномірної граничної сталості доданків

Умова рівномірної граничної сталості доданків виглядає наступним чином.

Означення 5 *Послідовність серій $\{X_{nj}\}$ випадкових величин називається рівномірно гранично сталою, якщо існує множина сталих чисел $\{u_{nj}\}$ така, що для кожного $\varepsilon > 0$ та всіх достатньо великих n виконується [6]*

$$sup\{P(|X_{nj} - u_{nj}| > \varepsilon) : j \geq 1\} < \varepsilon. \tag{1.32}$$

Перевіримо чи виконується умова (1.32).

$$P(|2^n X - U_n| > \varepsilon) < \varepsilon$$

Для цього розглянемо два випадки:
1) $2^n - U_n \to 0$

$$P(2^n - U_n > \varepsilon \cup 2^n - U_n < -\varepsilon) < \varepsilon$$

Спочатку підрахуємо $P(2^n - U_n > \varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$.

$$P(2^n - U_n > \varepsilon) = P(2^n - U_n > \varepsilon, X = 0) + P(2^n - U_n > \varepsilon, X = 1) = 0.$$

Тепер підрахуємо другу частину нашої нерівності $P(2^n - U_n < -\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$.

$$P(2^n - U_n < -\varepsilon) = P(2^n - U_n < -\varepsilon, X = 0) + P(2^n - U_n < -\varepsilon, X = 1) = \frac{1}{2}.$$

2) $2^n - U_n \nrightarrow 0, 2^{n_k} - U_{n_k} \to a, a \neq 0$

Аналогічно, спочатку підрахуємо таку ймовірність

$$P(2^{n_k} X - U_{n_k} > \varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$P(2^{n_k} X - U_{n_k} > \varepsilon) = P(2^{n_k} X - U_{n_k} > \varepsilon, X = 0) + P(2^{n_k} X - U_{n_k} > \varepsilon, X = 1)$$

$P(2^{n_k} X - U_{n_k} > \varepsilon, X = 1)$ може приймати два значення 0, якщо $a \leq \varepsilon$ або $\frac{1}{2}$, якщо $a > \varepsilon$. Відповідно $P(2^{n_k} X - U_{n_k} > \varepsilon)$ може приймати значення або 0 або $\frac{1}{2}$.
Тобто

$$P(2^{n_k} X - U_{n_k} > \varepsilon) = \begin{cases} 0, a \leq \varepsilon \\ \frac{1}{2}, a > \varepsilon \end{cases}$$

Тепер підрахуємо другий випадок $P(2^{n_k}X - U_{n_k} < -\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$.

$$P(2^{n_k}X - U_{n_k} < -\varepsilon) = P(2^{n_k}X - U_{n_k} < -\varepsilon, X = 0)+$$

$$+P(2^{n_k}X - U_{n_k} < -\varepsilon, X = 1)$$

Окремо підрахуємо ймовірності для цієї суми.

$$P(2^{n_k}X - U_{n_k} < -\varepsilon, X = 0) = P(-U_{n_k} < -\varepsilon, X = 0) = \frac{1}{2}$$

$P(2^{n_k}X - U_{n_k} < -\varepsilon, X = 1) = P(a < -\varepsilon)$. Така ймовірність може приймати значення 0, при a>0 та $\frac{1}{2}$, при $a \leq -\varepsilon$.

З наведених вище обчислень можемо зробити висновок, що умова рівномірної граничної сталості доданків не виконується для нашого випадку.

1.5 Висновки з розділу 1

Основною метою даного розділу було висвітлити, ту теорію з якою зустрінеться кожен при сумуванні незалежних випадкових величин. Таку теорію називають класичною і в першому розділі було наведено велику кількість класичних теорем. Також у цьому розділі ми сформулювали задачу з якою ми матимемо справу в подальшому. Всі ми знаємо, що трикутник Паскаля - це нескінченна таблиця, у вигляді трикутника з біноміальними коефіцієнтами. І в класичному трикутнику на бічних лініях стоять одиниці, але ми розглянули інший випадок, коли трикутник Паскаля формується за класичним правилом, але на бічних лініях значення обираються довільним чином.

Ми розглянули деякі властивості суми всіх елементів включно до n-го рядка в трикутнику Паскаля. Але основне, що ми отримали у цьому розділі - це те, що для нашого випадку не виконується умова нескінченої малості, а також не виконується умова граничної сталості.

Із отриманих результатів ми зробили висновок, що для нашого випадку необхідно використовувати некласичну теорію сумування випадокових величин, а тому треба шукати не стандартні підходи для доведення центральної граничної теореми для нашої задачі.

Отже, оскільки, ми маємо справу з некласичною теорією сумування випадкових величин, для початку, нам необхідно розглянути теоретичні відомості, а далі спробуємо застосувати їх до нашого випадку, що ми і зробимо в наступних розділах.

2 НЕКЛАСИЧНА ТЕОРІЯ СУМУВАННЯ НЕЗАЛЕЖНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

2.1 Некласичні умови

Граничні теореми, в яких на окремі доданки накладено умови їх нескінченої малості прийнято називати теоремами в класичній постановці. Некласичними граничними теоремами прийнято називати теореми, що доведені без використання умови нескінченої малості (1.2). [6] Не важко навести приклади не вироджених випадкових величин, для яких не виконується ні умова Ліндеберга, ні умова нескінченої малості (1.2), але при цьому ЦГТ має місце. Наведемо найпростіший випадок.

Нехай $x_1, x_2, ...$ - послідовність незалежних нормально розподілених випадкових величин з $x_n = 0, x_1 = 1, x_k = 2^{k-2}, k \geq 2$. Покладемо
$S_n = x_{n1} + ... + x_{nn}$ з

$$x_{nk} = \frac{x_k}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}}.$$

Неважко перевірити, що тут не виконано ні умову Ліндеберга, ні умову нескінченої малості (1.2), хоча справедливість ЦГТ очевидна, оскільки S_n розподілені нормально з $S_n = 0, S_n = 1$.

Теорема, що буде наведена далі нижче дає достатні та необхідні умови справедливості ЦГТ. В цьому сенсі умова (Λ), що буде наведена нижче є прикладом некласичних умов.

Будемо припускати, що для кожного $n \geq 1$ задана послідовність (схема серій) незалежних випадкових величин

$$x_{n1}, x_{n2}, ..., x_{nn}$$

з $x_{nk} = 0, x_{nk} = \sigma_{nk}^2 > 0, \sum\limits_{k=1}^{n} \sigma_{nk}^2 = 1$. Нехай $S_n = x_{n1} + ... + x_{nn}$,

$F_{nk}(x) = \{x_{nk} \leq x\}, \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{\frac{-y^2}{2}} dy, \Phi_{nk}(x) = \Phi(\frac{x}{\sigma}_{nk}).$

Теорема 17 *Для того щоб*

$$S_n \xrightarrow{d} N(0,1) \tag{2.1}$$

необхідно та достатньо виконання для кожного $\varepsilon > 0$ *умови [7]*

$$(\Lambda) \quad \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|>\varepsilon} |x||F_{nk}(x) - \Phi_{nk}(x)|dx \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty. \tag{2.2}$$

Наступна теорема дає зрозуміти який зв'язок між умовою (Λ) та класичною умовою Ліндеберга

$$(L) \quad \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|>\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty. \tag{2.3}$$

Теорема 18 *1. Умова Ліндеберга забезпечує виконання умови* (Λ)*:*

$$(L) \Rightarrow (\Lambda).$$

2. Якщо $\max\limits_{1 \leq k \leq n} x_{nk}^2 \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty$*, то умова* (Λ) *забезпечує виконання умови Ліндеберга (L): [7]*

$$(\Lambda) \Rightarrow (L).$$

Доведення теореми 16. Доведення необхідності умови (Λ) доволі складне. Наведемо тут лише доведення її достатності. Нехай

$$f_{nk}(t) = e^{itx_{nk}}, f_n(t) = e^{itS_n},$$

$$\varphi_{nk}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\Phi_{nk}(x), \varphi(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\Phi(x).$$

З властивостей характеристичних функцій ми знаємо, що

$$\varphi_{nk}(t) = e^{-\frac{t^2\sigma_{nk}^2}{2}}, \varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

$S_n \xrightarrow{d} N(0,1)$ тоді і тільки тоді, коли $f_n(t) \longrightarrow \varphi(t), n \longrightarrow \infty$ для довільного дійсного t.

Маємо

$$f_n(t) - \varphi(t) = \prod_{k=1}^{n} f_{nk}(t) - \prod_{k=1}^{n} \varphi_{nk}(t).$$

Оскільки $|f_{nk}(t)| \leq 1, |\varphi_{nk}(t)| \leq 1$, то

$$|f_n(t) - \varphi(t)| = |\prod_{k=1}^{n} f_{nk}(t) - \prod_{k=1}^{n} \varphi_{nk}(t)| \leq \sum_{k=1}^{n} |f_{nk}(t) - \varphi_{nk}(t)| =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d(F_{nk} - \Phi_{nk})| = \sum_{k=1}^{n} |\int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - itx + \frac{t^2x^2}{2}) d(F_{nk} - \Phi_{nk})|, \quad (2.4)$$

де ми скористались тим, що для $k = 1, 2$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k dF_{nk} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k d\Phi_{nk}.$$

Застосовуючи формулу інтегрування частинами до інтегралів

$$\int_{a}^{b} (e^{itx} - itx + \frac{t^2x^2}{2}) d(F_{nk} - \Phi_{nk}),$$

отримаємо (враховуючи те, що $x^2[1 - F_{nk}(x) + F_{nk}(-x)] \longrightarrow 0, x^2[1 -$ $- \Phi_{nk}(x) + \Phi_{nk}(-x)] \longrightarrow 0, x \longrightarrow \infty)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - itx + \frac{t^2x^2}{2}) d(F_{nk} - \Phi_{nk}) =$$

$$- it \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - itx - 1)(F_{nk}(x) - \Phi_{nk}(x)) dx. \quad (2.5)$$

З (2.4) та (2.5) маємо

$$|f_n(t)-\varphi(t)| \le \sum_{k=1}^{n} |t \int\limits_{-\infty}^{\infty} (e^{itx}-itx-1)(F_{nk}(x)-\Phi_{nk}(x))dx| \le$$

$$\le \frac{|t|^3}{2}\varepsilon \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|\le\varepsilon} |x||F_{nk}(x)-\Phi_{nk}(x)|dx + 2t^2 \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|>\varepsilon} |x||F_{nk}(x)-\Phi_{nk}(x)|dx \le$$

$$\le \varepsilon|t|^3 \sum_{k=1}^{n} \sigma_{nk}^2 + 2t^2 \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|>\varepsilon} |x||F_{nk}(x)-\Phi_{nk}(x)|dx, \qquad (2.6)$$

при цьому ми скористались нерівністю

$$\int\limits_{|x|\le\varepsilon} |x||F_{nk}(x)-\Phi_{nk}(x)|dx \le 2\sigma_{nk}^2. \qquad (2.7)$$

З (2.6) в силу довільності $\varepsilon > 0$ та умови (Λ) випливає, що $f_n(t) \longrightarrow \varphi(t)$, $n \longrightarrow \infty$.▲

Доведення теореми 17. 1. З умови Ліндеберга (L) випливає умова $\max\limits_{1\le k\le n} \sigma_{nk}^2 \longrightarrow 0$. Тому, враховуючи, що $\sum\limits_{k=1}^{n} \sigma_{nk}^2 = 1$, отримуємо

$$\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|>\varepsilon} x^2 d\Phi_{nk}(x) \le \int\limits_{|x|>\varepsilon/\sqrt{\max\limits_{1\le k\le n} \sigma_{nk}^2}} x^2 d\Phi(x) \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty. \qquad (2.8)$$

Разом з умовою (L) це дає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|>\varepsilon} x^2 d[F_{nk}(x)+\Phi_{nk}(x)] \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty. \qquad (2.9)$$

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Тоді знайдеться така неперервно диференційована парна функція $h = h(x)$, що $|h(x)| \le x^2, |h'(x)| \le 4|x|$,

$$h(x) = \begin{cases} x^2, & |x| > 2\varepsilon \\ 0, & |x| \le \varepsilon. \end{cases}$$

Для такої функції $h(x)$ в силу (2.9)

$$\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|>\varepsilon} h(x)d[F_{nk}(x)+\Phi_{nk}(x)] \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty. \tag{2.10}$$

За допомогою інтегрування частинами з (2.10) знаходимо:

$$\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|\geq\varepsilon} h'(x)[(1-F_{nk}(x))+(1-\Phi_{nk}(x))]dx = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|\geq\varepsilon} h(x)d[F_{nk}+\Phi_{nk}] \longrightarrow 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|\leq-\varepsilon} h'(x)[F_{nk}(x)+\Phi_{nk}(x)]dx = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|\leq-\varepsilon} h(x)d[F_{nk}+\Phi_{nk}] \longrightarrow 0.$$

Оскільки $h'(x) = 2x$ при $|x| \geq 2\varepsilon$, то

$$\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|\geq2\varepsilon} |x||F_{nk}(x)-\Phi_{nk}(x)|dx \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty.$$

Таким чином, в силу довільності $\varepsilon > 0, (L) \Rightarrow (\Lambda)$.
2. В силу умови $\max\limits_{1\leq k\leq n} \sigma_{nk}^2$ та (2.8) для функції, що введена вище за $h = h(x)$ отримуємо, що

$$\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|>\varepsilon} h(x)d\Phi_{nk}(x) \leq \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|>\varepsilon} x^2 d\Phi_{nk}(x) \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty. \tag{2.11}$$

Далі, з урахуванням інтегрування частинами, знаходимо:

$$|\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|>\varepsilon} h(x)d[F_{nk}-\Phi_{nk}]| \leq |\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|\geq\varepsilon} h(x)d[(1-F_{nk})-(1-\Phi_{nk})]|+$$

$$+|\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|\leq-\varepsilon} h(x)d[F_{nk}-\Phi_{nk}]| \leq \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|\geq\varepsilon} |h'(x)||(1-F_{nk})-(1-\Phi_{nk})|dx+$$

$$+\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|\leq-\varepsilon} |h'(x)||F_{nk}-\Phi_{nk}|dx \leq 4\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|\geq\varepsilon} |x||F_{nk}(x)-\Phi_{nk}(x)|dx. \tag{2.12}$$

З (2.11) та (2.12) випливає, що

$$\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|\geq 2\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) \leq \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|\geq\varepsilon} h(x) dF_{nk}(x) \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty,$$

тобто виконана умова Ліндеберга (L).▲

Теорема 19 *Для того щоб мала місце центральна гранична теорема, необхідно та достатньо виконання наступної умови: [8]*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} R_n(\varepsilon) = 0, \forall\varepsilon > 0,$$

де

$$R_n(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|>\varepsilon} |x||F_{nk}(x) - \Phi_{nk}(x)|dx, \varepsilon > 0.$$

Ця теорема є узагальненням теореми Ліндеберга-Феллера і є не класичним варіантом центральної граничної теореми тому, що в ній відсутня умова нескіненої малості.

Покладемо

$$R_n^{(\alpha)} = \sum_{k=1}^{n}[\int\limits_{|x|\leq 1} |x|^{1+\alpha}|F_{nk}(x) - \Phi_{nk}(x)|dx + \int\limits_{|x|\leq 1} |x||F_{nk}(x) - \Phi_{nk}(x)|dx], \alpha > 0.$$

Тоді маємо місце наступна теорема.

Теорема 20 *(А) Якщо* $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} R_n^{(\alpha)} = 0$ *для деякого* $\alpha > 0$*, то* $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} R_n(\varepsilon) = 0 \quad \forall\varepsilon > 0$ *і* $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} R_n^{(\alpha)} = 0 \quad \forall\alpha > 0$*;*
(Б) якщо $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} R_n(\varepsilon) = 0 \quad \forall\varepsilon > 0$*, то* $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} R_n^{(\alpha)} = 0 \quad \forall\alpha > 0$*;*
(В) для того щоб схема серій $\{X_{nk}, 1 \leq k \leq n\}$ *зі скінченими дисперсіями задовольняла ЦГТ, необхідно і достатньо, щоб існувало таке* $\alpha > 0$*, що* $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} R_n^{(\alpha)} = 0 \quad \forall\alpha > 0$*. [9]*

2.2 Метрика Леві

Означення 6 *Метрикою Леві називається [6]*

$$L(X,Y) = L(F_X, F_Y) = inf\{\varepsilon : F_X(x) \le F_Y(x+\varepsilon) + \varepsilon,$$

$$F_Y(x) \le F_X(x+\varepsilon) + \varepsilon; x \in R^1\} \quad (2.13)$$

Розглянемо деякі приклади на знаходження метрики Леві.

Приклад 1 *Знайти відстань між двома розподілами нормальним та Бернуллі, що наведені на малюнку.*

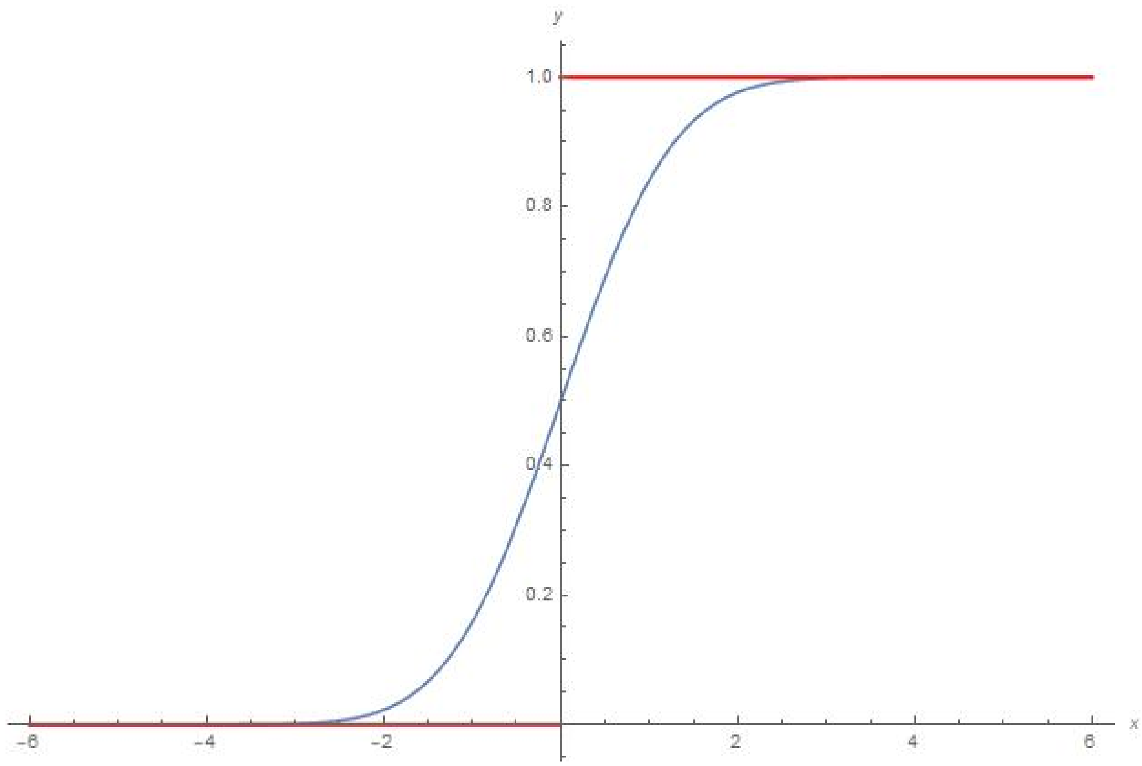

Рис. 2.1: Пр.1

$$G(x-h) - h \le F(x) \le G(x+h) + h, \forall x \Leftrightarrow$$

Перепишемо нашу нерівність у такому вигляді:

$$\begin{cases} G(x-h) - h \le 0 \le G(x+h) + h, \forall x \le 0 \\ G(x-h) - h \le 1 \le G(x+h) + h, \forall x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Нас цікавлять лише такі випадки:

$$\begin{cases} G(x-h)-h \leq 0, \forall x \leq 0 \\ 1 \leq G(x+h)+h, \forall x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} G(x-h) \leq h, \forall x \leq 0 \\ G(x+h) \geq 1-h, \forall x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Розглянемо випадок коли $x = 0$:

$$\begin{cases} G(-h) \leq h \\ G(h) \geq 1-h \end{cases} \Leftrightarrow$$

З властивостей нормального розподілу ми знаємо, що $G(h) + G(-h) = 1$ (див.рис. 2.2).

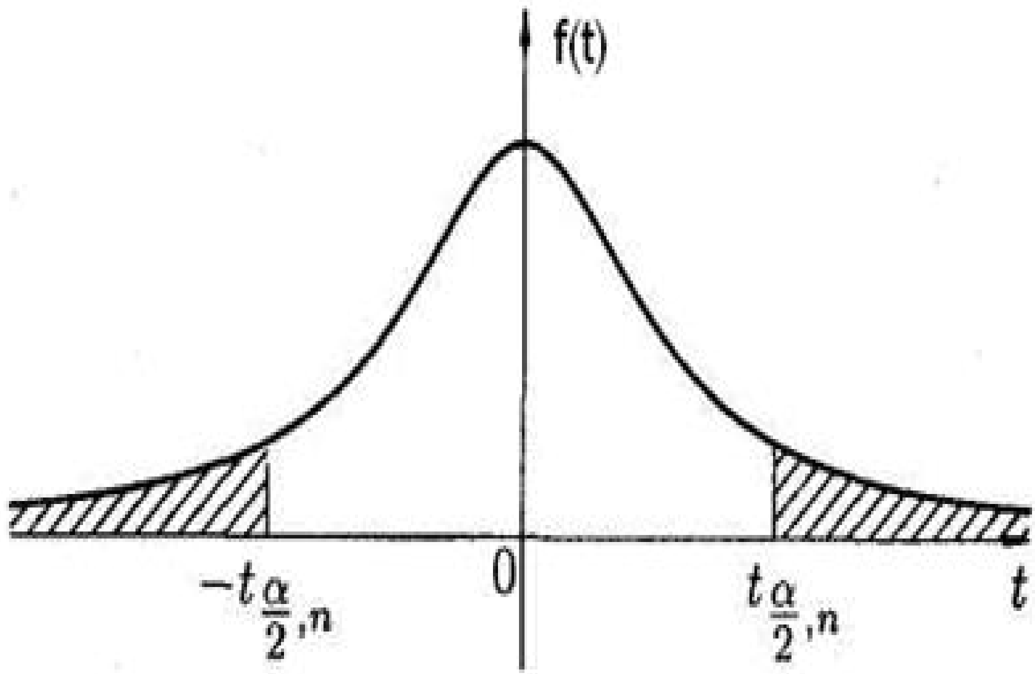

Рис. 2.2: Нормальний розподіл

Тобто ми можемо переписати нашу систему у такому вигляді:

$$\begin{cases} 1-G(h) \leq h \\ G(h) \geq 1-h \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$G(h_0) = 1 - h_0$$

$$h > h_0 : G(h) \geq G(h_0) = 1 - h_0 \geq 1 - h.$$

Тобто, розв'язком цієї задачі буде рівняння вигляду:

$$G(h) = 1 - h.$$

Нажаль аналітично ми не можемо підрахувати значення h, треба лише використовувати комп'ютерні методи.

Приклад 2 *Знайти відстань між двома розподілами, що наведені на малюнку.*

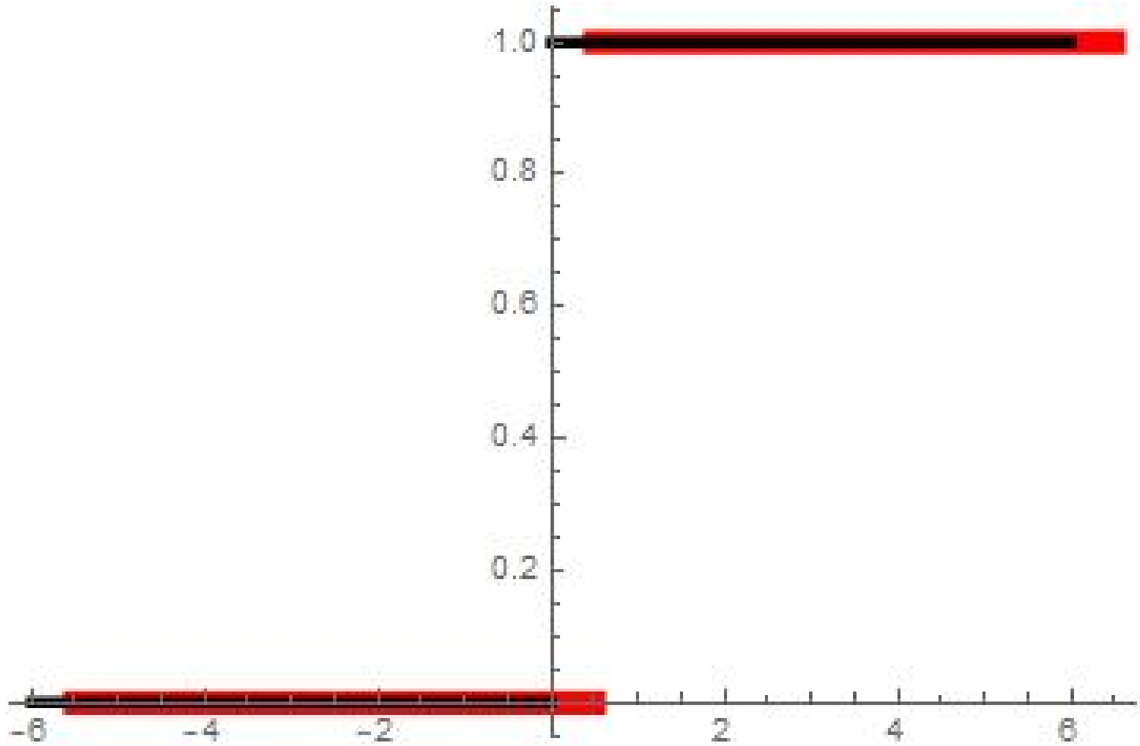

Рис. 2.3: Пр.2

$$G(x-h) - h \leq F(x) \leq G(x+h) + h, \forall x \Leftrightarrow$$

Перепишемо нашу нерівність у такому вигляді:

$$\begin{cases} G(x-h) - h \leq 0 \leq G(x+h) + h, \forall x \leq 0 \\ G(x-h) - h \leq 1 \leq G(x+h) + h, \forall x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Нас цікавлять лише такі випадки:

$$\begin{cases} G(x-h)-h \leq 0, \forall x \leq 0 \\ 1 \leq G(x+h)+h, \forall x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} h \geq G(x-h), \forall x \leq 0 \\ 1-h \leq G(x+h), \forall x > 0 \end{cases}$$

За означенням метрики Леві нас цікавить тільки випадок $1-h \leq G(x+h)$, $\forall x > 0$. Звідси маємо 2 випадки:

$$\begin{cases} 1-h \leq G(x+h), x+h < \triangle \\ 1-h \leq G(x+h), x+h \geq \triangle \end{cases}$$

За таких умов наша система матиме вигляд:

$$\begin{cases} 1-h \leq 0, 0 < x+h < \triangle \\ 1-h \leq 1, x+h \geq \triangle \end{cases}$$

Нас цікавить лише перша нерівність за означенням метрики Леві. $\triangle - h <$ < 0, $h > \triangle$, а звідси $inf h = \triangle$. Тобто $L(F,G) = \triangle$.

2.3 Висновки з розділу 2

Так як в попередньому розділі за допомогою досліджень було з'ясовано, що наша задача не має жодного відношення до класичної теорій сумувань випадкових величин, то в цьому розділі ми розглянули основні теореми та означення в некласичній теорії. Граничні теореми, що доведенні без використання умови нескінченої малості ми називаємо некласичними.

Спираючись на розглянуті факти ми зможемо з'ясувати у наступному розділі чи виконується центральна гранична теорема для серій Паскаля, а також за допомогою отриманої теореми ми зможемо її узагальнити.

Також у цьому розділі було розглянуто дві задачі на метрику Леві, так як ми безпосередньо маємо справу з випадковими величинами Бернуллі та працюємо з нормальним розподілом.

Нажаль рівняння отримані в цих прикладах дуже важко розв'язати аналітично, тому краще використовувати комп'ютерні методи моделювання для знаходження їх розв'язку, наприклад використовуючи Wolfram Mathematica. До того ж комп'ютерні методи дозволяють знайти невідомий параметр нашого рівняння з доволі великою точністю.

Базуючись на цьому розділі ми безпосередньо можемо перейти до основної мети нашої магістерської дисертації.

3 ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ДЛЯ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН З ТРИКУТНИКА ПАСКАЛЯ

3.1 Центральна гранична теорема для серії Паскаля

Ми знаємо, що зі збіжності за ймовірністю $\frac{S_n}{n} \longrightarrow p$ випливає збіжність за розподілом $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{d} p$, що означає

$$f(\frac{S_n}{n}) \longrightarrow f(p), n \longrightarrow \infty, \tag{3.1}$$

для будь-якої функції $f = f(x)$ з класу C неперервних обмежених функцій на R.

Теорема 21 *Нехай U_n має вигляд:*

$$U_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n} 2^k Y_k,$$

де Y_k - послідовність серій Паскаля, тоді ЦГТ не виконуєтьcя.

Наведемо спрощене доведення цієї теореми.

Доведення: Нехай виконується центральна гранична теорема. Тоді, розглянемо

$$Y_k = \begin{cases} -1, & p = 0.5 \\ 1, & p = 0.5 \end{cases}$$

$$U_n \overset{def}{=} \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n} 2^k Y_k,$$

$$|U_n| \leq \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n} 2^k |Y_k| = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n} 2^k < 2 \Rightarrow$$

$$P(U_n < 2) = 1, \forall n \geq 1 \Rightarrow P(U_n < 2) \nrightarrow \Phi(2).$$

Отримали суперечність, тому теорема доведена. ▲

Зауваження 1 *Спрощене доведення виконується за умови* $|Y_k| = 1$.

У більш складних випадках для виконання центральної граничної теореми необхідно щоб виконувалось (3.1). Це означає, що 1-й момент має збігатись до першого моменту гаусовської випадкової величини, другий до другого і т.д..Тому розглянемо

$$f(x) \stackrel{def}{=} \begin{cases} x^2, & |x| < 2 \\ -4x + 12, & 2 \leq x < 3 \\ 4x + 12, & -3 < x \leq -2 \\ 0, & |x| \geq 3. \end{cases}$$

Якщо $P(U_n < x) \longrightarrow \Phi(x), n \longrightarrow \infty$, то $E[f(U_n)] \longrightarrow E[f(N(0,1))]$, але $f(U_n) = U_n^2$. Розглянемо випадок коли $U_n = \frac{1}{2^n} \sum\limits_{k=1}^{n} 2^k Y_k$.

$$Y_k = \begin{cases} -1, & p = 0.5 \\ 1, & p = 0.5 \end{cases}$$

$$EY_k = -1 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.5 = 0, EY_k^2 = (-1)^2 \cdot 0.5 + 1^2 \cdot 0.5 = 1$$

Підрахуємо момент першого порядку:

$$m_1 = \frac{1}{2^n} E \sum_{k=1}^{n} 2^k Y_k = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n} 2^k EY_k = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n} 2^k \cdot 0 = 0$$

Далі підрахуємо другий момент:

$$m_2 = \left(\frac{1}{2^n} E \sum_{k=1}^{n} 2^k Y_k \right)^2 = E \left(\frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n} 2^k Y_k \right)^2 =$$

$$= E \left(\frac{\sum\limits_m 2^m Y_m}{2^n} \right) E \left(\frac{\sum\limits_j 2^j Y_j}{2^n} \right) = \frac{E \sum\limits_{m=j} 2^{2m} Y_m^2}{2^{2n}} + \frac{E \sum\limits_{m \neq j} 2^{j+m} Y_m Y_j}{2^{2n}} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{m=j} 2^{2m}}{2^{2n}} = \frac{4(2^{2n}-1)}{3 \cdot 2^{2n}}$$

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{4(2^{2n}-1)}{3 \cdot 2^{2n}} = \frac{4}{3}, \frac{m_2}{2^{2n}} \longrightarrow \frac{4}{3}, n \longrightarrow \infty$$

Знайдемо m_3:

$$m_3 = \frac{1}{2^{3n}} E\left(\sum_m 2^m Y_m\right) E\left(\sum_j 2^j Y_j\right) E\left(\sum_i 2^i Y_i\right) = \frac{1}{2^{3n}} E \sum_m 2^{3m} Y_m +$$

$$+ \frac{1}{2^{3n}} E \sum_{m \neq j} 2^{2m+j} Y_m^2 Y_j + \frac{1}{2^{3n}} E \sum_{m \neq j \neq i} 2^{m+i+j} Y_m Y_j Y_i = \frac{1}{2^{3n}} \sum_m 2^{3m} E Y_m = 0.$$

Надалі моменти непарного порядку нас цікавити не будуть, так як вони в результаті підрахунку завжди даватимуть 0. Далі підрахуємо четвертий момент:

$$m_4 = \left(\frac{1}{2^n} E \sum_{k=1}^{n} 2^k Y_k\right)^4 = E\left(\frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{n} 2^k Y_k\right)^4 =$$

$$= E\left(\frac{\sum\limits_m 2^m Y_m}{2^n}\right) E\left(\frac{\sum\limits_j 2^j Y_j}{2^n}\right) E\left(\frac{\sum\limits_i 2^i Y_i}{2^n}\right) E\left(\frac{\sum\limits_s 2^s Y_s}{2^n}\right) =$$

$$= \frac{E \sum\limits_m 2^{4m} Y_m^4}{2^{4n}} + \frac{E \sum\limits_{m \neq j} 2^{j+3m} Y_m^3 Y_j}{2^{4n}} + \frac{E \sum\limits_{m \neq j} 2^{2j+2m} Y_m^2 Y_j^2}{2^{4n}} +$$

$$+ \frac{E \sum\limits_{m \neq j \neq i} 2^{i+j+2m} Y_m^2 Y_i Y_j}{2^{4n}} + \frac{E \sum\limits_{m \neq j \neq i \neq s} 2^{i+j+m+s} Y_m Y_i Y_j Y_s}{2^{4n}} =$$

$$= \frac{1}{2^{4n}} \left(\sum_m 2^{4m} E Y_m^4 + \sum_{m \neq j} 2^{2j+2m} E Y_m^2 E Y_j^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2^{4n}} \left(\sum_{m=j} 2^{2(m+j)} + \sum_{m \neq j} 2^{2(m+j)}\right) = \frac{1}{2^{4n}} \sum_{m=1}^{n} 2^{4m}$$

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{2^{4n}} \sum_{m=1}^{n} 2^{4m} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{16(16^n - 1)}{15 \cdot 16^n} = \frac{16}{15}$$

Перевіримо чи співпадає наша відповідь із значенням моментів не стандартної гаусовської випадкової величини в загальному випадку.

$$E[X^p] = \begin{cases} 0, \quad \text{при} & p = 2n+1 \\ \sigma^p (p-1)!!, & p = 2n \end{cases}$$

Тобто $E[X^4] = 3\sigma^4 = \frac{16\cdot3}{9} = \frac{16}{3}$. Звідси можемо зробити висновок, що центральна гранична теорема не виконується, оскільки $\frac{16}{3} \neq \frac{16}{15}$. Розглянемо загальний випадок, коли $U_n = \frac{1}{t^n}\sum\limits_{k=1}^{n} t^k Y_k$.

Теорема 22 *Нехай U_n має вигляд:*

$$U_n = \frac{1}{t^n}\sum_{k=1}^{n} t^k Y_k,$$

де Y_k - послідовність серій Паскаля, тоді для $t \neq \pm 1$ центральна гранична теорема не має місця.

Доведення: Нехай знову

$$Y_k = \begin{cases} -1, & p = 0.5 \\ 1, & p = 0.5 \end{cases}$$

$$EY_k = -1 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.5 = 0, EY_k^2 = (-1)^2 \cdot 0.5 + 1^2 \cdot 0.5 = 1$$

Підрахуємо момент першого порядку:

$$m_1 = \frac{1}{t^n} E \sum_{k=1}^{n} t^k Y_k = \frac{1}{t^n}\sum_{k=1}^{n} t^k EY_k = \frac{1}{t^n}\sum_{k=1}^{n} t^k \cdot 0 = 0$$

Далі підрахуємо другий момент:

$$m_2 = \left(\frac{1}{t^n} E \sum_{k=1}^{n} t^k Y_k\right)^2 = E\left(\frac{1}{t^n}\sum_{k=1}^{n} t^k Y_k\right)^2 =$$

$$= E\left(\frac{\sum\limits_m t^m Y_m}{t^n}\right) E\left(\frac{\sum\limits_j t^j Y_j}{t^n}\right) = \frac{E\sum\limits_{m=j} t^{2m} Y_m^2}{t^{2n}} + \frac{E\sum\limits_{m\neq j} t^{j+m} Y_m Y_j}{t^{2n}} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{m=j} t^{2m}}{t^{2n}} = \frac{t^2(t^{2n}-1)}{(t^2-1)t^{2n}}$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{t^2(t^{2n}-1)}{(t^2-1)t^{2n}}, n \longrightarrow \infty$$

При $t = \pm 1$ границя прямує до ∞, в інших випадках до 1.

Знайдемо m_3:

$$m_3 = \frac{1}{t^{3n}} E\left(\sum_m t^m Y_m\right) E\left(\sum_j t^j Y_j\right) E\left(\sum_i t^i Y_i\right) = \frac{1}{t^{3n}} E\sum_m t^{3m} Y_m +$$

$$+\frac{1}{t^{3n}} E\sum_{m\neq j} t^{2m+j} Y_m^2 Y_j + \frac{1}{t^{3n}} E\sum_{m\neq j\neq i} t^{m+i+j} Y_m Y_j Y_i = \frac{1}{t^{3n}} \sum_m t^{3m} E Y_m = 0$$

Надалі моменти не парного порядку нас цікавити не будуть, так як вони в результаті підрахунку завжди даватимуть 0. Далі підрахуємо четвертий момент:

$$m_4 = \left(\frac{1}{t^n} E\sum_{k=1}^n t^k Y_k\right)^4 = E\left(\frac{1}{t^n}\sum_{k=1}^n t^k Y_k\right)^4 =$$

$$= E\left(\frac{\sum\limits_m t^m Y_m}{t^n}\right) E\left(\frac{\sum\limits_j t^j Y_j}{t^n}\right) E\left(\frac{\sum\limits_i t^i Y_i}{t^n}\right) E\left(\frac{\sum\limits_s t^s Y_s}{t^n}\right) =$$

$$= \frac{E\sum\limits_m t^{4m} Y_m^4}{t^{4n}} + \frac{E\sum\limits_{m\neq j} t^{j+3m} Y_m^3 Y_j}{t^{4n}} + \frac{E\sum\limits_{m\neq j} t^{2j+2m} Y_m^2 Y_j^2}{t^{4n}} +$$

$$+ \frac{E\sum\limits_{m\neq j\neq i} t^{i+j+2m} Y_m^2 Y_i Y_j}{t^{4n}} + \frac{E\sum\limits_{m\neq j\neq i\neq s} t^{i+j+m+s} Y_m Y_i Y_j Y_s}{t^{4n}} =$$

$$= \frac{1}{t^{4n}}\left(\sum_m t^{4m} E Y_m^4 + \sum_{m\neq j} t^{2j+2m} E Y_m^2 E Y_j^2\right) =$$

$$= \frac{1}{t^{4n}} \left(\sum_{m=j} t^{2(m+j)} + \sum_{m \neq j} t^{2(m+j)} \right) = \frac{1}{t^{4n}} \sum_{m=1}^{n} t^{4m}$$

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{t^{4n}} \sum_{m=1}^{n} t^{4m} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{t^4(t^{4n}-1)}{(t^4-1)t^{4n}} =$$

$$= \begin{cases} \infty, & t = \pm 1 \\ 1, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Перевіримо чи співпадає наша відпововідь із значенням моментів не стандартної гаусовської випадкової величини в загальному випадку.

$$E[X^p] = \begin{cases} 0, \quad \text{при} & p = 2n+1 \\ \sigma^p (p-1)!!, & p = 2n \end{cases}$$

Тобто $E[X^4] = \infty$, при $t = \pm 1$. Звідси можемо зробити висновок, що центральна гранична теорема виконується, а в другому випадку $E[X^4] = 3 \neq 1$ і тому центральна гранична теорема не має місця.

3.2 Висновки з розділу 3

Нагадаємо, що основним завдання даної магістерської дисертації було довести або спростувати виконання центральної граничної теореми для випадкових величин з трикутника Паскаля, що ми і зробили у третьому розділі.

У даному розділі було отримано два основних результати магістерської дисертації, а саме те, що для серій Паскаля центральна гранична теорема не має місця, а також узагальнили цю теорему і довели методом підрахування моментів наших випадкових величин, що в загальному випадку центральна гранична теорема не виконується окрім випадків $t = \pm 1$.

Отже, ми можемо сказати, що основну задачу магістерської дисертації виконано, так як ми довели, центральна гранична теорема не виконується для випадкових величин з трикутника Паскаля.

ВИСНОВКИ

У даній магістерській дисертації представлено дослідження,що центральна гранична теорема для випадкових величин із трикутника Паскаля не виконується.

Ми розглядали трикутник, на бічних сторонах якого елементи обирались довільним чином, а інші формувались за класичним правилом. Для отримання цих результатів було виведено формулу суми всіх елементів в рядках до n-го включно з трикутника Паскаля, що дало нам розуміння з сумами якого вигляду ми маємо справу.

Спираючись на отриманий результат ми з'ясували, що наша задача не має ніякого відношення до класичної теорії сумування випадкових величин. Некласичною теорією ми називали ті результати, які були отримані без використання того, що умова нескінченої малості виконується.

Ґрунтуючись на отриманих фактах ми довели, що для нашого випадку центральна гранична теорема не виконується і до того ж довели цей факт у загальному вигляді та з'ясували, що для випадкових величин загального вигляду центральна гранична теорема не виконується в усіх випадках окрім $t = \pm 1$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Петров В.В.// «Суммы независимых случайных величин»// М.: Физматлит, 1972. — 416 с.

[2] Жлуктенко В.І., Наконечний С.І., Савіна С.С.// «Теорія ймовірнстей і математична статистика Частина 2» - Навчальний посібник// - 224 с.

[3] Гнеденко Б.В., Колмогоров А.Н.//«Предельные распределения для сумм независимых случайных величин»//М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949 г. - 264с.

[4] Стрелець, Є.І. «Про числові співвідношення у трикутнику Паскаля»/ Матеріали: VII Всеукраїнська конференція студентів, аспірантів та молодих вчених з математики – 2018.- с.31.

[5] Стрелець, Є.І. «Умова нескінченої малості для випадкових величин з трикутника Паскаля»/ Матеріали: IX Всеукраїнська конференція студентів, аспірантів та молодих вчених з математики – 2020. - с. 17.

[6] Золотарев В.М. «Современная теория суммирования независимых случайных величин»/ М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. — 416 с.

[7] Ширяев А.Н. «Вероятность-1»/ Ширяев Альберт Николаевич // М.: МЦНМО, 2007. - 552 с.

[8] Ротарь В.И. К обобщению теоремы Линдеберга— Феллера // Мат. заметки. 1975. Т. 18. В. 1. С. 129– 135.

[9] Пресман Э.Л. «О предельной теореме Линдеберга-Феллера»/ Пресман Э.Л. , Форманов Ш.К.// Доклады Академии Наук, 2019, том 485, № 5, с. 548–552.

[10] Esseen C.G. On the Remainder Term in the Central Limit Theorem // Arkiv Math. 1968. V. 8. No 1. P. 7–15.

[11] Ибрагимов И.А., Осипов Л.В. Об оценке остаточного члена в теореме Линдеберга // Теория вероятно- стей и её применения. 1966, 141–143 с.

[12] Ротарь В. И., “Неравномерная оценка скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме”,// Теория вероятн. и ее примен., - 1970, - 647–665 с.

[13] Студнев Ю. П., О приближении функций распределения сумм независимых случайных величин неограниченно делимыми законами // Докл. и сооб. Ужгород. ун-та. Сер. физ.-мат. наук. – Ужгород, 1960. – № 3. – С. 68-69 с.

[14] Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей, М., Наука, 1965, 400 стр.

[15] Золотарев В. М., “О реальных уточнениях предельных теорем теории вероятностей”, Теория вероятностей, теория функций, механика, Сборник обзорных статей 5. К 50-летию Института, Тр. МИАН СССР, 182, Наука, М., 1988 г., - 24–47 с.

[16] Золотарев В. М., Сенатов В.В. Двусторонние оценки метрики Леви// Теория вероятностей и её применения. - 1975. - Т.112. - 224-235 с.

[17] Золотарев В. М., О псевдомоментах// Теория вероятностей и её применения. - 1978. - Т.23, вып.2 - 284-294 с.

[18] Сазонов В. В., “К оценке скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме”, Теория вероятн. и ее примен., (1967), - 82–95 с.

[19] Сенатов В. В. Центральная предельная теорема: Точность аппроксимации и асимптотические разложения. М.: Книжный дом «Либроком», 2009.

[20] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 1. М.: Мир. - 1964 - с. 249.

[21] Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2. М.: Мир.- 1967.

[22] Колмогоров А.Н. Некоторые работы последних лет в области предельных теорем теории вероятностей//Вести. МГУ. - 1953. - №10 - 28-39 с.

[23] Колмогоров А.Н. Две равномерные предельные теоремы для сумм независимых слагаемых//Теория вероятностей и её применения. - 1956. - Т. 1, вып. 4, - 426-436 с.

[24] Колмогоров А.Н. О приближении распределений сумм независимых слагаемых неограниченно делимыми распределениями// Труды Моск. мат. о-ва, - 1963. - Т. 12. - 437 - 451 с.

[25] Успенский В. А. Треугольник Паскаля. — М.: Наука, 1979. — 48 с.

[26] Кузьмин О. В. Треугольник и пирамида Паскаля: свойства и обобщения // Соросовский Образовательный Журнал. — 2000. — 101—109 с.

[27] Королюк В. С., Портенко Н. И., Скороход А. В., Турбин А. Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. — М.: Наука, 1985. — 640 с.

[28] Хинчин А. Я. Предельные законы для сумм независимых случайных величин. - М.;Л.: ОНТИ, 1938.