

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

МАТЕМАТИКА В СУЧАСНОМУ ТЕХНІЧНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ

Матеріали
IX Міжнародної
науково-практичної конференції
Київ, 28–29 грудня 2020 року

Вінниця
2021

УДК 51(082)

МЗ4

Матеріали ІХ Міжнар. наук.-практ. конф. «Математика в сучасному технічному університеті», Київ, 28–29 грудня 2020 р. — Вінниця: Видавець ФОП Кушнір Ю. В., 2021. — 330 с. — Укр., рос., англ., білорус.

Материалы ІХ Межд. науч.-практ. конф. «Математика в современном техническом университете», Киев, 28–29 декабря 2020 г. — Винница: Видавець ФОП Кушнір Ю. В., 2021. — 330 с. — Укр., рус., англ., белорус.

Proceedings of Ninth International Scientific-Practical Conference “Mathematics in Modern Technical University”, Kyiv, December, 28–29, 2020. Vinnytsia: Publisher FOP Kushnir Yu. V., 2021. 330 pp.

ISBN 978-617-7721-27-6

Програмний комітет

ІХ Міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті»:

Проф. О. І. Клесов (Київ, Україна), (голова)

Проф. Н. О. Вірченко (Київ, Україна)

Проф. О. В. Іванов (Київ, Україна)

Проф. П. В. Задерей (Київ, Україна)

Доц. О. О. Диховичний (Київ, Україна)

Організаційний комітет

Міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті»

Доц. В. О. Гайдей (Україна), голова

В. В. Бовсуновська (Київ, Україна)

Ю. Є. Приходько (Київ, Україна)

УДК 51(082)

Матеріали подано в авторській редакції

ISBN 978-617-7721-27-6

©Автори

©КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021



ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИКИ В СУМІЖНИХ НАУКАХ

Non-autonomous stochastic predator-prey model with jumps

O. V. Borysenko

Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, Kyiv, Ukraine

olga_borisenko@ukr.net

It is proved existence and uniqueness of the global positive solution to the system of stochastic differential equations describing a non-autonomous stochastic predator-prey model with jumps. We obtain sufficient conditions of stochastic ultimate boundedness, stochastic permanence, non-persistence in the mean, weak persistence in the mean and extinction of the solution to the considered system.

Key words: stochastic predator-prey model, global solution, stochastic ultimate boundedness, stochastic permanence, non-persistence in the mean, weak persistence in the mean, extinction.

The deterministic predator-prey model with modified version of Leslie–Gower and Holling-type II functional response is studied in Aziz-Alaoui and Okiye (2003). This model has a form

$$dx = x \left(a - bx - \frac{cy}{m_1 + x} \right) dt, \quad dy = y \left(r - \frac{fy}{m_2 + x} \right) dt, \quad (1)$$

where $x(t)$ and $y(t)$ are the prey and predator population densities at time t , respectively. Positive constants a, b, c, r, f, m_1, m_2 defined as follows: a is the growth rate of prey x ; b measures the strength of competition among individuals of species x ; c is the maximum value of the per capita reduction rate of x due to y ; m_1 and m_2 measure the extent to which the environment provides protection to prey x and to the predator y , respectively; r is the growth rate of predator y , and f has a similar meaning to c . In Aziz-Alaoui and Okiye (2003) the authors study boundedness and global stability of the positive equilibrium of the model (1).

In the papers Ji et al. (2009, 2011), Lin and Jiang (2016) is considered the stochastic version of model (1) in the following form

$$\begin{aligned} dx(t) &= x(t) \left(a - bx(t) - \frac{cy(t)}{m_1 + x(t)} \right) dt + \alpha x(t) dw_1(t), \\ dy &= y \left(r - \frac{fy}{m_2 + x} \right) dt + \beta y(t) dw_2(t), \end{aligned} \quad (2)$$

where $w_1(t)$ and $w_2(t)$ are mutually independent Wiener processes in Ji et al. (2009, 2011) and processes $w_1(t), w_2(t)$ are correlated in Lin and Jiang (2016). In Ji et al. (2009) the authors proved that there is a unique positive solution to the system (2), obtained the sufficient conditions for extinction and persistence in the mean of predator and prey. In Ji et al. (2009, 2011) it is shown, that under appropriate conditions there is a stationary distribution of the solution to the system (2) which is ergodic. In Lin and Jiang (2016) the authors prove that the densities of the distributions of the

solution to the system (2) can converges in L^1 to an invariant density or can converge weakly to a singular measure under appropriate conditions.

Population systems may suffer abrupt environmental perturbations, such as epidemics, fires, earthquakes, etc. So it is natural to introduce Poisson noises into the population model for describing such discontinuous systems. In this paper, we consider the stochastic predator-prey model with jumps driven by the system of stochastic differential equations

$$\begin{aligned} dx_i(t) = & x_i(t) \left[a_i(t) - b_i(t)x_i(t) - \frac{c_i(t)x_2(t)}{m(t) + x_1(t)} \right] dt + \sigma_i(t)x_i(t)dw_i(t) + \\ & + \int_{\mathbb{R}} \gamma_i(t, z)x_i(t)\tilde{\nu}_1(dt, dz) + \int_{\mathbb{R}} \delta_i(t, z)x_i(t)\nu_2(dt, dz), \quad (3) \\ & x_i(0) = x_{i0} > 0, i = 1, 2. \end{aligned}$$

where $x_1(t)$ and $x_2(t)$ are the prey and predator population densities at time t , respectively, $b_2(t) \equiv 0$, $w_i(t), i = 1, 2$ are independent standard one-dimensional Wiener processes, $\nu_i(t, A), i = 1, 2$ are independent Poisson measures, which are independent on $w_i(t), i = 1, 2$,

$$\tilde{\nu}_1(t, A) = \nu_1(t, A) - t\Pi_1(A), \quad E[\nu_i(t, A)] = t\Pi_i(A), i = 1, 2, \quad \Pi_i(A), i = 1, 2$$

are a finite measures on the Borel sets A in \mathbb{R} .

In the following we will use the notations

$$X(t) = (x_1(t), x_2(t)), X_0 = (x_{10}, x_{20}), |X(t)| = \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)},$$

$$\mathbb{R}_+^2 = \{X \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0\}, \text{ for } i = 1, 2$$

$$\beta_i(t) = \sigma_i^2(t) / 2 + \int_{\mathbb{R}} [\gamma_i(t, z) - \ln(1 + \gamma_i(t, z))] \Pi_1(dz) - \int_{\mathbb{R}} \ln(1 + \delta_i(t, z)) \Pi_2(dz).$$

For the bounded, continuous functions $f_i(t), t \in [0, +\infty), i = 1, 2$, let us denote

$$f_{i \sup} = \sup_{t \geq 0} f_i(t), f_{i \inf} = \inf_{t \geq 0} f_i(t), i = 1, 2,$$

Let (Ω, F, P) be a probability space, $w_i(t), i = 1, 2, t \geq 0$ are independent standard one-dimensional Wiener processes on (Ω, F, P) , and $\nu_i(t, A), i = 1, 2$ are independent Poisson measures defined on (Ω, F, P) independent on $w_i(t), i = 1, 2$. Here

$E[\nu_i(t, A)] = t\Pi_i(A), i = 1, 2, \tilde{\nu}_i(t, A) = \nu_i(t, A) - t\Pi_i(A), i = 1, 2, \Pi_i(\cdot), i = 1, 2$ are finite measures on the Borel sets in \mathbb{R} . On the probability space (Ω, F, P) we consider an increasing, right continuous family of complete sub- σ -algebras $\{F_t\}_{t \geq 0}$, where

$$F_t = \sigma\{w_i(s), \nu_i(s, A), s \leq t, i = 1, 2\}.$$

We need the following assumption.

Assumption 1. It is assumed, that $a_i(t), b_1(t), c_i(t), \sigma_i(t), \gamma_i(t, z), \delta_i(t, z)$, $i = 1, 2$, $m(t)$ are bounded, continuous on t functions, $a_i(t) > 0, i = 1, 2$, $b_{1\inf} > 0$, $c_{i\inf} > 0, i = 1, 2$, $m_{\inf} > 0$, and $\ln(1 + \gamma_i(t, z)), \ln(1 + \delta_i(t, z)), i = 1, 2$ are bounded, $\Pi_i(\mathbb{R}) < \infty, i = 1, 2$.

In what follows in this paper we will assume that Assumption 1 holds.

Theorem 1. *There exists a unique global (no explosion) solution $X(t)$ to the equation (3) for any initial value $X_0 > 0$, and $P\{X(t) \in \mathbb{R}_+^2\} = 1$.*

Definition 1. The solution $X(t)$ to the system (3) are said to be *stochastically ultimately bounded*, if for any $\varepsilon \in (0, 1)$, there is a positive constant $\chi = \chi(\varepsilon) > 0$, such that for any initial value $X_0 \in \mathbb{R}_+^2$, the solution to the system (3) has the property that $\limsup_{t \rightarrow \infty} P\{|X(t)| > \chi\} < \varepsilon$.

Theorem 2. *The solution $X(t)$ to the system (3) is stochastically ultimately bounded for any initial value $X_0 \in \mathbb{R}_+^2$.*

The property of stochastic permanence is important since it means the long time survival in a population dynamics.

Definition 2. The population density $x(t)$ is said to be *stochastically permanent* if for any $\varepsilon > 0$, there are positive constants $H = H(\varepsilon)$, $h = h(\varepsilon)$ such that

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} P\{x(t) \leq H\} \geq 1 - \varepsilon, \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} P\{x(t) \geq h\} \geq 1 - \varepsilon,$$

for any initial value $x(0) > 0$.

Theorem 3. *If $p_{2\inf} > 0$, where $p_2(t) = a_2(t) - \beta_2(t)$, then for any initial value $x_{20} > 0$, the predator population density $x_2(t)$ is stochastically permanent.*

Theorem 4. *If the predator is absent, i.e. $x_2(t) = 0$ a.s., and $p_{1\inf} > 0$, where $p_1(t) = a_1(t) - \beta_1(t)$, then for any initial value $x_{10} > 0$, the prey population density $x_1(t)$ is stochastically permanent.*

Theorem 5. *Let Assumption 1 be fulfilled. If*

$$\bar{p}_i^* = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t p_i(s) ds < 0, \quad \text{where } p_i(t) = a_i(t) - \beta_i(t), i = 1, 2,$$

then $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0$, a.s. $i = 1, 2$. So the solution $X(t)$ to the equation (3) will go to extinction a.s.

Theorem 6. *If $\bar{p}_1^* = 0$, then the prey population density $x_1(t)$ with initial condition $x_{10} > 0$ will be non-persistence in the mean*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x_1(s) ds = 0 \text{ a.s.}$$

Theorem 7. If $\bar{p}_2^* = 0$ and $\bar{p}_1^* < 0$, then the predator population density $x_2(t)$ with initial condition $x_{20} > 0$ will be non-persistence in the mean

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x_2(s) ds = 0 \text{ a.s.}$$

Theorem 8. If $\bar{p}_2^* > 0$, then the predator population density $x_2(t)$ with initial condition $x_{20} > 0$ will be weakly persistence in the mean

$$\bar{x}_2^* = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x_2(s) ds > 0 \text{ a.s.}$$

Theorem 9. If $\bar{p}_1^* > 0$ and $\bar{p}_2^* < 0$, then the prey population density $x_1(t)$ with initial condition $x_{10} > 0$ will be weakly persistence in the mean

$$\bar{x}_1^* = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x_1(s) ds > 0 \text{ a.s.}$$

References

- Aziz-Alaoui, M. A., & Okiye, M. D. (2003). Boundedness and global stability for a predator-prey model with modified Leslie–Gower and Holling-type II schemes. *Applied Mathematics Letters*, 16(7), 1069–1075.
- Ji, C., Jiang, D., & Shi, N. (2009). Analysis of a predator–prey model with modified Leslie–Gower and Holling-type II schemes with stochastic perturbation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 359(2), 482–498.
- Ji, C., Jiang, D., & Shi, N. (2011). A note on a predator–prey model with modified Leslie–Gower and Holling-type II schemes with stochastic perturbation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 377(1), 435–440.
- Lin, Y., & Jiang, D. (2016). Long-time behavior of a stochastic predator–prey model with modified Leslie–Gower and Holling-type II schemes. *International Journal of Biomathematics*, 9(03), 1650039.

A physical analysis of automatic systems

L. M. Boychuk

Köln, Germany

leonidas.boychuk@gmail.com

A feedback multivariable automatic system subjected to disturbance forces is considered. A kinematics and dynamics analysis of the system is developed. Analytical expressions of force reactions are determined. It is shown that there is a force balance related to external disturbances and the force reactions, it representing a properly adjusted the 3d Newton's law. So a disturbance rejection at regulated outputs inevitably reduces to increasing of force reactions at controlling inputs and at unobservable part of an object.

Keywords: feedback, control, disturbance rejection, force reaction, system.

Automatic systems are intended for rejection of disturbances acted on a controlled object. Up to date, this influence is investigated indirectly, just transients of regulated variables are studied. It represents *a kinematics analysis* that does not consider a force action and its transforms in the object. This analysis is, basically, one-sided: it does not concern unregulated (intermediate) outputs of the object. But great disturbance influence is dangerous at any point of the object. Therefore, it is very important to develop *a dynamics analysis*, for instance, to reveal a disturbance propagation in the object (“a disturbance wave”). This approach deals with reactions on the force actions, it representing transients of variables in a structure form. The third part of a physical investigation – *an energy analysis* – is to be worked out.

Statement of the problem. An object to be controlled is described by differential equations written in the operational form:

$$L_o(s)x_o(s) = f_o(s) + f_u(s).$$

Here: x_o is a n_o -dimensional vector of object outputs; L_o is a square full rank matrix of a proper dimension; f_o is a n_o -dimensional vector of unmeasured disturbances; f_u is a vector of controlling inputs depended on a vector u_o of acting controls ($\dim u_o(s) = m_o \leq n_o$), i.e. $f_u(s) = B_o u_o(s)$ with a rectangular matrix B_o that has a full rank; $s \geq 0$ is an operational variable. For a system without a control force its position and force reactions are determined respectively by expressions:

$$\tilde{x}_o(s) = L_o^{-1}(s)f_o(s), f_x(s) = L_o(s)\tilde{x}_o(s).$$

(All the values related to reactions are denoted below by a wave cover sign). So a force balance for this case reduces to equality

$$\tilde{f}_x(s) = f_o(s)$$

that represents the 3d Newton's law: a reaction is equal to an external action.

It is necessary to obtain a physically similar equality for an object controlled by a feedback scheme.

A common system equation and its solution (a kinematics analysis). In a feedback automatic system, a control force is formed by a regulator that is assumed to be undisturbed. It is described by an equation

$$L_r(s)x_r(s) = B_r u_r(s),$$

where x_r is a n_r -dimensioned vector of outputs ($n_r \geq n_o$) and u_r is a m_o -dimensioned vector of controls. In contrast to an object, a square matrix of a regulator may be degenerated ($\text{rank } L_r(s) \leq n_r$). Control laws for an object and a regulator are described by expressions:

$$u_o(s) = C_r^T x_r(s), \quad u_r(s) = r_o(s) - C_o^T x_o(s),$$

where C_o and C_r are observation rectangular matrices ($\text{rank } C_o = \text{rank } C_r - m_o$) and r_o is a m_o -dimensional vector of commands. Proceeding from the expressions given above, one obtains a common equation of the system:

$$\begin{vmatrix} L_o(s) & -B_o C_r^T \\ B_r C_o^T & L_r(s) \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x_o(s) \\ x_r(s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_o(s) \\ B_r r_o(s) \end{vmatrix},$$

it having a partitioned matrix. An analytical solution of this equation follows from a known algebraic formula and may be presented in the form:

$$\begin{vmatrix} \tilde{x}_o(s) \\ \tilde{x}_r(s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tilde{L}_o^{-1}(s) & \tilde{L}_{or}(s) \\ -\tilde{L}_{ro}(s) & \tilde{L}_r^{-1}(s) \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} f_o(s) \\ B_r r_o(s) \end{vmatrix},$$

where \tilde{x}_o and \tilde{x}_r are position reactions, \tilde{L}_o and \tilde{L}_r are reaction matrices of an object and a regulator respectively. Components of this solution depends on a reaction regulator matrix:

$$\tilde{L}_r(s) = L_r(s) + B_r w_o(s) C_r^T,$$

where $w_o(s) = C_o^T L_o^{-1}(s) B_o$ is a designed transfer matrix of an object. The considered reaction matrix obeys a condition $\text{rank } \tilde{L}_r(s) = n_r$ that is necessary to ensure inversion of a matrix of the system equation. It yields a reaction transfer matrix of a regulator: $\tilde{w}_r(s) = C_r^T \tilde{L}_r^{-1}(s) B_r$. It is shown that this matrix satisfies an equality: $\tilde{w}_r(s) = (w_o(s) + w_r^{-1}(s))^{-1}$.

Reaction cross-matrices in the considered solution are described as

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{or}(s) &= L_o^{-1}(s) B_o C_r^T \tilde{L}_r^{-1}(s), \\ \tilde{L}_{ro}(s) &= \tilde{L}_r^{-1}(s) B_r C_o^T L_o^{-1}(s). \end{aligned}$$

An inverse of an object reaction matrix is reduced to the form:

$$\tilde{L}_o^{-1}(s) = L_o^{-1}(s) \tilde{P}_{or}(s).$$

In this expression a matrix $\tilde{P}_{or}(s) = I_o - \tilde{H}_{or}(s)$ depends on a matrix $\tilde{H}_{or}(s) = B_o \tilde{w}_r(s) C_o^T L_o^{-1}(s)$ and on a unit n_o -dimensional matrix I_o ,

An important feature of the obtained position reactions, i.e. reactions of object and regulator outputs, consists in a negative reaction of regulator outputs to external disturbances.

Force reactions for a common structure of a controlled object (a dynamics analysis). Output and control reaction forces are described by expressions:

$$\begin{aligned}\tilde{f}_x(s) &= L_o(s) \tilde{x}_o(s) = \tilde{P}_{or}(s) f_o(s) + B_o \tilde{w}_r(s) r_o(s), \\ \tilde{f}_u(s) &= B_o C_o^T \tilde{x}_r(s) = -\tilde{H}_{or}(s) f_o(s) + B_o \tilde{w}_r(s) r_o(s),\end{aligned}$$

the matrices \tilde{P}_{or} and \tilde{H}_{or} being called output and input force reaction operators respectively. Taking into account that controls are formed by a negative feedback, a control reaction force is expediently to represent as follows: $\tilde{f}_u(s) = -f_c(s)$, where the vector \tilde{f}_c denotes a value of a control force reaction. Then one obtains a force balance for a feedback automatic system:

$$\tilde{f}_x(s) + \tilde{f}_c(s) = f_o(s).$$

So a sum of input and output force reaction vectors are equal to a vector of external disturbances, the component vectors being in general greater than an initial vector of disturbance forces. It should be also noted that the obtained equality does not depend on commands.

In available automatic systems a rejection of disturbances is usually achieved by increasing of a regulator amplifying. It is resulted in decreasing of output position and force reactions. But according to a force balance, it reduces simultaneously to increasing of an input reaction force. Such a conclusion is actual, if an observation vector of an object is a so called full one, i.e. all its coordinates are not equal to zero.

Force reactions for a compound structure of a controlled object. The most objects that are used in industry consist an observable working part and m_o -dimensional executive part, for instance, a drive. In the case under consideration, inclusion matrices and a vector of external disturbances are represented in the form:

$$\begin{aligned}C_o^T(s) &= \left| C_{oc}^T(s) \quad 0_{od} \right|, \\ B_o^T &= \left| 0_{oc}^T \quad B_{od}^T \right|, \\ f_o^T(s) &= \left| f_{oc}^T(s) \quad 0_{od} \right|.\end{aligned}$$

In these expressions: C_{oc}^T is a rectangular $(n_o - m_o) \times m_o$ -dimensional observation matrix; B_{od} is a square m_o -dimensional control matrix, the both matrices having a full

rank; 0_{oc} and 0_{od} are zero rectangular matrices of a proper dimension. A number of regulated variables obeys a condition: $2m_o \leq n_o$.

According to the assumed conditions, initial and inverse structures of an object are partitioned:

$$L_o(s) = \begin{vmatrix} L_{oc}(s) & -L_{cd} \\ 0_{oc}^T & L_{od}(s) \end{vmatrix},$$

$$L_o^{-1}(s) = \begin{vmatrix} L_{oc}^{-1}(s) & \tilde{L}_{cd}(s) \\ 0_{oc}^T & L_{od}^{-1}(s) \end{vmatrix}.$$

In these expressions: L_{oc} and L_{od} are square matrices of a working and executive parts respectively; L_{cd} is a connection matrix of a connection part, and

$$\tilde{L}_{cd}(s) = L_{oc}^{-1}(s)L_{cd}L_{od}^{-1}(s)$$

is its reaction value.

Under the given conditions, output and input (feedback) reactions of an object are represented in the form:

$$\tilde{f}_x(s) = \begin{vmatrix} I_{oc} \\ -B_{od}\tilde{w}_r(s)C_{oc}^T L_{oc}^{-1}(s) \end{vmatrix} f_{oc}(s) + \begin{vmatrix} 0_{oc} \\ B_{od}\tilde{w}_r(s) \end{vmatrix} r_o(s),$$

$$\tilde{f}_c(s) = \begin{vmatrix} 0_{[oc]} \\ B_{od}\tilde{w}_r(s)C_{oc}^T L_{oc}^{-1}(s) \end{vmatrix} f_{oc}(s) + \begin{vmatrix} 0_{oc} \\ -B_{od}\tilde{w}_r(s) \end{vmatrix} r_o(s),$$

where I_{oc} is a unit $(n_o - m_o)$ -dimensional matrix and $0_{[oc]}$ is a square zero matrix of the same dimension.

From these formulas it follows that for any type of a regulator a force reaction of a working part is equal to an external disturbance. But at the same time an executive part of an object may be considerably more loaded, a sum of its input and output reactions being equal to zero. With a sufficiently great amplifying of a regulator, position reactions of a working part are relatively small. Roughly speaking, dissipation of a disturbance energy at this part is also small. For an executive part, both the position and the force reactions are sufficiently great that reduces to a properly great dissipation of an energy of the disturbance. It should be emphasized that this reasoning is a rather qualitative one. An investigation of energy processes in automatic systems exceeds the framework of this report.

Conclusions. A force investigation of a feedback control reduces to determination of position and force reactions arisen under action of external disturbances. It represents a new dimension of automatic systems analysis. Corresponding reaction operators and a force balance related to external disturbances and arisen input and output

reactions of a controlled object are derived. It gives a direct way to follow an influence of an object structure on the system behavior.

A force balance equality that represents a control adjusted the 3d Newton's law is obtained. It shows that these force reactions may be, to a considerable extent, more than initial external disturbances. Increasing of the system accuracy results in decreasing of deviations of regulated variables and correspondingly – in decreasing of output force reactions under external disturbances. But simultaneously, according to the system force balance, the input force reaction is to be increased.

If not all the outputs of an object are regulated, the same increasing effect takes place for its unobservable (a not directly regulated) part. It concerns so called compound object structures that contains an executive device, for instance, a drive.

Initial ideas of this investigation are represented in author's reports Boychuk (2011, 2013, 2020). Implementation of the proposed approach for limit working modes of an automatic system — feedforward control and singular feedback control — is given in Boychuk (2021).

References

- Boychuk, L. M. (2011). Physical essence of feedback in automatic control. In *Abstracts of reports Int. Conf. "Dynamical system modeling and stability investigation (DSMSI)"*, May 25–27 (p. 339). Kyiv: Taras Shevchenko National University of Kyiv.
- Boychuk L. M. (2013). A feedback control may be the same as a precise feedforward regulation. In *Abstracts of reports Int. Conf. "Dynamical system modeling and stability investigation (DSMSI)"*, May 28–31 (p. 330). Kyiv: Taras Shevchenko National University of Kyiv.
- Boychuk, L. M. (2020). The 3d Newton's law for feedback automatic systems. In *Proceedings of the 62th Int. Conf. "Science progress in the XXI Century"*, July 13 (pp. 75–78). Kharkiv: Science Publishing House.
- Boychuk, L. M. (2021). Physics of a feedback control. In *Proceedings of the European Control Conference ECC-2021* (presented).

Monogenic functions in Clifford algebras and their applications

T. Yu. Kolomiets, A. A. Pogorui

Zhytomyr State University, Zhytomyr, Ukraine

tamila.kolomiets@gmail.com

This presentation deals with some properties of a monogenic function defined on a vector space with values in the Clifford algebra. We provide a series expansion of a monogenic function in terms of the Fueter polynomials and consider its application to study solutions of second order partial differential equations.

Key words: monogenic function, Clifford algebra, partial differential equation.

Let \mathbb{E}^{d+1} be a $(d+1)$ -dimensional linear space over \mathbb{R} with a basis $e_i, i = 0, 1, \dots, d$, which is embedded in the Clifford algebra

$$Cl_{p,q}, p+q = d+1$$

with an identity $I = e_0$ and

$$e_k e_l + e_l e_k = 0, k \neq l, 1 \leq k, l \leq d.$$

We assume that $e_k^2 = I$ for $1 \leq k \leq p$ and $e_k^2 = -I$ for $p < k \leq d$.

Denote by

$$D = \sum_{i=0}^d e_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

the generalized Cauchy–Riemann operator (De Schepper & Sommen, 2014). It is easily verified that

$$DD^* = \sum_{i=0}^p \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \sum_{i=p+1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

We are interested in studying of the following equation

$$DD^* f = 0. \tag{1}$$

Definition. A function $f : \mathbb{E}^{d+1} \rightarrow Cl_{p,q}$ is called *left monogenic* if $Df = 0$, and f is called *right-monogenic* if $fD = 0$.

In the sequel, only left monogenic functions are considered. It is easily seen that any left monogenic function is a solution of the equation (1).

For $\mathbb{E}^{d+1} \ni x = \sum_{i=0}^n e_i x_i$ let us introduce the following polynomials:

$$p_k(x) = x_k - e_k x_0, \quad 1 \leq k \leq d.$$

Polynomials p_k will be called Fueter type polynomials since in the case of quaternions $\mathbb{H} = x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3$ polynomials

$$p_1(x) = x_1 - ix_0, p_2(x) = x_2 - jx_0, p_3(x) = x_3 - kx_0$$

were introduced by Fueter (1937) and are known today as the Fueter polynomials.

An expansion of hyperholomorphic quaternion functions in terms of Fueter polynomials has been reported in Alpay, Shapiro and Volok (2005) and the similar expansion of hyperholomorphic co-quaternion functions was considered in Pogorui and Rodriguez-Dagnino (2010). The relations between monogenic and hyperholomorphic functions was considered in Bory Reyes and Shapiro (2010).

Theorem. *Let $f \in C^\infty(E^{d+1})$, $n \in \mathbb{N}$, and the function f with its derivatives*

$$\frac{\partial^n}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_n}} f(x)$$

be a left monogenic. Then for any $n \in \mathbb{N}$ we have that

$$\begin{aligned} f(x) = & f(0) + \sum_{i=1}^d p_k(x) \frac{\partial}{\partial x_i} f(0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d p_i(x) p_j(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(0) + \dots \\ & + \frac{1}{n!} \sum_{i_1=1}^d \sum_{i_2=1}^d \dots \sum_{i_n=1}^d p_{i_1}(x) p_{i_2}(x) \dots p_{i_n}(x) \frac{\partial^n}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_n}} f(0) + R_n(x), \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} R(x) = & f(x) - f(0) - \sum_{i=1}^d p_k(x) \frac{\partial}{\partial x_i} f(0) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d p_i(x) p_j(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(0) \\ & - \dots - \frac{1}{n!} \sum_{i_1=1}^d \sum_{i_2=1}^d \dots \sum_{i_n=1}^d p_{i_1}(x) p_{i_2}(x) \dots p_{i_n}(x) \frac{\partial^n}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_n}} f(0). \end{aligned}$$

Consider function $f(tx)$ as a function of $t \in \mathbb{R}$. Taking into account that $f(x)$ is monogenic, we have

$$f(tx) = f(0) + \frac{d}{dt} f(0)t + \dots + \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} f(0) \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{d^n}{dt^n} f(0) \frac{t^n}{n!} + R_n(tx)$$

where

$$R_n(tx) = f(tx) - f(0) - \frac{d}{dt} f(0)t - \dots - \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} f(0) \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{d^n}{dt^n} f(0) \frac{t^n}{n!}.$$

If $R_n(tx) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ then it follows from Eq. (1) that

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{i_1=1}^d \sum_{i_2=1}^d \dots \sum_{i_n=1}^d p_{i_1}(x) p_{i_2}(x) \dots p_{i_n}(x) \frac{\partial^n}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_n}} f(0) \right) \quad (2)$$

In particular case where

$$\frac{\partial^n}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_n}} f(0) = a_n$$

for all $i_1, i_2, \dots, i_n \in \{1, 2, \dots, n\}, n \in \mathbb{N}$, we have

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{i_1=1}^d \sum_{i_2=1}^d \dots \sum_{i_n=1}^d p_{i_1}(x) p_{i_2}(x) \dots p_{i_n}(x) a_n \right) = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(p_{i_1}(x) + p_{i_2}(x) + \dots + p_{i_n}(x) \right)^n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=1}^d x_k - x_0 \sum_{k=1}^d e_k \right)^n a_n. \end{aligned}$$

Thus, in this case f can be expanded in series of the polynomials as follows

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=1}^d x_k - x_0 \sum_{k=1}^d e_k \right)^n a_n. \quad (3)$$

By using Eqs. (2) and (3) we can construct solutions of Eq. (1). For example, in the case where $p = 0$ (or $q = 0$) that is, the Clifford algebra is $Cl_{0,d}$ (or $Cl_{d,0}$) from Eq. (1) follows that a monogenic function f satisfies the d -dimensional Laplace equation

$$\Delta_d f = \sum_{i=0}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f = 0. \quad (4)$$

Consider the case $Cl_{0,3}$ with the embedded vector space \mathbb{E}^3 and its basis $\{I, e_1, e_2\}$, where I is the identity and $e_k e_l + e_l e_k = -2I \delta_{kl}, 1 \leq k, l \leq 2$. For this case Eq. (4) is as follows

$$\Delta_3 f = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f + \frac{\partial^2}{\partial z^2} f = 0.$$

Taking into account Eq. (3), it is easily verified that function

$$f(x, y, z) = \frac{(e_1 + e_2)x - y - z}{1 - (e_1 + e_2)x + y + z}$$

is monogenic in $\mathbb{E}^3 \setminus \{(e_1 + e_2)x + y + z = 1\}$.

Let us find the real and imaginary parts of f

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \frac{(e_1 + e_2)x - y - z}{1 - (e_1 + e_2)x + y + z} \cdot \frac{1 + (e_1 + e_2)x + y + z}{1 + (e_1 + e_2)x + y + z} = \\ &= \frac{y + z - 2x^2 - (y + z)^2}{2x^2 + (1 - y - z)^2} + \frac{x}{2x^2 + (1 - y - z)^2} (e_1 + e_2). \end{aligned}$$

Thus, we have the following solutions of Eq. (4)

$$u_1 = \frac{y + z - 2x^2 - (y + z)^2}{2x^2 + (1 - y - z)^2}, \quad u_2 = \frac{x}{2x^2 + (1 - y - z)^2}.$$

Now consider the case $Cl_{1,3}$ where the embedded vector space \mathbb{E}^4 has the basis $\{I, e_1, e_2, e_3\}$, where I is the identity and $e_k e_l + e_l e_k = 2I \delta_{kl}, 1 \leq k, l \leq 3$.

For this case Eq. (1) is of the following form

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f - \frac{\partial^2}{\partial x^2} f - \frac{\partial^2}{\partial y^2} f - \frac{\partial^2}{\partial z^2} f = 0. \quad (5)$$

Consider the function

$$f(\omega) = \frac{\omega}{1 - \omega},$$

where $\omega = (e_1 + e_2 + e_3)t - x - y - z$.

It follows from Eq. (2) that for $\omega \neq 1$ function $f(\omega)$ is monogenic.

The real and imaginary parts of f can be calculated as follows

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \frac{(e_1 + e_2 + e_3)t - x - y - z}{1 - (e_1 + e_2 + e_3)t + x + y + z} \cdot \frac{1 + (e_1 + e_2 + e_3)t + x + y + z}{1 + (e_1 + e_2 + e_3)t + x + y + z} = \\ &= \frac{3t^2 - (x + y + z) + x + y + z}{(1 - x - y - z)^2 - 3t^2} + \frac{t(e_1 + e_2 + e_3)}{(1 - x - y - z)^2 - 3t^2}. \end{aligned}$$

Hence, we obtain two solutions of Eq. (5)

$$\begin{aligned} u_1(t, x, y, z) &= \frac{3t^2 - (x + y + z) + x + y + z}{(1 - x - y - z)^2 - 3t^2}, \\ u_2(t, x, y, z) &= \frac{t}{(1 - x - y - z)^2 - 3t^2}. \end{aligned}$$

References

- Alpay, D., Shapiro, M., & Volok, D. (2005). Rational hyperholomorphic functions in \mathbb{R}^4 . *Journal of Functional Analysis*, 221(1), 122–149.
- Bory Reyes, J., & Shapiro, M. (2010). Clifford analysis versus its quaternionic counterparts. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 33(9), 1089–1101.
- De Schepper, H., & Sommen, F. (2015). Introductory Clifford analysis. In *Operator theory* (pp. 1339–1367). Basel: Springer.
- Fueter R. (1937). Die Theorie der regulären Funktionen einer quaternionen Variable. In *Comptes rendus du Congrès international des Mathématiciens, Oslo, 1936* (vol. 1, s. 75–91). Oslo: A. W. Broggers Boktrykkeri A/S.
- Pogoruy, A. A., & Rodríguez-Dagnino, R. M. (2010). Some algebraic and analytical properties of coquaternion algebra. *Advances in applied Clifford algebras*, 20(1), 79–84.

Differential equations in modeling the bond behaviour between reinforcement and concrete

V. Kovalchuk

State University of Infrastructure and Technologies, Kyiv, Ukraine

kovaltchukvv@ukr.net

This study focuses on the modeling of the process of interaction of reinforcement with concrete using adhesion forces and normal stresses. The boundary value problem of pulling out composite reinforcing bar from the concrete block is considered. Analytical dependences of distribution of normal forces operating in a reinforcing core on a site of interaction with concrete are offered. The obtained results can be used to analyze the stress-strain state of the reinforcement in order to optimize building structures.

Keywords: boundary-value problem, reinforcement bond to concrete, analytical approach, stress-strain state.

The introduction of new types of concrete and of composite reinforcement is becoming widespread in modern construction. Composite reinforcement has been considered a promising alternative to steel reinforcement, especially in concrete structures exposed to aggressive environments (Gribniak et al., 2018). This determines the urgency of developing a rational model of interaction of reinforcement with concrete.

One of the main methods of studying the mechanism of interaction of reinforcement with concrete is the study of the problem of pulling out the reinforcement rod from the concrete block. According to some researchers, such a problem is close to the real mechanism of work of a reinforcing core in reinforced concrete designs (Munoz, 2011). Based on the solution of this problem can be done assessments of the strength of the elements of reinforced concrete structures.

The analysis of researches of coupling of armature with concrete testifies to ambiguity of the approach to the decision of the specified problem and to lack of uniform theoretically substantiated technique of calculation (Romashko & Romashko, 2018). Today, most models and methods for assessing the reinforcement bond to concrete are quite complex and unsuitable for use in engineering calculations. In this paper, for the problem of pulling out the reinforcing bar from a concrete block, we consider one of the methods of analytical research using the usual second-order linear differential equation.

The interaction of reinforcement with concrete is provided by several main factors, the decisive of which is the mechanical interaction of reinforcement with concrete. The corresponding boundary value problem of pulling out the reinforcing rod from the concrete block allows different approaches to the solution. To analyze the stress-strain state of the rod under certain assumptions, consider a simplified calculation scheme: a reinforcing rod that interacts with a concrete block on a section of length l . Two identical oppositely directed forces F act on the rod and on the block. To determine the analytical dependence of the distribution of normal forces N_a acting in the reinforcing rod in the specified anchoring area, consider the design element

of the rod, the length dx of which is assumed to be sufficiently small. Under the accepted assumptions for a simplified calculation scheme of the rod, we obtain the differential equation (Kiyashko et al., 2020):

$$\frac{d^2 N_a}{dx^2} - k^2 N_a = c \cdot \frac{F}{E_b A_b}, \quad (1)$$

where c — the empirical proportionality factor,

E_b — modulus of elasticity of concrete,

A_b — the cross-sectional area of the concrete block.

The solution of differential equation (1) must satisfy the boundary conditions:

$$N_a(0) = 0, \quad N_a(l) = F. \quad (2)$$

The solution of the boundary-value problem (1)–(2) has the form:

$$N_a = F \left[(1 - m) \frac{\text{sh}(kx)}{\text{sh}(kl)} + m \left[1 + \text{sh}(kx) \text{cth}(kl) - \text{ch}(kx) \right] \right]. \quad (3)$$

Here we took the notation:

$$k = \sqrt{c \left(\frac{1}{E_a A_a} + \frac{1}{E_b A_b} \right)}, \quad m = \frac{E_a A_a}{E_a A_a + E_b A_b}, \quad A_a = \frac{\pi d^2}{4}, \quad A_b = b^2.$$

The length of the anchorages section of the rod is $l = 5d$.

Having obtained a mathematical model of the problem, we perform numerical modeling using the Maple system. At $c \geq 10^5$, the distribution of the normal force $N_a(x)$ is nonlinear.

Numerical simulations show that the maximum value of the forces N_a , and hence the maximum normal stresses in the reinforcing rod under the conditions of pulling out the rod are observed in the area exit of the reinforcement out of the concrete block (Fig. 1). The obtained dependences make it possible to predict the magnitude of the adhesion of reinforcement to concrete, as well as to analyze the stress-strain state of the reinforcement.

Figure 1, *b* shows that for a normal force N_a the difference between the dependence (3) and its main part (curve 2 is constructed at $m = 0$) is insignificant and is observed only for small values of x . Therefore, only the main part (3) can be used for further studies of the stress-strain state of the reinforcement.

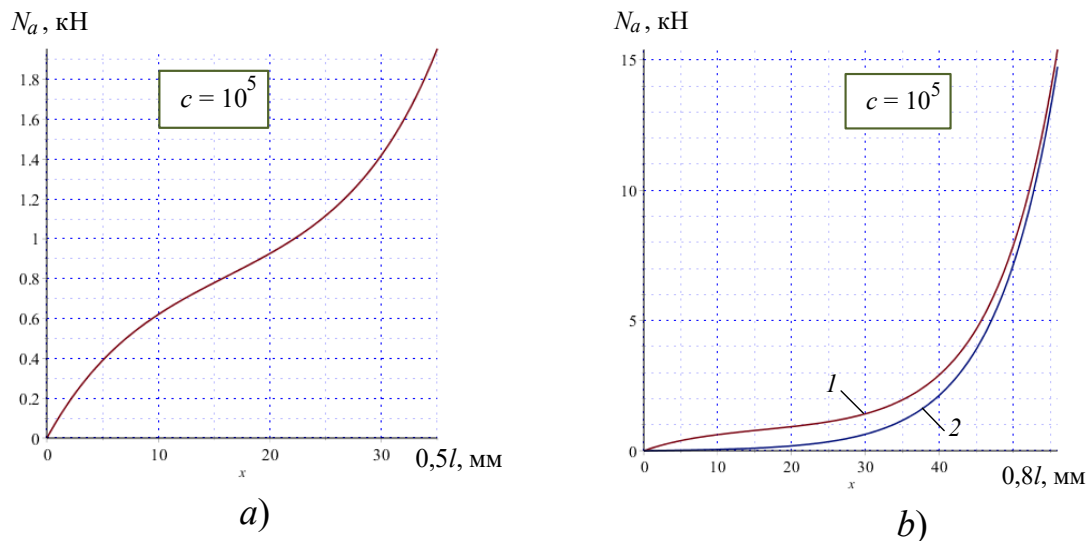


Fig. 1. The the distribution of normal forces acting in the reinforcing rod

It should be noted that a rather simplified calculation scheme of the studied problem was used. Therefore, the obtained analytical dependence (3) is valid for low loads, at which there is no destruction of reinforcement or concrete. However, it can be used as a basis for comparison with the results of other calculation methods.

References

- Gribniak, V., Jakubovskis, R., Rimkus, A., Ng, P. L., & Hui, D. (2018). Experimental and numerical analysis of strain gradient in tensile concrete prisms reinforced with multiple bars. *Construction and Building Materials*, 187, 572–583.
- Kiyashko, V., Kosarchuk, V., Chausov, M., Agarcov, O., & Kovalchuk, V. (2020). Stress-strain state of composite reinforcement under the conditions of interaction with high-strength concrete: analytical. *Ecological Sciences*, 2(29), 100–104.
- Muñoz, M. B. (2011). Study of bond behaviour between FRP reinforcement and concrete (*Doctoral dissertation, Universitat de Girona*). <http://hdl.handle.net/10803/7771>
- Romashko, O., & Romashko, V. (2018). Evaluation of bond between reinforcement and concrete. In *MATEC Web of Conferences* (Vol. 230, p. 02027). EDP Sciences.

Sample paths properties of φ -sub-Gaussian processes related to the random heat equation

L. M. Sakhno, O. M. Hopkalo

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

lms@univ.kiev.ua, olia_gopkalo@ukr.net

This talk presents results on sample paths properties of stochastic processes related to the heat equation with random initial conditions given by φ -sub-Gaussian stationary processes. The estimates are obtained for the distributions of suprema for such stochastic processes considered over bounded and unbounded domains.

Key words: φ -sub-Gaussian processes, heat equation, random initial condition, distribution of supremum.

In this talk we investigate sample paths properties of stochastic processes representing solutions to the heat equation with random initial conditions given by φ -sub-Gaussian stationary processes.

The general theory of φ -sub-Gaussian random variables and processes is presented in the classical monograph Buldygin and Kozachenko (2000). Recall that the random variable ζ is φ -sub-Gaussian, or belongs to the space $Sub_\varphi(\Omega)$, if $E\zeta = 0$, $E \exp\{\lambda\zeta\}$ exists for all $\lambda \in \mathbb{R}$ and there exists a constant $a > 0$ such that the following inequality holds for all $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$E \exp\{\lambda\zeta\} \leq \exp\{\varphi(\lambda a)\}.$$

Here φ is a particular Orlicz N -function. For a φ -sub-Gaussian random variable ξ the following important estimate for its ‘tail’ probability holds:

$$P\{|\zeta| > u\} \leq 2 \exp\left\{-\varphi^*\left(\frac{u}{\tau_\varphi(\zeta)}\right)\right\},$$

where the function φ^* defined by $\varphi^*(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}}(xy - \varphi(y))$ is called *the Young–Fenchel transform (or convex conjugate)* of the function φ .

The property of φ -sub-Gaussianity for stochastic processes allows to evaluate the behavior of their suprema, to derive estimates for various functionals of such processes, to treat their sample paths properties.

Consider the Cauchy problem for the heat equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, t > 0, x \in \mathbb{R}, \mu > 0, \quad (1)$$

subject to the random initial condition

$$u(0, x) = \eta(x), x \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

where $\eta(x), x \in \mathbb{R}$ is a stochastic process.

In the papers Kozachenko and Leonenko (2002, 2005) the case was studied where

η is a sub-Gaussian process. We suppose that η is a φ -sub-Gaussian process as described in the following assumption.

H.1. $\eta(x), x \in \mathbb{R}$, is a real, measurable, mean-square continuous stationary (in wide sense) stochastic process, which is strictly φ -sub-Gaussian with the determining constant c_η .

We have the representations for the covariance function and for η itself:

$$\begin{aligned} B(x) &= \int_{\mathbb{R}} \cos(\lambda x) dF(\lambda), x \in \mathbb{R}, \\ \eta(x) &= \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x} Z(d\lambda), x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (3)$$

where $F(\lambda)$ is a spectral measure, the stochastic integral (3) is considered as $L_2(\Omega)$ integral, Z is the orthogonal complex-valued random measure,

$$\mathbb{E} \left| Z(d\lambda) \right|^2 = F(d\lambda).$$

The process

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}} \exp\{i\lambda x - \mu t \lambda^2\} Z(d\lambda), t > 0, x \in \mathbb{R}, \quad (4)$$

can be interpreted as the mean-square or $L_2(\Omega)$ solution to the Cauchy problem (1)–(2), as justified in Kozachenko and Leonenko (2005).

We derive the estimate for the distribution of supremum of the field $u(t, x)$ considered in the domain $\{a \leq t \leq b, c \leq x \leq d\}$.

Theorem 1. *Let $u(t, x), a \leq t \leq b, c \leq x \leq d$, be a separable modification of the stochastic process given by (4) and assumption H.1 hold. Then the following bounds for the distribution of supremum hold:*

1) if for some $\beta \in (0, 1]$

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda^{4\beta} F(d\lambda) < \infty,$$

then for all $0 < \theta < 1$ and $u > 0$

$$P \left\{ \sup_{\substack{a \leq t \leq b; \\ c \leq x \leq d}} |u(t, x)| > u \right\} \leq 2 \exp \left\{ -\varphi^* \left(\frac{u(1-\theta)}{\tilde{\varepsilon}_0} \right) \right\} \tilde{A}_1(\theta \tilde{\varepsilon}_0),$$

where

$$\tilde{A}_1(\theta \tilde{\varepsilon}_0) = 2^{\frac{4}{\beta}-1} \left(\frac{(\varkappa c_\eta c_1^{1/\beta})^2 2^{2(2/\beta-1)}}{(\theta \tilde{\varepsilon}_0)^{2/\beta}} + 1 \right), \quad c_1(\beta) = \left(\int_{\mathbb{R}} (\mu^{2\beta} \lambda^{4\beta} + 4\lambda^{2\beta}) F(d\lambda) \right)^{1/2},$$

$$\tilde{\varepsilon}_0 = \sup_{\substack{a \leq t \leq b; \\ c \leq x \leq d}} \tau_\varphi(u(t, x)), \quad \varkappa = \max(b-a, d-c);$$

2) if for some $\beta > 1$

$$\int_{\mathbb{R}} (\ln(1 + |\lambda|))^{2\beta} F(d\lambda) < \infty,$$

then for all $0 < \theta < 1$ and $u > 0$

$$P \left\{ \sup_{\substack{a \leq t \leq b; \\ c \leq x \leq d}} |u(t, x)| > u \right\} \leq 2 \exp \left\{ -\varphi^* \left(\frac{u(1-\theta)}{\tilde{\varepsilon}_0} \right) \right\} \tilde{A}_2(\theta \tilde{\varepsilon}_0),$$

where

$$\tilde{A}_2(\theta \tilde{\varepsilon}_0) = \frac{\varkappa^2}{4} \exp \left\{ \frac{2\beta c_\eta c_2^{1/\beta}}{(\theta \tilde{\varepsilon}_0)^{1/\beta} (\beta - 1)} \right\},$$

$$c_2(\beta) = \left(\int_{\mathbb{R}} ([\ln(e^\beta + \mu \lambda^2)]^{2\beta} + 4[\ln(e^\beta + \frac{1}{2} |\lambda|)]^{2\beta}) F(d\lambda) \right)^{1/2}.$$

We also investigate the rate of growth of the process $u(t, x), (t, x) \in V$, defined on the unbounded domain of the following form: $V = [0, \infty) \times [-A, A]$. We derive the estimates for the distribution of suprema of

$$\frac{|u(t, x)|}{a(t)},$$

where $a(t), t \geq 0$, is a continuous strictly increasing function such that $a(t) > 0$ and $a(t) \rightarrow \infty$ as $t \rightarrow \infty$.

The talk is based on the results stated in the paper Sakhno and Hopkalo (2020).

References

- Buldygin, V. V., & Kozachenko, I. V. (2000). *Metric characterization of random variables and random processes* (Vol. 188). Providence, RI: American Mathematical Soc.
- Kozachenko, Y. V., & Leonenko, G. M. (2002). Large deviations type inequality for the supremum of the heat random field. *Methods of Functional Analysis and Topology*, 8(03), 46–49.
- Kozachenko, Y. V., & Leonenko, G. M. (2005). Extremal behavior of the heat random field. *Extremes*, 8(3), 191–205.
- Sakhno, L., & Hopkalo, O. (2020) Investigation of sample paths properties for some classes of φ -sub-Gaussian stochastic processes. *Modern Stochastics: Theory and Applications*. 20 p. Submitted.

Осесиметрична задача термопружності для двошарової плити з неідеальним тепловим контактом між шарами

Н. М. Антоненко¹, І. Г. Ткаченко²

¹Національний університет «Запорізька політехніка», Запоріжжя, Україна

²Запорізький національний університет, Запоріжжя, Україна

antonenkonina.ua@gmail.com, tig.phd81@gmail.com

Використовуючи ідею методу функцій податливості та інтегральне перетворення Ганкеля, отримано аналітичний розв'язок задачі про визначення напружень, переміщень та температури в точках шарів двошарової плити. Уважається, що на спільних межах плити виконуються умови ідеального механічного та неідеально-го теплових контактів.

Ключові слова: температура, напруження, переміщення, інтегральне перетворення Ганкеля, метод функцій податливості.

Розгляньмо двошарову плиту, що складається із двох пружних, однорідних та невагомих шарів, товщини яких h_1 та h_2 відповідно. На спільній межі шарів виконано умови ідеального механічного та неідеального теплового контактів (Неміш, 1999). На верхній та нижній межах плити задано напруження та температура. Необхідно знайти термо-напружено-деформівний стан (ТНДС) у всіх точках плити в рамках осесиметричної деформації.

Шари нумеруватимемо зверху вниз. У кожному шарі введемо локальну циліндричну систему координат так, як показано на рис. 1.

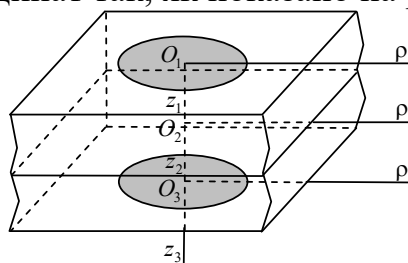


Рис. 1. Двошарова плита

Крайові умови задачі:

$$\sigma_{z1}(\rho, 0) = \sigma(\rho), \tau_{\rho z1}(\rho, 0) = \tau(\rho), T_1(\rho, 0) = f(\rho),$$

$$\sigma_{z2}(\rho, h_2) = \tilde{\sigma}(\rho), \tau_{\rho z2}(\rho, h_2) = \tilde{\tau}(\rho), T_2(\rho, h_2) = \tilde{f}(\rho).$$

де $\sigma(\rho)$, $\tilde{\sigma}(\rho)$, $\tau(\rho)$, $\tilde{\tau}(\rho)$, $f(\rho)$, $\tilde{f}(\rho)$ — відомі функції.

Умови на спільній межі шарів плити:

$$\sigma_{z2}(\rho, 0) = \sigma_{z1}(\rho, h_1), \tau_{\rho z2}(\rho, 0) = \tau_{\rho z1}(\rho, h_1), u_{z2}(\rho, 0) = u_{z1}(\rho, h_1),$$

$$u_{\rho 2}(\rho, 0) = u_{\rho 1}(\rho, h_1),$$

$$k_{T1} \frac{\partial T_1}{\partial z}(\rho, h_1) = \frac{1}{R} (T_2(\rho, 0) - T_1(\rho, h_1)), \quad k_{T2} \frac{\partial T_2}{\partial z}(\rho, 0) = k_{T1} \frac{\partial T_1}{\partial z}(\rho, h_1),$$

де R — коефіцієнт теплового опору, k_{T1} , k_{T2} — коефіцієнти теплопровідності шарів.

Трансформанти Ганкеля напружень, переміщень та температури можна представити у вигляді лінійної комбінації допоміжних функцій (Величко & Ткаченко, 2009)

$$\alpha_k = \alpha_k(p), \beta_k = \beta_k(p), \gamma_k = \gamma_k(p), \delta_k = \delta_k(p), \eta_k = \eta_k(p), \varepsilon_k = \varepsilon_k(p),$$

що пов'язані з трансформантами напружень, переміщень та температури в точках верхньої межі шару, що розглядається. Наприклад, вираз для обчислення трансформанти нормального напруження має вигляд:

$$\bar{\sigma}_{zk}(p, z) = (\operatorname{ch} pz - \omega_k pz \operatorname{sh} pz) \alpha_k + 2\omega_k (\operatorname{sh} pz - pz \operatorname{ch} pz) \beta_k - 2\omega_k pz \operatorname{sh} pz \gamma_k - \\ - \left[(1 - \omega_k) \operatorname{sh} pz + \omega_k pz \operatorname{ch} pz \right] \delta_k + E_k \omega_k \alpha_{Tk} \left[pz \operatorname{sh} pz \eta_k + (pz \operatorname{ch} pz - \operatorname{sh} pz) \varepsilon_k \right].$$

Увівши допоміжний третій шар, уважаючи, що на спільній межі другого та третього шарів виконуються умови ідеального теплового та механічного контактів, отримано формули для знаходження допоміжних функцій першого та другого шарів:

$$\varepsilon_k = -r_k \eta_k + F_k \eta_3, \quad \bar{\alpha}_2 = (M_{111} + M_{121} A_1) \bar{\alpha}_1 + (M_{121} B_1 + M_{131}) \eta_1, \\ \bar{\beta}_k = A_k \bar{\alpha}_k + B_k \bar{\alpha}_3 + D_k \eta_k + E_k \eta_3, \quad \eta_2 = (C_1 + L_1 p S_1 - r_1 (S_1 + L_1 p C_1)) \eta_1,$$

де

$$\bar{\alpha}_k = \begin{pmatrix} \alpha_k \\ \delta_k \end{pmatrix}, \quad \bar{\beta}_k = \begin{pmatrix} \beta_k \\ \gamma_k \end{pmatrix}, \quad \Delta_1 = \frac{k_{T1}}{k_{T2}}, \quad S_k = \operatorname{sh} p_k, \quad C_k = \operatorname{ch} p_k, \quad p_k = p h_k, \quad L_1 = R k_{T1},$$

$$r_2 = \operatorname{cth} p_2, \quad A_2 = -M_{122}^{-1} M_{112}, \quad B_2 = M_{122}^{-1}, \quad D_2 = -M_{122}^{-1} M_{132}, \quad E_2 = -M_{122}^{-1} M_{142},$$

$$F_2 = 1/S_2, \quad r_1 = \frac{\Delta_1 S_1 + r_2 (C_1 + L_1 p S_1)}{\Delta_1 C_1 + r_2 (S_1 + L_1 p C_1)}, \quad M_1 = (A_2 M_{121} - M_{221})^{-1},$$

$$A_1 = M_1 (M_{211} - A_2 M_{111}), \quad B_1 = -M_1 B_2,$$

$$D_1 = M_1 (M_{231} - A_2 M_{131} - D_2 (C_1 + L_1 p S_1 - r_1 (S_1 + L_1 p C_1))),$$

$$F_1 = \frac{F_2}{\Delta_1 C_1 + r_2 (S_1 + L_1 p C_1)},$$

$$E_1 = M_1 (M_{241} - A_2 M_{141} - D_2 (S_1 + L_1 p C_1) F_1 - E_2), \quad M_{ijk}$$

— відомі матриці, компоненти яких залежать лише від механічних, теплових та геометричних характеристик шарів, $i = 1, 2$, $j = 1, 4$, $k = 1, 2$.

Функції $\bar{\alpha}_1, \eta_1, \bar{\alpha}_3, \eta_3$ можна знайти із крайових умов задачі, а решту функцій знаходять за наведеними вище формулами. Після підстановки отриманих допоміжних функцій у вирази для трансформант і застосування до них оберненого перетворення Ганкеля відповідного порядку, отримуємо шукані величини, що визначають ТНДС плити.

Запропонований метод у подальшому планується розповсюдити на багатошарові плити, що містять істотну скінченну кількість шарів.

Список літератури

- Величко, І. Г., & Ткаченко, І. Г. (2009). Осесиметрична мішана задача термопружності для багатошарової основи. *Динамические системы*, 26, 3–12.
- Неміш, Б. Ю. (1999). Об аналитическом решении одного класса трехмерных задач термоупругости для неравномерно нагретых слоистых трансверсально-изотропных пластин. *Прикладна механіка*, 35(6), 95–103.

Про умови існування граничного циклу в моделі економічного циклу Гудвіна з необмеженою «стелею» Хікса

А. О. Антонова, Т. О. Погребецька

Національний авіаційний університет, Київ, Україна

antonova29j@gmail.com, tala-arnold@i.ua

Для моделі економічного циклу Гудвіна з кусково-лінійним акселератором і необмеженою «стелею» отримані аналітичні вирази для обмежень на параметри моделі, при яких часова поведінка доходу має вигляд граничного циклу.

Ключові слова: модель Гудвіна, граничний цикл, індуковані інвестиції.

Теорія економічного циклу Гудвіна, зумовленого нелінійним акселератором інвестицій, цікава для математичного моделювання економічних процесів. Вона була сформульована в Goodwin (1951) у вигляді двох моделей, які по різному враховують затримку в інвестиціях. У першому випадку вважають, що розподіл часу затримки неперервний з експоненціальним законом розподілу. Це приводить до нелінійного диференціального рівняння

$$\varepsilon\theta \frac{d^2y}{dt^2} + (\varepsilon + s\theta) \frac{dy}{dt} + sy = \varphi\left(\frac{dy}{dt}\right), \quad (1)$$

де $y(t)$ — національний дохід, t — час, ε — характерний часовий лаг динамічного мультиплікатора, θ — час затримки між прийняттям рішення про інвестиції та отриманням коштів, $0 \leq s \leq 1$, φ — нелінійні індуковані інвестиції,

$$\varphi'(x) > 0, \quad \varphi'(0) = r, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \varphi_c, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = \varphi_f,$$

r — коефіцієнт акселерації, φ_c та φ_f — стеля та підлога Хікса відповідно. Як показано в Goodwin (1951) якщо

$$r > \varepsilon + \theta s,$$

то існує граничний цикл, який називають бізнес-циклом Гудвіна.

Друга модель — це модель з фіксованим часом затримки. Вона має вигляд диференціального рівняння з запізненням нейтрального типу

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} + sy = \varphi\left(\frac{dy(t-\theta)}{dt}\right). \quad (2)$$

Виявляється, що модель (2) допускає розв'язки, не тільки зовні схожі на граничні цикли рівняння (1), а й розв'язки з періодом θ і розривною похідною (Strotz et al. (1953), Antonova et al. (2013)).

Як показано в роботі Sordi (2006), рівняння (1) допускає періодичні розв'язки навіть за відсутності стелі Хікса. Це можливо якщо

$$\varepsilon + \theta s < r < \left(\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\theta s} \right)^2.$$

Для випадку кусково-лінійного акселератора

$$\varphi \left(\frac{dy}{dt} \right) = \begin{cases} \varphi_f, & \frac{dy}{dt} \leq \frac{\varphi_f}{r}, \\ rj, & \frac{dy}{dt} > \frac{\varphi_f}{r} \end{cases}$$

в роботі Sordi (2006) отримані цікаві залежності $y(t)$.

Навпаки, згідно з результатами Antonova et al. (2013, October), рівняння з фіксованим запізненням (2) і кусково-лінійним акселератором має лише розв'язки, які експоненціально наростають з часом і не має розв'язків вигляду граничного циклу.

У цій роботі ми досліджуємо як впливає ширина розподілу часу затримки на умови існування граничного циклу. Це можна зробити, якщо застосувати до моделі Гудвіна підхід Matsumoto (2009). Якщо припустити, що розподіл часу затримки є неперервним і має гамма-розподіл з параметрами θ і k ,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{kx}{\theta}}}{\theta(k-1)!} \left(\frac{kx}{\theta} \right)^k, & x \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

де k — цілі додатні числа, то отримаємо версію моделі Гудвіна у вигляді наступного диференціального рівняння

$$\left(\varepsilon \frac{d}{dt} + s \right) \left(1 + \frac{\theta}{k} \frac{d}{dt} \right)^{k+1} y(t) = \varphi \left(\frac{dy}{dt} \right), \quad k = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Порядок диференціального рівняння визначається параметром k : чим гостріший розподіл $f(x)$, тим вищий порядок.

У випадку кусково-лінійного акселератора рівняння (3) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \left(\varepsilon \frac{d}{dt} + s \right) \left(1 + \frac{\theta}{k} \frac{d}{dt} \right)^{k+1} y_1(t) &= \varphi_f, \quad r \frac{dy_1(t)}{dt} \leq \varphi_f, \\ \left(\varepsilon \frac{d}{dt} + s \right) \left(1 + \frac{\theta}{k} \frac{d}{dt} \right)^{k+1} y_2(t) &= r \frac{dy_2(t)}{dt}, \quad r \frac{dy_2(t)}{dt} > \varphi_f. \end{aligned}$$

Оскільки ці диференціальні рівняння лінійні, то їх розв'язки можна шукати у вигляді лінійних комбінацій

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + C_{k+2} e^{\lambda_{k+2} t},$$

де C_1, C_2, \dots, C_{k+2} деякі сталі, а $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k+2}$ — характеристичні числа. Очевидно, що характер розв'язків $y_1(t), y_2(t)$ визначатиметься відповідними характеристичними рівняннями. Для $y_1(t)$ це рівняння має вигляд

$$(\varepsilon\lambda + s) \left(1 + \frac{\theta\lambda}{k}\right)^{k+1} = 0,$$

і воно має лише від'ємні корені: $\lambda_1 = -\frac{s}{\varepsilon}$ та кратний корінь $\lambda = -\frac{k}{\theta}$. Тому можливість існування граничного циклу може забезпечити тільки акселератор r , який визначає динаміку $y_2(t)$. В цьому випадку характеристичне рівняння має вигляд

$$(\varepsilon\lambda + s) \left(1 + \frac{\theta\lambda}{k}\right)^{k+1} = r. \quad (4)$$

Будемо вважати r параметром і проаналізуємо залежності $\lambda(r)$. Будемо розглядати невеликі значення k , а саме $k = 1$, для якого умови існування граничного циклу для кусково-лінійного акселератора можна визначити аналітично. Для спрощення аналізу зручно зробити заміни

$$p = \frac{r}{\varepsilon} > 0, \quad q = \frac{s\theta}{\varepsilon} > 0, \quad z = \lambda\theta.$$

Тоді рівняння (4) запишеться наступним чином

$$(z + q) \left(1 + \frac{z}{k}\right)^{k+1} - pz = 0.$$

Якщо $k = 1$, отримаємо кубічне рівняння

$$z^3 + (q + 2)z^2 + (2q - p + 1)z + q = 0. \quad (5)$$

За допомогою критерію Рауса — Гурвіца знаходимо границю нестійкості ($\text{Re } z(p) = 0$)

$$p \geq p_{down}(q) = \frac{2(1+q)^2}{2+q}.$$

Якщо $p = p_{down}(q)$ рівняння (5) має один від'ємний корінь $z_1 = -(2+q)$ та один уявний $z_{2,3} = \pm i\sqrt{\frac{q}{2+q}}$. При зростанні p уявний корінь $z_{2,3}$ переходить у два комплексно-спряжені і тоді існує граничний цикл для рівняння (3).

При значному збільшенні p в рівнянні (5) виникає дійсний додатний корінь z і тоді граничний цикл для рівняння (3) стає неможливим. Верхню межу

для p неважко визначити, знайшовши дискримінант кубічного рівняння (5). Скориставшись Корн та Корн (1974), матимемо такий вираз для дискримінанта

$$D_3 = -p(-4 + 8p - 4p^2 + 12q + 20pq - 12q^2 - pq^2 + 4q^3).$$

При значеннях p , які відповідають нулям дискримінанта $D_3(p) = 0$, усі корені кубічного рівняння є дійсними числами, причому принаймні два з них є однаковими. Розв'язуючи рівняння $D_3(p) = 0$, неважко показати, що верхню межу для параметра p визначає формула

$$p \leq p_{up}(q) = \frac{\left(8 + 20q - q^2 + \sqrt{q(8 + q)^3}\right)}{8}.$$

Таким чином, якщо розподіл часу затримки має вигляд

$$f(\tau) = \begin{cases} \tau\theta^{-2}e^{-\frac{\tau}{\theta}}, & \tau \geq 0 \\ 0, & \tau < 0, \end{cases}$$

то граничний цикл у моделі економічного циклу Гудвіна з необмеженою «стелею» існує, якщо виконано такі обмеження

$$p_{up}\left(\frac{s\theta}{\varepsilon}\right) > \frac{r}{\varepsilon} > p_{down}\left(\frac{s\theta}{\varepsilon}\right).$$

Ці умови суттєво відрізняються від аналогічних умов, отриманих у роботі Sordi (2006) для випадку, коли

$$f(\tau) = \begin{cases} \theta^{-1}e^{-\frac{\tau}{\theta}}, & \tau \geq 0 \\ 0, & \tau < 0. \end{cases}$$

Список літератури

- Antonova A., Reznik S., & Todorov M. (2013a). Relaxation oscillations properties in Goodwin's business cycle model. *Int. J. Computational Economics and Econometrics*, 3(3), 146–163.
- Antonova, A. O., Reznik, S. N., & Todorov, M. D. (2013, October). On periodic solutions of Goodwin's business cycle model with only floor in induced investment. In *AIP Conference Proceedings* (Vol. 1561, No. 1, pp. 248–255). American Institute of Physics.
- Goodwin, R. M. (1951). The nonlinear accelerator and the persistence of business cycles. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 19(1)1–17.
- Matsumoto, A. (2009). Note on Goodwin's 1951 nonlinear accelerator model with an investment delay. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 33(4), 832–842.
- Sordi, S. (2006). 'Floors' and/or 'Ceilings' and the Persistence of Business Cycles. In *Business Cycle Dynamics* (pp. 277–298). Berlin: Springer.
- Strotz, R. H., McAnulty, J. C., & Naines, J. B. (1953). Goodwin's nonlinear theory of the business cycle: an electro-analog solution. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 21(3), 390–411.
- Корн, Г. А., & Корн, Т. М. (1974). *Справочник по математике для научных работников и инженеров*. Москва: Наука.

Поліноміальні методи аналізу фрактальних моделей дифузійних процесів

В. І. Біленко, К. В. Боженок

*Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова,
Київ, Україна*

katboz2014@gmail.com

Розглянуто питання конструювання, оптимізації та теоретичного обґрунтування обчислювальних алгоритмів апроксимації поліномами розв'язків диференціальних рівнянь з дробовими похідними.

Ключові слова: кусково-поліноміальна апроксимація, ненасичуваність, найкраще наближення, алгебраїчно-нелінійні рівняння, оптимальні алгоритми, оптимізація обчислень, похідна Рімана — Ліувілля.

Вступ. Доповідь присвячено розв'язанню проблеми оптимізації методів та алгоритмів моделювання, аналізу та прогнозу дифузійних процесів дробового порядку. Задачі дробово-диференціальної динаміки, що розвивається в рамках класичної постановки задач на основі загальноприйнятих методів та підходів теорії суцільного середовища і є одним з актуальних напрямків геоматематики, геоінформатики, геомеханіки, розглядаються в роботах проф. В. М. Булавацького (Булавацький, 2018). Теоретичні результати (теореми існування та єдиності розглядуваного класу задач в класах Гельдера) одержані в роботах проф. А. Н. Кочубея (Кочубей & Лучко, 2019).

Метою роботи є побудова та теоретичне обґрунтування обчислювальних алгоритмів кусково-поліноміальної апроксимації розв'язків диференціальних рівнянь із дробовими похідними на основі методики, розробленої В. К. Дзядиком при доведенні прямих та обернених теорем конструктивної теорії наближення функцій для класів Гельдера (Дзядик, 1956). Такі алгоритми мають важливі властивості ненасичуваності за точністю та оптимальності в сенсі найкращого поліноміального наближення у квадратичній, рівномірній та деяких спеціальних метриках.

Постановка задачі. Розглянемо операторне рівняння виду

$$(D_t^{(\alpha)}u)(x,t) = Au(x,t) + f(x,t,u) \quad (1)$$

в області $\Pi = [0, H] \times [0, \Theta]$, $H, \Theta > 0$, з початковою умовою $u(x,0) = u_0(x)$ і крайовими умовами $u(0,t) = \mu_1(t)$, $u(H,t) = \mu_2(t)$.

Тут $D_t^{(\alpha)}$ є оператором дробового диференціювання Рімана — Ліувілля порядку $0 < \alpha < 1$ (Вірченко, 2007) і визначається формулою

$$(D_t^{(\alpha)}u)(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{u(x,\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau. \quad (2)$$

$$Au = \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + b(x, t, u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3)$$

— алгебраїчно-нелінійний диференціальний оператор, що діє в банаховому просторі X векторнозначних функцій u ; $a, b, f(x, t, u)$ є кусково-поліноміальними функціями відповідного числа змінних.

Найпростішим прикладом рівняння, що представляється у вигляді (1)–(3) — рівняння

$$(D_t^{(\alpha)}u)(x, t) = a \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad a > 0,$$

що описує дифузію в пористому (фрактальному) середовищі.

Алгоритм. Запропонований алгоритм, який узагальнює алгоритми, побудовані в попередніх роботах авторів (Біленко та ін. (2016), Біленко та ін. (2019)) на основі застосування апроксимаційного методу В. К. Дзядика (a -методу) (Дзядик, 1988) полягає в реалізації такої схеми:

1. Використовуючи формули дробового інтегрування задачу (1)–(3) запишемо в еквівалентній інтегро-функціональній формі

$$Lu = F(x, t, u), \quad (4)$$

де Lu — алгебраїчно-нелінійний інтегральний оператор, $F(x, t, u)$ — функція трьох змінних, що знаходиться в результаті дробового інтегрування рівняння (1)–(3).

2. Наближений розв'язок інтегро-функціонального рівняння (4) шукаємо у вигляді поліномів

$$u_{mm}(x, t) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n c_{ij} x^i t^j. \quad (5)$$

3. Конструюємо обчислювальний процес для знаходження в (5) невідомих коефіцієнтів c_{ij} , $i = 0, m$, $j = 0, n$.

Теоретичне обґрунтування алгоритму. Оцінку похибки алгоритму дослідимо для випадку, коли розв'язок задачі (1)–(3) належить класу Гельдера.

Означення. При кожному фіксованому $0 < \alpha < 1$ класом Гельдера порядку α називається множина всіх неперервних на $[a, b]$ функцій φ , модуль неперервності кожної з яких задовольняє умову

$$\omega(\varphi; c) = \sup_{\substack{|x_2 - x_1| \leq c \\ x_1, x_2 \in [a, b]}} |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq Mc^\alpha,$$

де M — стала, що не залежить від c . Цей клас позначається H^α .

Позначимо через $H_\mu^{\alpha+\lambda} [0, \Theta]$ клас функцій $\varphi(t)$, для яких функція $t^\mu \varphi(t)$ задовольняє на $[0, \Theta]$ умову Гельдера з показником $\alpha + \lambda$. На основі результатів В. К. Дзядика і А. Н. Кочубея справедливі такі твердження:

Теорема 1. Нехай $u(x, t)$ — класичний розв'язок задачі (1)–(3). Припустимо, що при кожному $x \in [0, H]$ $u(x, \cdot) \in H_{\mu}^{\alpha+\lambda}[0, \Theta]$, де $0 < \lambda < 1 - \alpha$, $0 \leq \mu < \lambda + 1$. Тоді існує єдиний розв'язок задачі (1)–(3).

Оцінку похибки наближеного розв'язку дослідимо для випадку, коли виконуються умови I–III теореми 1 (Канторович, Акилов, 1984).

Теорема 2. В умовах теореми 1 (Канторович & Акилов, 1984) існують скінченні числа $h \in (0, H]$, $\theta \in (0, \Theta]$ і $B = B(h, \theta) = \text{const}$ такі, що для $\forall \tilde{h} \in (0, h]$, $\tilde{\theta} \in (0, \theta]$ і довільних натуральних m і n таких, що

$$\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} < \frac{B}{h\theta},$$

у прямокутнику $\pi = [0, h] \times [0, \theta]$ існує наближений розв'язок $u_{mn}(x, t)$ і мають місце оцінки

$$|u(x, t) - u_{mn}(x, t)| \leq A\sqrt{m + n}\rho_n^{\alpha}(t), \quad A = A(h, \theta) = \text{const} > 0.$$

Висновки. На основі методики та результатів В. К. Дзядыка сконструйовано та теоретично обґрунтовано високоточний алгоритм без насичення точності для оптимального аналізу у фрактальних середовищах. Сформульовано теореми про існування розв'язків та оцінки похибок відповідних задач на основі запропонованого алгоритму у рівномірній та квадратичній метриках.

Список літератури

- Булавацкий, В. М. (2018). Математические модели и задачи дробно-дифференциальной динамики некоторых релаксационных фильтрационных процессов. *Кибернетика и системный анализ*, 54(5), 51–60.
- Kochubei, A., & Luchko, Yu. (2019). *Handbook of fractional calculus with applications (Vol. 2): Fractional differential equations*. Berlin: Walter de Gruyter GmbH.
- Дзядык, В. К. (1956). О конструктивной характеристике функций, удовлетворяющих условию Lip^{α} ($0 < \alpha < 1$) на конечном отрезке вещественной оси. *Изв. АН СССР, сер. матем.*, 20(2), 623–642.
- Вірченко, Н. О., & Рибак, В. Я. (2007). *Основи дробового інтегро-диференціювання*. Київ: Задруга.
- Біленко, В. І., Божонок, К. В., Дзядик, С. Ю., & Стеля, О. Б. (2016). Наближення поліномами розв'язків алгебраїчно-нелінійних рівнянь математичної фізики. *Збірник праць Інституту математики НАН України*, 13(3), 7–27.
- Bilenko, V. I., Bozhonok, K. V., & Dzyadyk, S. Y. (2019). Piecewise-polynomial approximations for the solutions of impulsive differential equations. *Ukrainian Mathematical Journal*, 71(2), 190–201.
- Дзядык, В. К. (1988). *Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений*. Киев: Наукова думка.
- Канторович, Л. В., & Акилов, Г. П. (1984). *Функциональный анализ* (3-е изд.). Москва: Наука.

Распределение нагрузки в резьбовом соединении имплантата с костью

В. Л. Богданов¹, А. Я. Григоренко¹, Г. В. Сороченко², Н. Н. Тормахов¹

¹Институт механики им. С. П. Тимошенко НАНУ, Киев, Украина

²Национальный медицинский университет им. А. А. Богомольца, Киев, Украина

metod@inmech.kiev.ua

Исследовано распределение нагрузки по виткам резьбового соединения имплантата с костью. Резьбовое соединение моделировали стержневой конструкцией, где функциональное осевое усилие нажатия от стержня-имплантата передавалось к растягиваемому стержню-кости через витки резьбы. Витки резьбы рассматривали как консольные балки, прикрепленные к стержням. Получено дифференциальное уравнение для интенсивности распределения осевого усилия, решение которого было получено в замкнутой форме.

Ключевые слова: резьбовое соединение, кость, имплантат, стержень.

Успех лечения с использованием имплантатов зависит от величины напряжений на границе имплантата с костью, что вызывает необходимость их определения в окрестности имплантата (Grigorenko et al., 2018, 2020).

Распределение напряжений в резьбовом соединении было исследовано в работе Биргера (1959), где было рассмотрено резьбовое соединение, в котором винт находился в растянутом состоянии, а гайка — сжатом. В отличие от этого, в нашей работе рассмотрена схема нагружения, в которой имплантат растянут, а костная ткань сжата.

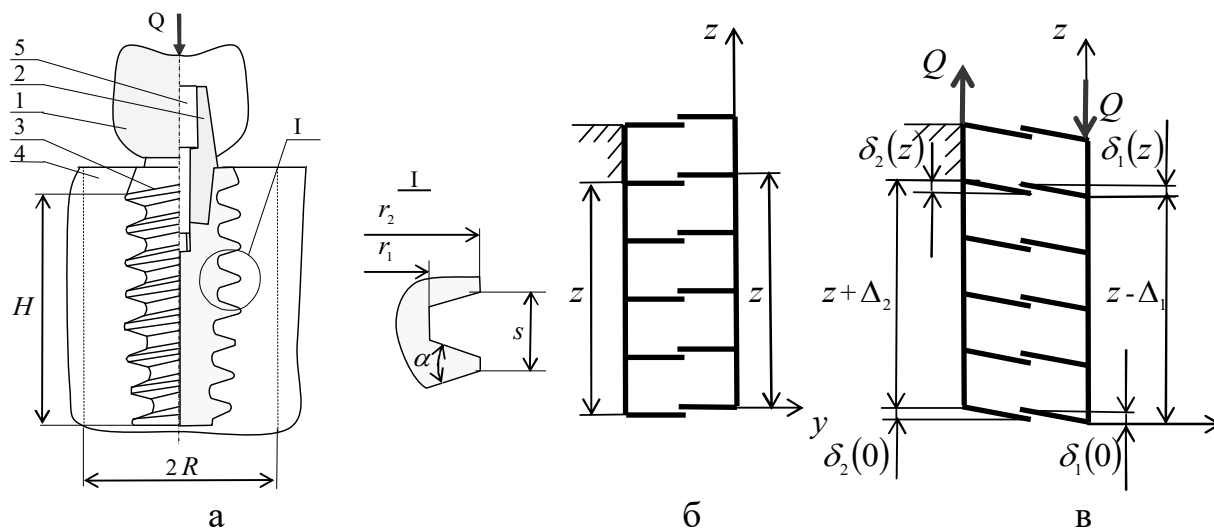


Рис. 1

На рис. 1а изображена ортопедическая конструкция, состоящая из искусственной коронки зуба 1, абатмента 2, имплантата 3, установленного в костной ткани 4, и винта 5, который удерживает абатмент на имплантате. Вертикальная нагрузка Q со стороны пищевого комка воздействует на коронку 1 и передается через абатмент 2 и имплантат 3 на костную ткань 4. Расчетная схема резьбового соединения имплантат — кость до и после приложения нагрузки Q представ-

лена на рис. 1б и 2в. Нагрузка вызывает сжатие имплантата и растяжение объема костной ткани вокруг него. Усилие в имплантате $Q(z)$ изменяется от 0 до Q . Предположим, что усилие $Q(z)$ будет вызывать нормальные напряжения $\sigma_1(z)$, которые равномерно распределены по поперечному сечению имплантата:

$$\sigma_1(z) = \frac{Q(z)}{F_1},$$

где $F_1 = \pi r_1^2$ — площадь поперечного сечения имплантата, r_1 — внутренний радиус резьбы имплантата. Выделим вокруг имплантата область костной ткани в виде полого цилиндра, с наружным R и внутренним r_2 радиусами. Допустим, что в поперечном сечении этой цилиндрической области, действуют равномерно распределенные по поперечному сечению нормальные напряжения $\sigma_2(z)$:

$$\sigma_2(z) = \frac{Q(z)}{F_2},$$

где $F_2 = \pi(R^2 - r_2^2)$ — площадь поперечного сечения области кости.

Под действием нагрузки Q на участке от 0 до z имплантат укорачивается на Δ_1 , а костная ткань удлиняется на Δ_2 :

$$\Delta_1 = \int_0^z \frac{\sigma_1(z)}{E_1} dz = \int_0^z \frac{Q(z)}{E_1 F_1} dz, \quad \Delta_2 = \int_0^z \frac{\sigma_2(z)}{E_2} dz = \int_0^z \frac{Q(z)}{E_2 F_2} dz.$$

Точки витков резьбы, расположенные на расстоянии z от начала координат, переместятся на расстояния $\delta_1(z)$ и $\delta_2(z)$. Предположим, что контактное давление $p(z)$ равномерно распределено по поверхности витка резьбы и зависит только от z . Выразим перемещения $\delta_1(z)$ и $\delta_2(z)$ через контактное давление $p(z)$, шаг резьбы s , модули упругости E_1 , E_2 , а также безразмерные коэффициенты λ_1 , λ_2 для имплантата и кости следующими формулами (Биргер, 1959):

$$\delta_1(z) = \frac{p(z)s\lambda_1}{E_1}, \quad \delta_2(z) = \frac{p(z)s\lambda_2}{E_2} \quad (1)$$

Коэффициенты λ_1 , λ_2 зависят от геометрических параметров, и определены эмпирическим соотношением (Биргер, 1959):

$$\lambda_1 = \omega + \frac{r_1 t}{s^2} (1 - \mu_1) \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}, \quad \lambda_2 = \omega + \frac{r_2 t}{s^2} \left(\frac{R^2 + r_2^2}{R^2 - r_2^2} + \mu_2 \right) \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}, \quad (2)$$

где $\omega = 0,84$ — коэффициент, характеризующий изгиб и сдвиг витка; $t = r_2 - r_1$ — высота профиля резьбы, α — угол резьбы, μ_1 , μ_2 — коэффициенты Пуассона.

Исходя из рис. 1б и 1в можно записать следующее уравнение совместности перемещений стержней винта и кости с перемещениями витков резьбы:

$$z - \Delta_1 - \delta_1(0) + \delta_1(z) = z + \Delta_2 + \delta_2(0) - \delta_2(z).$$

Преобразуя последнее равенство с учетом (1), (2) получим:

$$\left(\frac{1}{E_1 F_1} + \frac{1}{E_2 F_2} \right) \int_0^z Q(z) dz = [p(z) - p(0)] \left(\frac{\lambda_1}{E_1} + \frac{\lambda_2}{E_2} \right) s \quad (3)$$

Введем интенсивность распределения осевого усилия по длине резьбового соединения $q(z)$:

$$q(z) = \frac{dQ}{dz},$$

которая связана с давлением на поверхность витка $p(z)$ соотношением (Биргер, 1959):

$$p(z) = q(z) \frac{f}{s},$$

где $f = \pi(r_2^2 - r_1^2)$ — проекция площади витка резьбы на плоскость перпендикулярную оси имплантата. Подставив $q(z)$ вместо $p(z)$ в (1) получим:

$$\left(\frac{1}{E_1 F_1} + \frac{1}{E_2 F_2} \right) \int_0^z Q(z) dz = [q(z) - q(0)] \left(\frac{\lambda_1}{E_1} + \frac{\lambda_2}{E_2} \right) \frac{s^2}{f}. \quad (4)$$

Обозначим

$$\beta = \left(\frac{1}{E_1 F_1} + \frac{1}{E_2 F_2} \right), \quad \gamma = \left(\frac{\lambda_1}{E_1} + \frac{\lambda_2}{E_2} \right) \frac{s^2}{f}.$$

Тогда (4) будет иметь вид:

$$\beta \int_0^z Q(z) dz = [q(z) - q(0)] \gamma \quad (5)$$

Продифференцировав (5) по z получим:

$$\beta Q(z) = q'(z) \gamma \quad (6)$$

Повторяя операцию дифференцирования (6) по z и обозначая $m^2 = \beta / \gamma$ найдем:

$$q''(z) - m^2 q(z) = 0. \quad (7)$$

Общий интеграл уравнения (7) может быть записан в виде:

$$q(z) = A \operatorname{sh}(mz) + B \operatorname{ch}(mz) \quad (8)$$

Уравнение (8) должно удовлетворять следующим граничным условиям: при $z = 0$,

$$Q(0) = 0, \quad q'(z) = m^2 q(z) = 0,$$

при $z = H$, $Q(H) = Q$, $q'(z) = m^2Q$

Из (8) следует:

$$q'(z) = Am \operatorname{sh}(mz) + Bm \operatorname{ch}(mz).$$

Используя граничные условия получим:

$$A = 0, B = \frac{Qm}{\operatorname{sh}(mH)}$$

Подставляя значения постоянных A , B находим выражения для интенсивности распределения $q(z)$ и осевого усилия $Q(z)$:

$$q(z) = -\frac{Qm \operatorname{ch}(mz)}{\operatorname{sh}(mH)}, Q(z) = \frac{Q \operatorname{sh}(mz)}{\operatorname{sh}(mH)} \quad (9)$$

Можно видеть, что распределение осевой нагрузки зависит от длины, шага резьбы имплантата, а также от модуля упругости костной ткани и имплантата. Из (9) следует, что в наиболее нагруженном состоянии находится ближайший к точке приложения нагрузки виток резьбы.

Список литературы

- Grigorenko, A. Ya., Los', V. V., Malanchuk, V. A. & Tormakhov, N. N. (2020). Stress state of a threaded joint in a dental implant–bone system. *International Applied Mechanics*, 56(1), 33–39.
- Grigorenko, A. Ya., Pliska, E. N., Sorochenko, G. V. & Tormakhov, N. N. (2018). Application of methods of numerical analysis for studying mechanical processes in biomechanics. *International Applied Mechanics*, 54(3), 366–372.
- Биргер, И. А. (1959). *Расчет резьбовых соединений*. Москва: Оборонгиз.

Асимптотика згорток Лебега — Стілтєса функцій лінійного росту

В. А. Богун, О. В. Маринич

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
vladyslavbogun@gmail.com, marynych@unicyb.kiev.ua

У даній доповіді розглядається асимптотична поведінка згортки Лебега — Стілтєса функції лінійного росту, що визначені на додатній півосі, у випадку, коли кількість елементів згортки зростає та прямує до нескінченності. Отримані аналітичні результати знаходять застосування в аналізі асимптотичної поведінки гіллястих випадкових блукань, випадкових дерев, гіллястих та інших процесів. У доповіді буде наведено приклад використання отриманих тверджень.

Ключові слова: згортка функцій, інтеграл Лебега — Стілтєса, функція відновлення, гіллястий процес, гіллясте випадкове блукання, випадкове дерево.

Згортку Лебега — Стілтєса двох функцій f та g локально-обмеженої варіації будемо позначати наступним чином

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t - y)dg(y), t \in \mathbb{R}.$$

Згортку функції f з собою j раз позначимо як $f^{*(j)}$.

Надалі розглядаються лише неперервні справа неспадні функції, що на від'ємній півосі приймають значення 0. У такому випадку для згортки Лебега — Стілтєса інтегрування відбувається на інтервалі $[0; t]$.

Функцію f будемо називати *функцією лінійного росту*, якщо $f(t) \sim at$ при $t \rightarrow \infty$ для деякого $a > 0$. Позначення $f(t) \sim g(t)$ при $t \rightarrow \infty$ означає, що $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) / g(t) = 1$. Тоді для фіксованого $j \in \mathbb{N}$ легко перевірити, що

$$f^{*(j)}(t) \sim \frac{a^j t^j}{j!}, t \rightarrow \infty.$$

Наступні два твердження узагальнюють цей асимптотичний результат на випадок, коли j не є константою, а саме, коли $j = j(t)$ прямує до нескінченності при $t \rightarrow \infty$.

Твердження 1. *Нехай для функції f , що задовольняє наведеним вище умовам, виконується*

$$f(t) = at + O(t^\alpha), t \rightarrow \infty$$

для деякого $a > 0$ та $\alpha \in [0, 1)$. Тоді для будь-якої цілочисельної функції $j = j(t)$ такої, що $j(t) = o(t^{(1-\alpha)/2})$ при $t \rightarrow \infty$, виконується

$$f^{*(j)}(t) \sim \frac{a^j t^j}{j!}, t \rightarrow \infty.$$

У наведеному далі твердженні розглядається випадок, коли $j(t)$ може зростати швидше, ніж $t^{1/2}$, проте в цьому випадку необхідними є додаткові припущення.

Твердження 2. Припустимо, що f задовольняє наведеним вище умовам, а функція ε , яка визначена рівністю

$$\varepsilon(t) = f(t) - at, \quad t \geq 0$$

для деякого $a > 0$, задовольняє

$$\int_{[0, \infty)} y |d\varepsilon(y)| < \infty,$$

де $|d\varepsilon(y)|$ позначає повну варіацію функції ε на dy .

Тоді для будь-якої цілочисельної функції $j = j(t)$ такої, що $j(t) = o(t^{2/3})$ при $t \rightarrow \infty$, виконується

$$f^{*(j)} \sim \frac{a^j t^j}{j!} \exp\left(\frac{\gamma j^2}{at}\right), \quad t \rightarrow \infty,$$

$$\text{де } \gamma = \int_{[0, \infty)} d\varepsilon(y) = \lim_{t \rightarrow \infty} (f(t) - at).$$

Доведення обох тверджень можна знайти у статті Bogun et al. (2020).

Наведені вище згортки виникають при дослідженні асимптотичних властивостей гіллястих випадкових блукань, випадкових дерев та в інших випадках. Приклади цього можна знайти у статті] Iksanov and Kabluchko (2018). Продемонструємо як наведені вище твердження можна застосувати для отримання асимптотики згорток функцій відновлення стандартних випадкових блукань.

Нехай $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ — послідовність незалежних копій випадкової величини ξ , що приймає додатні значення майже напевно. Тоді *стандартним випадковим блуканням зі стрибками* ξ_n називають послідовність

$$S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k, \quad n \in \mathbb{N} \quad (S_0 = 0).$$

Випадкова функція N , що означена як

$$N(t) = \inf \{n \in \mathbb{N}_0 : S_n > t\}, \quad t \in \mathbb{R},$$

називається *процесом відновлення*, а функція $U(t) = \mathbb{E}N(t)$ називається *функцією відновлення*.

Відомо (Asmussen (2003), Твердження 6.2, с. 160]), що за умови $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$ функція відновлення має таку асимптотичну поведінку:

$$U(t) = \frac{t}{\mu} + O(1), \quad t \rightarrow \infty,$$

де $\mu = \mathbb{E}\xi < \infty$ — математичне сподівання ξ .

Функція відновлення за означенням є неспадною, неперервною справа та приймає значення 0, коли $t < 0$. У такому випадку із Твердження 1 випливає, що

$$U^{*(j)}(t) \sim \frac{t^j}{\mu^j j!}, \quad t \rightarrow \infty,$$

де $j = j(t)$ — цілочисельна функція, для якої $j(t) = o(t^{1/2})$ при $t \rightarrow \infty$.

За умови, що $E\xi^3 < \infty$ та ξ має розподіл абсолютно неперервного типу, тобто розподіл S_k для деякого k має абсолютно неперервну компоненту, з Frenk, (1987, Зауваження 3.1.7, с. 121) випливає

$$\int_{[0, \infty)} y \left| d\left(U(y) - \frac{y}{\mu}\right) \right| < \infty.$$

Отже, використавши Твердження 2 для цілочисельної функції $j = j(t)$ такої, що $j(t) = o(t^{2/3})$ при $t \rightarrow \infty$, маємо

$$U^{*(j)}(t) \sim \frac{t^j}{\mu^j j!} \exp\left(\frac{\gamma \mu j^2}{t}\right), \quad t \rightarrow \infty,$$

де

$$\gamma = \frac{E\xi^2}{2\mu^2},$$

(Asmussen, 2003, Твердження 6.1, с. 160).

Список літератури

- Asmussen, S. (2003). *Applied probability and queues* (2nd ed.). New-York: Springer-Verlag.
- Bogun, V., Iksanov, A., Marynych, A., & Rashytov, B. (2020). Renewal theory for iterated perturbed random walks on a general branching process tree: intermediate generations. *Applied Probability journals*, подана до друку. Препринт за посиланням <https://arxiv.org/abs/2012.03341>.
- Frenk, J. B. G. (1987). On Banach algebras, renewal measures and regenerative processes. *CWI Tracts*. CWI.
- Iksanov, A., & Kabluchko, Z. (2018). A functional limit theorem for the profile of random recursive trees. *Electronic Communications in Probability*, 23(87).

Узагальнення математичної моделі навчання нейромережових алгоритмів на базі багат шарового перцептрона

Ю. П. Буценко, В. А. Лабжинський
КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
armchairdoc@ukr.net

Визначено особливості застосування нейромережевого підходу для прогнозування майбутніх значень одновимірних часових рядів. Для оптимізації алгоритмів навчання нейромережевої моделі був проведений аналіз статистичних даних відповідних експериментальних досліджень.

Ключові слова: алгоритм прогнозування, нейромережева модель, багат шаровий перцептрон, алгоритм зворотного поширення похибки.

Нейромережева структура багат шарового перцептрона складається з декількох шарів (вхідного, одного або декількох прихованих та вихідного шару), причому кожен нейрон кожного прихованого шару безпосередньо пов'язаний з усіма нейронами наступного прихованого або вихідного шару через вагові коефіцієнти. Зазвичай, для його навчання застосовують методи зворотного поширення похибки. Вузли вхідного шару характеризуються функціями лінійної активації, а вузли прихованих і вихідного шару крім того характеризуються пороговими значеннями. При цьому у вузлів прихованих шарів нелінійна функція активації, а у вузлів вихідного шару — лінійна (Згуровський & Зайченко, 2013). Аналіз наукових публікацій та статистичних результатів експериментальних досліджень у сфері діагностики та прогнозування параметрів технічних систем показав, що найвищий відсоток застосування мають нейромережеві алгоритми.

Для того, щоб нейронна мережа могла коректно класифікувати стани, їй необхідно навчити. Для цього їй надають деякий набір вхідних векторів і пов'язаний з ним набір вихідних векторів. В умовах цієї задачі вхідний вектор є послідовністю параметрів, що характеризують стан технічної системи у визначений момент часу із зазначенням типу заходу. Вихідний вектор є списком виходів нейронної мережі й бажаних значень на них (Хайкин, 2006).

Розглянемо математичну модель навчання нейромережових алгоритмів на базі багат шарового перцептрона. Нехай ми маємо в розпорядженні деякий набір даних (зразок), що характеризує функціонування технічної системи («P», pattern), сигнали якої в оцифрованому вигляді можуть бути передані через вектор

$$X_p : \{x_p(i)\},$$

де $i \in [1; I]$ — кількість нейронів вхідного шару. Для представлення на рівні математичного апарату процесу передачі цього сигналу до першого прихованого шару необхідно запровадити вектор

$$Y_p^1 : \{y_p^1(j_1)\},$$

де $j_1 \in [1; J_1]$ (кількість прихованих нейронів), що розраховується через функцію активації прихованих нейронів:

$$\hat{y}_p^1(j_1) = F_{I \rightarrow H} \left(\sum_{i=1}^I x_p(i) \cdot w(i, j_1) + \theta(j_1) \right),$$

де $F_{I \rightarrow H}$ — функція активації прихованих нейронів, $w(i, j_1)$ — вагові коефіцієнти зв'язків, що поєднують вхідні нейрони та нейрони першого прихованого шару, а $\theta(j_1)$ — порогове значення для j_1 нейрону першого прихованого шару. Аналогічним чином відбувається перехід від першого до останнього прихованого шару:

$$y_p^1(j_1) \rightarrow y_p^2(j_2) \rightarrow \dots y_p^h(j_h) \rightarrow y_p^{h+1}(j_{h+1}) \rightarrow \dots y_p^{H-1}(j_{H-1}) \rightarrow y_p^H(j_H),$$

де $h \in [1; H]$ — кількість прихованих шарів. Наступним етапом для отримання вектору вихідних значень $Z_p : \{z_p(k)\}$, де $k \in [1; K]$ — кількість нейронів вхідного шару, є застосування функції активації вихідних нейронів:

$$\hat{z}_p(k) = F_{H \rightarrow O} \left(\sum_{j_H=1}^{j_H} y_p^H(j_H) \cdot w(j_H, k) + \theta(k) \right),$$

де $F_{H \rightarrow O}$ — функція активації вихідних нейронів, $w(j_H, k)$ — вагові коефіцієнти зв'язків, що поєднують проміжні нейрони останнього прихованого шару та нейрони вихідного шару, а $\theta(k)$ — порогове значення для k -го нейрона вихідного шару.

При тренуванні аргументом цільової функції буде середнє квадратичне відхилення $z_p(k)$ від відповідного значення $t_p(k)$ тренувального набору для всіх зразків $p \in [1; P]$:

$$\sigma = \frac{1}{PK} \sum_{p=1}^P \left(\sum_{k=1}^K (t_p(k) - z_p(k))^2 \right),$$

що має надалі бути використано у алгоритмах зворотного поширення похибки (Осовский, 2002).

Для підвищення якості розв'язку можна запропонувати метод одночасного застосування навчених і ненавчених нейронних мереж. Доцільним також виглядає застосування комбінованого підходу з одночасним використанням штучного інтелекту та апарату нечіткої логіки (Рутковская и др., 2006).

Список літератури

- Згуровский, М. З., & Зайченко, Ю. П. (2013). *Основы вычислительного интеллекта*. Киев: Наукова думка.
- Осовский, С. (2002). *Нейронные сети для обработки информации*. Москва: Финансы и статистика.
- Рутковская, Д., Пилинский, М., & Рутковский, Л. (2006). *Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы*. Москва: Горячая линия — Телеком.
- Хайкин, С. (2006). *Нейронные сети*. Москва: Издательский дом «Вильямс».

Наближення аналітичних функцій сумами Валле Пуссена

М. В. Гаєвський¹, П. В. Задерей², Н. М. Задерей², Г. Д. Нефьодова²

¹Центральноукраїнський державний педагогічний університет

імені Володимира Винниченка, Кропивницький, Україна

²КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

mgaevskij@gmail.com

Розглянуто точні верхні межі відхилень сум Валле Пуссена на класах аналітичних в одиничному крузі функцій, у яких існують обмежені ψ -похідні, де послідовність ψ задовольняє умови типу Сідона — Теляковського.

Ключові слова: точна верхня межа відхилення, суми Валле Пуссена, умови типу Сідона — Теляковського, ψ -похідна.

Нехай

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Через H_∞ позначимо простір аналітичних та обмежених в D функцій з нормою

$$\|f\| = \|f\|_{H_\infty} = \sup_{z \in D} |f(z)|.$$

Кожну функцію $f \in H_\infty$ у крузі D можна розкласти в ряд Тейлора

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, z \in D.$$

Нехай $\psi = \psi(k)$ — послідовність комплексних чисел така, що $|\psi(k)| \neq 0$ для кожного натурального k та $\lim_{k \rightarrow \infty} \psi(k) = 0$, якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\psi(k)} c_k z^k$$

є рядом Тейлора деякої функції $g \in H_\infty$, то функцію g називають ψ -похідною функції f і позначають через f^ψ . Множину всіх функцій $f \in H_\infty$, у яких існують ψ -похідні, причому $\|f^\psi\| \leq 1$, позначимо через H_∞^ψ (Степанец, 2002, с. 261).

Позначимо через

$$S_n(f, z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k$$

частинні суми ряду Тейлора, тоді кожній функції $f \in H_\infty^\psi$ поставимо у відповідність поліноми виду

$$V_{n,p}(f, z) = \frac{1}{p+1} \sum_{k=n-p}^n S_k(f, z).$$

Ці поліноми називають *сумами Валле Пуссена*, також їх можна записати в такому вигляді

$$V_{n,p}(f, z) = \sum_{k=0}^n \lambda_k^{n,p} c_k z^k,$$

де

$$\lambda_k^{n,p} = \begin{cases} 1, & k = 0, 1, \dots, n-p, \\ 1 - \frac{k-n+p}{p+1}, & k = n-p+1, \dots, n. \end{cases}$$

Метою нашої роботи є встановлення асимптотично точних оцінок для відхилень сум Валле Пуссена $V_{n,p}(f, z)$ від функції $f \in H_\infty^\psi$

$$\sup_{f \in H_\infty^\psi} \|f(z) - V_{n,p}(f, z)\|,$$

де послідовність $\psi = \psi(k)$ задовольняє умови типу Сідона — Теляковського:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = 0, \quad |\Delta c_k| := |c_k - c_{k+1}| \leq A_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad \text{та} \quad \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) |\Delta A_k| < \infty.$$

Ці умови також можна записати в еквівалентній формі — існує така монотонно спадна до 0 послідовність невід'ємних чисел A_k таких, що

$$|\Delta c_k| := |c_k - c_{k+1}| \leq A_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

та збігається ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k.$$

Теорема 1. *Нехай послідовність $\psi = \psi(k)$ задовольняє умови типу Сідона — Теляковського та, крім того, для неї виконується умова*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\psi(k)|}{k} < \infty,$$

тоді при $1 \leq p < \frac{n}{2}$ для довільної функції $f \in H_\infty^\psi$ виконується рівність

$$\begin{aligned} & \sup_{f \in H_\infty^\psi} \|f(z) - V_{n,p}(f, z)\| = \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=p}^{n-p} \frac{|\psi(n-p+k)|}{k} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=2(n-p)+1}^{\infty} \frac{|\psi(k)|}{k} + O(1) \sum_{k=n-p+1}^{\infty} (k-n+p+1) |\Delta A_k|, \end{aligned}$$

де $O(1)$ величина рівномірно обмежена по n та f .

Теорема 2. Нехай послідовність $\psi = \psi(k)$ задовольняє умови типу Сідона — Теляковського та, крім того, для неї виконується умова

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\psi(k)|}{k} < \infty,$$

тоді при $\frac{n}{2} \leq p \leq n$ для довільної функції $f \in H_{\infty}^{\psi}$ виконується рівність

$$\begin{aligned} & \sup_{f \in H_{\infty}^{\psi}} \|f(z) - V_{n,p}(f, z)\| = \\ & = \frac{1}{\pi} \sum_{k=2(n-p)+1}^{\infty} \frac{|\psi(k)|}{k} + O(1) \sum_{k=n-p+1}^{\infty} (k - n + p + 1) |\Delta A_k|, \end{aligned}$$

де $O(1)$ величина рівномірно обмежена по n та f .

Список літератури

Степанец, А. І. (2002). Методы теории приближений (Ч. II). Киев: Ин-т математики НАН Украины.

Застосування диференціальних рівнянь у військово-прикладних задачах

В. В. Гай, Д. І. Ванельчук, Н. М. Гузик

Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного,
Львів, Україна

vladislav.arm4@ukr.net, hryntsiv@ukr.net

У роботі досліджуються питання застосування диференціальних рівнянь до розв'язування конкретних прикладних задач, зокрема, при дослідженні коливань робочого органу полкової землерийної машини ПЗМ2.

Ключові слова: диференціальні рівняння, полкова землерийна машина, коливання робочого органу, амплітуда, частота.

Як і сама математика, диференціальні рівняння широко використовуються не лише в математиці, але в багатьох прикладних науках. Диференціальні рівняння описують різноманітні процеси в екології, архітектурі, фізиці, машинобудуванні, будівництві, медицині, метрології, економіці тощо.

У цій роботі спробуємо з'ясувати наскільки важливими є диференціальні рівняння для військових і як часто вони застосовуються при розв'язуванні військово-прикладних задач.

Відомо, що лінійні диференціальних рівнянь другого порядку застосовуються до вивчення коливних явищ (Габрусев & Самборська, 2014). Наведемо кілька прикладів таких задач.

Задача 1. Математичний маятник довжиною l і масою m , відхилений від положення рівноваги на деякий малий кут θ . Визначити закон коливання маятника та знайти період коливання, якщо опір середовища відсутній.

Нехай за час t маятник, відхилений від положення рівноваги на кут $\theta(t)$, пройшов по дузі кола шлях $s(t)$. Маятник рухається під дією сили тяжіння. Застосовуючи другий закон Ньютона, отримаємо диференціальне рівняння, яке описує рух даного маятника:

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -mg \sin \theta, \quad (1)$$

де g — пришвидшення вільного падіння. Оскільки $s = l\theta$ і для малих кутів $\sin \theta = \theta$, то рівняння (1) набуде вигляду:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta = 0. \quad (2)$$

До рівняння (2) додамо початкові умови:

$$\theta(0) = \theta_0, \theta'(0) = 0. \quad (3)$$

Отримали задачу Коші (2), (3) для лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Оскільки $\frac{g}{l} > 0$, то загальний розв'язок рівняння (2) матиме вигляд

$$\theta(t) = C_1 \cos \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t \right) + C_2 \sin \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t \right).$$

Використавши початкові умови, приходимо до рівняння коливань маятника:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos \left(\sqrt{\frac{g}{l}} t \right).$$

Період його коливань T знаходимо з умови $\theta(t + T) = \theta(t)$. Отримаємо

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Задача 2. Розв'язати задачу 1, урахувавши опір повітря, який пропорційний до швидкості руху маятника.

Модуль сили опору у цьому випадку дорівнює $\lambda \frac{ds}{dt}$, де $\lambda > 0$ — коефіцієнт пропорційності. Рух маятника в цьому випадку описується диференціальним рівнянням

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -mg \sin \theta - \lambda \frac{ds}{dt},$$

звідки, після елементарних перетворень, отримуємо

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{\lambda}{m} \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l} \theta = 0. \quad (4)$$

Це означає, що математичною моделлю, яка описує коливання маятника, є задача Коші для лінійного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами (4) за початкових умов (3).

Зрозуміло, що маятник буде здійснювати коливання за умови

$$\frac{\lambda^2}{4m^2} - \frac{g}{l} < 0.$$

Покладемо

$$\frac{g}{l} - \frac{\lambda^2}{4m^2} = a^2.$$

Тоді загальний розв'язок рівняння (4) подамо у вигляді

$$\theta(t) = e^{-\frac{\lambda}{2m} t} \left(C_3 \cos at + C_4 \sin at \right).$$

Систему рівнянь для визначення сталих C_3, C_4 знаходимо застосовуючи початкові умові (3). У результаті одержуємо закон коливань маятника під дією сили опору, яка пропорційна швидкості руху:

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-\frac{\lambda}{2m}t} \left(\cos at + \frac{\lambda}{2ma} \sin at \right).$$

Період коливань у цьому випадку дорівнює

$$T = \frac{2\pi}{a}.$$

При фортифікаційному обладнанні позицій, рубежів, районів, що займаються військами, районів розгортання пунктів керування застосовують машини для механізації земляних робіт. До них відносять і полкову землерийну машину ПЗМ2. У процесі експлуатації її робочий орган зазнає значних навантажень, які зумовлюють його коливання. Вони спричиняють значні додаткові динамічні напруження, а, отже, зменшують ресурс його експлуатації та негативно впливають на функціональну здатність землерийної машини. Джерелом небажаних коливань можуть бути як змінні навантаження, так і нестационарні швидкості привідного двигуна, інерційні сили руху інших вузлів, що взаємодіють із привідною системою, зовнішні збурення.

У дослідженнях робочих орган ПЗМ2 моделюється як двовимірне гнучке тіло. Для нього вивчаються лише поперечні коливання. Фізична модель описаної динамічної системи, базується на таких припущеннях:

- переміщення будь-якої точки стрічки нормальне до площини тонкого горизонтального шару;
- переміщення відбуваються у площині недеформованої стрічки (поздовжні коливання не враховуються);
- товщина стрічки у стані спокою є невеликою порівняно з найменшим радіусом кривизни, а, отже, її згинною жорсткістю можна знехтувати;
- матеріал гнучкого елемента вважається однорідним;
- натяг у стрічці є рівномірним у напрямку кожної з координатних осей: у напрямі осі Ox він забезпечується конструкцією привідного механізму, а у напрямі осі Oy — виникає внаслідок пружних властивостей гнучкого елемента.

На відміну від задач 1 та 2, коливання гнучкого двовимірного елемента описуються рівнянням у частинних похідних

$$\rho \frac{d^2 u}{dt^2} - N_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - N_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(x, y, t),$$

яке звичайно не розв'язується через елементарні функції. До нього потрібно приєднати крайові умови, які забезпечують аналітичний опис контакту гнучкого елемента до ведучого та веденого барабанів.

Урахування особливостей динамічних процесів робочого органу, як на етапі проектування, так і в реально існуючих системах сприятиме підвищенню функціональної здатності землерийної машини та збільшенню терміну експлуатації її робочого органу.

Список літератури

Габрусєв, Г. В., & Самборська, О. М. (2014). *Звичайні диференціальні рівняння. Навчальний посібник*. Тернопіль: ТНТУ імені Івана Пулюя.

Об одном методе определения параметров ядер наследственности с использованием весовых функций

В. П. Голуб

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина
creep@inmech.kiev.ua

Предложен метод определения параметров ядер наследственности изотропных вязкоупругих материалов при одноосном напряженном состоянии. Метод основан на расчете и аппроксимации дискретных значений ядер функциями, задающими структуру ядра. В области малых времен, где возникает эффект сингулярности, дискретные значения ядер учитываются с помощью весовых функций. Метод апробирован экспериментально на задачах ползучести и релаксации напряжений при одноосном растяжении и чистом кручении.

Ключевые слова: теория вязкоупругости, ядра наследственности, дискретизация ядер, весовые функции, параметры ядер, экспериментальная апробация.

Введение. В теории вязкоупругости в качестве одной из основных задач теории рассматривается задача выбора структуры ядер наследственности и метода определения их параметров.

Известны различные варианты аналитической интерпретации ядер наследственности и методов определения их параметров (Кристенсен, 1974; Работнов, 1977). Основные трудности связаны с необходимостью одновременного учета бесконечно больших значений скоростей процессов при $t \Rightarrow 0$ и асимптотического уменьшения этих же скоростей при $t \Rightarrow \infty$. Возникающие при этом погрешности оказываются весьма чувствительными к неизбежным ошибкам эксперимента. Особенно существенны ошибки на начальной стадии деформирования, когда точное изменение скоростей процессов становится невозможным. В этой связи, в существующих методах определения параметров ядер наследственности, используется процедура обрезания экспериментальных функций распределения для малых времен (Gross, 1968).

В настоящей работе предлагается метод определения параметров ядер наследственности, в котором данные измерений в области малых времен задаются с помощью функций.

1. Постановка задачи. Исходные соотношения. Рассматривается один из подходов к решению задачи определения параметров ядер наследственности изотропных вязкоупругих материалов при одноосном напряженном состоянии.

Ядра наследственности включают ядра ползучести и ядра релаксации и входят в определяющие уравнения теории вязкоупругости наследственного типа, устанавливающие зависимость между напряжениями, деформациями и временем. В настоящей работе определяющие уравнения задаются интегральными уравнениями Работнова (Работнов, 1977; Голуб, 2006).

$$\begin{cases} \phi_0(\varepsilon(t)) = \sigma(t) + \lambda \int_0^t K(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau; \\ \sigma(t) = \phi_0(\varepsilon(t)) - \lambda \int_0^t R(t-\tau)\phi_0(\varepsilon(\tau))d\tau, \end{cases} \quad (1.1)$$

частным случаем которых (при $\phi_0(\varepsilon_i(0)) = E\varepsilon$) являются интегральные уравнения линейной наследственной теории вязкоупругости Boltzmann –Volterra. Здесь $\varepsilon(t)$ — полная деформация, включающая упругую деформацию и деформацию ползучести; $\sigma(t)$ — действующее напряжение; $\phi_0(t)$ — функция, задающая нелинейность процесса ползучести; $K(t - \tau)$ — ядро ползучести; $R(t - \tau)$ — ядро релаксации; λ — реологический параметр ($\lambda > 0$).

Между ядрами ползучести $K(t - \tau)$ и релаксации $R(t - \tau)$ существует интегральная связь

$$R(t) - K(t) = \lambda \int_0^t K(t - \tau)R(\tau)d\tau, \quad (1.2)$$

которая позволяет значения параметров ядер, найденных, например, из опытов на ползучесть, использовать для решения задач релаксации и наоборот.

Задача заключается в дискретизации ядер ползучести на всем временном интервале с использованием весовых функций и в разработке методики аппроксимации дискретных значений ядер соответствующими аналитическими функциями.

2. Дискретизация ядер ползучести. Процедура дискретизации ядер ползучести (1.1) сводится к дискретизации функций подобия изохронных диаграмм ползучести $\phi_t(\varepsilon(t))$ и диаграммы мгновенного деформирования $\phi_0(\varepsilon(0))$.

Представим условие подобия изохронных диаграмм ползучести $\phi_t(\varepsilon(t))$ и диаграммы мгновенного деформирования $\phi_0(\varepsilon(0))$ в виде

$$\phi_0(\varepsilon(t)) = \left(\overline{1 + G(t)}\right)\phi_t(\varepsilon(t)) \Rightarrow \varepsilon(t) = \phi_0^{-1} \left\{ \left[\overline{1 + G(t)}\right]\phi_t(\varepsilon(t)) \right\}, \quad (2.1)$$

дифференцируя которое по t как сложную функцию получаем уравнение

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \sigma \left\{ \frac{d\phi_0^{-1} \left[\left(\overline{1 + G(t)}\right)\sigma \right]}{d \left[\left(\overline{1 + G(t)}\right)\sigma \right]} \right\} \frac{d \left(\overline{1 + G(t)}\right)}{dt}, \quad (2.2)$$

из сопоставления которого с выражением для $K(t)$ из первого уравнения в (1.1) для ядра ползучести $K(t)$ следует соотношение

$$K(t) = \frac{1}{\lambda} \frac{d \left(\overline{1 + G(t)}\right)}{dt}. \quad (2.3)$$

Здесь $\left(\overline{1 + G(t)}\right)$ — осредненная функция подобия, определяемая экспериментально.

Экспериментальные значения функции подобия (2.3) аппроксимируются сглаживающим кубическим сплайном [4]

$$K(t_j) = \frac{1}{\lambda} \left[B_j + 2C_j(t - t_j) + 3D_j(t - t_j)^2 \right], \quad (2.4)$$

который задает дискретные значения ядра ползучести $K(t_j)$ для нескольких дискретных значений времени t_j .

Характерный вид дискретных значений ядра ползучести $K(t_j)$, построенных согласно (2.4), схематически показан на рис. 1, а точками. Тонкой

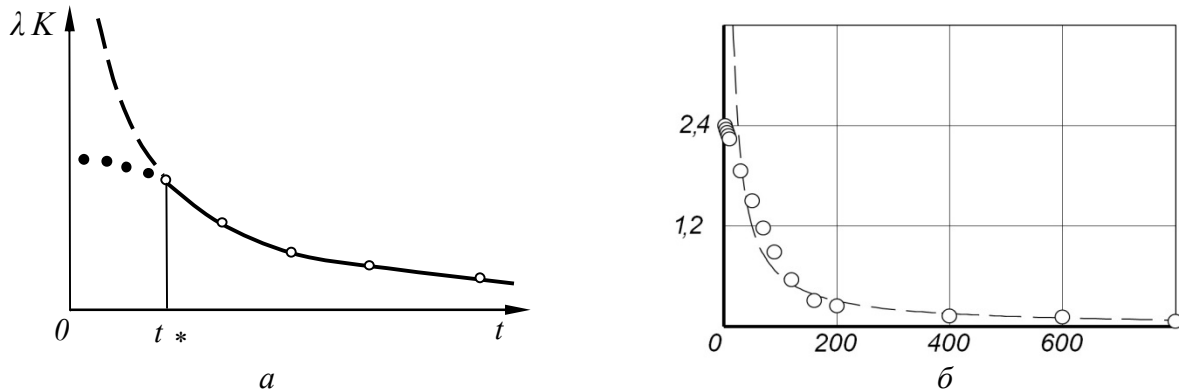


Рис. 1. Схематическое представление ядер ползучести (а) и дискретные (точки) и расчетные (линии) значения ядра ползучести стеклопластика ТС-8/3-250 (б)

сплошной линией нанесена одна из возможных аппроксимаций дискретных значений ядра $K(t_j)$ выбранным аналитическим выражением ядра $K(t)$. Задача определения параметров ядра ползучести сводится к минимизации функционала

$$F(\lambda, q_s) = \sum_{j=1}^n \left(K(t_j) - \lambda K(t, q_s) \right)^2, \quad (2.5)$$

где q_s — параметры ядра ползучести ($s = \overline{1, k}$); n — число дискретных значений ядра ползучести в интервале $\{0, t_j\}$.

3. Метод весовых функций. Функционал (2.5) записывается в предположении, что все дискретные значения ядра ползучести $K(t_j)$ в интервале $j = \overline{1, n}$ равновесны. В действительности, однако, при малых значениях t , меньших некоторого критического момента времени t_* , возникают динамические эффекты. В результате дискретные значения ядер ползучести в интервале $\{0, t_*\}$ не удовлетворяют условию $K(0) \rightarrow \infty$, а будут стремиться к некоторой постоянной величине (см. рис. 1, а).

Величина t_* определяется из соотношения

$$t_* = -\frac{1}{3} \frac{f_{2,j}}{f_{3,j}}, \quad (3.1)$$

задающего координату точки перегиба функции

$$K(t) = f_{0,j} + f_{1,j}t + f_{2,j}t^2 + f_{3,j}t^3, \quad (3.2)$$

аппроксимирующей дискретные значения ядра ползучести, рассчитанные согласно (2.5).

Учет дискретных значений ядра ползучести $K(t_j)$ в интервале $\{0, t_*\}$, которые удовлетворяют условию $K(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow 0$, осуществляется с использованием весовых функций. В этом случае функционал (2.5) преобразуется к виду

$$F(\lambda, q_s) = \sum_{j=1}^{n_*} \left\{ p_j(t) [K(t_j) - \lambda K(t, q_s)] \right\}^2 + \sum_{j=n_*+1}^n [K(t_j) - \lambda K(t, q_s)]^2, \quad (3.3)$$

где весовая функция $p_j(t)$ задается соотношением

$$p_j(t) = \frac{1}{1 + \left| \frac{K(t_j) - \lambda K(t, q_s)}{K(t_*) - \lambda K(t_*, q_s)} \right|^m}, \quad (3.4)$$

причем $p_j(t) \rightarrow 0$, когда $K(t, q_s) \rightarrow \infty$, и $p_j(t) = 1$, когда $K(t_j) = \lambda K(t, q_s)$. Здесь n_* — число дискретных значений ядер ползучести в области $\{0, t_*\}$; m — порядок моментов разностей ($m = 2, 3, 4, 5, \dots$).

Параметр λ и параметры ядер ползучести q_s в (3.3) определяются в два этапа. На первом этапе определяются начальные значения λ_0 и q_{s0} из (3.3) без учета дискретных значений ядер $K(t_j)$ из области $\{0, t_*\}$. На втором этапе значения параметров λ_0 и q_{s0} используются для определения весовых функций $p_j(t)$ в (3.4), на основе которых рассчитываются значения параметров λ и q_s по уравнению (3.3).

На рис. 1, б приведены результаты аппроксимации (линия) дискретных значений (точки) ядер ползучести стеклопластика ТС-8/3-250 с использованием параметров ядер, найденных с учетом весовых функций. В качестве аппроксимирующей функции использована дробно-экспоненциальная функция Работнова с параметрами $\alpha = 0,65$; $\beta = 1,9 \cdot 10^{-1}$ час $^{-(1+\alpha)}$; $\lambda = 1,2 \cdot 10^{-1}$ час $^{-(1+\alpha)}$. Значение критического момента времени $t_* = 29,5$ часа.

Список литературы

- Gross, В. (1968). *Mathematical structure of the theories of viscoelasticity*. Paris: Hermann.
- Голуб, В. П. (2006). Длительная нелинейная ползучесть вязкоупругих волокнистых однонаправленных композитов при растяжении. *Вісник Донецького університету. Серія А. Природничі науки*, (1), 97–101.
- Кристенсен, Р. М. (1974). *Введение в теорию вязкоупругости*. Москва: Мир.
- Работнов, Ю. Н. (1977). *Элементы наследственной механики твердых тел*. Москва: Наука.

Рівняння фази обертання руху тіла, що скочується з похилої плоскої опори, в декартових і узагальнених координатах

Є. Т. Горалік, М. М. Крюков, Т. О. Лупіна

Державний університет інфраструктури та технологій, Київ, Україна

et_gor@ukr.net

Розглянуто диференціальні рівняння руху стрижня при скочуванні з похилої опорної поверхні в декартових і полярних координатах. Отримано розрахункову формулу та проведені розрахунки значень нормальної динамічної реакції краю опори у процесі скочування на основі результатів чисельного розв'язку диференціальних рівнянь руху в полярних координатах. З урахуванням отриманої формули для визначення динамічної нормальної реакції запропонована нелінійна розв'язувальна система трьох звичайних диференціальних рівнянь другого порядку і сформульована відповідна задача Коші, яка розв'язується чисельно методом Рунге — Кутти.

Ключові слова: плоско-паралельний рух, стрижень, похила опора, декартові координати, полярні координати, звичайні диференціальні рівняння, нормальна реакція, задача Коші, чисельне моделювання, метод Рунге — Кутти.

Задача про рух твердого тіла при сходженні з похилої плоскої опори є актуальною, зокрема, для рятувальних шлюпок вільного падіння (Бугаєнко & Галь, 1995; Karim et al., 2011), які знаходять широке застосування на морських судах та нафтодобувних платформах.

Після проходження центру мас твердого тіла над краєм опори при його сходженні з опорної поверхні і до моменту відриву від опори тіло рухається плоско-паралельно під дією сили тяжіння \vec{P} і обертового моменту відносно його центру мас під дією нормальної реакції опори \vec{F}_n .

При моделюванні твердого тіла однорідним стрижнем масою m довжиною L (Рис. 1) його рух на цьому етапі (фаза обертання) в декартових прямокутних координатах описується системою трьох диференціальних рівнянь другого порядку (1).

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_n \sin \varphi, \\ m\ddot{y} &= mg - F_n \cos \varphi, \\ \frac{mL^2}{12}\ddot{\varphi} &= F_n \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned} \tag{1}$$

де x, y — координати центру мас стрижня, φ — кут нахилу стрижня до горизонтальної осі, \ddot{x}, \ddot{y} — проекції прискорення на горизонтальну і вертикальну осі координат, $\ddot{\varphi}$ — кутове прискорення стрижня, g — прискорення вільного падіння.

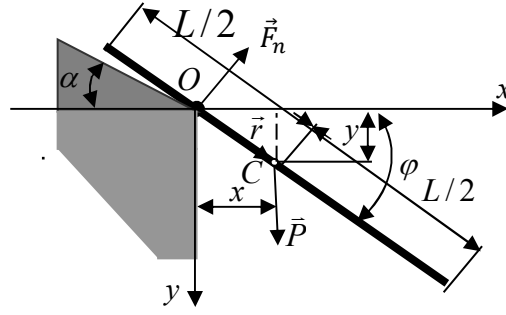


Рис. 1.

Значення динамічної нормальної реакції опори \vec{F}_n , наперед невідоме, змінюється під час руху стрижня і потребує додаткового визначення.

В узагальнених (полярних) координатах, як було показано в роботі (Горалік & Крюков, 2020), для розв'язання розглядуваної задачі про рух стрижня при його скочуванні з опори достатньо системи двох диференціальних рівнянь (2).

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 &= g \sin \phi; \\ 2rr\dot{\phi} + \left(\frac{L^2}{12} + r^2 \right) \ddot{\phi} &= gr \cos \phi. \end{aligned} \quad (2)$$

де r — модуль радіуса-вектора центру мас стрижня, \dot{r} — швидкість центру мас в напрямі осі стрижня, $\dot{\phi}$ — кутове прискорення стрижня.

З останнього рівняння системи (2) після підстановки $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ і необхідних перетворень отримаємо (3):

$$\ddot{\phi} = \frac{g\sqrt{x^2 + y^2} \cos \phi - 2(x\dot{x} + y\dot{y})\dot{\phi}}{\frac{L^2}{12} + x^2 + y^2} \quad (3)$$

Із третього рівняння системи (1), з урахуванням (3) визначаємо F_n (4):

$$F_n = \frac{mL^2}{12} \left(\frac{g\sqrt{x^2 + y^2} \cos \phi - 2(x\dot{x} + y\dot{y})\dot{\phi}}{\left(\frac{L^2}{12} + x^2 + y^2 \right) \sqrt{x^2 + y^2}} \right). \quad (4)$$

Підставивши знайдений для F_n вираз (4) в (1), отримаємо розв'язувальну систему диференціальних рівнянь в декартових координатах у вигляді (5):

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= \frac{L^2 \sin \phi}{12} \left(\frac{g\sqrt{x^2 + y^2} \cos \phi - 2(x\dot{x} + y\dot{y})\dot{\phi}}{\left(\frac{L^2}{12} + x^2 + y^2\right)\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \\
\ddot{y} &= g - \frac{L^2 \cos \phi}{12} \left(\frac{g\sqrt{x^2 + y^2} \cos \phi - 2(x\dot{x} + y\dot{y})\dot{\phi}}{\left(\frac{L^2}{12} + x^2 + y^2\right)\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \\
\ddot{\phi} &= \frac{g\sqrt{x^2 + y^2} \cos \phi - 2(x\dot{x} + y\dot{y})\dot{\phi}}{\frac{L^2}{12} + x^2 + y^2}
\end{aligned} \tag{5}$$

Рівняння (5) справедливі поки кінець стрижня не досягне кінця опори при $F_n > 0$. При $F_n = 0$ і $r < L/2$ відбувається передчасний відрив стрижня від опори і починається його вільне падіння та обертання з кутовою швидкістю досягнутою на момент відриву.

Для формулювання задачі Коші для отриманої системи диференціальних рівнянь (5) необхідно додати початкові умови (6)

$$\begin{aligned}
x(0) = 0, y(0) = 0, \dot{x}(0) = V_{0x} = V_0 \cos \alpha, \dot{y}(0) = V_{0y} = V_0 \sin \alpha, \\
\phi(0) = \alpha, \dot{\phi}(0) = 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Поклавши $z_1 = x, z_2 = \dot{x}, z_3 = y, z_4 = \dot{y}, z_5 = \phi, z_6 = \dot{\phi}, a = L^2 / 12$, приведемо отриману систему диференціальних рівнянь (2) до нормальної форми Коші:

$$\begin{aligned}
\frac{dz_1}{dt} = z_2, \quad \frac{dz_2}{dt} = a \sin(z_5) \left(\frac{g\sqrt{z_1^2 + z_3^2} \cos z_5 - 2(z_1 z_2 + z_3 z_4) z_6}{(a + z_1^2 + z_3^2)\sqrt{z_1^2 + z_3^2}} \right), \\
\frac{dz_3}{dt} = z_4, \quad \frac{dz_4}{dt} = z_6, \\
\frac{dz_6}{dt} = \frac{g\sqrt{z_1^2 + z_3^2} \cos z_5 - 2(z_1 z_2 + z_3 z_4) z_6}{(a + z_1^2 + z_3^2)}
\end{aligned} \tag{7}$$

Початкові умови мають вигляд

$$\begin{aligned}
z_1(0) = 0, z_2(0) = V_{0x} = V_0 \cos \alpha, z_3(0) = 0, \\
z_4(0) = V_{0y} = V_0 \sin \alpha, z_5(0) = \alpha, z_6(0) = 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Задачу Коші (7), (8) розв'язували за допомогою чисельного методу Рунге — Кутти четвертого порядку точності (Березин & Жидков, 1962).

На основі запропонованого підходу проведено серію чисельних експериментів для визначення часу скочування стрижня, горизонтальної та вертикальної складової швидкості центру мас, кутів повороту та кутової швидкості стрижня в момент відриву від рампи при куті нахилу рампи $\alpha = 35^\circ$ та різних значеннях початкової швидкості центру мас в діапазоні від 1 до 10 м/с і довжини стрижня в діапазоні від 5 до 15 м. Результати цих розрахунків не відрізнялись від отриманих раніше в Горалік та Крюков (2020).

Проведені розрахунки залежності значення відносної динамічної нормальної реакції F_n/m (Н/кг) стрижня при куті нахилу рампи $\alpha = 35^\circ$ та вказаному вище діапазоні змін довжини стрижня та початкової швидкості центру мас від часу t (с) у процесі скочування. Отримані дані для стрижня довжиною 5 м при початковій швидкості 6 м/с, представлені на рис. 2, свідчать про справедливість рівнянь (5) в цьому випадку на протязі всього періоду фази обертання і відрив кінця стрижня від краю опори.

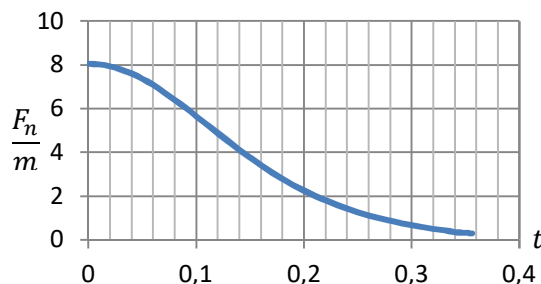


Рис. 2.

Список літератури

- Karim, M., Iqbal, K. S., Khondoker, M. R. H., & Rahman, S. M. H. (2011). Influence of falling height on the behavior of skid-launching free-fall lifeboat in regular waves. *Journal of Applied Fluid Mechanics*, 4(1), 77–88.
- Березин, И. С., & Жидков, Н. П. (1962). *Методы вычислений* (Т. 2). Москва: Физматгиз.
- Бугаенко, Б. А., & Галь, А. Ф. (1995) *Принципы проектирования и особенности конструирования судовых устройств и судовой техники морских технологий* (Ч. 2). Николаев: УГМТУ.
- Горалік, Є. Т., & Крюков, М. М. (2020) Математическое моделирование фазы вращения движения твердого тела при схождении с наклонной рампы. *Прикладні питання математичного моделювання*, 3(2.2), 113–122.

Теорема про точки неперервності похідної та її узагальнення

С. В. Горленко

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

svagor7@gmail.com

У статті узагальнено теорему про точки неперервності похідної.

Ключові слова: точки неперервності, множина першої категорії, множина другої категорії, аналітично зображувана (за Бером) функція 1-го класу.

Попередні відомості. Під багатозначним розуміємо таке відображення, при якому образами точок є деякі множини. Найбільш значні результати отримані для багатозначних відображень із замкнутими образами точок. Надалі ми розглядатимемо тільки такі відображення. Будь-яке багатозначне відображення Φ метричного простору X у метричний простір Y породжує відповідне однозначне відображення $\varphi : X \rightarrow 2^Y$ замкнених підмножин простору Y . Простір 2^Y наділяємо деякою топологією. Залежно від цього можна визначити різні типи неперервності багатозначного відображення Φ . Ми використаємо такі 3 топології на просторі замкнених підмножин: так звані ψ -, \varkappa - та λ -топології, та 3 відповідні типи неперервності відображення Φ : ψ -неперервність (неперервність у метриці Гаусдорфа), \varkappa -неперервність (напівнеперервність зверху) та λ -неперервність (напівнеперервність знизу). Базу \varkappa -топології визначає рівність

$$O_{\varkappa}(F_0) = \{F \in 2^Y : F \subset O(F_0)\},$$

де $O(F_0)$ — окіл множини F_0 в топологічному просторі Y ; передбаза топології λ задає рівність

$$O_{\lambda}(F_0) = \{F \in 2^Y : F \cap O(F_0) \neq \emptyset\},$$

а передбаза топології ψ складається із множин $O_{\varkappa}(F_0)$ та $O_{\lambda}(F_0)$.

У подальшому всі багатозначні відображення позначатимемо великими літерами, а відповідні їм однозначні відображення у простір замкнених підмножин — малими.

Означення. Функцію $f : X \rightarrow Y$ називають (за Бером) *аналітично зображуваною функцією 1-го класу*, якщо вона є границею послідовності неперервних функцій.

Означення. Нехай D — область комплексної площини C . Множину $E \subset D$ називають множиною *першої категорії* в D , якщо її можна подати як скінченне або зліченне об'єднання ніде нещільних у D множин, і *другої категорії*, якщо таке подання неможливе.

Наслідок. Множина другої категорії в D скрізь щільна в D , тобто в околі будь-якої точки $z_0 \in D$ знайдуться точки цієї множини.

Теорема (Бер (Куратовский, 1966)). Множина точок розриву аналітично зображеної функції 1-го класу, що діє з метричного простору в метричний, є множиною першої категорії.

Узагальнення теореми про точки неперервності похідної. Нехай $f(z)$ — диференційовна в області $D \subset C$ функція. Тоді, очевидно

$$f'(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z),$$

де

$$f_n(z) = \frac{f\left(z + \frac{1}{n} - f(z)\right)}{\frac{1}{n}}$$

— неперервні в D . Отже, $f'(z)$ є аналітично зображеною функцією 1-го класу і, згідно з теоремою Бера, є неперервною на множині точок E другої категорії в D .

Нехай тепер $f(z)$ не є диференційовною в D . Розгляньмо такі множини:

$$M_{mn}(f; z) = \left\{ \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}, \frac{1}{m} \leq \Delta z \leq \frac{1}{n} \right\}_{m,n=1,2,\dots};$$

$$M_n(f; z) = \left\{ \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}, 0 < |\Delta z| \leq \frac{1}{n} \right\}_{n=1,2,\dots};$$

$$\mathfrak{M}_z(f) = \bigcap_n \overline{M_n(f; z)}.$$

Множину $\mathfrak{M}_z(f)$ називають множиною моногенності функції f у точці z і є, як видно з її означення, множиною всіх похідних чисел функції f у точці z .

За відсутності похідної $f'(z)$ множина $\mathfrak{M}_z(f)$ виконує її роль — дає диференціальну характеристику поведінки функції $f(z)$ в околі точки z .

Розгляньмо тепер відповідні багатозначні відображення з D в 2^C , індуковані функцією $f(z)$:

$$\Phi_{mn}(f; z) : z \rightarrow \overline{M_{mn}(f; z)},$$

$$\Phi_n(f; z) : z \rightarrow \overline{M_n(f; z)},$$

$$\Phi_f(z) : z \rightarrow \mathfrak{M}_z(f).$$

У просторі 2^C замкнених підмножин C розгляньмо ψ -топологію. Відмітимо, що для багатозначних відображень із замкненими образами точок збіжність у ψ -топології еквівалентна збіжності в метриці Гаусдорфа α .

Лема. Відображення $\Phi_{mn}(f; z)$ із D у ψC неперервно (отже, й α -неперервно).

Доведення. Нехай $z_k \rightarrow z_0$ — довільна послідовність точок з D , збіжна до точки $z_0 \in D$. Достатньо довести два включення:

$$\text{а) } \text{Li}_k M_{mn}(f; z_k) \supset M_{mn}(f; z_0);$$

$$\text{б) } \text{Ls}_k M_{mn}(f; z_k) \subset M_{mn}(f; z_0).$$

де через $\text{Li}_k M_{mn}(f; z_k)$ та $\text{Ls}_k M_{mn}(f; z_k)$ позначені, відповідно, нижня та верхня топологічні границі послідовності множин $M_{mn}(f; z_k)$ (Куратовский, 1966).

Зазначені в а) та б) включено легко перевірити, урахувавши неперервність $f(z)$.

Оскільки

$$\overline{M_n(f; z)} = \text{Lt}_m M_{mn}(f; z),$$

то

$$\Phi_n(f; z) = (\alpha) \lim_{m \rightarrow \infty} \Phi_{mn}(f; z),$$

де $\text{Lt}_m M_{mn}(f; z)$ — топологічна границя послідовності множин $M_{mn}(f; z)$ (Куратовский, 1966).

З останньої рівності випливає, що однозначне відображення $\varphi_n(f; z)$ області D у простір 2^C , який має ψ -топологію, є відображенням 1-го класу. За теоремою Бера, множина точок неперервності $\varphi_n(z)$ є множиною другої категорії в D , отже, скрізь щільна в D . Покажемо тепер, що в кожній точці неперервності $\varphi_n(f; z)$ відображення $\varphi(f; z)$ — \varkappa -неперервно (тобто багатозначне відображення $\Phi_f(z)$ напівнеперервне зверху). Нехай $z_0 \in D$ — точка неперервності $\varphi_n(f; z)$ і $z_k \rightarrow z_0$ — довільна послідовність точок з D , збіжна до z_0 . Використовуючи властивості верхньої топологічної границі послідовності множини (Куратовский, 1966), маємо

$$\text{Ls}_k \mathfrak{M}_{z_k}(f) = \text{Ls}_k \bigcap_n \overline{M_n(f; z_k)} \subset \bigcap_n \text{Ls}_k \overline{M_n(f; z_k)} = \bigcap_n \overline{M_n(f; z_0)} = \mathfrak{M}_{z_0}(f),$$

що й треба було довести.

Отже, правдива така теорема.

Теорема. Відображення $\Phi_f(z) : z \rightarrow \mathfrak{M}_z(f)$ напівнеперервне зверху на множині точок E другої категорії в D .

Наслідок. Якщо f неперервна в інтервалі $(a; b) \subset \mathbb{R}$, то відображення $\Phi_f(x) : x \rightarrow \mathfrak{M}_x(f)$, де $\mathfrak{M}_x(f)$ — множина похідних чисел функції f у точці x , напівнеперервне зверху на множині E другої категорії в $(a; b)$.

Список літератури

Куратовский, К. (1966). *Топология* (Т. 1.). Москва: Мир.

Математична модель сили Коріоліса в метеорології

А. Л. Гречко

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

and.grechko@gmail.com

У статті досліджена математична модель руху обмежених мас повітря навколо землі.

Ключові слова: сила Коріоліса, математичні моделі метеорології.

Глобальна циркуляція вітру на землі, що обертається має властивість сили Коріоліса. Ця сила керує залежним від часу вектором швидкості об'єму повітряних мас $\vec{w}(t)$ та відповідним вектором шляху $\vec{r}(t)$ (Martin, 2009). У подальшому розглядаємо частково ідеалізовану модель, яка припускає, що розглядувана область на північній напівкулі має сталий тиск та тертя не береться до уваги.

Нехай об'єм повітря в точці M поверхні землі має початкову швидкість v_0 , яка направлена на північ. Розглянемо декартову систему координат з центром у точці M , координатними осями OX (напрямок схід) та OY (напрямок північ). Позначимо $u(t)$ — координату $\vec{w}(t)$ у східному напрямку, $v(t)$ — координату в північному напрямку з відповідними початковими умовами:

$$\vec{w}(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{w}(0) = \vec{w}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Завдяки силі Коріоліса відносно до географічної широти φ , отримаємо закон руху в вигляді системи диференціальних рівнянь (зліва фактично прискорення):

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = hv(t) \\ \dot{v}(t) = -hu(t) \end{cases} \quad (2)$$

де $h = 2\Omega \sin \varphi$, $\Omega = 2\pi / 24$ $h = 7,272 \cdot 10^{-5} / s$ — кутова швидкість обертання землі. У північній напівкулі φ та h є додатними, у південній напівкулі обидва від'ємні. Південний полюс має широту $\varphi = -90^\circ$.

Якщо ми розглядаємо невелику область на північній напівкулі, тоді без обмежень загальності можемо вважати географічну широту сталою. Разом з початковими умовами (1) легко отримаємо розв'язок (2):

$$\vec{w}(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = v_0 \begin{pmatrix} \sin(h \cdot t) \\ \cos(h \cdot t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix},$$

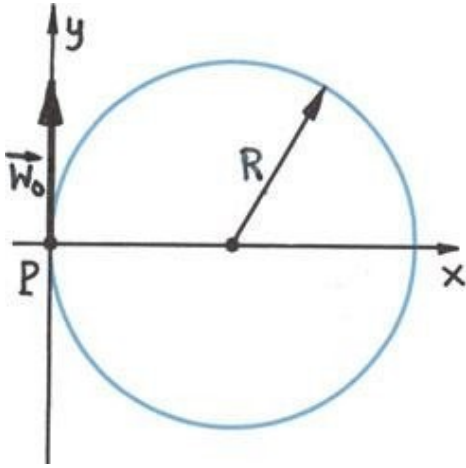
Згідно із законом збереження енергії цей вектор швидкостей має однакову величину v_0 . Інтегруючи далі систему швидкостей за початкових умов

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0,$$

отримаємо рівняння колового руху об'єму повітряних мас:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{v_0}{h} \begin{pmatrix} 1 - \cos(ht) \\ \sin(ht) \end{pmatrix}$$

В північній напівкулі ($h > 0$), об'єм повітря стартує з точки M та повертає



вздовж кола радіуса $R = \frac{v_0}{h}$ за годинниковою стрілкою (див. мал.). У південній напівкулі ($h < 0$) рух відбувається проти годинникової стрілки. Зауважимо, що кутова частота h та період $T = \frac{2\pi}{h}$ залежать тільки від φ і не залежить від R . Якщо тиск не сталий, тоді маємо наступне: у північній півкулі сила Коріоліса призводить до відхилення об'єкта, що рухається праворуч щодо напрямку руху. У південній півкулі вона призводить до відхилення ліворуч. В області високого тиску північної кулі відхилення вправо викликає обертання за годинниковою стрілкою, в області низького тиску обертання проти годинникової стрілки.

Також з наведених формул випливає, що чим більшу широта (північ або південь) точки M , тим менший радіус R та період T для фіксованої v_0 . Поруч з екватором сила Коріоліса практично відсутня.

Також з наведених формул випливає, що чим більшу широта (північ або південь) точки M , тим менший радіус R та період T для фіксованої v_0 . Поруч з екватором сила Коріоліса практично відсутня.

Приклад. Розглянемо широту $\varphi \approx 45^\circ$ та кутову частоту $h = 1.03 \cdot 10^{-4} \text{ c}^{-1}$. У цьому випадку маємо після обчислень

$$R \approx 10^4 \cdot v_0,$$

де R вимірюється в m , а v_0 в $\frac{m}{c}$, з періодом

$$T = \frac{2\pi}{h} \approx 62800 \text{ c} \approx 17.5 \text{ год.}$$

незалежно від R .

Зауважимо два розповсюджених випадка: для швидкості $v_0 = 10 \text{ м / с}$ радіус $R = 100 \text{ км.}$ та для неспокійної океанської течії з типовою швидкістю $v_0 = 0.1 \text{ м / с}$ отримуємо значення радіуса $R = 1 \text{ км.}$

Список літератури

Martin, J. E. (2006). *Mid-latitude atmospheric dynamics: A first course*. New Jersey: Wiley.

Наближений метод розв'язання систем функціональних рівнянь Вінера — Гопфа

М. В. Дудик

Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини,
Умань, Україна

dudik_m@hotmail.com

Запропоновано метод послідовних наближень для розв'язання системи функціональних рівнянь Вінера — Гопфа. Метод використовує подання матричного коефіцієнта системи у вигляді суми двох матриць, одна з яких допускає точну факторизацію, а відносно іншої — матриці-збурення — передбачається умова її малості порівняно з першим доданком в області задання системи. Розв'язок системи шукається у вигляді розвинень за степенями матриці-збурення. На кожному кроці наближення розв'язання системи здійснюється за допомогою методу Вінера — Гопфа з використанням факторизації основної складової матричного коефіцієнта.

Ключові слова: матричне функціональне рівняння Вінера — Гопфа, метод послідовних наближень.

Чимало плоских крайових задач математичної і теоретичної фізики, прикладної механіки за наявності двох і більше точок зміни граничних умов за допомогою інтегральних перетворень можуть бути зведені до системи функціональних рівнянь у комплексній площині, які розв'язуються за допомогою методу Вінера — Гопфа (Noble, 1988). Ключовою проблемою їх розв'язання є факторизація матричного коефіцієнта системи. Однак, на сьогоднішній день відомий лише один вузький нетривіальний клас матричних функцій комплексної змінної, що допускають точну факторизацію в замкнутій аналітичній формі. Запропонований Г. М. Чеботарьовим і розвинений А. О. Храпковим (Khrapkov, 2001) метод факторизації даного класу матриць успішно застосовувався для розв'язання окремих задач механіки руйнування, теорії розсіяння електромагнітних і пружних хвиль, контактних задач тощо. У той же час, метод Чеботарьова — Храпкова виявився неспроможним у випадку складніших матриць, що стимулювало розвиток методів наближеної факторизації матричних функцій.

У даній роботі пропонується метод послідовних наближень для розв'язання системи функціональних рівнянь Вінера — Гопфа, який використовує подання матричного коефіцієнта системи у вигляді суми двох матриць, одна з яких, $\mathbf{G}_0(p)$, допускає точну факторизацію, а щодо іншої — матриці-збурення $\mathbf{G}'(p)$ — передбачається умова малості порівняно з $\mathbf{G}_0(p)$ в області задання системи:

$$\begin{aligned} \Phi^+(p) + \mathbf{f}(p) &= \mathbf{G}(p)\Phi^-(p) \quad (p \in D), \\ \mathbf{G}(p) &= \mathbf{G}_0(p) + \mathbf{G}'(p) \quad (|\mathbf{G}_0(p)| \gg |\mathbf{G}'(p)|), \end{aligned} \quad (1)$$

де $\Phi^+(p)$, $\Phi^-(p)$ — невідомі лінійні вектори, аналітичні в областях D^+ і D^- відповідно, $D = D^+ \cap D^-$; $f(p)$ і $G(p)$ — задані лінійний вектор і квадратна матриця, причому $G_0(p)$ факторизується за допомогою аналітичних в областях D^+ і D^- матриць:

$$G_0(p) = G_0^+(p)G_0^-(p).$$

За допомогою методу Вінера — Гопфа при виконанні умови $p \rightarrow \infty$, $(G_0^+(p))^{-1} \Phi_0^+(p) \rightarrow 0$ отримуємо розв'язок системи (1) у нульовому наближенні у вигляді

$$\Phi_0^+(p) = -G_0^+(p)f_0^+(p) \quad (p \in D^+), \quad \Phi_0^-(p) = -(G_0^-(p))^{-1}f_0^-(p) \quad (p \in D^-),$$

$$f_0^\pm(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{(G_0^+(z))^{-1} f(z)}{z - p} dz \quad (\gamma \in D, \quad p \in D^\pm),$$

де $(G_0^-(p))^{-1}$ — матриця, обернена $G_0^-(p)$, γ — нескінчена лінія у смузі аналітичності системи (1). Шляхом послідовних ітерацій, виконаних подібно до попереднього етапу, знаходимо загальний розв'язок системи (1):

$$\Phi^+(p) = -G_0^+(p) \sum_{n=0}^{\infty} f_n^+(p) \quad (p \in D^+), \quad \Phi^-(p) = -(G_0^-(p))^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} f_n^-(p) \quad (p \in D^-),$$

$$f_n^\pm(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{(G_0^+(z))^{-1} G'(z) (G_0^-(z))^{-1} f_{n-1}^\pm(z)}{z - p} dz \quad (\gamma \in D, \quad p \in D^\pm).$$

З формальної точки зору цей розв'язок можна вважати точним. Умовою коректності розв'язку є збіжність його рядів, тобто виконання нерівності

$$|f_n^\pm(p)| < |f_{n-1}^\pm(p)|.$$

Згідно з визначенням $f_n^\pm(p)$ цій нерівності еквівалентна умова

$$\left| (G_0^+(p))^{-1} G'(p) (G_0^-(p))^{-1} \right| < 1.$$

У той же час, практичне застосування розв'язку для числових розрахунків наштовхується на зростання кратності інтегралів типу Коші в кожному наступному наближенні. Ця обставина змушує обмежуватись у розв'язку невеликим числом доданків, які враховуються при обчисленнях, і накладає більш жорстке обмеження на матрицю-збурення:

$$\left| (G_0^+(p))^{-1} G'(p) (G_0^-(p))^{-1} \right| \ll 1.$$

Переваги методу надає можливість уникнення факторизації матричного коефіцієнта $\mathbf{G}(p)$ вихідного рівняння (1).

Список літератури

- Noble, B. (1988). *Methods based on the Wiener–Hopf technique*. New York: Chelsea Publ. Comp.
- Khrapkov, A. A. (2001). *Wiener–Hopf method in mixed elasticity theory problem*. St. Petersburg: V. E. VNIIG Inc.

Задача Коші для системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь з диференціальною точкою звороту I роду

І. О. Зеленська

Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені
Володимира Винниченка, Кропивницький, Україна

Kopchuk@gmail.com

Побудовано головний член асимптотики для системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь (ССЗДР) вигляду

$$\varepsilon Y'(x, \varepsilon) + A(x, \varepsilon)Y(x, \varepsilon) = 0,$$

коли $\varepsilon > 0$ на інтервалі $x \in [0; 5]$. Використано модифікований метод істотно особливих функцій для побудови рівномірної асимптотики розв'язку на вказаному проміжку, включаючи точку звороту.

Ключові слова: сингулярно збурені диференціальні рівняння, точка звороту, функції Ейрі, задача Коші.

Вступ. Розглянемо задачу Коші для ССЗДР виду:

$$\begin{cases} y_1'(x, \varepsilon) - \varepsilon y_2(x, \varepsilon) = 0, \\ \varepsilon y_2'(x, \varepsilon) - y_3(x, \varepsilon) = 0, \\ \varepsilon y_3'(x, \varepsilon) + b(x)y_1(x, \varepsilon) + a(x)y_2(x, \varepsilon) = h(x), \end{cases} \quad (1)$$

за таких умов: $a(x) = x\tilde{a}(x) = 4x$, $b(x) = 4x - 24$, $h(x) = 5x + 3$, де $x = 0$ — точка звороту, $\varepsilon \rightarrow 0$, на інтервалі $x \in [0; 5]$. Задамо початкові умови:

$$Y(0, \varepsilon) = B_0(\varepsilon) = \varepsilon^{-1}\alpha_0 + B_0. \quad (2)$$

Запишемо систему (1) у векторній формі:

$$\varepsilon Y'(x, \varepsilon) - A(x)Y(x, \varepsilon) = H(x), \quad (3)$$

де

$$A(x, \varepsilon) = A_0(x) + \varepsilon A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -b(x) & -x\tilde{a}(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що векторне рівняння (3) рівносильне скалярному рівнянню типу Орра — Зоммерфельда третього і четвертого порядку вигляду

$$\varepsilon^2 y^{(4)}(x, \varepsilon) + a(x)y''(x, \varepsilon) + b(x)y'(x, \varepsilon) + c(x)y(x, \varepsilon) = h(x),$$

$$\varepsilon^2 y'''(x, \varepsilon) + a(x)y'(x, \varepsilon) + b(x)y(x, \varepsilon) = h(x).$$

Такі рівняння є математичними моделями для багатьох прикладних сфер, де виникають швидкі переходи. Зокрема, для задач гідродинамічної стійкості. То-

му визначення характеру поведінки розв'язків в околі точки звороту є актуальною проблемою і сьогодні.

Простір безрезонансних розв'язків

Простір функцій, в якому побудовано рівномірний асимптотичний розв'язок задачі має вигляд

$$\begin{aligned} R_{1r} &= \alpha_{1k}(x)U_i(t) + \varepsilon^{\gamma}\beta_{1k}(x)U_i'(t), & R_{2r} &= \alpha_{2k}(x)U_i(t) + \varepsilon^{\gamma}\beta_{2k}(x)U_i'(t), \\ R_{3r} &= f_k(x)\psi(t) + \varepsilon^{\gamma}g_k(x)\psi'(t), & R_{4r} &= \omega_k(x), \end{aligned}$$

де $\alpha_{ik}(x), \beta_{ik}(x), f_k(x), g_k(x), \omega_k(x) \in C^{\infty}[0, 5], i = 1, 2; k = \overline{1, 3}$.

З цих підпросторів одержимо новий простір як пряму суму

$$R_r = \bigoplus_{j=1}^3 R_{kr}.$$

Елемент простору безрезонансних розв'язків буде мати вигляд:

$$\tilde{Y}(x, t, \varepsilon) = \sum_{i=1}^2 \left[\alpha_{ik}(x)U_i(t) + \varepsilon^{\gamma}\beta_{ik}(x)U_i'(t) \right] + f_k(x)\nu(t) + \varepsilon^{\gamma}g_k(x)\nu'(t) + \omega_k(x),$$

де функції $U_1(t), U_2(t)$ — функції Ейрі — Дородніцина, а $\psi(t)$ — істотно особлива функція описана в Бобчко (2002).

Регуляризація сингулярностей. Згідно з розробленим методом (Зеленська, 2015), особлива точка $\varepsilon = 0$ у розв'язках системи породжує істотно особливі функції (ІОФ). З метою їх визначення введемо нову змінну

$$t = \varepsilon^{-p}\varphi(x),$$

де показник p і регуляризуюча функція $\varphi(x)$ підлягають визначенню. Після введення нової змінної t векторне рівняння (1) переходить в розширене векторне рівняння

$$\tilde{L}_{\varepsilon}\tilde{Y}(x, t, \varepsilon) \equiv \varepsilon^{1-p}\varphi' \frac{\partial \tilde{Y}(x, t, \varepsilon)}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{Y}(x, t, \varepsilon)}{\partial x} - A(x, \varepsilon)\tilde{Y}(x, t, \varepsilon) = H(x).$$

Задача для визначення регуляризуючої функції має вигляд

$$\varphi(x)\varphi'^2(x) = a(x) \equiv x\tilde{a}(x), \quad \varphi(0) = 0,$$

розв'язком якої є:

$$\varphi(x) = \left(\frac{3}{2} \int_0^x \sqrt{x\tilde{a}(x)} dx \right)^{\frac{2}{3}}.$$

Побудова формального розв'язку однорідної системи. При такому визначенні регуляризуючої функції існують нетривіальні розв'язки однорідної системи рівнянь $\Phi(x)Z_{kr}(x) = 0$, при $r = \overline{0, 2}$ вигляду

$$Z_{kr}(x) = \text{colon} \left(0, \frac{1}{\varphi'(x)} \beta_{i2r}(x), -\varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i3r}(x), 0, \beta_{i2r}(x), \beta_{i3r}(x) \right),$$

де $\beta_{ikr}(x)$, $i = 1; 2, k = 1; 4$ — до певного часу довільні, досить гладкі функції при $x \in [0, 5]$.

Розв'язки однорідної системи визначили як

$$D_k(x, t, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \left[\alpha_{ikr}(x) U_i(t) + \varepsilon^{\frac{1}{3}} \beta_{ikr}(x, \varepsilon) U_i'(t) \right], \quad i = \overline{1, 2},$$

де $\alpha_{ikr}(x) = \text{colon}(\alpha_{i1r}(x), \alpha_{i2r}(x), \alpha_{i3r}(x))$

$\beta_{ikr}(x) = \text{colon}(\beta_{i1r}(x), \beta_{i2r}(x), \beta_{i3r}(x))$ — відомі вектор-функції.

Звуження цього розв'язку при $t = \varepsilon^{\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x)$ і $i = \overline{1, 2}$:

$$D_k(x, \varepsilon^{\frac{2}{3}} \varphi(x), \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \left[\alpha_{ikr}(x) U_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \varphi(x)) + \varepsilon^{\frac{1}{3}} \beta_{ikr}(x) U_i'(\varepsilon^{\frac{2}{3}} \varphi(x)) \right], \quad i = \overline{1, 2}.$$

Побудова формального частинного розв'язку неоднорідної системи. Ряд

$$\tilde{Y}^{\text{част.}}(x, t, \varepsilon) = \sum_{r=-2}^{\infty} \mu^r \left[f_{kr}(x) \nu(t) + \mu g_{kr}(x) \nu'(t) \right] + \sum_{r=0}^{\infty} \mu^r \omega_{kr}(x)$$

визначає частинний розв'язок розширеного векторного рівняння (1).

Таким чином побудовано загальний розв'язок розширеного векторного рівняння (1)

$$\begin{aligned} \tilde{Y}(x, t, \varepsilon) &= \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \left[\sum_{i=1}^2 \left[\alpha_{ikr}(x) U_i(t) + \varepsilon^{\frac{1}{3}} \beta_{ikr}(x) U_i'(t) \right] \right] + \\ &+ \sum_{r=-2}^{\infty} \mu^r \left[f_{kr}(x) \nu(t) + \varepsilon^{\frac{1}{3}} g_{kr}(x) \nu'(t) \right] + \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \omega_{kr}(x). \end{aligned} \quad (4)$$

Висновок. Одержані результати сформулюємо у вигляді наступної теореми.

Теорема. Нехай для ССЗДР(1) виконуються умови (2). Тоді вище описаним методом можна побудувати асимптотику розв'язку виду (4).

Список літератури

- Бобочко, В. М., & Перестюк, М. О. (2002). *Асимптотичне інтегрування рівняння Ліувілля з точками звороту*. Київ: Наукова думка.
- Зеленская, И. А. (2015). Система сингулярно возмущенных уравнений с дифференциальной точкой поворота I рода. *Известия вузов. Математика*, (3), 63–74.

Моделирование английского аукциона

А. В. Капусто, Д.О. Банщикова

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

kapusto@tut.by, eco.banschik@bsu.by

Современный мировой рынок активно использует аукционные торги для продажи и покупки различных видов товаров и услуг. Данная форма торговли получила новый виток развития с появлением возможности осуществления сделок на онлайн-платформах. Этот способ проведения аукционов стал не только закономерным результатом переплетения реального и виртуального пространств настоящего времени, но и оказался самым востребованным в период мировой пандемии.

Целью исследований стала разработка имитационных моделей проведения аукционных интернет-торгов с повышением цены для выработки оптимальных стратегий поведения участников.

Прежде всего, остановимся на понятии «аукциона». Наиболее распространенное определение следующее: аукцион — публичная продажа товаров, ценных бумаг, имущества предприятий, произведений искусства, и других объектов, которая производится по заранее установленным правилам аукциона. Если обратиться к истории возникновения и становления аукционных торгов, то первые известные упоминания относятся к 6 веку до нашей эры и описывают ежегодный рынок невест в Древнем Вавилоне. «Современная эра аукционов началась в начале XVI–XVII вв. в Голландии, а в XVIII в. начали свою деятельность знаменитые аукционные дома «Sotheby's» и «Christie's», которые по сей день торгуют антиквариатом и произведениями искусства на суммы в миллиарды долларов» (Саватеев & Филатов, 2018).

Общим для всех аукционов является принцип состязательности между потенциальными покупателями. Победителем аукциона с правом приобретения объекта торгов признается лицо, выигравшее аукцион в соответствии с его правилами. Существование аукционов обусловлено неполной информированностью участников сделки. Если бы продавец обладал достоверной информацией о том, сколько каждый из покупателей готов заплатить за его товар (личная оценка покупателя), то достаточно было бы обратиться к покупателю с максимальной личной оценкой и продать ему товар по максимально возможной цене. На практике покупатель называет меньшую цену и, при необходимости, поднимает ее в процессе торгов исходя из своих возможностей. Таким образом, с позиции теории игр, проведение аукциона можно рассматривать как реализацию игры с неполной информацией между продавцом и несколькими покупателями, исходом которой являются факт продажи (или не продажи) объекта торга и продажная цена.

Исследования в области теории игр уже десять раз были удостоены Нобелевской премии в области экономики с момента ее учреждения в 1969 году, из них — трижды за исследования теории аукционов:

– 1996 год, «За фундаментальный вклад в экономическую теорию стимулов при наличии асимметричной информации» Нобелевскую премию по экономике получили Уильям Викри и Джеймс Миррлис. У. Викри первым опубликовал научные исследования в области аукционов еще в 1961 г. Используя инструменты теории игр У. Викри сформулировал ранний вариант фундаментальной теоремы теории аукционов об эквивалентности доходов;

– 2007 год, «За то, что заложили основы теории оптимальных механизмов» Нобелевской премии были удостоены Лео (Леонид) Гурвич, Эрик Маскин и Роджер Брюс Майерсон;

– 2020 год, Нобелевская премия в области экономических наук была присуждена Полу Милгрому и Роберту Уилсону «За усовершенствование теории аукционов и изобретение их новых форматов».

Наиболее распространенными форматами аукционов являются: аукцион с повышением цены (английский); аукцион со снижением цены (голландский); аукцион первой цены; аукцион второй цены (аукцион Викри).

Остановимся на механизме проведения английского аукциона. Продавец объявляет стартовую (начальную) цену, ниже которой продать товар будет нельзя. Каждый покупатель, участвующий в аукционе, имеет право объявить цену, более высокую, чем текущая; товар продается после того, как желающих поднимать цену больше не осталось. Покупателем будет тот, кто назвал самую высокую цену, которую он в итоге и заплатит.

Критериями, по которым оценивают, насколько хорошо работает механизм аукциона, являются эффективность и ожидаемый доход продавца. Аукцион называют эффективным, если в итоге аукционной процедуры объект торга достается участнику с самой высокой личной оценкой этого объекта. С точки зрения дохода аукцион тем лучше, чем больший доход организатору он приносит.

Заметим, что выбор начальной цены может определить исход аукциона, и, если она будет выше рыночной стоимости объекта торгов, оставит продавца со своим товаром. По словам Н.А. Музыченко, директора ЗАО «Центр промышленной оценки», «... три несостоявшихся аукциона — тревожный звонок для продавца. Надо снижать начальную цену лота, иначе продажа может затянуться на неопределенный срок. Поэтапное снижение цены заинтересует больше потенциальных покупателей, которые уже на аукционе сформируют итоговую рыночную стоимость».

Классический вариант снижения цены: после первого несостоявшегося аукциона — на 20%; после второго несостоявшегося аукциона — до 50%; после третьего несостоявшегося аукциона — до 80%» (Музыченко, 2018, октябрь 31).

Цена продажи лота на английском аукционе зависит от личных оценок покупателей. Кроме того, при переходе к электронному способу проведения аукциона, появляются дополнительные ограничения и особенности: временной промежуток проведения торгов определяется при выставлении лота на аукционной интернет-площадке; моменты повышения ставок приобретают случайный характер; при фиксированном времени завершения аукциона победитель

может быть определен в последние секунды проведения торгов и результат станет известен только после окончания аукциона; для отдельных интернет-аукционов оговорено смещение времени завершения аукциона в случае повышения ставок в определенном периоде до окончания торгов. Предварительная оценка ожидаемого дохода продавца, выработка стратегий поведения покупателей, предварительная оценка вариантов развития торгов могут быть выполнены с привлечением метода имитационного моделирования. Для реализации моделей торгов используют как специальные программы (Имитрейд, JASA, Steighlitz), так и приложение Microsoft Excel (Мицель & Грибанова, 2016).

При построении моделей торгов будем ориентироваться на принцип торгов, установленный на BelAuction.by — компании, предоставляющей комплексные услуги по организации и проведению аукционных интернет-торгов в сфере реализации транспортных средств на территории Республики Беларусь [4]. Все торги организуются и проводятся на фирменной интернет-площадке ООО «Бел-Аукцион-Групп». Участник аукциона может задать как свою текущую, так и максимальную ставку (личную оценку), которую он готов предложить за лот. Продавец и другие участники торгов не будут иметь информации о размере максимальной ставки. В процессе проведения торгов ставки от данного участника могут быть выполнены с использованием функции автоматического увеличения ставки на минимальный шаг аукциона (1 бел. руб.). Ставки от имени данного участника будут увеличиваться либо до окончания торгов, либо до превышения его личной оценки более высокой ставкой другого покупателя.

Механизм повышения ставок представлен в примере на сайте интернет-аукциона в разделе «Принцип торгов» (<https://belauction.by>). Начальная цена Лота 1000 бел. руб., Вы сделали первую ставку в 1100 бел. руб., текущая ставка увеличится на один минимальный шаг Аукциона и установится на уровне 1001 бел. руб. до тех пор, пока другой Покупатель не вступит в Торги на Лот. Другой Покупатель сделал ставку 1077 бел. руб. Текущая ставка установится на уровне 1078 (1077+1 бел. руб.) и Вы по-прежнему будете лидировать. Если очередной Покупатель сделает ставку в 1500 бел. руб., то он станет новым лидером с текущей ставкой на один минимальный шаг выше, чем ваша максимальная ставка в 1100 бел. руб., и текущая ставка установится на уровне 1101 бел. руб.

Для проведения имитационного моделирования торгов по продаже автомобиля требуется определить начальную цену лота, количество претендентов на лот, их личные оценки, интервал времени между поступлениями двух заявок. Опираясь на базу завершенных аукционов с привлечением статистического анализа, была разработана методика получения: 1) начальной цены лота; 2) количества претендентов на лот; 3) среднего значения личной оценки и соответствующего среднего квадратичного отклонения (исходя из предположения о нормальном распределении личных оценок покупателей) для последующей генерации личных оценок участников; 4) интервала времени между поступлением двух последовательных заявок, как случайной величины распределенной по показательному закону.

На рис 1. приведена таблица приложения Microsoft Excel результатов моделирования простейшего аукциона с параметрами: 1300 рублей — начальная цена, количество участников — 8; личные оценки соответствуют максимальным предложенным суммам состоявшегося аукциона из базы завершенных лотов; заявки поступают последовательно и равномерно во временном диапазоне действия аукциона. Определяющим фактором отношения участников к покупке на каждом шаге аукциона в данном случае является соотношение текущей ставки и личной оценки участника.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
4	Стартовая цена	1300	участник	участник (1)	участник (2)	участник(3)	участник (4)	участник (5)	участник(6)	участник (7)	участник (8)
5	Шаг лота	0,40	личная оцен	6500	9 600	10300	7500	10000	10600	11200	11800
6	Шаг аукциона	Цена лота	Согласие участников								Итог
7			1	2	3	4	5	6	7	8	
8	1	1300	Да	Да	Да	Да	Да	Да	Да	Да	Нет
9	2	1820	Да	Да	Да	Да	Да	Да	Да	Да	Нет
10	3	2340	Да	Да	Да	Да	Да	Да	Да	Да	Нет
11	4	2860	Да	Да	Да	Да	Да	Да	Да	Да	Нет
12	5	3380	Да	Да	Да	Да	Да	Да	Да	Да	Нет
13	6	3900	Да	Да	Да	Да	Да	Да	Да	Да	Нет
14	7	4420	Да	Да	Да	Да	Да	Да	Да	Да	Нет
15	8	4940	Да	Да	Да	Да	Да	Да	Да	Да	Нет
16	9	5460	Да	Да	Да	Да	Да	Да	Да	Да	Нет
17	10	5980	Да	Да	Да	Да	Да	Да	Да	Да	Нет
18	11	6500	Да	Да	Да	Да	Да	Да	Да	Да	Нет
19	12	7020	Нет	Да	Да	Да	Да	Да	Да	Да	Нет
20	13	7540	Нет	Да	Да	Нет	Да	Да	Да	Да	Нет
21	14	8060	Нет	Да	Да	Нет	Да	Да	Да	Да	Нет
22	15	8580	Нет	Да	Да	Нет	Да	Да	Да	Да	Нет
23	16	9100	Нет	Да	Да	Нет	Да	Да	Да	Да	Нет
24	17	9620	Нет	Нет	Да	Нет	Да	Да	Да	Да	Нет
25	18	10140	Нет	Нет	Да	Нет	Нет	Да	Да	Да	Нет
26	19	10660	Нет	Нет	Нет	Нет	Нет	Нет	Да	Да	Нет
27	20	11180	Нет	Нет	Нет	Нет	Нет	Нет	Да	Да	Нет
28	21	11700	Нет	Нет	Нет	Нет	Нет	Нет	Нет	Да	Нет
29	22	12220,0	Нет	Нет	Нет	Нет	Нет	Нет	Нет	Нет	Да
30	23	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Рис. 1. Результаты моделирования аукциона. Источник: авторская разработка

По результатам моделирования (рис. 1) цена продажи составила 11700 руб., победителем стал участник 8 с личной оценкой лота в 11800 руб.

Таким образом, привлечение имитационного моделирования аукционов позволит продавцу грамотно определить начальную цену и увеличить доход, а заинтересованному в победе игроку — разработать оптимальную стратегию поведения.

Список литературы

- Мицель, А. А., & Грибанова, Е. Б. (2016). *Имитационное моделирование экономических процессов в Excel*. Юрга: Изд-во ЮТИ (филиал) ТПУ.
- Музыченко, Н. А. (2018, октябрь 31). Как работают аукционы и что их ждет в будущем. https://probusiness.io/government_regulation/5223-kak-rabotayut-aukciony-i-что-ikh-zhdet-v-budushchem.html
- Саватеев, А. В., & Филатов, А. Ю. (2018). Теория и практика аукционов. *Вестник ВГУ. Серия: Экономика и управление*, (3), 119–131.

Статистические методы анализа данных в оценке эффективности игровых методик обучения

А. В. Капусто, С. Н. Костюкова

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

kapusto@tut.by, svet222011@ya.ru

Развитие рыночной экономики требует формирования нового типа личности, который принципиально отличается от типа личности, воспитанного в централизованной экономике. Современное общество диктует свои правила: сегодня наиболее конкурентоспособен и успешен тот, кто обладает предприимчивостью и высокими коммуникативными навыками, а поэтому есть необходимость развивать такие качества, как умение быть мобильным в экономической среде, готовность к риску, смене профессии, предприимчивость. Полезная активность подростков, молодежи — главный критерий оценки ее успеваемости.

Самой трудной задачей здесь является фиксирование внимания на обучении предпринимательству, замена узкой бизнес-ориентации на цели развития типа личности предпринимателя в широком смысле, и формирование соответствующих навыков личности, способствующих достижению уровня «эффективного» предпринимательского поведения.

Одним из направлений, приобретающих растущую популярность среди эффективных средств обучения молодежи, находящейся на разных образовательных уровнях, выступают игровые технологии (Бейсембаева, 2018). Результативность игровых методов обусловлена такими дидактическими свойствами игры, как:

- двойственность — сочетание условности и реальности в игровой ситуации (подключается воображение, творческое сознание);
- неопределенность исхода — возможность для игрока влиять на ситуацию, т.е. актуализируются возможности игрока — переходит из потенциального состояния в актуальное;
- добровольность — способствует росту внутренней организованности;
- полифункциональность — воспроизведение особенностей различных видов деятельности и расширение возможностей варьирования условий развития личности.

В этой связи большое значение приобретает диагностика результативности игровых методов обучения предпринимательству. При этом особое практическое значение получает выбор инструментов выполнения оценки эффективности. Для решения поставленной задачи было выполнено исследование, целью которого стала разработка методики оценки эффективности игровых методов обучения и апробация на примере игры с экономическим содержанием.

Этапы исследования:

- 1) проведение предварительной диагностики базового уровня знаний и навыков в сфере предпринимательства среди молодежи;

2) непосредственное обучение с использованием настольной экономической игры «БИЗНЕСБОЛ»;

3) обоснование инструментов оценки эффективности игровых методов обучения;

4) послеигровая диагностика приращения знаний молодежи в сфере предпринимательства.

Предварительная диагностика включала анкетирование и обработку результатов опроса. Требовалось определить перечень характеристик, позволяющих оценить базовый уровень знаний, как с позиции общей подготовки, так и при детализации направлений исследования, связь между уровнем подготовки в вопросах экономики и психологии, однородность выборочных совокупностей. Весь комплекс работ по реализации этого этапа был разбит на три шага: составление анкет и проведение опроса, обработка результатов анкетирования с привлечением методов статистического анализа, подготовка заключения об уровне знаний. Исходя из целей исследования, были разработаны анкеты по двум направлениям опроса: блок «Экономика» (блок Э) и блок «Психология» (блок П).

Согласно содержанию блока Э, респондентам были заданы вопросы, касающиеся знаний основных экономических понятий, таких как инвестиции, активы, конкуренция, доходы, прибыль, рентабельность и др. Блоку П соответствовали вопросы касающиеся знаний и навыков ведения деловых переговоров, освоения успешных моделей и правил ведения переговоров, управления конфликтами, применения моделей влияния и убеждения, как конструктивных приемов в переговорном процессе и др.

На втором шаге первого этапа, применяя методы описательной статистики, была выполнена обработка результатов анкетирования выборки из 100 респондентов (студенты первого курса по различным специальностям) (Боченина и др., 2020.). Для обработки результаты были разделены на две группы: 60 анкет студентов экономического профиля (группа 1) и 40 анкет студентов технического профиля (группа 2). Группировочным признаком для построения статистических рядов наблюдений стало количество верных ответов. При этом были использованы два подхода: количество верных ответов по каждому блоку вопросов внутри специальности; количество верных ответов по полной анкете, т.е. по общей совокупности вопросов (блок С). Предварительная обработка анкет позволила сформировать по два статистических ряда наблюдений для каждой специальности исходя из разделения вопросов по блокам, а также по одному статистическому ряду для каждой специальности при общем подсчете верных ответов по каждой анкете. Для каждого из полученных статистических рядов, с привлечением встроенной функции «Описательная статистика» процедуры «Анализ данных» приложения Microsoft Excel, была построена описательная статистика (числовые характеристики совокупности: выборочное среднее значение, медиана, мода, дисперсия, среднее квадратичное отклонение (СКО), коэффициент эксцесса и коэффициент асимметрии), дополнительно были вычислены

коэффициенты вариации, получено графическое представление данных. В качестве показателей оценки начального уровня знаний были использованы выборочные средние значения и коэффициенты вариации. Сравнение выделенных числовых характеристик было выполнено:

- 1) по двум блокам вопросов для каждой специальности;
- 2) по двум блокам вопросов для всей совокупности опрошенных;
- 3) по полным анкетам для двух специальностей.

Сводные результаты этапа предварительной диагностики представлены значениями выборочных средних, СКО и коэффициентов вариации, таблица 1.

Таблица 1 — Сводные результаты этапа предварительной диагностики респондентов

Показатель	Группа 1 блок Э	Группа 1 блок П	Группа 1 блок С	Группа 2 блок Э	Группа 2 блок П	Группа 2 блок С
Выборочное среднее	7,067	6,0	13,067	7,10	6,375	13,475
СКО	2,243	2,113	3,838	1,881	1,727	3,058
Коэффициент вариации, %	31,73	35,22	29,37	26,50	27,10	22,691

Источник: авторская разработка

Второй этап состоял в непосредственном обучении молодежи с использованием настольной экономической игры «БИЗНЕСБОЛ».

Третий этап исследования состоял в обосновании выбора инструментов оценки эффективности игровых методов обучения. А именно, было принято решение о проведении повторного анкетирования обучающихся с использованием анкеты, разработанной на первом этапе. Далее, для формирования оценки уровня знаний на основе результатов опроса, потребуется построение статистических рядов и вычисление всех числовых характеристики, как и при проведении предварительной диагностики. Вместе с тем, сравнение выборочных средних значений и коэффициентов вариации, выполненное по трем направлениям (по двум блокам вопросов для каждой специальности; по двум блокам вопросов для всей совокупности опрошенных; по полным анкетам для двух специальностей) позволит оценить только непосредственную картину знаний. Для изучения динамики влияния игровых методов обучения на уровень полученных знаний становится необходимым вычисление новых показателей, поэтому обоснованным представляется привлечение относительных величин, что позволит установить изменение уровня знаний в процентном выражении.

Послеигровая диагностика была выполнена на основе методики, разработанной на третьем этапе исследования. Сравнительный анализ числовых характеристик позволил определить характер динамики влияния игры на уровень знаний.

Сводные результаты этапа послеигровой диагностики, а также отклонения от соответствующих значений, полученных при выполнении диагностики предварительного шага, представлены в таблице 2.

Таблица 2 — Сводные результаты этапа послеигровой диагностики респондентов

Показатель	Группа 1 блок Э	Группа 1 блок П	Группа 1 блок С	Группа 2 блок Э	Группа 2 блок П	Группа 2 блок С
Выборочное среднее	8,033	7,117	15,15	8,30	7,3	15,6
СКО	1,390	1,561	2,421	1,487	1,450	2,557
Коэффициент вариации, %	17,30	21,94	15,98	17,91	19,90	16,39
Отклонение выборочного среднего	0,967	1,117	2,084	1,2	0,975	2,125
Относительное приращение выборочного среднего, %	13,71	18,62	15,94	12,68	14,59	15,81

Источник: авторская разработка

Анализ полученных результатов показывает, что для каждой группы увеличилось среднее количество правильных ответов по каждому из блоков и, соответственно, по всей анкете в целом. Для группы 2 средний балл по блоку Э вырос на 0,967, по блоку П — на 1,117 и по блоку С — на 2,084; для группы 2 на 1,2, 0,975 и 2,125, соответственно. Значения относительных приращений выборочного среднего представлены в последней строке таблицы 2 и показывают, что уже однократное проведение игры позволило получить темп прироста количества верных ответов в пределах от 12,68% до 15,94%. Анализируя значения коэффициента вариации, можно заметить, что увеличилась однородность групп по всем вариантам группировки.

Таким образом, разработанная методика позволила оценить эффективность игровых методов обучения предпринимательству среди молодежи и тем самым определить уровень приращения знаний молодежи посредством проведения обучающей экономической игры.

Список литературы

- Бейсембаева, А. К. (2018). Игровое моделирование как инновационная технология в образовании. *Молодой ученый*, (48), 273–275. <https://moluch.ru/archive/234/54247>.
- Боченина, М. В., Бурова, Н. В., Елисеева, И. И., & Михайлов, Б. А. (2020). *Статистика: Учебник для прикладного бакалавриата* (3-е изд.). (И. И. Елисеева, ред.). Москва: Юрайт.

Моделювання процесу руйнування стрижня внаслідок втоми в умовах багато циклового кручення за допомогою рекурентних співвідношень

Ю. М. Кобзар

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна
creep@inmech.kiev.ua

Запропонована рекурентна процедура, яка дозволяє в кожній чверті кожного циклу зміни симетричного кручення визначати в залежності від початкових фізико-механічних властивостей стрижня, структурні зміни, які кількісно характеризуються змінами маси, щільності, напружень, модуля пружності в кожній чверті з врахуванням їх обчислених значень з попередньої чверті циклу. Критерієм руйнування при втомі є виконання енергетичної нерівності.

Ключові слова: рекурентна процедура, енергетичний критерій руйнування при втомі, кручення.

У моделі багато циклової втоми стрижня під дією симетричного кручення на кожному циклі перераховуються характерні величини процесу, а більшість з них у кожній чверті поточного циклу (Кобзар, 2020). Досліджується руйнування матеріалів, коли змінюється несучий об'єм зразка і не враховуються малі зміни форми. На кожному циклі навантаження відбуваються структурні зміни, які спричиняють зміни маси, щільності, напруження, модуля зсуву. Особливостями такого рекурентного підходу є розділення обчислень характерних величин процесу в циклах навантаження за та проти годинникової стрілки по чвертях циклу де кручення за викликає розтяг, а кручення проти стиск. У попередній чверті кручення, що характеризується стиском визначаються маса, амплітудне напруження, модуль зсуву, які є початковими для наступної чверті циклу кручення, що характеризується розтягом у якому визначаються щільність та амплітудне напруження і ці процедури по чергово повторюються на кожній наступній чверті циклу. Прийнято, що втомне руйнування стрижня відбувається на тому циклі, на якому не виконується нерівність, яка характеризує процес. Межа втоми досягається, коли перевищується умовна база випробувань без руйнувань. Ця нерівність отримана з балансу енергій стрижня — за помпованої пружної та енергії яку викликає дія зовнішнього навантаження. Цей підхід є розвитком моделі руйнування при багато цикловому симетричному розтязі — стискові (Кобзар, 2015; Кобзар, 2019).

Критерієм крихкого руйнування є виконання нерівності

$$\frac{M_{\text{в}}^2 L^2}{m_1 \omega_0^2} - \frac{\tau_{aj}(i)^2 m_j(i)}{2G_j(i) \rho_j(i)} < 0, \quad (1)$$

на j -й чверті циклу i -го циклу і цей цикл $i = N_a < N_0$ є межею циклічної довговічності при початковій дотичній напрузі τ_1 викликаний циклічним симетричним моментом M_a . Критерієм досягнення межі втоми є не виконання нерівно-

сті (1) для $i \geq N_0$ за межею прийнятої бази випробувань N_0 .

Нехай на ізотропний стрижень з коефіцієнтом Пуасона μ , межею міцності σ_b і початковими — модулем зсуву G_1 , масою m_1 , щільністю ρ_1 , довжиною l_1 , площею перетину F_1 , діє симетричний періодичний скручувальний момент M_i , з амплітудним значенням $M_a = const$. Початкові дотичні напруження

$$\tau_0 = \frac{M_{aK}}{\pi R_0^3}$$

менше межі $\sigma_{\text{щ}}$ пропорційності. Циклічні дотичні напруження

$$\tau(i) = \tau_a(i) \sin \Omega t,$$

де $\tau_a(i) = M_{aK} / W_p(i)$; $W_p(i)$ — амплітудне значення полярного моменту опору поперечного перетину стрижня, що виникають у стрижні з початковим об'ємом $V_1 = m_1 / \rho_1$ викликають на кожному i -му циклі стиск у першій $j = 1$, третій $j = 3$ та розтяг у другій $j = 2$, четвертій чвертях.

Початкова пружна енергія, що накопичується у стрижні з амплітудою в одиниці об'єму $W_1 = \tau_{a1}^2 / 2G_1$ при крученні буде

$$U = W_1 V_1 = \frac{\tau_k^2}{4G_2(0)} \frac{m}{\rho}. \quad (2)$$

Найбільша потенційна енергія U , що прикладена ззовні при циклічному крученні стержня, дорівнює половині добутку коефіцієнту жорсткості $k = m\omega_0^2$ гармонічного моменту з частотою Ω на квадрат найбільшого кута закручування

$$\phi = -\frac{M_{aK} L}{m\omega_0^2},$$

де ω початкова власна частота стрижня при співвідношенні $\Omega \ll \omega$ між частотами, і рівна

$$U = \frac{1}{2} \frac{M_k^2 L^2}{m\omega_0^2}. \quad (3)$$

Ці енергії (2), (3), при найбільших кутах закручування, рівні між собою

$$U = \frac{1}{2} \frac{M_k^2 L^2}{m\omega_0^2} = \frac{\tau_k^2}{4G_2(0)} \frac{m}{\rho}. \quad (4)$$

З балансу енергій (4), знаходимо початкову власну частоту

$$\omega_0 = \frac{M_k L}{m\tau_k} \sqrt{2G_2(0)\rho}$$

стрижня.

Прийнято, що зовнішнє амплітудне значення руйнуючого моменту є

$$M_B = \frac{m\tau_B\omega_0}{L\sqrt{2G_2(0)\rho}},$$

а енергія руйнування

$$U_0 = \frac{1}{2} \frac{M_B^2 L^2}{m\omega_0^2}.$$

Розглянемо рекурентний процес накопичення втоми на довільному i -му циклі. У першій чверті $j = 1$ циклу при стисковій проти годинникової стрілки прийнято, що довжина L та щільність $\rho_4(i-1) = \rho_1(i)$ не змінюється. Стан стрижня в цій чверті циклу i та четвертій чверті попереднього циклу $i-1$ зв'язують рівності

$$1 = \frac{\rho_4(i-1)\pi(R_4(i-1))^2 L}{m_4(i-1)} = \frac{\rho_1(i)\pi(R_1(i))^2 L}{m_1(i)}, \quad (5)$$

де $m_1(i)$ — несуча маса стрижня; $R_1(i)$ — його радіус.

З допомогою рівнянь (5) залежність між масами та радіусами буде

$$\frac{m_1(i)}{m_4(i-1)} = \frac{(R_1(i))^2}{(R_4(i-1))^2}, \quad (6)$$

де $m_1(i)$ — невідома маса. Баланс енергій цієї чверті циклу $j = 1$ даного i -го циклу має вигляд

$$U = \frac{1}{2} \frac{M_{ak}^2 L^2}{m_1(i)\omega_0^2} = \frac{(\tau_{a1}(i))^2}{4G_1(i)} \frac{m_1(i)}{\rho_1(i)}. \quad (7)$$

Максимальне амплітудне напруження є

$$\tau_{a1}(i) = G_1(i)\gamma_1(i). \quad (8)$$

Відношення радіусів через напруження та кут зсуву попереднього циклу представляється, як

$$\left(\frac{R_1(i)}{R_4(i-1)} \right)^4 = \frac{\tau_{a4}(i-1)}{G_1(i)\gamma_4(i-1)}. \quad (9)$$

Тоді, відношення початкового радіусу до попереднього, урахувавши (6), (8), (9) виходячи з балансу енергій (7), буде

$$\left(\frac{R_1(i)}{R_4(i-1)} \right)^2 = \frac{2\rho_4(i-1)M_{ak}^2 L^2}{\omega_0^2 m_4(i-1)^2 \gamma_4(i-1) \tau_4(i-1)}. \quad (10)$$

Знаючи відношення радіусів (10) визначається новий модуль зсуву з (9), який дорівнює

$$G_1(i) = \frac{\tau_4(i-1)}{\gamma_4(i-1)} \left(\frac{R_4(i-1)}{R_1(i)} \right)^4 \quad (11)$$

та кут зсуву

$$\gamma_1(i) = \gamma_4(i-1) \frac{R_1(i)}{R_4(i-1)}. \quad (12)$$

Маса (6), напруження (8) та модуль зсуву (11), знайдені в цій чверті циклу, стають початковими даними для наступної чверті цього циклу.

У другій $j = 2$ чверті циклу при крученні проти годинникової стрілки прийнято, що стрижень розтягується, його маса, довжина та модуль зсуву не змінюються, але змінюються щільність та об'єм. Стан стрижня на цій чверті циклу зв'язують рівності аналогічні (5), з їх допомогою знаходиться залежність між щільностями та радіусами

$$\frac{\rho_2(i)}{\rho_1(i)} = \frac{(R_1(i))^2}{(R_2(i))^2}, \quad (13)$$

де $\rho_2(i)$ — невідома щільність. Після серії обчислень аналогічних (6), (8), (9), (12) знаходяться нові радіус, кут зсуву, напруга та щільність, які стають початковими даними для наступної чверті циклу. Маса за припущенням не змінювалась, а модуль зсуву не перераховувався в цій чверті $j = 2$ розтягу при крученні в i циклі. Далі перевіряється нерівність (1), у разі її виконання, руйнування відбулося, розрахунки припиняються, у противному випадку обчислення продовжуються. Такі ж рекурентні обчислення проводяться для кожної чверті наступних циклів. Чисельна апробація моделі знаходиться в стадії розробки і реалізується в доступній системі комп'ютерної алгебри. Запропонована модель уперше прогнозує руйнування від втоми, при симетричному циклічному крученні стрижня не використовуючи при цьому попередніх даних результатів лабораторних випробовувань на втому.

Список літератури

- Кобзар, Ю. М. (2019). Модель структурних змін та руйнування гладких циліндричних стрижнів при одноосному симетричному розтязі-стиску. У *Матеріалах XX МНТК «Прогресивна техніка, технологія та інженерна освіта», 10–13 вересня* (с. 46–49). Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського.
- Кобзар, Ю. М. (2020). Модель руйнування гладких циліндричних стрижнів при багато цикловому симетричному крученні. У *Матеріалах XXI МНТК «Прогресивна техніка, технологія та інженерна освіта», 6–9 жовтня* (с. 44–47). Київ: КПІ ім. І. Сікорського.
- Кобзарь, Ю. М. (2015). К оценке усталостной долговечности гладких цилиндрических стержней при одноосном симметричном растяжении сжатии. *Авиационно-космическая техника и технология*, (9), 6–14.

Диференціальні рівняння радіаційно-індукованої сегрегації в N-компонентних концентрованих металевих стопах

О. В. Коропов, Р. В. Скороход

Інститут прикладної фізики НАН України, Суми, Україна
r.skorokhodqq@gmail.com

Сформульована система $N+1$ пов'язаних між собою нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних, яка описує радіаційно-індуковану сегрегацію в N -компонентних концентрованих металевих стопах. Проаналізований квазістаціонарний (усталений) режим радіаційно-індукованої сегрегації. Проведено комп'ютерне моделювання радіаційно-індукованої сегрегації в концентрованих стопах Fe-20%Cr-8%Ni.

Ключові слова: радіаційно-індукована сегрегація, реакторне опромінення, N -компонентні металеві стопи, матеріали ядерних реакторів, вакансії, міжвузловини, дифузійні потоки, квазістаціонарний режим, реактори четвертого покоління.

1. Вступ. З усіх дифузійних процесів, які протікають у металевих системах і, узагалі кажучи, у твердих тілах (Stark, 1976; Бокштейн, & Ярославцев, 2005), практично найбільш важливими є процеси взаємної дифузії. Такі процеси являються основними в бінарних та багатоконцентрованих концентрованих металевих стопах за наявності просторової неоднорідності їх атомного складу (Боровский и др., 1973; Гуров и др., 1981). Багатоконцентровані металеві стопи (спеціальні нержавіючі сталі, стопи на основі Zr та ін.) є основними конструкційними матеріалами сучасної ядерної енергетики (Воеводин & Неклюдов, 2006¹; 2006²; Idrees et al., 2013; Séran & Le Flem, 2017; Henry & Maloy, 2017; Ukaï et al., 2017; Zinkle, 2017). Високотемпературні експлуатаційні властивості таких стопів безпосередньо пов'язані із процесами взаємної дифузії в них. За рахунок процесів взаємної дифузії в умовах реакторного опромінення при підвищених температурах відбувається просторовий перерозподіл атомів стопу у вихідному матеріалі (Was, 2017), що призводить до збагачення чи збіднення певними атомами областей біля вільних поверхонь, меж між фазами, міжзеренних меж, дислокаційних ліній, пор, нанокластерів та ін. (радіаційно-індукована сегрегація (PIS)). Проблемі PIS присвячена велика кількість робіт (Was, 2017; Wiedersich et al., 1979; Grandjean et al., 1994; Nastar & Martin, 1999; Aitkaliyeva et al., 2017; Skorokhod et al., 2018; Скороход & Коропов, 2019; Koropov & Skorokhod, 2019; Коропов, 2016; 2017; Скороход & Коропов, 2020 та ін.). Особливо гостро проблема PIS, яка призводить до погіршення експлуатаційних властивостей матеріалів, постає при розробці конструкційних матеріалів ядерних реакторів четвертого покоління (Buckthorpe, 2017; Aitkaliyeva et al., 2017). Реальні стопи, які використовуються в ядерних реакторах, зазвичай містять чотири та більше компонентів і число цих компонентів має тенденцію до збільшення (див.

наприклад, Воеводин & Неклюдов, 2006¹; 2006²; Zinkle, 2017). Прикладами можуть слугувати стопи на основі Zr: Zr-Fe-Sn-Cr, Zr-Ni-Fe-Sn-Cr (Воеводин & Неклюдов, 2006¹; 2006²), багатокомпонентні аустенітні нержавіючі сталі: Fe-Ni-Cr-Mo-Ti-Nb-Si-P-Mn-B, Fe-Ni-Cr-Mo-C-Ti-Si-V-P-S-Mn-B (Séran & Le Flem, 2017), феритно-мартенситні стопи: Fe-C-Si-Mn-Cr-Ni-Mo-V-W-Nb-B-N, Fe-C-Si-Mn-Cr-Ni-W-P-S-Ti-N-O-Y₂O₃ (Henry, & Maloy, 2017; Ukai et al., 2017), високоентропійні стопи (Zinkle, 2017) та ін. (Воеводин, & Неклюдов, 2006¹; 2006²; Zinkle, 2017).

2. Вихідні рівняння. Далі будемо розглядати N-компонентний концентрований металевий стоп, який складається з атомів сорту $M = 1, 2, \dots, N$, які розподілені у стопі випадковим чином. Зміна локальних концентрацій точкових дефектів (ТД) — міжвузловин $C_i = C_i(\mathbf{r}, t)$ та вакансій $C_v = C_v(\mathbf{r}, t)$ під дією реакторного опромінення описуються рівняннями (Was, 2017; Wiedersich et al., 1979)

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = -\nabla \mathbf{J}_i + K_0 - R, \quad \frac{\partial C_v}{\partial t} = -\nabla \mathbf{J}_v + K_0 - R, \quad (1)$$

де \mathbf{J}_i і \mathbf{J}_v — дифузійні потоки міжвузловин та вакансій відповідно, K_0 — просторово-однорідна швидкість генерації радіаційних ТД (пар Френкеля) за умов реакторного опромінення, $R = K_{iv} C_i C_v$ — швидкість рекомбінації ТД.

Потоки ТД (міжвузловин \mathbf{J}_i і вакансій \mathbf{J}_v) є сумами парціальних потоків \mathbf{J}_i^M і \mathbf{J}_v^M , які пов'язані з перескоками атомів певного сорту $M = 1, 2, \dots, N$:

$$\mathbf{J}_i = \mathbf{J}_i^1 + \mathbf{J}_i^2 + \dots + \mathbf{J}_i^N = \sum_M \mathbf{J}_i^M, \quad (2)$$

$$\mathbf{J}_v = \mathbf{J}_v^1 + \mathbf{J}_v^2 + \dots + \mathbf{J}_v^N = \sum_M \mathbf{J}_v^M. \quad (3)$$

Парціальні потоки міжвузловин \mathbf{J}_i^M співпадають з відповідними потоками атомів \mathbf{J}_M^i , у той час як парціальні потоки вакансій \mathbf{J}_v^M направлені у сторону, протилежну відповідним парціальним потокам атомів \mathbf{J}_M^v :

$$\mathbf{J}_i^1 = \mathbf{J}_1^i, \quad \mathbf{J}_i^2 = \mathbf{J}_2^i, \quad \dots, \quad \mathbf{J}_i^N = \mathbf{J}_N^i,$$

$$\mathbf{J}_v^1 = -\mathbf{J}_1^v, \quad \mathbf{J}_v^2 = -\mathbf{J}_2^v, \quad \dots, \quad \mathbf{J}_v^N = -\mathbf{J}_N^v.$$

Тоді співвідношення (2), (3) можуть бути записані у вигляді

$$\mathbf{J}_i = \mathbf{J}_1^i + \mathbf{J}_2^i + \dots + \mathbf{J}_N^i = \sum_M \mathbf{J}_M^i,$$

$$\mathbf{J}_v = -\left(\mathbf{J}_1^v + \mathbf{J}_2^v + \dots + \mathbf{J}_N^v\right) = -\sum_M \mathbf{J}_M^v.$$

Рівняння дифузії для атомів стопу такі:

$$\frac{\partial C_1}{\partial t} = -\nabla \mathbf{J}_1, \quad \frac{\partial C_2}{\partial t} = -\nabla \mathbf{J}_2, \quad \dots, \quad \frac{\partial C_N}{\partial t} = -\nabla \mathbf{J}_N, \quad (4)$$

де $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \dots, \mathbf{J}_N$ — повні дифузійні потоки атомів сорту $M = 1, 2, \dots, N$ відповідно, які є сумами парціальних дифузійних потоків атомів через міжвузловини \mathbf{J}_M^i та атомів через вакансії \mathbf{J}_M^v :

$$\mathbf{J}_1 = \mathbf{J}_1^i + \mathbf{J}_1^v, \quad \mathbf{J}_2 = \mathbf{J}_2^i + \mathbf{J}_2^v, \quad \dots, \quad \mathbf{J}_N = \mathbf{J}_N^i + \mathbf{J}_N^v,$$

C_1, C_2, \dots, C_N — абсолютні концентрації атомів сорту $M = 1, 2, \dots, N$ відповідно, які задовільняють умови

$$C_1(\mathbf{r}, t) + C_2(\mathbf{r}, t) + \dots + C_N(\mathbf{r}, t) = \sum_M C_M(\mathbf{r}, t) = \mathcal{N}, \quad (5)$$

$$\nabla C_1(\mathbf{r}, t) + \nabla C_2(\mathbf{r}, t) + \dots + \nabla C_N(\mathbf{r}, t) = \sum_M \nabla C_M(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (6)$$

\mathcal{N} — повне число атомів в одиниці об'єму стопу ($\mathcal{N} = const$). Уважається, що всі відносні концентрації атомів стопу $\xi_M = C_M/\mathcal{N}$, взагалі кажучи, не малі (концентрований стоп).

3. Дифузійні потоки ТД та атомів. Дифузійний потік міжвузловин

$$\mathbf{J}_i = \sum_M \mathbf{J}_i^M = \sum_M \mathbf{J}_M^i = \sum_M \left(-D_M^i \chi \nabla C_M - D_i^M \nabla C_i\right) = -\chi \sum_M D_M^i \nabla C_M - D_i \nabla C_i, \\ M = 1, 2, \dots, N$$

з використанням співвідношення (6) може бути представленим у вигляді

$$\mathbf{J}_i = -\Omega C_i \chi \sum_L \left(d_{L,i} - d_{N,i}\right) \nabla C_L - D_i \nabla C_i, \quad L = 1, 2, \dots, N-1. \quad (7)$$

Тут D_M^i і D_i^M — парціальні коефіцієнти дифузії атомів сорту M через міжвузловини і міжвузловин через атоми сорту M відповідно, χ — термодинамічний фактор, $d_{M,i}$ — сталі, які не залежать від концентрацій (diffusivity coefficients (Was, 2017)), D_i — повний коефіцієнт дифузії міжвузловин, $\Omega = 1/\mathcal{N}$ — середній об'єм, що припадає на один атом у стопі,

$$D_M^i = d_{M,i} \Omega C_i, \quad D_i^M = d_{M,i} \Omega C_M, \quad D_i = \sum_M D_i^M = \Omega \sum_M d_{M,i} C_M.$$

Дифузійний потік вакансій

$$\mathbf{J}_v = \sum_M \mathbf{J}_v^M = -\sum_M \mathbf{J}_M^v = \sum_M \left(D_M^v \chi \nabla C_M - D_v^M \nabla C_v \right) = \chi \sum_M D_M^v \nabla C_M - D_v \nabla C_v, \\ M = 1, 2, \dots, N$$

подамо у вигляді

$$\mathbf{J}_v = \Omega C_v \chi \sum_L \left(d_{L,v} - d_{N,v} \right) \nabla C_L - D_v \nabla C_v, \quad L = 1, 2, \dots, N-1. \quad (8)$$

Тут D_M^v і D_v^M — парціальні коефіцієнти дифузії атомів сорту M через вакансії та вакансій через атоми сорту M відповідно, $d_{M,v}$ — сталі, які не залежать від концентрацій (Was, 2017), D_i — повний коефіцієнт дифузії вакансій,

$$D_M^v = d_{M,v} \Omega C_v, \quad D_v^M = d_{M,v} \Omega C_M, \quad D_v = \sum_M D_v^M = \Omega \sum_M d_{M,v} C_M.$$

Дифузійний потік атомів сорту M дорівнює

$$\mathbf{J}_M = \mathbf{J}_M^i + \mathbf{J}_M^v, \quad M = 1, 2, \dots, N,$$

де \mathbf{J}_M^i і \mathbf{J}_M^v — парціальні дифузійні потоки атомів сорту M через міжвузловини та вакансії відповідно:

$$\mathbf{J}_M^i = -D_M^i \chi \nabla C_M - D_i^M \nabla C_i, \quad \mathbf{J}_M^v = -D_M^v \chi \nabla C_M + D_v^M \nabla C_v.$$

Остаточно одержимо

$$\mathbf{J}_M = -D_M \chi \nabla C_M + \Omega C_M \left(d_{M,v} \nabla C_v - d_{M,i} \nabla C_i \right), \quad (9)$$

де $D_M = D_M^i + D_M^v$ — повний коефіцієнт дифузії атомів сорту M .

Із $N+2$ потоків $\mathbf{J}_i, \mathbf{J}_v, \mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \dots, \mathbf{J}_N$, представлених формулами (7)–(9), тільки $N+1$ є незалежними, оскільки потоки атомів і ТД (міжвузловин і вакансій) повинні задовольняти умові балансу

$$\mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2 + \dots + \mathbf{J}_N = \sum_M \mathbf{J}_M = \mathbf{J}_i - \mathbf{J}_v. \quad (10)$$

Можна безпосередньо перевірити, що

$$\sum_M \mathbf{J}_M - \mathbf{J}_i + \mathbf{J}_v = -D_N \chi \sum_M \nabla C_M = 0,$$

тобто умова (10) дійсно виконується.

4. Одержані рівняння РС. Підстановка виразів для дифузійних потоків (7)–(9) у вихідні рівняння (1), (4) дає

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = \nabla \left[\Omega C_i \chi \sum_L \left(d_{L,i} - d_{N,i} \right) \nabla C_L + D_i \nabla C_i \right] + K_0 - R, \quad (11)$$

$$\frac{\partial C_v}{\partial t} = -\nabla \left[\Omega C_v \chi \sum_L \left(d_{L,v} - d_{N,v} \right) \nabla C_L - D_v \nabla C_v \right] + K_0 - R, \quad (12)$$

$$\frac{\partial C_L}{\partial t} = \nabla \left[D_L \chi \nabla C_L + \Omega C_L \left(d_{L,i} \nabla C_i - d_{L,v} \nabla C_v \right) \right], \quad L = 1, 2, \dots, N-1. \quad (13)$$

Рівняння (11)–(13) являються системою $N+1$ пов'язаних між собою нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних, яка описує зміни у просторі й часі концентрацій ТД (міжвузловин і вакансій), а також атомів в N -компонентних стопах за умов реакторного опромінення. У відповідності з умовою (5) з N концентрацій атомів C_M достатньо знаходити $N-1$, наприклад, C_1, C_2, \dots, C_{N-1} . При заданих відповідних початкових та граничних умовах система рівнянь (11)–(13) буде описувати процеси РІС в N -компонентних металевих стопах.

5. Квазістаціонарний режим опромінення стопу. У квазістаціонарному (усталеному) режимі опромінення стопу покладемо (Was, 2017)

$$\mathbf{J}_1 = \mathbf{J}_2 = \dots = \mathbf{J}_M = \dots = \mathbf{J}_N = 0 \quad (1 \leq M \leq N). \quad (14)$$

Тоді зі співвідношень (9), (14) одержимо систему рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} -\chi \nabla C_1 + \frac{d_{1,v} \Omega C_1}{D_1} \nabla C_v = \frac{d_{1,i} \Omega C_1}{D_1} \nabla C_i, \\ -\chi \nabla C_2 + \frac{d_{2,v} \Omega C_2}{D_2} \nabla C_v = \frac{d_{2,i} \Omega C_2}{D_2} \nabla C_i, \\ \dots \\ -\chi \nabla C_M + \frac{d_{M,v} \Omega C_M}{D_M} \nabla C_v = \frac{d_{M,i} \Omega C_M}{D_M} \nabla C_i, \\ \dots \\ -\chi \nabla C_N + \frac{d_{N,v} \Omega C_N}{D_N} \nabla C_v = \frac{d_{N,i} \Omega C_N}{D_N} \nabla C_i. \end{array} \right. \quad (15)$$

Складаючи рівняння (15) і враховуючи умову (6), отримаємо зв'язок між ∇C_v і ∇C_i :

$$\nabla C_v = \left(\frac{\sum_K \frac{d_{K,i} C_K}{D_K}}{\sum_K \frac{d_{K,v} C_K}{D_K}} \right) \nabla C_i. \quad (16)$$

Далі, складаючи рівняння (15) без M -го, одержимо

$$-\chi \sum_{K \neq M} \nabla C_K + \Omega \left(\sum_{K \neq M} \frac{d_{K,v} C_K}{D_K} \right) \nabla C_v = \Omega \left(\sum_{K \neq M} \frac{d_{K,i} C_K}{D_K} \right) \nabla C_i.$$

З врахуванням умови (6) маємо

$$\frac{\chi}{\Omega} \nabla C_M + \left(\sum_{K \neq M} \frac{d_{K,v} C_K}{D_K} \right) \nabla C_v = \left(\sum_{K \neq M} \frac{d_{K,i} C_K}{D_K} \right) \nabla C_i. \quad (17)$$

З рівнянь (16) і (17) одержимо зв'язок між ∇C_M і ∇C_i :

$$\nabla C_M = \left(\frac{\Omega C_M}{\chi D_M} \right) \frac{d_{M,v} \sum_{K \neq M} \frac{d_{K,i} C_K}{D_K} - d_{M,i} \sum_{K \neq M} \frac{d_{K,v} C_K}{D_K}}{\sum_K \frac{d_{K,v} C_K}{D_K}} \nabla C_i. \quad (18)$$

Можна показати, що величини ∇C_M ($M = 1, 2, \dots, N$), які представлені формулою (18), задовольняють умову (6). Оскільки C_i завжди спадає в напрямку поверхні зразка $-\mathbf{e}_x$, то якщо $\partial_x C_M / \partial_x C_i > 0$, буде спостерігатися збіднення елемента M поблизу поверхні, якщо, навпаки, $\partial_x C_M / \partial_x C_i < 0$ — збагачення.

6. Моделювання РІС в стопі Fe-20%Cr-8%Ni. Система рівнянь, яка описує просторово-часову еволюцію концентрацій ТД C_i , C_v та компонентів трикомпонентного концентрованого стопу Fe-20%Cr-8%Ni під дією реакторного опромінення є частинним випадком системи диференціальних рівнянь (11)-(13). Зазначену систему рівнянь представимо у вигляді

$$\begin{cases} \frac{\partial C_i}{\partial t} = \nabla \left[\Omega C_i \chi \sum_{L=\text{Cr, Ni}} \left(d_{L,i} - d_{\text{Fe},i} \right) \nabla C_L + D_i \nabla C_i \right] + K_0 - R, \\ \frac{\partial C_v}{\partial t} = -\nabla \left[\Omega C_v \chi \sum_{L=\text{Cr, Ni}} \left(d_{L,v} - d_{\text{Fe},v} \right) \nabla C_L - D_v \nabla C_v \right] + K_0 - R, \\ \frac{\partial C_{\text{Cr}}}{\partial t} = \nabla \left[D_{\text{Cr}} \chi \nabla C_{\text{Cr}} + \Omega C_{\text{Cr}} \left(d_{\text{Cr},i} \nabla C_i - d_{\text{Cr},v} \nabla C_v \right) \right], \\ \frac{\partial C_{\text{Ni}}}{\partial t} = \nabla \left[D_{\text{Ni}} \chi \nabla C_{\text{Ni}} + \Omega C_{\text{Ni}} \left(d_{\text{Ni},i} \nabla C_i - d_{\text{Ni},v} \nabla C_v \right) \right], \end{cases} \quad (19)$$

де $R = 4\pi r_{iv} \left[\sum_{M=\text{Fe, Cr, Ni}} \left(d_{M,i} + d_{M,v} \right) C_M \right] C_i C_v$ (Soisson, 2006). Система рівнянь

РІС (19) у випадку, коли всі концентрації залежать тільки від координати x і часу t розв'язувалася чисельно. Початкові і граничні умови, які використовувалися при розв'язанні системи (19) та математичний алгоритм її розв'язання обговорювалися в роботах (Скороход & Коропов, 2019; 2020). Розрахунки проведені для зразків стопу товщиною $\ell = 400$ нм із кроком

різницевої схеми $\Delta x \approx 0.333$ нм при температурі $T = 400$ °С, швидкості генерації радіаційних ТД $K_0 = 10^{-6}$ зна/с (зміщення на атом/секунда) до дози $D = 10$ зна (що відповідає часу опромінення $t = 10^7$ с). У даній роботі вхідні параметри задачі прийняті наступними: $d_{\text{Fe},i} = d_{\text{Cr},i} = d_{\text{Ni},i} = 8.04 \times 10^{-15}$ м²/с, $d_{\text{Fe},v} = 1.87 \times 10^{-15}$ м²/с, $d_{\text{Cr},v} = 2.81 \times 10^{-15}$ м²/с, $d_{\text{Ni},v} = 1.17 \times 10^{-15}$ м²/с, $\chi = 1$, $\Omega = 1.21 \times 10^{-29}$ м³ (Allen & Was, 1998), $r_{iv} = 10^{-9}$ м (Vörtler et al., 2016). Основні результати моделювання представлені на рис. 1 та 2.

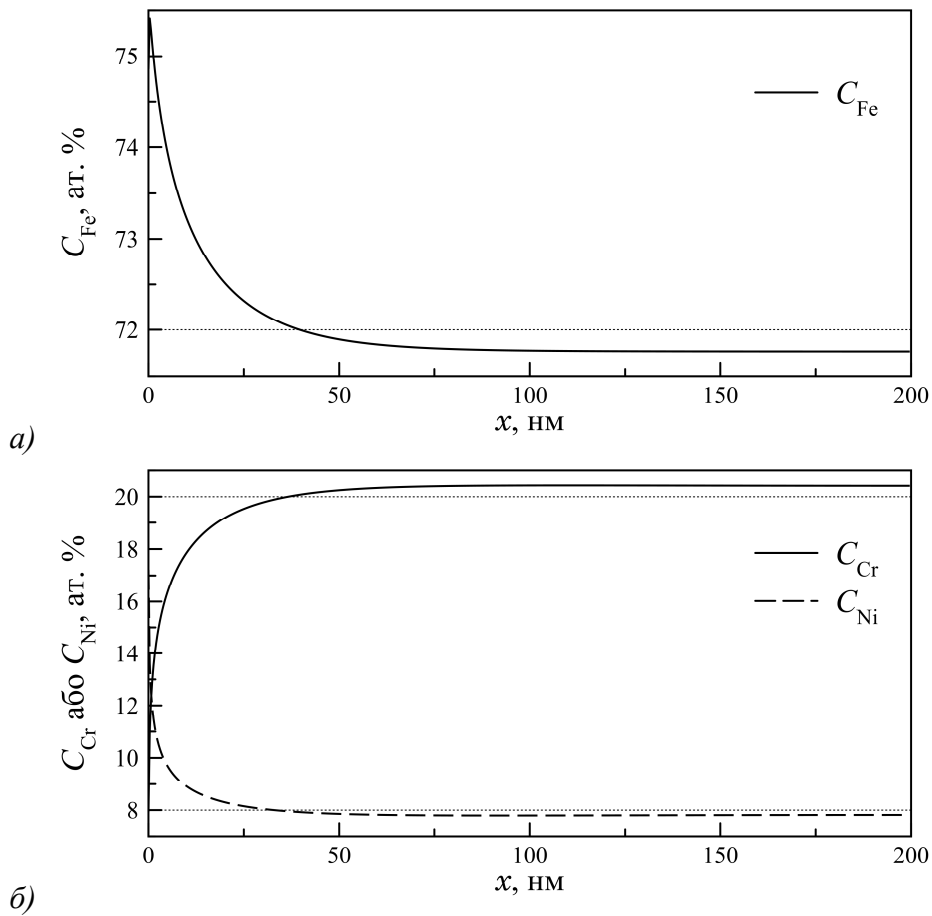


Рис. 1. Концентраційні профілі заліза C_{Fe} (а) та хрому C_{Cr} і нікелю C_{Ni} (б).

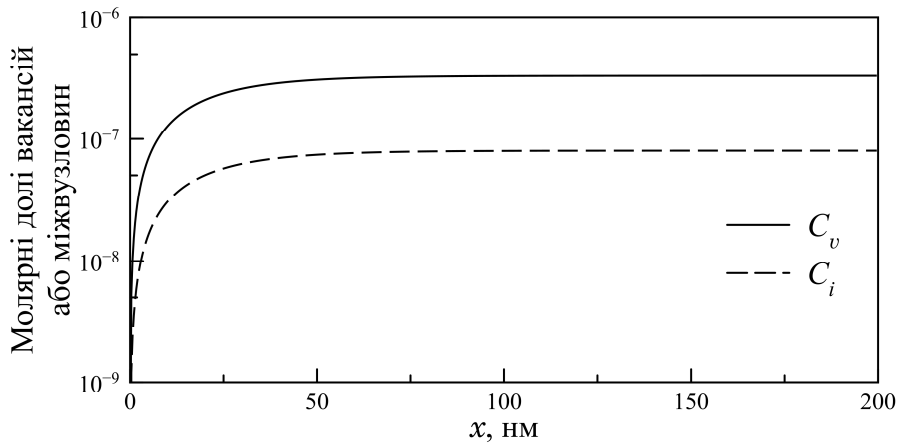


Рис. 2. Концентраційні профілі вакансій C_v та міжвузловин C_i .

Величини $\partial_x C_M / \partial_x C_i$ у квазістаціонарному режимі РІС набувають значень: $\partial_x C_{Fe} / \partial_x C_i = -5.02 \times 10^7 < 0$, $\partial_x C_{Cr} / \partial_x C_i = 6.87 \times 10^8 > 0$, $\partial_x C_{Ni} / \partial_x C_i = -2.35 \times 10^8 < 0$, що вказує на збагачення Fe та Ni і збіднення Cr у квазістаціонарному режимі РІС та узгоджується із проведеними розрахунками.

7. Висновки. У даній роботі представлений математичний вивід системи диференціальних рівнянь РІС, яка описує перерозподіл ТД (вакансій і міжвузловин) та компонентів стопу в багатокомпонентних концентрованих стопах (11)–(13). Для квазістаціонарного режиму РІС одержані співвідношення між градієнтами концентрацій вакансій ∇C_v і міжвузловин ∇C_i (16) та градієнтами концентрацій атомів стопу сорту M ∇C_M і міжвузловин ∇C_i (18). Формула (18) є своєрідним індикатором збагачення або збіднення атомів сорту M в усталеному режимі РІС біля стоків ТД. Для трикомпонентного концентрованого стопу Fe-20%Cr-8%Ni розраховані концентраційні профілі заліза $C_{Fe} = C_{Fe}(x)$, хрому $C_{Cr} = C_{Cr}(x)$, нікелю $C_{Ni} = C_{Ni}(x)$, вакансій $C_v = C_v(x)$ та міжвузловин $C_i = C_i(x)$, які і є основними результатами комп'ютерного моделювання.

Робота виконана в рамках цільової програми наукових досліджень НАН України «Ядерні та радіаційні технології для енергетичного сектору і суспільних потреб» на 2019–2023 рр.

Список літератури

- Aitkaliyeva, A., He, L., Wen, H., Miller, B., Bai, X. M., & Allen, T. (2017). Irradiation effects in Generation IV nuclear reactor materials. In P. Yvon (Ed.), *Woodhead Publishing Series in Energy: N.106. Structural Materials for Generation IV Nuclear Reactors* (pp. 253–283). Amsterdam: Elsevier Ltd.
- Allen, T. R., & Was, G. S. (1998). Modeling radiation-induced segregation in austenitic Fe-Cr-Ni alloys. *Acta Mater.*, 46(10), 3679–3691.

- Buckthorpe, D. (2017). Introduction to Generation IV nuclear reactors. In P. Yvon (Ed.), *Woodhead Publishing Series in Energy: N.106. Structural Materials for Generation IV Nuclear Reactors* (pp. 1–22). Amsterdam: Elsevier Ltd.
- Grandjean, Y., Bellon, P., & Martin G. (1994). Kinetic model for equilibrium and nonequilibrium segregation in concentrated alloys under irradiation. *Phys. Rev. B*, 50(6), 4228–4231.
- Henry, J., & Maloy, S. A. (2017). Irradiation-resistant ferritic and martensitic steels as core materials for Generation IV nuclear reactors. In P. Yvon (Ed.), *Woodhead Publishing Series in Energy: N.106. Structural Materials for Generation IV Nuclear Reactors* (pp. 329–355). Amsterdam: Elsevier Ltd.
- Idrees, Y., Yao, Z., Sattari, M., Kirk, M. A., & Daymond, M. R. (2013). Irradiation induced microstructural changes in Zr-Excel alloy. *J. Nucl. Mater.*, 441, 138–151.
- Koropov, O., & Skorokhod, R. (2019). Визрівання Оствальда сферичних виділень на міжзеренній межі, яке лімітується поверхневою кінетикою. *Східно-європейський фізичний журнал*, (1), 75–85.
- Nastar, M., & Martin, G. (1999). Modelling nonequilibrium grain boundary segregations. In *Materials science forum* (Vol. 294, pp. 83–90). Trans Tech Publications Ltd.
- Séran, J.-L., & Le Flem, M. (2017). Irradiation-resistant austenitic steels as core materials for Generation IV nuclear reactors. In P. Yvon (Ed.), *Woodhead Publishing Series in Energy: N.106. Structural Materials for Generation IV Nuclear Reactors* (pp. 285–328). Amsterdam: Elsevier Ltd.
- Skorokhod, R., Buhay, O., Bilyk, V., Denysenko, V., & Koropov, O. (2018). Моделювання радіаційно-індукованої сегрегації в бінарних сплавах. *Східно-європейський фізичний журнал*, 5(1), 61–69.
- Soisson, F. (2006). Kinetic Monte Carlo simulations of radiation induced segregation and precipitation. *J. Nucl. Mater.*, 349(3), 235–250.
- Stark, J. P. (1976). *Solid state diffusion*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Ukai, S., Ohtsuka, S., Kaito, T., de Carlan, Y., Ribis, J., & Malaplate, J. (2017). Oxide dispersion-strengthened/ferrite-martensite steels as core materials for Generation IV nuclear reactors. In P. Yvon (Ed.), *Woodhead Publishing Series in Energy: N.106. Structural Materials for Generation IV Nuclear Reactors* (pp. 356–414). Amsterdam: Elsevier Ltd.
- Vörtler, K., Mamivand, M., Barnard, L., Szlufarska, I., Garner, F. A., & Morgan, D. (2016). Simulated spatial and temporal dependence of chromium concentration in pure Fe-14%Cr under high dpa ion irradiation. *J. Nucl. Mater.*, 479, 23–35.
- Was, G. S. (2017). *Fundamentals of radiation materials science. Metals and alloys* (2nd ed.). New York: Springer.
- Wiedersich, H., Okamoto, P. R., & Lam, N. Q. (1979). A theory of radiation-induced segregation in concentrated alloys. *J. Nucl. Mater.*, 83, 98–108.
- Zinkle, S. J. (2017). Advanced irradiation-resistant materials for Generation IV nuclear reactors. In P. Yvon (Ed.), *Woodhead Publishing Series in Energy: N.106. Structural Materials for Generation IV Nuclear Reactors* (pp. 569–594). Amsterdam: Elsevier Ltd.
- Бокштейн, Б. С., & Ярославцев, А. Б. (2005). *Диффузия атомов и ионов в твердых телах*. Москва: МИСИС.
- Боровский, И. Б., Гуров, К. П., Марчукова, И. Д., & Угасте, Ю. Э. (1973). *Процессы взаимной диффузии в сплавах*. Москва: Наука.
- Воеводин, В. Н., & Неклюдов, И. М. (2006)¹. *Эволюция структурно-фазового состояния и радиационная стойкость конструкционных материалов*. Київ: Наукова думка.
- Воеводин, В. Н., & Неклюдов, И. М. (2006)². Проблемы радиационной стойкости конструкционных материалов ядерной энергетики. *Вісник Харківського університету*, (746), 3–22.

- Гуров, К. П., Карташкин, Б. А., & Угасте, Ю. Э. (1981). *Взаимная диффузия в многофазных металлических системах*. Москва: Наука.
- Коропов, О. В. (2016). Математична модель пізньої стадії сегрегації домішки на міжзеренній межі у випадку утворення плоских виділень нової фази. У *Матеріалах Сімнадцятої міжнародної наукової конференції ім. акад. Михайла Кравчука, 19–20 травня* (т. 1, с. 161–166). Київ: НТУУ «КПІ».
- Коропов, О. В. (2017). Диференціальні рівняння радіаційно-індукованої сегрегації в п'ятикомпонентних концентрованих металевих стопах. У *Матеріалах Вісімнадцятої міжнародної наукової конференції ім. академіка Михайла Кравчука, Київ — Луцьк, 7–10 жовтня* (Т. 1, с. 86–90). Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського.
- Скороход, Р. В. & Коропов, А. В. (2019). Моделирование радиационно-индуцированной сегрегации в сплавах Fe-Cr-Ni. *Физика твердого тела*, 61(12), 2281–2288.
- Скороход, Р. В., & Коропов, О. В. (2020). Математична модель радіаційно-індукованої сегрегації в концентрованих металевих сплавах Fe-Cr-Ni. У *Матеріалах VIII Міжнар. наук.-практ. конф. «Математика в сучасному технічному університеті», Київ, 27–28 грудня 2019 р.* (с. 153–160). Вінниця: Видавець ФОП Кушнір Ю. В.

Використання кластерного аналізу і IRT для поділу респондентів психологічного тестування на групи

Н. В. Круглова, О. О. Диховичний, Д. Р. Лисенко

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

natahak@ukr.net

У статті досліджується спосіб поділу респондентів психологічного тестування на групи, об'єднані спільними ознаками. Для тестування було застосовано батарею тестів, що складалася з 8 тестів для визначення таких психологічних характеристик: рівень соціального інтелекту (4 субтести), здібність до абстрагування, рівень концентрації уваги, здатність оперування просторовими уявленнями, рівень суб'єктивного контролю. Для кожного тесту була обрана відповідна IRT модель на основі матриці первинних балів. Респонденти характеризувалися психологічним профілем з 8 латентних параметрів, кожен з яких відповідав певному психологічному показнику.

Поділ респондентів на групи, що мають спільні ознаки, здійснено методами кластерного аналізу. Аналіз тестування відбувся за допомогою середовища програмування R.

Ключові слова: мова R, тестування, психологічний профіль, батарея тестів, кластерний аналіз, IRT.

У статті наводиться спосіб аналізу результатів психологічного тестування і поділу респондентів на певні цільові групи. Досліджувались дані, що були одержані під час психологічного опитування 800 військовослужбовців з вищою освітою віком від 30 до 50 років. Батарея тестів складалася з 8 тестів: Гілфорда (4 субтести) (Гилфорд, 1965), тест «виключення понять» (Римский & Римская, 1995), «переплутані лінії» (Платонов, 1980), «компаси» (Андронникова & Заика, 2011), тест Ксенофонтової (1999). У Диховичний та ін. (2019) було підібрано для кожного тесту адекватну модель IRT, що дозволило побудувати психологічні профілі респондентів. Особливістю є те, що кожному респонденту відповідає не сумарний бал, одержаний за тести, а набір латентних параметрів — психологічний профіль. Це дозволило більш точно диференціювати респондентів.

Оскільки батарея тестів визначала різні психологічні показники, то виникла задача поділу на цільові групи. Ці групи визначають міру придатності респондента до виконання певної задачі. Для даного тестування — це був відбір військовослужбовців до структури, що займається додатковою підготовкою. У загальному випадку, це може бути професійний відбір, відбір групи для виконання військової задачі, вступ до ВНЗ, або просто відсіювання респондентів з низькими показниками.

Для поділу респондентів на групи було застосовано кластерний аналіз. За його результатами респонденти розділилися на дві структурні групи: ті, що підходять для додаткового навчання (з кращими показниками), і ті, що не будуть зараховані (з поганими показниками). Це була оптимальна кількість груп (кластерів). Після додавання додаткової характеристики — сумарного часу прохо-

дження тестування, картина не змінилася (респонденти потрапляли в ті самі групи, кількість кластерів не збільшилась).

Після відсіювання респондентів з однаковими профілями (повністю однаковий набір латентних параметрів психологічних показників) і мінімальним часом виконання завдань, кількість кластерів (груп) збільшилася до 3. Це дозволило сформувавши резервну групу військовослужбовців (із середніми показниками). Респонденти з цієї групи можуть бути відібрані в разі виникнення додаткових місць для навчання, або в разі відмови претендентів із кращої групи.

Виявлення осіб з однаковими психологічними профілями дозволило визначити респондентів, які обмінювалися правильними відповідями та знаходили ключі для тестів. Отже, IRT дозволяє не тільки визначати «погані» питання в тестах, але і знаходити недоброчесних респондентів, більш точно диференціювати іспитників.

Кластерний аналіз, у свою чергу, можна застосовувати не тільки для класифікації респондентів за багатовимірним психологічним профілем, але й при створенні нових психологічних методик. Оскільки це дозволяє створити шкалу для нового тесту, яка буде диференціювати респондентів за рівнем вираження психологічної ознаки для відбору в певну цільову групу. Ще одним плюсом кластерного аналізу є те, що ми можемо розглядати не тільки сукупність психологічних показників, але й додавати нові фактори при поділі на групи: час виконання завдання, вік, вагу тощо. Що є не менш важливим при відборі кандидатів для виконання різноманітних задач.

Тому поєднання кластерного аналізу з IRT дозволяє більш точно аналізувати результати психологічних тестувань, ділити на структурні групи по ступеню відповідності респондентів до задачі, виділяти «підозрілі» результати.

Список літератури

- Андронникова, Е. А., & Заика, Е. В. (2011). *Методы исследования восприятия, внимания и памяти: Руководство для практических психологов*. Харьков.
- Гилфорд, Дж. (1965). *Структура интеллекта: Психология мышления* (А. М. Матюшкин, ред.) (с. 433–456). Москва: Прогресс.
- Диховичний, О. О., Круглова, Н. В., & Алексєєва, І. В. (2019). Застосування IRT-моделей та методів багатокритеріальної оптимізації до аналізу психологічного профілю. *Математические машины и системы*, (1), 131–142.
- Ксенофонтова, Е. Г. (1999). Исследование локализации контроля личности – новая версия методики Уровень субъективного контроля. *Психологический журнал*, 20(2), 103–114.
- Платонов, К. К. (1980). *Психологический практикум: Учебное пособие для техникумов*. Москва: Высшая школа.
- Римский, С., & Римская, Р. Р. (1995). Исключение лишнего (с. 143–152). В *Альманахе психологических тестов*. Москва: КСП.

Побудова консистентних оцінок параметрів лінійної регресії за наявності суміші класичної та берксонівської похибок у регресорі

О. Г. Кукуш, М. С. Яковлєв

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
alexander_kukush@univ.kiev.ua, mykyta.yakovliev@gmail.com

Вивчається структурна модель лінійної регресії, у якій наявні дві приховані змінні, що моделюють суміш класичної та берксонівської похибок вимірювання регресора. Класична похибка має інструментальний характер, а берксонівська виникає внаслідок процесу усереднення, коли ми приписуємо вимірюваній величині деяке середнє значення, обчислене за певною субпопуляцією. Подібні моделі використовуються у задачах радіоепідеміології.

Ключові слова: лінійна регресія, класична похибка вимірювання, берксонівська похибка вимірювання.

Розглядається модель спостережень

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 \xi_i + \varepsilon_i, w_i = x_i + \delta_i, \xi_i = x_i + u_i, i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

Тут y_i — відгук, ξ_i та x_i — неспостережувані приховані змінні, w_i — сурогатна змінна, ε_i — похибка у відгуку, δ_i — класична похибка вимірювання, u_i — похибка Берксона. Спостерігаються пари (y_i, w_i) . Треба оцінити параметри регресії β_0 та β_1 . Подібні моделі із сумішшю класичної та берксонівської похибок вимірювання виникають у задачах оцінювання радіаційних ризиків з урахуванням невизначеності в дозах опромінення суб'єктів популяції; у вимірних непрямим шляхом дозах опромінення радіоактивним йодом наявні похибки обох типів: як класичні, так і берксонівські (Masiuk et al., 2017).

На модель (1) накладаються наступні обмеження.

(i) Випадкові величини $x_i, \varepsilon_i, \delta_i, u_i, i \geq 1$, незалежні в сукупності; кожна з цих чотирьох послідовностей має однаковий розподіл.

(ii) Похибки $\varepsilon_i, \delta_i, u_i$ є центрованими і мають скінченні додатні дисперсії (відповідно $\sigma_\varepsilon^2, \sigma_\delta^2, \sigma_u^2$), x_i також мають скінченну додатну дисперсію σ_x^2 (і не обов'язково нульове математичне сподівання).

(iii) Дисперсії $\sigma_\delta^2, \sigma_u^2$ є відомими, а інші параметри моделі невідомі.

(iv) Усі випадкові величини $x_i, \varepsilon_i, \delta_i, u_i$ — гаусові.

(v) Усі випадкові величини δ_i є гаусовими.

Зазначимо, що умова (v) є послабленням умови (iv). Надалі (зміщену) вибірку коваріацію довільних випадкових величин $a_i, b_i, i = 1, \dots, n$, позначатимемо

через S_{ab} . Зокрема, S_{aa} — це (зміщена) вибіркова дисперсія a_i , $i = 1, \dots, n$. Верхня риска означає усереднення за елементами вибірки, наприклад,

$$\bar{y} := n^{-1} \sum_{i=1}^n y_i.$$

Розглянемо оцінки параметрів моделі

$$\hat{\beta}_1 := \frac{S_{wy}}{S_{ww} - \sigma_\delta^2}, \quad (2)$$

$$\hat{\beta}_0 := \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{w}, \quad (3)$$

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 := S_{yy} - \frac{S_{wy}^2 (S_{ww} - \sigma_\delta^2 + \sigma_u^2)}{(S_{ww} - \sigma_\delta^2)^2}. \quad (4)$$

При побудові оцінок (2), (3) ми вважаємо відомою дисперсію σ_δ^2 , а при побудові оцінки (4) — відомими обидві дисперсії σ_δ^2 , σ_u^2 . Якщо жоден параметр моделі невідомий, то така модель є неідентифікованою навіть при гаусовому розподілі всіх наявних випадкових величин, і тоді консистентне оцінювання параметрів моделі неможливе.

Зауважимо також, що оцінки (2), (3) є виправленими оцінками найменших квадратів (adjusted least squares estimators, (Masiuk et al., 2017)); ці оцінки нехтують наявністю похибки Берксона u_i в моделі (1).

Теорема 1 (про консистентність оцінок). *Нехай у моделі (1) виконуються умови (i)—(iii). Тоді вирази (2)—(4) є коректно визначеними з імовірністю 1 для всіх n , починаючи з деякого випадкового номера, та є строго консистентними оцінками параметрів $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_0$, $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ (тобто збігаються м.н. до відповідних істинних значень указаних параметрів при $n \rightarrow \infty$).*

Теорема 2 (про асимптотичну нормальність оцінки кутового коефіцієнта). *Нехай для моделі (1) виконуються умови (i)—(iii), (v). Тоді при $n \rightarrow \infty$ нормована оцінка $\sqrt{n}(\hat{\beta}_1 - \beta_1)$ збігається за розподілом до нормального закону $N(0, \sigma)$ з дисперсією*

$$\sigma^2 = \frac{1}{\sigma_x^4} (\beta_1^2 (\sigma_\delta^2 \sigma_w^2 + \sigma_\delta^4 + \sigma_u^2 \sigma_w^2) + \sigma_w^2 \sigma_\varepsilon^2).$$

Як бачимо, оцінка (2) не потребує знання σ_u^2 , проте асимптотична дисперсія σ^2 цієї оцінки залежить від цього заважального параметра σ_u^2 . За відомих σ_δ^2 , σ_u^2 цю асимптотичну дисперсію можна строго консистентно оцінити, що дозволяє побудувати асимптотичний довірчий інтервал для β_1 .

У роботі Kukush et al. (2017) вивчалася модель (1) за відсутності берксо-нівських похибок u_i ; там виділялися групи асимптотично незалежних оцінок параметрів моделі. Щоб зробити це у нашому випадку, перепишемо модель (1) у центрованому вигляді:

$$y_i = \mu_y + \beta_1(\xi_i - \mu) + \varepsilon_i, w_i = x_i + \delta_i, \xi_i = x_i + u_i, i = 1, \dots, n. \quad (5)$$

За спостереженнями $(y_i, w_i), i = 1, \dots, n$, оцінюванню підлягає вектор $\theta = (\mu, \mu_y, \sigma_w^2 \beta_1, \sigma_\varepsilon^2)$. Задамо оцінку явними формулами

$$\hat{\theta} = (\bar{w}, \bar{y}, S_{ww}, \frac{S_{wy}}{S_{ww} - \sigma_\delta^2}, S_{yy} - \frac{S_{wy}^2 (S_{ww} - \sigma_\delta^2 + \sigma_u^2)}{(S_{ww} - \sigma_\delta^2)^2}).$$

Теорема 3 (про групи асимптотично незалежних оцінок). Нехай для моделі (5) виконуються умови (i)—(iv). Тоді нормована оцінка $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)$ збігається за розподілом до нормального закону з нульовим середнім і невиродженою коваріаційною матрицею Σ_θ , причому дві групи оцінок

$$(\bar{w}, \bar{y}) \text{ та } (S_{ww}, \frac{S_{wy}}{S_{ww} - \sigma_\delta^2}, S_{yy} - \frac{S_{wy}^2 (S_{ww} - \sigma_\delta^2 + \sigma_u^2)}{(S_{ww} - \sigma_\delta^2)^2}) \quad (6)$$

є асимптотично незалежними.

Можна консистентно оцінити асимптотичну коваріаційну матрицю Σ_θ , а її невиродженість дозволяє побудувати асимптотичну довірчу область для θ ; асимптотична незалежність груп (6) дозволяє побудувати цю область у вигляді декартового добутку еліпса та тривимірного еліпсоїда.

Список літератури

- Kukush, O. H., Tsarehorodtsev, Y. V., & Shklyar, S. V. (2017). Asymptotically independent estimates in a structural linear model with measurement errors. *Ukrainian Mathematical Journal*, 68(11), 1741–1755. <https://doi.org/10.1007/s11253-017-1324-8>
- Masiuk, S., Kukush, A., Shklyar, S., Chepurny, M., & Likhtarov, I. (2017). Radiation risk estimation: based on measurement error models. Walter de Gruyter GmbH & Co KG.

Обчислювальна стійкість у багатовимірних статистичних методах: невидимі небезпеки машинного навчання

С. М. Лапач

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

lapach@ukr.net

Розглядається проблема викликана, з одного боку поширенням машинного навчання, що привело до відчуження дослідника від обізнаності з методами обробки даних, із другого, відсутністю врахування стійкості обчислень у матричних процедурах статистичних методів у сучасному програмному забезпеченню та навчальних матеріалах на фоні підвищення складності моделей. Звертається увага на небезпечність ситуації і пропонуються шляхи вирішення проблеми.

Ключові слова: лінійний регресійний аналіз, лінійний дискримінантний аналіз, обчислювальна стійкість, машинне навчання.

Проблема — відсутність врахування поганої обумовленості на стійкість обчислень у багатовимірних статистичних моделях.

Стан проблеми. Величезна частка задач практики розв'язується з використанням матричних обчислень. Значна частина їх виконується розв'язанням чисельними методами систем лінійних рівнянь. У статистичних методах це задачі багатовимірного регресійного й дискримінантного аналізу.

У той час, як вплив обумовленості матриці на результати в матричній алгебрі не викликав ніяких сумнівів і був загальноприйнятим (Райс, 1984), то в математичній статистиці ситуація склалася зовсім по іншому. Спочатку вона ніяким чином не враховувалась. Можливо, причиною цього було початкове поширення одновимірних регресій, хоча там теж можуть виникати проблеми з обумовленістю при використанні поліномів. З деякого моменту проблема була усвідомлена, але способи її розв'язання пропонувались різноманітні. Найбільш поширеним були методи регуляризації і підвищення точності обчислень.

У цілому, слід зауважити, що обидва шляхи хибні, бо перший розв'язує іншу (зміщену) задачу, а другий забезпечує отримання стійкого результату на конкретних даних, який поширювати на генеральну сукупність не можна. Це добре видно на прикладі регресії Лонглі. І зараз можна зустріти її використання для оцінки точності статистичних програм, хоча теоретики показали її безглуздість теоретичну (Beaton et al., 1976; Демиденко, 1981), а практики (Лапач & Радченко, 2007) помилковий підхід до формування структури регресійної моделі. Неправильне розуміння полягає в тому, що незважаючи на точність, неправильно сформована модель — це всього-на-всього артефакт конкретного набору й не може бути поширений на інші дані, що знецінює отримані результати.

З часом розуміння важливості стійкості обчислень проникло в регресійний аналіз (Петрович, 1982) і стала зрозумілою небезпека ігнорування цієї особливості, яка може приводити навіть до катастроф (Петров, 2007; 2008; 2009). При цьому розуміння такої ж проблеми в дискримінантному аналізі ігнорується. Але в алгоритмах останнього присутнє знаходження оберненої

матриці (Айвазян и др., 1985; Енюков, 1986; Ким и др., 1989) в розрахунку вектора оцінок коефіцієнтів дискримінантної функції

$$A = S^{-1}(\bar{X} - \bar{Y}).$$

Тут

$$S = \frac{1}{n_1 + n_2 + 1}(n_1 S_x + n_2 S_y),$$

а

$$s_{kj}(x) = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} (x_{ij} - \bar{x}_j)(x_{ik} - \bar{x}_k) \text{ і } s_{kj}(y) = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} (y_{ij} - \bar{y}_j)(y_{ik} - \bar{y}_k)$$

— оцінки коваріаційних матриць для кожного класу S_x та S_y (для випадку, коли маємо два класи, об'єкти яких характеризуються p змінними. Для першого класу сформована вибірка X , розміром n_1 , для другого — Y розміром n_2). На це звертається увагу в Зварич та Лапач (2017).

Але якщо ми подивимось сучасну літературу по регресійному аналізу (Greene, 2016; Draper, 1998; Carlberg, 2016), то побачимо зникнення проблеми стійкості, за винятком Лапач та ін. (2002). Відсутня ця проблема й у сучасній літературі з машинного навчання (Хасті и др., 2020; Бишоп, 2020; Скиена, 2020; Кохендерфер & Уиллер, 2020; Барн и др., 2020; Келлехер, 2020). Проблема загострюється, як не дивно, у зв'язку з успішним розвитком і поширенням засобів аналізу даних. В Келлехер (2020) звертається увагу на те, що сучасний стан ідеалізації користувачами інструментарію обробки даних забезпечує високу ймовірність помилок в їх використанні.

Користувач чомусь думає, що «інтелект» програмного засобу забезпечить його правильним результатом навіть при неправильному використанні та невмінні аналізувати результати. До такого рівня ефективності програмних засобів, на жаль, ще далеко. Звернемо також увагу на дискримінантний аналіз. Мало того, що в ньому, як уже раніше вказувалось, так і не звертають увагу на стійкість, так і ймовірність отримання погано обумовлених матриці різко збільшилась. Це пов'язано з тим, що тепер в лінійному дискримінантному аналізі дискримінантна функція може бути не тільки алгебраїчною сумою вихідних факторів, а довільною їх функцією (Хасті и др., 2020; Бишоп, 2020), як і в регресійному аналізі, що є природною еволюцією методу. В Огороднік та Лапач (2012) приводиться приклад появи поганої обумовленості, яка виникає з добре обумовленої вихідної матриці при побудові на основі її поліноміальної функції. Як видно з табл. 1 такий результат навряд чи забезпечить впевненість і його правильності.

Таблиця 1. Добуток матриць $(X^T X)(X^T X)^{-1}$ для випадку звичайного поліному (запозичено з [2])

Назва	y	X_1	X_2	X_2^2	X_2^3	X_1X_2	$X_1X_2^2$	$X_1X_2^3$
y	0	0	0,21875	0,01563	-0,001953	-0,0625	0,015625	0,001465
X_1	-0,25	1	0,1094	0	0,000488	-0,03125	0,011719	0,000366
X_2	-4	0	2,5	0,0625	0	-1	0,1875	0,005859
X_2^2	64	0	24	1	0,25	0	1	0,09375
X_2^3	0	0	0	0	2	0	0	0,5
X_1X_2	-4	0	1,5	0	0	0	0,0625	0,005859
$X_1X_2^2$	64	0	24	1	0,125	0	1	0,09375
$X_1X_2^3$	-512	0	0	0	2	0	16	1

Висновки

1. На сучасному етапі проблема стійкості обчислень в багатовимірних статистичних методах і разом з цим надійності отриманих результатів практично зникла з масової літератури.

2. Поширення машинного навчання привело до відчуження дослідника від суті методів обробки даних (він стає користувачем «чорного ящика»), наслідком чого стає відсутність розуміння можливості і правомірності застосування певних методів у конкретних умовах і урахування обмежень їх використання.

3. Крім того, абсолютно безпідставно поширилась віра користувача в «могутність» програмних засобів і нібито обґрунтованість отриманих з їх допомогою результатів. Фактично програмні засоби в більшості випадків не мають ніяких даних про обмеження у використанні, надійність результатів, адекватність моделей тощо.

4. Методи формування вибірок для аналізу даних є по-суті пасивним експериментом. Формування здебільшого виконується вибіркою з баз даних за сукупністю фільтрів без урахування вимог вибіркового методу й теорії планування експериментів, що закономірно приводить до мультиколінеарності, а то й поганої обумовленості.

5. Ускладнення моделей, яке викликане більш складними досліджуваними процесами і об'єктами, теж приводить до підвищення як мультиколінеарності, так до погіршення обумовленості.

Усе вище вказане приводить зараз і буде приводити до погіршення стійкості обчислень і збільшує можливість помилок і прийняття хибних рішень.

Рекомендації. Указані рекомендації можливо реалізувати як розробкою спеціальних розширень, які включити у програми регресійного й дискримінантного аналізів, або як додаткові роботи, використовуючи існуючі методи статистичних програм.

1. При формуванні вибірок забезпечити низьку мультиколінеарність і добру обумовленість (Зварич & Лапач, 2017; Лапач, 2013; 2017).

2. При формуванні поліноміальних моделей в регресійному і дискримінантному аналізах використовувати ортогональні поліноми Чебишова (Огороднік & Лапач, 2012).

3. Перевірка, матриць, за якими будуються моделі на мультиколінеарність і обумовленість. Перше можливе використанням функцій кореляційного аналізу. Отримання чисел обумовленості є не у кожному програмному засобі. При його відсутності можна виконати перевірку перемноженням прямої і оберненої матриць, які перевіряються.

4. Не використовувати результати, які отримані за даними, що не забезпечують стійкість обчислень.

Список літератури

- Айвазян, С. А., Енюков, И. С., & Мешалкин Л. Д. (1985). *Прикладная статистика: Исследование зависимостей*. Москва. Финансы и статистика.
- Барн, А., Чаучи, М., & Юнг, Т. (2020). *Аналитическое прогнозирование для чайников* (2-е изд.). Санкт-Петербург. Диалектика.
- Бишоп, К. (2020). *Распознавание образов и машинное обучение*. Киев. Диалектика.
- Демиденко, Е.З. (1981). *Линейная и нелинейная регрессии*. Москва. Финансы и статистика.
- Енюков, И.С. (1986). *Методы, алгоритмы, программы многомерного статистического анализа (пакет ППСА)*. (Математическое обеспечение прикладной статистики). Москва. Финансы и статистика.
- Зварич, В. І., & Лапач, С.М. (2017). Дискримінантний аналіз і планування. У *Матеріалах Всеукраїнської науково-технічної конференції молодих вчених та студентів «Інновації молоді — машинобудуванню», Київ, 21–31 травня*. <http://skonf.mmi.kpi.ua/imm2017/paper/view/6010/1975>.
- Келлехер, Д. (2020). *Наука о данных: Базовый курс*. Москва. Альпина Паблишер.
- Ким, О. Д., Мьюллер, Ч. У., & Клекка, У. Р. (1989). *Факторный, дискриминантный и кластерный анализ* (И. С. Енюков, ред.). Москва. Финансы и статистика.
- Кохендерфер, М. Д., Уиллер, Т. А. (2020). *Алгоритмы оптимизации*. Киев. Диалектика.
- Лапач, С.Н., Чубенко, А.В., & Бабич, П.Н. (2002). *Статистика в науке и бизнесе*. Киев. Морион.
- Лапач, С. М., & Радченко, С. Г. (2007). Проблеми визначення структури рівняння регресії в множинному регресійному аналізі. *Наукові вісті НТУУ «КПІ»*, (1), 150–155.
- Огороднік, С. В., & Лапач, С. М. (2012). Поліноми Чебишева і звичайні поліноми в регресії при використанні масових програмних засобів. У *Матеріалах загально університетської науково-технічної конференції молодих вчених та студентів* (с. 105–107). Київ. НТУУ «КПІ».
- Лапач, С. М. (2013). Поширення методів планування експерименту на пасивний експеримент. У *Тезах доповідей Восьмої міжнародної науково-практичної конференції «Математичне та імітаційне моделювання. МОДС 2013», 24–28 червня, Чернігів — Жукин*. (с. 324–329). Чернігів: Черніг. держ. технол. ун-т.
- Лапач, С.М. (2018). Розширення сфери застосування теорії планування експериментів. У *Матеріалах VI Міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному університеті», Київ, 28–29 грудня 2017 р.*, (с. 76–79). Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського.
- Петрович, М. Л. (1982). *Регрессионный анализ и его математическое обеспечение на ЕС ЭВМ: практическое руководство*. Москва. Финансы и статистика.
- Петров, Ю. П. (2007). *Расследование и предупреждение техногенных катастроф. Научный детектив*. Санкт-Петербург. БХВ-Петербург.

- Петров, Ю. П. (2008). *Обеспечение достоверности и надежности компьютерных расчетов*. Санкт-Петербург: БХВ-Петербург.
- Петров, Ю. П. (2009). *Как получать надежные решения систем уравнений*. Санкт-Петербург: БХВ-Петербург.
- Райс, Д. (1984). *Матричные вычисления и математическое обеспечение* (В. В. Воеводин, ред.). Москва: Мир.
- Скиена, С. (2020). *Наука о данных: учебный курс*. Киев: Диалектика.
- Хасты, Т., Тибширани, Р., & Фридман, Д. (2020). *Основы статистического обучения: интеллектуальный анализ данных, логический вывод и прогнозирование* (2-е изд.). Киев: Диалектика.
- Beaton, A. E., Rubin, D. B., & Barone, J. L. (1976). The acceptability of regression solutions: Another look at computational accuracy. *Journal of the American Statistical Association*, 71(353), 158–168.
- Carlberg, C. (2026). *Regression analysis Microsoft Excel*. Indianapolis: Pearson Education, Inc.
- Draper, N. R., & Smith, H. (1998). *Applied regression analysis* (3d ed.). New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Greene, W. H. (2016). *Econometric analysis* (4th ed.). New Jersey: Pearson Education Company.

Вращения твердого тела под действием нестационарного восстанавливающего момента

Д. Д. Лещенко, Т. А. Козаченко

Одесская государственная академия строительства и архитектуры,
Одесса, Украина

leshchenko_d@ukr.net, kushpil.t.a@gmail.com

Исследуются возмущенные движения твердого тела, близкие к случаю Лагранжа, под действием нестационарных возмущающего и восстанавливающего моментов. Кроме того, величина восстанавливающего момента зависит от малого угла нутации. Описана процедура усреднения для медленных переменных возмущенного движения твердого тела в первом приближении.

Ключевые слова: твердое тело, случай Лагранжа, метод усреднения.

Исследуется движение относительно неподвижной точки динамически симметричного тяжелого твердого тела под действием восстанавливающего момента, зависящего от медленного времени $\tau = \varepsilon t$ и малого угла нутации $\lambda = \varepsilon \theta$, а также возмущающего момента, медленно меняющегося во времени. Уравнения движения имеют вид:

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C - A)qr &= \mu(\tau, \lambda) \sin \theta \cos \varphi + \varepsilon M_1, \\ A\dot{q} + (A - C)pr &= -\mu(\tau, \lambda) \sin \theta \sin \varphi + \varepsilon M_2, \\ C\dot{r} &= \varepsilon M_3, \quad M_i = M_i(p, q, r, \psi, \theta, \varphi, \tau), \quad i = 1, 2, 3, \\ \dot{\psi} &= (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{cosec} \theta, \quad \dot{\varphi} = r - (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{ctg} \theta, \\ \dot{\theta} &= p \cos \varphi - q \sin \varphi, \quad \tau = \varepsilon t, \quad \lambda = \varepsilon \theta. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь p, q, r — проекции вектора угловой скорости на главные оси инерции тела. Величины εM_i ($i = 1, 2, 3$) — проекции вектора возмущающего момента на те же оси, они зависят от медленного времени $\tau = \varepsilon t$, $\varepsilon \ll 1$; ψ, θ, φ — углы Эйлера; A — экваториальный, а C — осевой моменты инерции относительно неподвижной точки, $A \neq C$. Предполагается, что на тело действует восстанавливающий момент $\mu(\tau, \lambda)$, зависящий от медленного времени τ и малого угла нутации $\lambda = \varepsilon \theta$. Он является дифференцируемой функцией от двух переменных.

Ставится задача исследования поведения решений системы (1) при значениях малого параметра ε , отличных от нуля, на достаточно большом интервале времени порядка ε^{-1} . Для решения задачи применяется процедура усреднения, разработанная в Akulenko et al. (1979), Chernousko et al. (2017). Она используется для усреднения системы (1) по фазе угла нутации θ вдоль траекторий изменения $\theta(t)$. Используя первые интегралы невозмущенной системы (1) при $\varepsilon = 0$ приведем первые три уравнения (1) к виду:

$$\begin{aligned}
\dot{G}_z &= \varepsilon[(M_1 \sin \varphi + M_2 \cos \varphi) \sin \theta + M_3 \cos \theta], \\
\dot{H} &= \varepsilon[(M_1 p + M_2 q + M_3 r) + \mu' \cos \theta], \quad \dot{r} = \varepsilon C^{-1} M_3, \\
\mu' &= \frac{\partial \mu(\tau, \lambda)}{\partial \tau} + \dot{\theta} \cdot \frac{\partial \mu(\tau, \lambda)}{\partial \lambda}, \quad M_i = M_i(p, q, r, \psi, \theta, \varphi, \tau), \quad i = 1, 2, 3.
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь G_z — проекция вектора кинетического момента на вертикаль Oz , H — полная энергия тела, r — проекция вектора угловой скорости на ось динамической симметрии.

Правые части уравнений (2) содержат три быстрые переменные — углы собственного вращения φ , нутации θ и прецессии ψ , периодические по t . Для применения процедуры усреднения (Chernousko et al., 2017; Akulenko et al., 2017) выражения в правых частях уравнений (2) представим как функции медленных переменных G_z , H , r и угла нутации θ , периодические по фазе угла θ с периодом 2π , и имеющие свойства возмущающего момента сил:

$$\begin{aligned}
M_1^* &= M_1 \sin \varphi + M_2 \cos \varphi, \quad M_2^* = M_1 p + M_2 q, \quad M_3^* = M_3, \\
M_i^* &= M_i^*(G_z, H, r, \tau, \theta), \quad i = 1, 2, 3, \\
M_1 &= pf, \quad M_2 = qf, \quad M_3 = M_3^*, \quad f = f(G_z, H, r, \theta, \tau).
\end{aligned} \tag{3}$$

Тогда система (2) уравнений возмущенного движения твердого тела, близкого к случаю Лагранжа, может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned}
\dot{G}_z &= \varepsilon F_1(G_z, H, r, \tau, \theta), \quad F_1 = M_1^* \sin \theta + M_3^* \cos \theta, \\
\dot{H} &= \varepsilon F_2(G_z, H, r, \tau, \theta), \quad F_2 = M_2^* + M_3^* r + \mu' \cos \theta, \\
\dot{r} &= \varepsilon F_3(G_z, H, r, \tau, \theta), \quad F_3 = C^{-1} M_3^*.
\end{aligned} \tag{4}$$

Здесь $F_i = F_i(G_z, H, r, \tau, \theta)$ ($i = 1, 2, 3$) — 2π -периодические функции фазы угла θ .

Известны выражения для угла нутации θ в невозмущённом движении Лагранжа как функции вида:

$$\begin{aligned}
u &= \cos \theta = u_1 + (u_2 - u_1) \operatorname{sn}^2(\alpha t + \beta), \quad \operatorname{sn}(\alpha t + \beta) = \sin \operatorname{am}(\alpha t + \beta, k), \\
\dot{\theta} &= -\frac{\dot{u}}{\sqrt{1-u^2}}, \quad \alpha = \left[\frac{\mu(u_3 - u_1)}{2A} \right]^{1/2}, \quad k^2 = (u_2 - u_1)(u_3 - u_1)^{-1}, \quad 0 \leq k^2 \leq 1.
\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $\mu = \mu_0 = \mu(0, 0)$, u — периодическая функция t с периодом $K(k)/\alpha$, $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода; k — модуль эллиптических функций, u_1, u_2, u_3 — вещественные корни кубического многочлена

$$Q(u) = A^{-2}[(2H - Cr^2 - 2\mu u)(1 - u^2)A - (G_z - Cru)^2].$$

Исследуем возмущенное движение в медленных переменных u_i , $i = 1, 2, 3$. Медленные переменные G_z , H , r удается выразить через u_i следующим образом:

$$\begin{aligned} G_z &= \delta_1(\Omega + \delta_2 R)^{1/2} \delta_3, & r &= \delta_1 C^{-1}(\Omega - \delta_2 R)^{1/2}, \\ H &= \frac{1}{2} \mu_0 \left[(u_1 + u_2 + u_3)(1 + A C^{-1}) + (\delta_2 R - u_1 u_2 u_3)(1 - A C^{-1}) \right], \\ R &= \left[(1 - u_1^2)(1 - u_2^2)(u_3^2 - 1) \right]^{1/2}, & \Omega &= u_1 + u_2 + u_3 + u_1 u_2 u_3, & 0 &\leq \{R, \Omega\}, \\ \delta_1 &= \sqrt{A \mu_0} \operatorname{sign} r, & \delta_2 &= \operatorname{sign}(G_z^2 - C^2 r^2), & \delta_3 &= \operatorname{sign}(1 + u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_2 u_3). \end{aligned} \quad (6)$$

Величины δ_1 и δ_2 в начальный момент определяются по начальным условиям для G_z и r . После ряда преобразований искомая система уравнений для медленных переменных u_i , $i = 1, 2, 3$ принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{du_i}{dt} &= \varepsilon V_i(u_1, u_2, u_3, \tau, \lambda, \theta), & u_i(0) &= u_i^0, & i &= 1, 2, 3, \\ V_i &= V_{i1} F_1^* + V_{i2} F_2^* + V_{i3} F_3^* + V_{i4} \mu', & V_{ij} &= V_{ij}(u_1, u_2, u_3, \tau, \lambda), & j &= 1, 2, 3, 4, \\ V_{11} &= \frac{G_z - C r u_1}{A \Delta}; & V_{13} &= \frac{C}{A \Delta} \left[A r (1 - u_1^2) - u_1 (G_z - C r u_1) \right]; \\ V_{12} &= \frac{u_1^2 - 1}{\Delta}; & V_{14} &= \frac{\left[A (u_1^2 - 1) (C r^2 - 2H) - (G_z - C r u_1)^2 \right]}{2 A \mu \Delta}; \\ \mu &= \mu(\tau, \lambda), & \mu' &= \frac{\partial \mu}{\partial \tau} + \dot{\theta} \frac{\partial \mu}{\partial \lambda}; & \Delta &= \mu(u_1 - u_2)(u_1 - u_3), & \Delta &\neq 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Усредняя правые части системы (7) по фазе угла нутации, получим усредненную систему первого приближения:

$$\begin{aligned} \frac{du_i}{d\tau} &= U_i(u_1, u_2, u_3, \tau, \lambda), & u_i(0) &= u_i^0, & i &= 1, 2, 3, \\ U_i(u_1, u_2, u_3, \tau, \lambda) &= \frac{\alpha}{2K(k)} \int_0^{2K/\alpha} V_i(u_1, u_2, u_3, \tau, \lambda, \theta(t)) dt. \end{aligned} \quad (8)$$

После решения и исследования системы (8) для u_i медленные переменные G_z , H , r восстанавливаются по формулам (6).

Рассмотрим возмущенное движение, близкое к случаю Лагранжа, под действием внешней среды. Возмущающие моменты εM_i , $i = 1, 2, 3$ имеют вид:

$$M_1 = -a(\tau)p, \quad M_2 = -a(\tau)q, \quad M_3 = -b(\tau)r, \quad a(\tau), b(\tau) > 0 \quad (9)$$

Здесь $a(\tau)$, $b(\tau)$ — интегрируемые функции, зависящие от свойств среды и формы тела. Моменты (9) удовлетворяют условиям (3) возможности усредне-

ния по фазе угла нутации θ . Используя изложенную выше процедуру получим усредненную систему (8) с учетом возмущающих моментов (9) вида:

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{d\tau} = \frac{-1}{\Delta} \left\{ a(\tau)A^{-1} \left[A^{-1}(G_z - Cr u_1)(G_z - Crv) + \right. \right. & (123) \\ & \left. \left. + (u_1^2 - 1)(2H - Cr^2 - 2\mu_0 v) \right] + A^{-1}r b(\tau)(G_z - Cr u_1)(v - u_1) - \right. \\ & \left. - \frac{\partial \mu(\tau, \lambda)}{\partial \tau} \left[(u_1^2 - 1) \left(v + \frac{1}{2\mu}(Cr^2 - 2H) \right) - \frac{1}{2A\mu}(G_z - Cr u_1)^2 \right] \right\} & (10) \\ v = u_3 - (u_3 - u_1)E(k) / K(k). \end{aligned}$$

Символ (123) означает, что уравнения для u_2 , u_3 получаются из уравнения (10) для u_1 циклической перестановкой индексов 1, 2, 3. При этом, выражения для v остаются неизменными во всех трех уравнениях. Усреднённая система (10) с учетом (9) проинтегрирована численно. Предполагается, что в начальный момент времени волчок Лагранжа получил угловую скорость вращения вокруг оси динамической симметрии, равную $r^0 = 1.73$ и отклонение на угол $\theta^0 = 30^\circ$ от вертикали. Принимаем, кроме того,

$$A = 1.8, \quad C = 1, \quad \varepsilon = 0.1, \quad u_1^0 = -0.089,$$

$$u_2^0 = 0.866, \quad u_3^0 = 1.13, \quad a(\tau) = 0.125 + \tau, \quad b(\tau) = 0.1 + \tau, \quad \mu = 0.8 + 0.01(\tau + 2A \cos \lambda).$$

Для рассмотренного случая определено, что проекция вектора кинетического момента на вертикаль G_z и угловая скорость вращения относительно оси динамической симметрии r убывают; величина u_3 достаточно быстро асимптотически стремится к единице; переменные u_1 и u_2 монотонно убывают и стремятся к -1 ; полная энергия H монотонно убывает, асимптотически приближаясь к значению $H = -0.8$.

Список литературы

- Akulenko, L. D., Leshchenko, D. D., & Chernousko, F. L. (1979). Perturbed motions of a rigid body, close to the Lagrange case. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 43(5), 829–837.
- Akulenko, L. D., Zinkevich, Ya. S., Kozachenko, T. A., & Leshchenko, D. D. (2017). The evolution of motions of a rigid body close to the Lagrange case under the action of an unsteady torque. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 82(2), 79–84.
- Chernousko, F. L., Akulenko, L. D., & Leshchenko, D. D. (2017). *Evolution of motions of a rigid body about its center of mass*. Cham: Springer.

Деякі властивості гіллястих процесів з еміграцією

Т. Б. Лисецький, Я. І. Єлейко

ЛНУ ім. Івана Франка, Львів, Україна

taraslysetskiyy@gmail.com, yikts@yahoo.com

У статті розглядається гіллястий процес з перетвореннями, що можуть залежати від часу та еміграцією як частиною того ж процесу. Досліджується асимптотична поведінка процесу, який рахує кількість частинок що емігрували.

Ключові слова: гіллястий процес, еміграція, твірна функція, рівняння відновлення, асимптотична поведінка.

Розгляньмо гіллястий процес з перетвореннями, що залежать від часу та еміграцією як частиною того ж процесу.

Визначимо цей процес за аналогією з Севастьяновим (1971):

Нехай маємо n типів частинок T_1, T_2, \dots, T_n . Кожна частинка типу T_i знаходиться в процесі випадкову кількість часу τ_i , з функцією розподілу

$$P(\tau_i \leq t) = G^i(t), G^i(0+) = 0.$$

Частинка в кінці свого перебування в процесі перетворюється в будь-яку сукупність частинок типів T_1, T_2, \dots, T_n або емігрує. Частинки, що емігрують виділимо в окремий тип T_0 . Умовну ймовірність перетворення частинки типу T_i (за умови, що перетворення відбулось і вік частинки в цей момент дорівнював u) в сукупність частинок $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ відповідних типів позначимо $p_\alpha^i(u)$. Еволюція частинки визначається сумісним розподілом випадкової величини τ_i та випадкового вектора

$$v_i = (v_i^0, v_i^1, \dots, v_i^n),$$

що характеризує склад «потомства» цієї частинки, тобто

$$P(\tau_i \in B, v_i = \alpha) = \int_B p_\alpha^i(u) dG^i(u),$$

де B — борелева множина, α — вектор розмірності $n+1$, у якому перша координата може набувати лише значення 0 (у цьому випадку наступні координати можуть бути довільними цілими невід'ємними цілими числами або 1 (у цьому випадку решта координат рівні нулю).

Частинки типу T_0 в будь-який момент часу переходять в себе, тобто можна вважати, що функція розподілу часу життя частинки типу T_0 — $G^0(t)$ має вироджений в нулі розподіл ($G^0(t) = 1 \forall t > 0$). Крім того вважатимемо, що $p_0^0(u) = 1, p_\alpha^0(u) = 0$ для всіх $u \geq 0$ та всіх векторів $\alpha \neq (1, 0, \dots, 0)$.

Нехай вектор

$$\mu^i(t) = (\mu_0^i(t), \mu_1^i(t), \mu_2^i(t), \dots, \mu_n^i(t))$$

характеризує кількість частинок типів $T_0, T_1, T_2, \dots, T_n$ у момент часу t , при умові що в початковий момент часу була одна частинка типу T_i .

Для простоти, уважатимемо що функції розподілу $G^i(t)$ абсолютно неперервні.

Розгляньмо твірні функції

$$h^i(u, s) = \sum_{\alpha} p_{\alpha}^i(u) s^{\alpha} \text{ та } F^i(t, s) = \sum_{\alpha} P^i(\mu^i(t) = \alpha) s^{\alpha},$$

$$s = (s_0, s_1, \dots, s_n), s^{\alpha} = s_0^{(\alpha_0)} s_1^{(\alpha_1)} \dots s_n^{(\alpha_n)}.$$

Зрозуміло, що

$$F^0(t, s) = h^0(u, s) = s_0 \text{ для всіх } t,$$

$$F(t, s) = (F^0(t, s), F^1(t, s), \dots, F^n(t, s)).$$

Метою даної роботи є дослідження асимптотичної поведінки процесів $\mu_0^l(t)$.

Лема 1. Твірні функції $F^i(t, s)$ задовольняють при $s \leq 1$ і $t \geq 0$ системі інтегральних рівнянь

$$F^i(t, s) = \int_0^t h^i(u, F(t-u, s)) dG^i(u) + s_i (1 - G^i(t)), i = \overline{1, n}.$$

Покладемо

$$a_j^i(u) = \left. \frac{\partial h^i(u, s)}{\partial s_j} \right|_{s=1}, A_j^i = \int_0^{+\infty} a_j^i(u) dG^i(u),$$

$$b_{jk}^i(u) = \left. \frac{\partial h^i(u, s)}{\partial s_j \partial s_k} \right|_{s=1}, B_{jk}^i = \int_0^{+\infty} b_{jk}^i(u) dG^i(u).$$

Процес називатимемо *докритичним* (*критичним* або *надкритичним*), якщо перонів корінь матриці $A = \left\| A_j^i \right\|_{i,j=1,n}$ менший (рівний або більший) одиниці.

Нехай ρ позначає мальтусівський корінь матриці A .

Запровадьмо також наступні позначення

$$A_{\rho k}^l = \int_0^{+\infty} t e^{-\rho t} a_k^l(u) dG^l(u), B_{\rho jk}^l = \int_0^{+\infty} e^{-2\rho t} b_{jk}^l(u) dG^l(u),$$

$$B = \sum_{l,k,m=1}^n B_{mk}^l v^l u^k u^m, M_a = \sum_{l,k=1}^n \int_0^{+\infty} t a_k^l(t) dG^l(t) v^l u^k,$$

$$M^k = \int_0^{+\infty} t dG^k(t), M_0 = \sum_{k=1}^n v^k \int_0^{+\infty} a_0^k(t) dG^k(t).$$

Розглядаючи процеси $\mu_0^l(t)$ як стохастичні адитивні функціонали від гіллястих процесів можна навести наступну теорему (Шуренков, 1979).

Теорема 1. Якщо процес надкритичний, $A_{\rho k}^l, B_{\rho jk}^l$ скінченні, $l, j, k = \overline{1, n}$, то випадкові величини

$$\frac{e^{-\rho t} \mu_0^l(t)}{K}, \frac{e^{-\rho t} \mu_1^l(t)}{K_1}, \dots, \frac{e^{-\rho t} \mu_n^l(t)}{K_n}$$

збігаються при $t \rightarrow \infty$ в середньоквадратичному до однієї і тієї ж випадкової величини μ^l , де

$$K = \frac{\sum_{i=1}^n v_{\rho}^i \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} \int_0^t a_0^i(u) dG^i(u) dt}{\sum_{i,j=1}^n v_{\rho}^i u_{\rho}^j \int_0^{+\infty} t e^{-\rho t} a_j^i(t) dG^i(t)}$$

$$K_i = \frac{v_{\rho}^i \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} (1 - G^i(t)) dt}{\sum_{i,j=1}^n v_{\rho}^i u_{\rho}^j \int_0^{+\infty} t e^{-\rho t} a_j^i(t) dG^i(t)}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Асимптотична поведінка процесів $N^l(t)$, які описують кількість частинок усіх типів, які існували до моменту t , за умови, що в початковий момент часу існувала одна частинка типу T_l була описана Вайнером (1974).

Порівнюючи процеси $\mu_0^l(t)$ із процесами $N^l(t)$ можна довести правильність такої теореми.

Теорема 2. Нехай виконуються наступні умови:

1) скінченні інтеграли

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial^k h^i(u, s)}{(\partial s_1)^{k_1} \dots (\partial s_n)^{k_n}} \Big|_{s=1} dG^i(u);$$

2) величини M_a та M^l скінченні;

$$3) \int_0^{+\infty} \int_t^{+\infty} a_0^l(u) dG^l(u) dt = k_0^l < +\infty;$$

$$4) \lim_{t \rightarrow \infty} t^2 \int_t^{+\infty} a_0^l(u) dG^l(u) < \infty, \lim_{t \rightarrow \infty} t^2 (1 - G^l(t)) < \infty,$$

$i, l, m, j = \overline{1, n}, k \in \mathbb{N}, k_1 + \dots + k_n = k$, моді

$$E \left(\exp \left\{ i\beta \mu_0^i(t) / t^2 \right\} \left| \sum_{k=1}^n \mu_k^i(t) > 0 \right. \right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{M_0 (2BM_0\beta)^{1/2}}{M_a} \left(\operatorname{sh} \left(\frac{(2BM_0\beta)^{1/2}}{M_a} \right) \right)^{-1}.$$

Наступна теорема є аналогом теореми 1 (Шуренков, 1979)

Теорема 3. *Якщо*

$$\min_{j \in \overline{1, n}} \int_0^{+\infty} p_1^j(u) dG^j(u) > 0,$$

то величини $\mu_0^j(t)$ збігаються при $t \rightarrow \infty$ майже напевно до скінченнозначних випадкових величин μ_0^j , $j = \overline{1, n}$, тоді й тільки тоді, коли процес критичний або докритичний.

Список літератури

- Weiner, H. J. (1974). Total progeny in a multitype critical age dependent branching process with immigration. *Journal of Applied Probability*, 11(3), 458–470. <https://www.jstor.org/stable/3212690>
- Севастьянов, Б. А. (1971). *Ветвящиеся процессы*. Москва: Наука.
- Шуренков, В. М. (1979). Об аддитивных функционалах от ветвящихся процессов. *Теория вероятн. и ее применения*, 24(2), 389–394. <http://mi.mathnet.ru/rus/tvp/v24/i2/p389>

Консистентне оцінювання параметрів змішаного дробового броунівського руху із трендом

С. С. Логвіненко, К. В. Ральченко

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
stanislav.lohvinenko@gmail.com, kostiantynralchenko@knu.ua

У статті досліджується змішаний дробовий броунівський рух із трендом, що має вигляд $X_t = \theta t + \sigma W_t + \kappa B_t^H$, породжений стандартним броунівським рухом

W та дробовим броунівським рухом B^H з індексом Хюрста H . Розроблено метод оцінювання чотирьох невідомих параметрів θ , σ , κ та H за дискретними спостереженнями. Алгоритм процесу виглядає так: оцінюються σ , κ та H за допомогою квадратичних варіацій, а оцінка для θ отримується як дискретизація неперервної оцінки типу максимальної вірогідності.

Ключові слова: дробовий броунівський рух, процес Вінера, змішані степеневі варіації, строга консистентність, змішана модель.

Вступ. У природі існує багато різноманітних явищ, які можуть бути представлені як процеси випадкової еволюції в часі. Традиційно для математичного моделювання таких часових рядів використовують стандартний броунівський рух. Однак, різні дослідження показали, що деякі процеси демонструють властивості самоподібності, довгострокової залежності та мають складні структури кореляцій. Використання дробового броунівського руху дозволяє моделювати такі процеси, оскільки він має корельовані природи, які дають короткострокову залежність при $H < 1/2$ та довгострокову залежність при $H > 1/2$ (Mishura, 2008). Проте дробовий броунівський рух не є ні напівмартингалом, ні процесом Маркова (окрім випадку стандартного броунівського руху). Тому виникають певні складнощі у використанні моделей, породжених дробовим броунівським рухом. Наприклад, ми не можемо використовувати традиційний стохастичний аналіз для їх дослідження та виникає арбітражна можливість у суто дробовій моделі Блека — Шоулза (Cheridito, 2003). Запропонований в Cheridito (2003) змішаний дробовий броунівський рух дозволяє уникнути деякі з цих проблем. Ця модель застосовується, наприклад, у моделюванні трафіку комп'ютерної мережі (Filatova, 2008) та більш широко у фінансах (Sun, 2013; Xiao et al., 2012; Zhang et al., 2009). Для більш детального ознайомлення з властивостями змішаного дробового броунівського руху ми рекомендуємо Zili (2006).

У даній роботі ми розглядаємо такий змішаний дробовий броунівський рух із трендом:

$$X_t = \theta t + \sigma W_t + \kappa B_t^H, \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

де W — процес Вінера, B^H — дробовий броунівський рух з індексом Хюрста $H \in (0, 1)$, процеси B^H і W незалежні.

У даній роботі ми почнемо з оцінки параметра зсуву θ . Спочатку ми

побудуємо оцінку θ за припущення відомого індексу Хюрста H . Для цього ми дискретизуємо оцінку, яка була представлена в Le Breton (1998) для чисто дробової моделі з $\sigma = 0$ (схожа дискретизація була запропонована в Mishura and Ralchenko (2014) для оцінки параметра зсуву в дробовій дифузійній моделі). Ми встановимо строгу консистентність цієї оцінки для всіх $H \in (0,1)$ та отримаємо її швидкість збіжності. Потім ми доведемо, що ця оцінка залишається строго консистентною, якщо ми підставимо консистентну оцінку H замість його справжнього значення. Зокрема, ми встановимо швидкість збіжності такої підстановочної оцінки у випадку, коли H оцінений за допомогою квадратичних варіацій. Ураховуючи, що κ та σ також можна оцінити за допомогою квадратичних варіацій методами з Dozzi et al. (2015), ми отримаємо оцінки для всіх чотирьох параметрів.

2. Консистентне оцінювання параметра зсуву θ . Ми побудуємо оцінку для θ у два кроки. Спочатку ми побудуємо її, припускаючи, що параметр H відомий, та доведемо її строгу консистентність. Ми застосуємо схему, коли горизонт спостережень прямує до нескінченності, а крок між спостереженнями прямує до нуля. Конкретно ми розглядаємо спостереження процесу X на розбитті відрізка $[0, 2^n]$ з кроком 2^{-n} . Якщо H невідоме, ми пропонуємо оцінити H за допомогою квадратичних варіацій, використовуючи спостереження процесу X на відрізку $[0, 1]$, а потім підставити цю оцінку в оцінку для θ .

Щоб уникнути громіздких виразів, ми будемо використовувати символи O_ω та o_ω . Нехай $\{\xi_n\}$ — це послідовність випадкових величин, ς — невід’ємна випадкова величина, а послідовність $\{a_n\} \subset (0, \infty)$. Тоді $\xi_n = O_\omega(a_n)$ означає, що для деякого ς $\xi_n \leq \varsigma a_n$; а $\xi_n = o_\omega(a_n)$ означає, що $\xi_n \leq \varsigma b_n$ для деяких ς та $b_n = o(a_n)$. Символ C позначає загальну додатну константу, чиє точне значення неважливе.

2.1. Оцінювання параметра θ , коли H відоме. Нехай $H \in (0,1)$ відоме.

Припустимо, що траєкторія процесу X спостерігається в точках $t_k^n = \frac{k}{2^n}$,

$k = 0, 1, \dots, 2^{2n}$. Розглянемо оцінку

$$\hat{\theta}_n = \frac{\sum_{k=1}^{2^{2n}-1} (t_k^n)^{\frac{1}{2}-H} (2^n - t_k^n)^{\frac{1}{2}-H} \left(X_{t_k^n} - X_{t_{k-1}^n} \right)}{\mathbb{V} \left(\frac{3}{2} - H, \frac{3}{2} - H \right) 2^{n(2-2H)}}.$$

Це дискретизована версія неперервної оцінки (1.8) з Cai et al. (2012) (вона була запропонована вперше в Le Breton (1998) у суто дробовій моделі). Схожа дискретна оцінка була представлена в Mishura and Ralchenko (2014) для параметра зсуву стохастичного диференціального рівняння породженого дробовим броунівським рухом.

Теорема 2.1. Нехай $H \in (0,1)$. Оцінка $\hat{\theta}_n$ є строго консистентною оцінкою параметра θ при $n \rightarrow \infty$. Більше того,

$$\hat{\theta}_n - \theta = O_\omega \left(n^\alpha 2^{-n[H \wedge (1-H)]} \right),$$

де α може бути як завгодно малим.

2.2. Оцінювання H , κ та σ через квадратичні варіації. Наша наступна ціль — побудувати оцінку параметра зсуву у випадку, коли індекс Хюрста невідомий. З цією метою ми почнемо з оцінювання параметра H . Зокрема, у цьому підрозділі ми розглянемо оцінку параметра H за спостереженнями процесу X на дискретному розбитті відрізка $[0,1]$. Ми адаптуємо метод на основі квадратичних варіацій, який був розроблений в Dozzi et al. (2015), Kubilius et al. (2017) у випадку $\theta = 0$.

Аналогічно до Dozzi et al. (2015), побудуємо оцінки, використовуючи квадратичні варіації такого вигляду:

$$V_n(X) \sum_{i=0}^{n-1} \left(\Delta_i^n X \right)^2, \quad \text{де} \quad \Delta_i^n X = X_{\frac{i+1}{n}} - X_{\frac{i}{n}}.$$

Через $M_t = \sigma W_t + \kappa B_t^H = X_t - \theta t$ позначимо змішаний дробовий броунівський рух без тренду. Асимптотична поведінка $V_n(M)$ детально досліджувалася в Dozzi et al. (2015) та Kubilius et al. (2017, ch. 4), де було встановлено таке співвідношення:

$$V_n(M) = \kappa^2 n^{1-2H} + \sigma^2 + o_\omega \left(n^{\frac{1}{2}-H} \right) \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Неважко бачити, що тренд θt не впливає на асимптотичну поведінку квадратичних варіацій. Справді,

$$\begin{aligned} V_n(X) &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{\theta}{n} + \Delta_i^n M \right)^2 = \frac{\theta^2}{n} + \sum_{i=0}^{n-1} \left(\Delta_i^n M \right)^2 + \frac{2\theta}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta_i^n M \\ &= \frac{\theta^2}{n} + V_n(M) + \frac{2\theta}{n} M_1 = V_n(M) + O_\omega(n^{-1}) \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Поєднуючи це з (2), одержимо

$$V_n(X) = \kappa^2 n^{1-2H} + \sigma^2 + o_\omega \left(n^{\frac{1}{2}-H} \right) \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Таким чином, асимптотична поведінка $V_n(X)$ та $V_n(M)$ абсолютно однакова. Це означає, що параметри H , σ та κ процесу X можна оцінити так само, як і у випадку змішаного дробового броунівського руху без тренду. Ми не наводимо доведення наступних асимптотичних результатів, оскільки вони буквально повторюють відповідні міркування з Kubilius et al. (2017, ch. 4).

Нехай $n \geq 1$. Припустимо, що траєкторія процесу X спостерігається в точках $t_k^n = \frac{k}{2^n}$, $k = 0, \dots, 2^n$. Введемо статистику

$$\hat{H}(k) = \frac{1}{2} \left(\log_{2^+} \frac{V_{2^{k-2}}(X) - V_{2^{k-1}}(X)}{V_{2^{k-1}}(X) - V_{2^k}(X)} + 1 \right), \quad (3)$$

де

$$\log_{2^+} x \begin{cases} \log_2 x & \text{if } x > 0, \\ 0 & \text{if } x \leq 0. \end{cases}$$

Твердження 2.1. 1. Для $H \in (0, 1/2)$, статистика (3) є строго консистентною оцінкою параметра H , більше того, для довільного $\varepsilon > 0$,

$$\hat{H}(k) = H + o_\omega \left(2^{(-1/2+\varepsilon)k} \right) \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

2. Для $H \in (1/2, 3/4)$ статистика (3) є строго консистентною оцінкою параметра H , більше того, для довільного $\varepsilon > 0$,

$$\hat{H}(k) = H + o_\omega \left(2^{(2H-3/2+\varepsilon)k} \right) \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Зауваження 2.1 Варто зауважити, що можна побудувати й інші оцінки для H на основі квадратичних варіацій (а також на основі варіацій четвертого степеня). Зацікавленому читачеві ми пропонуємо ознайомитися зі статтею Dozzi et al. (2015) для більш детальних викладок. Тут ми вибрали $\hat{H}(k)$, оскільки вона підходить для всіх значень $H \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

Зауважимо також, що, наскільки нам відомо, не існує строго консистентної оцінки для H (на основі квадратичних варіацій) у випадку $H \geq \frac{3}{4}$. Згідно з Dozzi et al. (2015), це пов'язано з тим, що в цьому випадку міра, породжена $\sigma W + \kappa B^H$ в $C([0, T])$, еквівалентна мірі, породженій σW .

Квадратичні варіації можна також застосувати для оцінювання обох параметрів κ та σ . Строгу консистентність наступних оцінок можна довести аналогічно до відповідних результатів з DMS2015.

Твердження 2.2 (Оцінювання σ^2) 1. Для $H \in (1/4, 1/2)$, статистика

$$\tilde{\sigma}_k^2 = \frac{2^{1-2\hat{H}(k)} V_{2^{k-1}}(X) - V_{2^k}(X)}{2^{1-2\hat{H}(k)} - 1}$$

є строго консистентною оцінкою σ^2 .

2. Для $H \in (1/2, 1)$, статистика

$$\hat{\sigma}_k^2 V_{2^k}(X)$$

є строго консистентною оцінкою σ^2 .

Твердження 2.3 (Оцінювання σ^2). Для $H \in (0, 1/2) \cup (1/2, 3/4)$, статистика

$$\tilde{\kappa}_k^2 \frac{2^{k(2\hat{H}(k)-1)} (V_{2^{k-1}}(X) - V_{2^k}(X))}{2^{2\hat{H}(k)-1} - 1}$$

є строго консистентною оцінкою κ^2 .

2.3. Оцінювання параметра θ , коли H невідоме. Якщо H невідоме, то почнемо з допоміжного результату, який дає верхню границю для різниці між оцінкою $\hat{\theta}_n$ та такою ж оцінкою з деяким числом $h \in (0, 1)$ замість справжнього значення параметра H .

Лема 2.1. Нехай X — змішаний дробовий броунівський рух із трендом, визначений за (1), з індексом Хюрста $H \in (0, 1)$. Позначимо

$$\tilde{\theta}_n(h) = \frac{\sum_{k=1}^{2^{2n}-1} (t_k^n)^{\frac{1}{2}-h} (2^n - t_k^n)^{\frac{1}{2}-h} \left(X_{t_k^n} - X_{t_{k-1}^n} \right)}{\mathbb{V} \left(\frac{3}{2} - h, \frac{3}{2} - h \right) 2^{n(2-2h)}}, \quad h \in [0, 1].$$

Тоді

$$\tilde{\theta}_n(h) - \hat{\theta}_n = O_\omega(h - H),$$

для всіх $h \in (0, H^*)$, де $H^* \in (H, 1)$ — будь-яке число, і для всіх $n \geq 1$.

Тепер ми хочемо замінити H у виразі для $\hat{\theta}_n$ в підрозділі 2.1 оцінкою (3).

Теорема 2.2 Для $H \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$, $\tilde{\theta}_n(\hat{H}(n))$ є строго консистентною оцінкою параметра θ при $n \rightarrow \infty$.

Якщо $H \in (0, 1/2)$, то

$$\tilde{\theta}_n(\hat{H}(n)) - \theta = o_\omega \left(2^{-(H-\varepsilon)n} \right) \quad \text{м. н. при } n \rightarrow \infty,$$

для будь-якого $\varepsilon > 0$.

Якщо $H \in (1/2, 3/4)$, то

$$\tilde{\theta}_n(\hat{H}(n)) - \theta = o_\omega \left(2^{-\left(\frac{3}{2}-2H-\varepsilon\right)n} \right) \quad \text{м. н. при } n \rightarrow \infty,$$

для будь-якого $\varepsilon > 0$.

Зауваження 2.2. Очевидно, що швидкість збіжності достатньо мала, коли H близьке до $\frac{3}{4}$. Її можна збільшити, використовуючи більш щільне розбиття для оцінки параметра H . Конкретно, можна взяти $\hat{H}(kn)$ з відповідним $k > 1$ замість $\hat{H}(n)$. У цьому випадку, $\tilde{\theta}_n(\hat{H}(kn)) - \theta = o_\omega(2^{-\rho n})$ при $n \rightarrow \infty$, де

$$\rho = \begin{cases} H - \varepsilon, & \text{якщо } H \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \\ \min k \left(\frac{3}{2} - 2H - \varepsilon \right), 1 - H - \varepsilon, & \text{якщо } H \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right), \end{cases}$$

для довільного $\varepsilon > 0$.

Список літератури

- Cai, C., Chigansky, P., & Kleptsyna, M. (2012). The maximum likelihood drift estimator for mixed fractional Brownian motion. *Preprint, available online at <http://arxiv.org/abs/1208.6253>*.
- Cheridito, P. (2001). Mixed fractional Brownian motion. *Bernoulli*, 7(6), 913–934.
- Cheridito, P. (2003). Arbitrage in fractional Brownian motion models. *Finance and Stochastics*, 7(4), 533–553.
- Dozzi, M., Mishura, Y., & Shevchenko, G. (2015). Asymptotic behavior of mixed power variations and statistical estimation in mixed models. *Stat. Inference Stoch. Process.*, 18(2), 151–175.
- Filatova, D. (2008, September). Mixed fractional Brownian motion: some related questions for computer network traffic modeling. In *2008 International Conference on Signals and Electronic Systems* (pp. 393–396). IEEE.
- Kubilius, K., Mishura, I. S., & Ralchenko, K. (2017). Parameter estimation in fractional diffusion models (Vol. 8). Cham, Switzerland: Springer.
- Le Breton, A. (1998). Filtering and parameter estimation in a simple linear system driven by a fractional Brownian motion. *Statist. Probab. Lett.*, 38(3), 263–274.
- Mishura, Y., & Ralchenko, K. (2014). On drift parameter estimation in models with fractional Brownian motion by discrete observations. *Austrian Journal of Statistics*, 43(3), 218–228.
- Mishura, I. S. (2008). Stochastic calculus for fractional Brownian motion and related processes (Vol. 1929). Springer Science & Business Media.
- Sun, L. (2013). Pricing currency options in the mixed fractional Brownian motion. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 392(16), 3441–3458.
- Xiao, W. L., Zhang, W. G., Zhang, X., & Zhang, X. (2012). Pricing model for equity warrants in a mixed fractional Brownian environment and its algorithm. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 391(24), 6418–6431.
- Zhang, W.-G., Xiao, W.-L., & He, C.-X. (2009). Equity warrants pricing model under fractional Brownian motion and an empirical study. *Expert Systems with Applications*, 36(2), 3056–3065.
- Zili, M. (2006). On the mixed fractional Brownian motion. *J. Appl. Math. Stoch. Anal.*, 2006(32435), 1–9.

Моделювання в'язкопружних властивостей випадково армованих еластомерів

Б. П. Маслов

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна
maslov@inmech.kiev.ua

Розв'язано задачу прогнозування макроскопічних в'язкопружних властивостей багатокомпонентних еластомерів випадкової структури. Застосовано квазілінійну модель в'язкопружності типу Работнова. Використано визначальні рівняння відносно статистичних флуктуацій першого і другого порядку відносно переміщень, тензор нелінійних деформацій Гріна, номінальні напруження Піоли та напруження Коші. За допомогою інтегральних перетворень Карсона та Фур'є задача в'язкопружності для визначення поля локальних деформацій та напружень зводиться до такої, що відповідає постановці нелінійної теорії пружності.

Ключові слова: в'язкопружність, еластомер, інтегральні перетворення.

Вступ. В останні роки все більшу увагу дослідників привертають композитні матеріали на основі матриць із реологічних еластомерів (Christensen, 1980; Nam et al., 2020). Це пов'язано з можливістю їх застосування в сучасному приладобудуванні. Тому актуальною є проблема створення математичної моделі (Asaro & Lubarda, 2006; Работнов 1977) для прогнозування в'язкопружних властивостей таких композитів, виходячи з базових результатів механіки неоднорідних пружних середовищ (Хорошун и др., 1993).

Постановка задачі моделювання. Розглядаємо представницький об'єм V_R композитного матеріалу в недеформованому стані та вводимо декартову систему координат x^A з ортами \mathbf{e}_A у відліковій конфігурації k_R . Положення матеріальної точки в цій конфігурації визначається радіусом-вектором $\mathbf{x} = x^A \mathbf{e}_A$. У результаті деформацій повзучості положення матеріальної частки у просторі змінюється з часом та в конфігурації спостереження $k = k(k_R, t)$ в момент часу t задається вектором $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x}, t) = y^m \mathbf{e}_m$, $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, де $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$ є неперервною функцією двох змінних; $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ — вектор переміщень. Мають місце наступні кінематичні співвідношення (Destrade & Ogden, 2010)

$$\mathbf{y} = \mathbf{F}\mathbf{x}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{1} + \mathbf{H}, \quad 2\mathbf{e} = \mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} = (\nabla \mathbf{u})^T.$$

Тут \mathbf{F} — прямий градієнт деформації; \mathbf{H} — градієнт переміщень; \mathbf{e} — тензор деформацій Гріна; $\mathbf{1}$ — одиничний тензор другого рангу; ∇ — оператор градієнту в координатах відлікової конфігурації. Для запису рівнянь руху, граничних та початкових умов вводиться вектор зусиль \mathbf{t}_N у деформованому матеріалі на елементу поверхні, який у відліковій конфігурації визначено ортом зовнішньої нормалі \mathbf{N} . Отже, вектор зусиль \mathbf{t}_N віднесено до одиниці площі в недеформованому стані. У цьому випадку можна записати $\mathbf{t}_N = N_A T_{Am} \mathbf{e}_m$. Тут T_{Am} антисиметричний тензор номінальних напружень. Тензор істинних напружень

Коші σ_{ij} зв'язаний з номінальними напруженнями T_{Am} співвідношеннями (Asaro & Lubarda, 2006)

$$\sigma_{ij} = J^{-1} F_{iA} T_{Aj}, \quad J = \det \|\mathbf{F}\|.$$

Еластмери зазвичай розглядаються як в'язкопружні нестисливі матеріали, отже ми обираємо надалі для опису миттєвої пружності потенціал у формі Муні — Рівліна (Marckmann & Verron, 2006)

$$W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3).$$

Тут I_1, I_2 інваріанти міри деформацій \mathbf{B} ,

$$I_1 = tr(\mathbf{B}), \quad I_2 = \frac{1}{2}(I_1^2 - tr(\mathbf{B}^2)), \quad \mathbf{B} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$$

C_1, C_2 - пружні константи матеріалу, символом tr -позначений оператор тензорної згортки. Визначальні рівняння миттєвої пружності першого лінійного та другого нелінійного наближення можна записати (Хорошун и др. 1993)

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{(1)} &= \boldsymbol{\sigma}_{(1)} = p_{(1)} \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{e}_{(1)}, \\ \mathbf{T}_{(2)} &= p_{(2)} \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{e}_{(2)} - p_{(1)} \mathbf{H}_{(1)} - \mu \mathbf{H}_{(1)}^2 - \nu_3 \mathbf{e}_{(1)}^2. \end{aligned} \quad (1)$$

Тут, $p_{(1)}, p_{(2)}$ — скаляри, індекси в дужках позначають порядок наближення,

$$\mu = 2(C_1 + C_2), \quad \nu_3 = 8C_2, \quad 2\mathbf{e}_{(1)} = \mathbf{H} + \mathbf{H}^T,$$

при цьому μ — миттєвий модуль зсуву; ν_3 — миттєвий модуль нелінійної теорії пружності другого порядку.

Нелінійний розв'язок другого порядку. Рівняння рівноваги представницького об'єму, записані відносно випадкових флуктуацій переміщень другого порядку, мають вигляд (Maslov, 2000; 2008)

$$\nabla \mathbf{C} \nabla \mathbf{u}'_{(2)} = -\nabla \boldsymbol{\tau}_{(2)}; \quad \boldsymbol{\tau}_{(2)} = \mathbf{f} \mathbf{e}_{(2)} - \mu \mathbf{H}_{(1)}^2 - \nu_3 \mathbf{e}_{(1)}^2.$$

Градiєнти переміщень другого порядку розкладаємо на дилатаційну та девіаторну частини. Тоді, для девіаторів другого наближення умова нестисливості буде аналогічною за формою умові лінійної теорії вязкопружності. Поле переміщень, поле деформацій та напружень можна описати наступними співвідношеннями

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{2}(\mathbf{H}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{H}^T(\mathbf{x}, t)); & Div \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) &= 0; \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) &= \mathbf{C}(\mathbf{x})\mathbf{e}(\mathbf{x}) + \mathbf{e}(\mathbf{x})\mathbf{D}(\mathbf{x})\mathbf{e}(\mathbf{x}); & \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \bar{\mathbf{e}}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{u}'(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

У задачах із циклічними навантаженнями розв'язок може бути знайденим з використанням перетворення Фур'є (Maslov, 2017; 2018). Це надає можливість використати функцію Гріна лінійного розв'язку першого порядку та отримати інтегральне рівняння для визначення девіаторів градієнтів переміщень другого порядку

$$\mathbf{H}_{(2)} = \boldsymbol{\Gamma} * \left(\mathbf{f} \mathbf{e}_{(2)} - \mu \mathbf{H}_{(1)}^2 - \nu_3 \mathbf{e}_{(1)}^2 \right) + \bar{\mathbf{H}}_{(2)}. \quad (2)$$

Усереднимо рівняння (2) при умові, що координата аргумент лівої частини знаходиться в локальному об'ємі, що зайнятий сфероїдальною частинкою орієнтованою у n -напрямку (Хорошун и др., 1993). У результаті отримуємо в області змінних перетворення Фур'є залежність флуктуацій градієнтів переміщень $\mathbf{H}_{(2)}$ від зовнішніх макроскопічних переміщень $\bar{\mathbf{H}}_{(2)}$, заданих на границі об'єму

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_{r(2)} &= m_{Ar}^2 \mathbf{e}_{(1)}^2 + m_{Ar} (\mathbf{e}\mathbf{w} + \mathbf{w}\mathbf{e}) + \mathbf{w}^2; \\ \mathbf{e}_{r(2)} &= m_{Ar}^2 \mathbf{e}_{(1)}^2; \quad 2\mathbf{w} = \mathbf{H} - \mathbf{H}^T.\end{aligned}\quad (3)$$

Підставивши розв'язок (3) в осереднені визначальні рівняння другого порядку з (1), знайдемо закон, що пов'язує макроскопічні напруження Піоли — Кірхгофа та градієнти переміщень другого порядку

$$\mathbf{T}_{(2)} = p_{(2)} \mathbf{1} + 2\tilde{\mu} \mathbf{e}_{(2)} - \left(p \mathbf{H} + \tilde{\mu} \mathbf{H}^2 + \tilde{\nu}_3 \mathbf{e}^2 \right)_{(1)}.$$

Наведені (макроскопічні) коефіцієнти $\tilde{\mu}$, $\tilde{\nu}_3$ обчислюються за формулами

$$\tilde{\mu} = \sum_{r=1}^R c_r \mu_r m_{Ar}; \quad \tilde{\nu}_3 = \sum_{r=1}^R c_r \mu_{Ar}^3 (\mu + \nu_3)_r - \tilde{\mu},$$

де m_{Ar} — компоненти матриці \mathbf{A}_r визначено в Maslov (2000). Як приклад розглянемо композитний матеріал, матриця якого є реологічний еластомер на силіконовій основі, армована хаотично орієнтованими сфероїдальними частинками заліза. Пружні властивості матриці та включень запозичено з Marckmann and Verron (2006).

Таблиця 1

Модуль пружності та параметри ядра Работнова для силіконової матриці

Матеріал	μ , МПа	ξ	α	β	Джерело
Силікон	1.686	2.937	-0.719	0.820	Nam et al. (2020)

Деформування наповнювача вважалось чисто пружним, матриця, виготовлена із силіконового еластомеру, має вязкопружні властивості, наведені в таблиці 1.

Квазілінійна вязкопружність. Щоб сформулювати принцип відповідності застосовується модель квазілінійної вязкопружності типу Работнова. Визначальні рівняння, що пов'язують миттєві пружні напруження $\boldsymbol{\sigma}^e(t)$ та напруження $\boldsymbol{\sigma}(t)$, беремо у вигляді Maslov (2018)

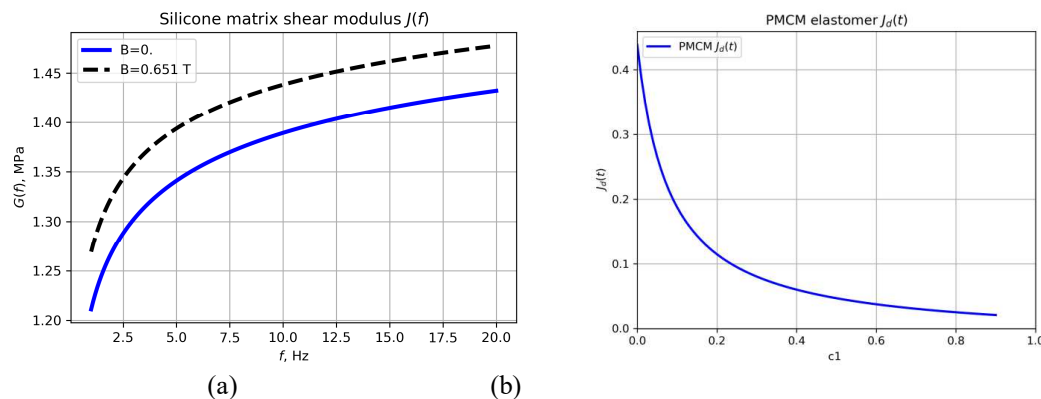
$$\boldsymbol{\sigma}^e(t) = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{e}}(t) = \int_{-\infty}^t \mathbf{g}(t - t_1) d\boldsymbol{\sigma}(t_1), \quad \mathbf{g} = \mathbf{J}(t) / \mathbf{J}(0). \quad (4)$$

Аналогічні співвідношення можна записати щодо миттєвих деформацій $\mathbf{e}^e(t)$ та деформацій $\mathbf{e}(t)$

$$\mathbf{e}^e(t) = \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(t) = \int_{-\infty}^t \mathbf{h}(t - t_1) d\mathbf{e}(t_1), \quad \mathbf{h}(t) = \mathbf{E}(t) / \mathbf{E}(0). \quad (5)$$

За допомогою рівнянь (4), (5) квазілінійна модель в'язкопружності надає можливість узагальнити раніше відомі результати механіки композитів випадко-

вої структури. На рис. 1 зображено результати чисельного прогнозування, при цьому на рис. 1(а) штрихова лінія отримана із врахуванням дії магнітного поля



(a) (b)
Рис. 1. Залежність модуля зсуву від частоти навантаження (а)
та пружності другого порядку від концентрації арматури (б)

Висновок. Запропонований підхід використано в чисельних експериментах (Maslov 2017, 2018), які показали прийнятну точність моделювання.

Список літератури

- Asaro, R. J., & Lubarda, V. A. (2006). *Mechanics of solids and materials*. Cambridge University Press.
- Christensen, R. M. (1980). A nonlinear theory of viscoelasticity for application to elastomers. *Transactions of the ASME*, 47(12), 762–768.
- Destrade, M., & Ogden, R. W. (2010). On the third- and fourth-order constants of incompressible isotropic elasticity. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 128(6), 3334–3343.
- Marckmann G., & Verron E. (2006). Comparison of hyperelastic models for rubber-like materials. *Rubber Chemistry and Technology, American Chemical Society*, 79(5), 835–858.
- Maslov, B. (2017). Stress concentration in nonlinear viscoelastic composites. *Mechanics and Advanced Technologies*, 79(1), 5–10.
- Maslov, B. P. (2000). Stress concentration in non-compressible multi-component material. *Int. Appl. Mechanics*, 36(3), 108–114.
- Maslov, B. P. (2008). Thermal-stress concentration near inclusions in viscoelastic random composites. *Journal Engineering Mathematics*, 61, 339–355.
- Maslov, B. P. (2018). Combined numerical and analytical determination of Poisson's ratio for viscoelastic isotropic materials. *International Appl. Mech.*, 54(2), 220–230.
- Nam T.H., Petrikova I. & Marvalova B. (2020). Experimental characterization and viscoelastic modeling of isotropic and anisotropic magnetorheological elastomers. *Polymer Testing*, 81(106272).
- Работнов, Ю. Н. (1977). *Элементы наследственной механики твердых тел*. Москва: Наука.
- Хорошун, Л. П., Маслов, Б. П., Шикун, Е. Н. & Назаренко, Л. В. (1993). *Механика композитов. (Т. 3. Статистическая механика и эффективные свойства материалов)*. Киев: Наукова думка.

Выяўленне рухомага аб'екта у сегментаваным участку прасторы

А. І. Міцюхін

Беларускі дзяржаўны ўніверсітэт інфарматыкі і радыёэлектронікі,
Інстытут інфармацыйных тэхналогій, Мінск, Беларусь
mityuhin@bsuir.by

У артыкуле разглядаецца метады разумення сцэны на аснове сегментацыі дынамічных выяў. Метады дазваляюць вызначаць параметры руху аб'екта пазнавання, вырашаць задачу адрознівання аб'ектаў на фоне неістотных дэталей або прасторавых перашкод.

Ключавыя словы: утварэнне Хартлі, хуткасць, адлегласць, выява, піксель, спектр, алгарытм, сегментацыя, паслядоўнасць, камера, расклад, выяўленне, рухомы аб'ект.

Увядзенне. У шэрагу прыкладанняў, напрыклад, выяўленне малапрыкметнага, ўтворага руху вайсковай тэхнікі і інш, можа дапамагаць такі атрыбут як рух аб'екта. Акрамя развязання задачы выяўлення аб'екта інтэрэса, часта разглядаецца і задача знаходжання параметраў руху аб'екта, напрыклад, хуткасці, напрамак руху, пройдзенай аб'ектам адлегласці. Развязанне гэтых задач магчыма з дапамогай дыскрэтных пераўтварэнняў у частотным абсягу. У працы разглядаецца скарыстанне для гэтых выяўлення аб'екта пазнавання вылічальна больш эфектыўнага рэчаіснага пераўтварэння Хартлі. Пры гэтым вылічальны алгарытм выконваецца над паслядоўнасцю 2D лічбавых выяў (кадраў выяў). Выявы атрыманы нерухомай камерай, напрыклад, з касмічнага апарата, самалёта і інш. Выявы лічбавых здымкаў адпаведны дэкартавой сістэме прасторавых каардынат.

Тэарэтычныя прынцыпы. Будзем меркаваць, што выяўляюцца змены змесціва 2D лічбавых выяў $f(x, y, t)$ (прыкметных кропкаў) з адпаведнымі каардынатамі (x, y) у паслядоўнасці B кадраў у моманты часу $t = 0, 1, \dots, i, \dots, B - 1$. Для спрашчэння аб'ект апісваецца прыкметнай кропкай — адным пікселем. Паслядоўнасць прыкметных кропак складае траекторыю руху аб'екта. Яркасць пікселя роўная адзінцы, г.зн. у момант часу t_l кропцы з каардынатамі (x_m, y_n) адпавядае выява $f(x_m, y_n, t_l) = 1$. Змены змесціва выяў $f(x, y, t)$ у моманты t адбываюцца праз наяўнасць аб'екта, які рухаецца. Разгледзім паслядоўныя крокі алгарытму поўнай сегментацыі.

Крок 1. Паслядоўнасць з B выяў памерам $M \times N$ можна прывесці ў выглядзе сумы праекцый выяў $f(x, y, t)$ кожнага кадра на восі x, y . Для аднаго кадра праекцыя на вось x запісваецца ў выглядзе паслядоўнасці $f(x)$ з B

рэчаіснымі лікамі. Паслядоўнасць $f(x)$ мае толькі адзін ненулявы лік роўны адзінцы. Па аналогіі запісваецца паслядоўнасць $f(y)$.

Крок 2. Выконваецца кадаванне паслядоўнасці з выкарыстаннем базавых дыскрэтных функцый Хартлі (Міцюхін, 2012).

$$h(t) = \text{cas}\left(\frac{2\pi t}{T}\right) = \text{cas}\left(\frac{2\pi p t}{B}\right), t = 0, 1, \dots, B-1, p = \text{const},$$

дзе $T = \frac{B}{p}$ — перыод функцыі, p — частота кадраў.

Заўважым, $v_0 = \frac{p}{B}$ — гэта асноўная частота функцыі Хартлі.

Кадаванне выявы $f(x, y, t)$ з атрыманнем аднамерных пракцыяй-паслядоўнасцяў на восі x і y выконваецца адпаведна па формулам

$$g_x(t) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y, t) \text{cas}\left(\frac{2\pi x p t}{B}\right), t = 0, 1, \dots, B-1,$$

$$g_y(t) = \sum_{y=0}^{N-1} \sum_{x=0}^{M-1} f(x, y, t) \text{cas}\left(\frac{2\pi y p t}{B}\right), t = 0, 1, \dots, B-1.$$

Калі назіраемы аб'ект рухаецца з раўнамернай хуткасцю, то зрух за весь час T назірання па восі x на L_x пікселяў адпавядае хуткасці

$$u_x = \frac{p L_x}{B} = v_0 L_x \left[\frac{\text{піксел}}{\text{с}} \right]. \quad (1)$$

Такім чынам, велічыня u_x непасрэдна звязана з частотным складнікам v_x . Падобнае выказванне докладна адносна і восі y .

Крок 3. Вылічваецца спектр ў базісе функцый Хартлі паслядоўнасцяў $g_x(t)$ і $g_y(t)$ адпаведна па формулам (Jähne, 2005)

$$\hat{g}_x(v) = \sum_{t=0}^{B-1} g_x(t) \text{cas}\left(\frac{2\pi v t}{B}\right), v = 0, 1, \dots, B-1, \quad (2)$$

$$\hat{g}_y(u) = \sum_{t=0}^{B-1} g_y(t) \text{cas}\left(\frac{2\pi u t}{B}\right), u = 0, 1, \dots, B-1, \quad (3)$$

дзе v і u — адпаведна частотныя індэксы пераўтварэння па восям x і y .

Для раўнамернага руху (без шумоў) спектральныя расклады (2) і (3) характарызуюцца адзінымі кампанентамі на частотах v і u .

Крок 4. Вылічваецца хуткасць аб'екта за час назірання $t_\Sigma = \frac{B}{p}$. З улікам

(1) і (2), калі вядома адлегласць d паміж двума суседнімі пікселямі, нумар v максімума спектральнай функцыі $\hat{g}_x(v)_{\max}$, зрух L_x аб'екта ў пікселях за B кадраў, можна вызначыць хуткасць руху аб'екта па восі x .

$$u_x = vL_x = vdp$$

Падобным чынам вызначаецца хуткасць руху аб'екта па восі y .

$$u_y = uL_y = udp.$$

Фізічная хуткасць аб'екта

$$U = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}.$$

Разгледжаны алгарытм пацвярджае надзейнасць і эфектыўнасць на выявах скажоных адытыўным шумам $n(x, y, t)$, калі узнікае неабходнасць хуткаснага апрацоўвання сумесі

$$z(t) = f(x, y, t) + n(x, y, t).$$

Напрыклад, калі неабходна выявіць і ацаніць параметры руху вайсковага маскіраванага аб'екта. Эфектыўнасць досягаецца за конт фактарызацыі ядра рэчаіснага пераўтварэння Хартлі і скарыстання хуткаснага спектравага алгарытма рэчаіснага пераўтварэння Хартлі. Надзейнасць досягаецца за конт алгебраічнай уласцівасці функцый. В гэтым выпадку мноства функцый Хартлі інтэрпрэтуюцца як словы перашкодаўстойлівага $[n, k]$ -кода, кодавая адлегласць

якога $\frac{B}{2}$. Калі скарыстоўваць аптымальны метада дэкадавання $[n, k]$ -кода

заснаваны на прынцыпу максімальнага праўдападобенства, магчыма дакладнае

выяўленне рухомага аб'екта з малымі адносінамі $q = \frac{P_f}{P_n}$ магутнасці карыснага

сігналу $f(x, y, t)$ да сярэдняй магутнасці шуму $n(x, y, t)$.

Эксперыментальнае мадэліраванне. Мадэліраванне працы алгарытма ў асяроддзі MATLAB-Simulink тычылася атрымання адзнак верагоднасці выяўлення рухомага аб'екта ў залежнасці ад адносін сігнал-шум. Павелічэнне часу назірання (лікаў кадраў) памяншае верагоднасць памылковай ацэнкі хуткасці. Акрамя таго, ацэнкі паляпшаліся, калі назіраліся змены становішча кожнага пікселя на працягу некалькіх кадраў. Напрыклад, для $B = 128$ і моцна зашумленай выявы, калі $q \approx 1$ верагоднасць памылкі не перавышала велічыні 10^{-10} .

Высновы. Выкарыстанне частотнага метаду ў задачах сегментацыі дынамічных аб'ектаў дазваляе ажыццяўляць эфектыўнае і надзейнае яго вылучэнне на фоне шума. Разгледжаны вылічальны алгорітм дазваляе апрацоўваць выявы ў каналах са складаным перашкодавым становішчам.

Спіс літаратуры

Jäne, B. (2005). *Digital image processing*. Berlin: Springer-Verlag.

Міцюхін, А. І. (2012). Алгебраічнае кадаванне пры дапамозе пераўтварэння Хартлі. У *Матэрыялах XIV Міжнародной навуковай канферэнцыі імені акадэміка М. Кравчука*, Київ, 19–21 травня (с. 164). Київ: НТУУ «КПІ».

Диферінтегральна модель геометрично фрактальних фізичних компактів з ередитарними властивостями

В. М. Онуфрієнко, А. В. Засовенко, Н. М. Антоненко

Національний університет «Запорізька політехніка», Запоріжжя, Україна
onvm@i.ua

Міру фрактальних точкових зарядів у вигляді диферінтегральної альфа-форми множин фізичних зарядів (елементів струму) в метаматеріальному середовищі застосовано для побудови диферінтегральної моделі компактів із просторовою та часовою фрактальністю. Одержана за розробленою моделлю функція пам'яті виступає як прояв дофрактальності з можливістю контролю та регулювання ступеню втрачання пам'яті за допомогою величини скейлінгу у природніх та штучно створюваних метаматеріальних компактах. Окреслено перспективи подальшого застосування розробленої математичної концепції для аналізу штучних метаматеріальних фрактальних елементів з необхідними механічними й електродинамічними характеристиками.

Ключові слова: диферінтегральна модель, ередитарність, фрактальний компакт, метаматеріал.

Застосування поняття геометричного фрактала в математичному моделюванні динамічних систем наділяє їх властивостями складних нелінійних систем, (ефектом часової ередитарності, наприклад) у яких ураховується не тільки теперішній стан системи або найближчий попередній стан (тобто початкові значення параметрів стану системи, деякі похідні за часом та просторовими координатами), але також і всі попередні стани, у яких перебувала дана система.

Відомий опис експериментів з електролітичними конденсаторами, що були заряджені різними способами до однакової напруги (Westerlund, 1991). Вимірюваннями виявлено помітні відмінності кривих розрядки конденсаторів, що можна інтерпретувати наявністю пам'яті у складній діелектричній структурі.

Прикладом феноменологічного підходу до проблеми переносу є також дифузійна модель, для якої рівняння дифузії складено із двох рівнянь (рівняння неперервності та закону Фіка). Для одновимірного просторового процесу зі скейлінгом, що описує β -характеристику функції двох змінних у просторі й часі, класична постановка задачі приводить до рівняння виду

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^{1+\beta} u(x, t)}{\partial x^{1+\beta}},$$

розв'язок якого інтерпретується в задачах електродинаміки й механіки: рух електронів і дірок у напівпровідниках, світла в атмосферах планет, нейтронів у ядерних реакторах, заводського диму в атмосфері, квіткового пилку в повітрі, крапель чорнила у воді, поширення тепла в газах, рідинах і твердих тілах (Учайкин, 2009) тощо. При цьому, концепція фрактальності процесів накопичення заряду у просторі й часі демонструє неминучі зміни більшості результатів, отриманих до цього часу звичайними методами. З фрактальної ж моделі

впливають декілька ефектів, які неможливо пояснити класичним підходом застосування рівнянь для середовища-континууму.

Одним з найважливіших з них є ефект пам'яті, що наводить на висновок про наявність її у від'ємних ємнісних (індуктивних) компактах та про керування нею за допомогою часово-частотної та просторової фракталізації.

Міру фрактальних точкових зарядів у вигляді диферінтегральної альфа-форми множин фізичних зарядів (елементів струму) у метаматеріальному середовищі застосовано нами далі для побудови диферінтегральної моделі фізичних фотопровідних фрактальних компактів.

Модель фрактального шару на межі розділу двох конфігурованих середовищ базується на визначенні дробового диференціала у часі $d^\alpha t$ та його зв'язку із дробовою похідною

$$d^\alpha L(x, t) = {}_a D_t^\alpha L(x, t) d^\alpha t,$$

де дробова похідна ${}_a D_t^\alpha L(x, t)$ використовується у формі Рімана — Ліувілля.

Для виявлення ефектів часової α -ерeditarності фрактального компакту за схемою побудови рівнянь з розривами зарядів(струмів) $Q(\alpha, x, t)$ у часі виду дробової дельта-функції $\delta^{(\alpha)}(t - t_m)$ моделюємо заряд фрактального компакту з ємністю C і потенціалом U як

$$Q(\alpha, x, t) = C_1(x) U(t) + C_{er} D_t^{1+\alpha} U(t).$$

Диференціальні рівняння дробових порядків, що виникають у подібних моделях (Onufrienko, 2020), знаходять своє самостійне застосування в багатьох областях фізико-математичної і технічної науки (задача про таутохрону, про визначення потенціалу по залежності періоду коливань від енергії, обернена задача теорії розсіювання, руху тіла у в'язкому середовищі тощо) називаються ередитарними (Вольтерра, 1982) і можуть виникати самі по собі у процесі або в результаті розв'язування.

Розгляд фрактальних множин у метриці Хаусдорфа дозволяє порівнювати величину змінюваної хаусдорфової розмірності зі змінним порядком $\alpha(x)$ дробового інтеграла (Гинзбург, 1994; Coimbra, 2003)

$$\left({}_a I^{\alpha(x)} f \right) (x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha(x))} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha(x)}} dt, \quad (1)$$

та дробової похідної змінного порядку

$$\left({}_a D^{\alpha(x)} f \right) (x) = \frac{\alpha(x)}{\Gamma(1-\alpha(x))} \int_a^x \frac{f(x) - f(t)}{(x-t)^{1+\alpha(x)}} dt + \frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha(x)) (x-\alpha(x))^{\alpha(x)}}. \quad (2)$$

Зазначена модель використовується далі для означення фрактального шару типу Гельмгольца та визначення його ередитарних властивостей.

Першою і найпростішою двошаровою моделлю, створеною в 1879 р. Гельмгольцем, вважають концепція поділу заряду на межі між металевим електродом та розчином електроліту. Електрод тримає щільність заряду σ_M , що виникає внаслідок надлишку ($-\sigma_M$) або дефіциту ($+\sigma_M$) електронів на поверхні електрода. Заряд на електроді врівноважується перерозподілом іонів у розчині на рівню, але протилежно заряджену кількість іонів. Розглядаємо два нефрактально конфігуровані шари протилежного заряду, розділені деякою відстанню $l = d/2$, обмеженою радіусом $d/2$ залучених іонів, і одним шаром сольвації навколо кожного іона. Лінія, проведена через центр таких іонів, позначає межу, відому як зовнішня площина Гельмгольца, і область усередині неї 2^α -польного електричного шару ($\alpha = 0$).

Потенціал у такому класичному шарі Гельмгольца описується рівнянням Пуассона

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -\frac{\rho(x)}{\epsilon \epsilon_0}$$

відносно електричного потенціалу ϕ з розподілом заряду щільності ρ ; x — відстань від електрода, ϵ_0 та ϵ відповідно діелектричні проникності вакууму та середовища.

Якщо розглядати іони як точкові заряди (класичний підхід), то розв'язування задачі базується на переході до рівняння Лапласа $\partial^2 \phi / \partial x^2 = 0$ і класичної схеми плоскопаралельного конденсатора, тобто електричний подвійний шар здатний зберігати електричний заряд. Тому наведену двошарову ємність на одиницю площі можна оцінювати за формулою

$$C_H = \frac{\epsilon \epsilon_0}{l},$$

де l — товщина подвійного шару. Модель не враховує залежність вимірюваної ємності від потенціалу або концентрації електролітів. Ще одним недоліком моделі класичного шару є нехтування взаємодіями, які виникають далеко від зовнішньої площини Гельмгольца.

У задачах про визначення концентрації $\rho(x, t)$ електроактивних елементів на поверхні фрактально конфігурованого зі скейлінгом α електрода $x = 0$, що контактує з електролітом, безпосереднє вимірювання $\rho(0, t)$ є обтяжливим, але експериментально достатньо легко визначається густина струму $j_x(0, t)$ на поверхні

$$-\frac{1}{K} j_x(0, t) = \left. \frac{\partial^{1+\alpha} \rho(x, t)}{\partial x^{1+\alpha}} \right|_{x=0}. \quad (3)$$

З рівняння (3) впливає залежність

$$\rho(0, t) = -K_0^{-\frac{1}{2}} I_t^{\frac{1+\alpha}{2}} j_x(0, t) = -K^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)} \int_0^t \frac{j_x(0, \tau) d\tau}{(t - \tau)^{\frac{1-\alpha}{2}}}. \quad (4)$$

Наявність у досліджуваному процесі ефекту пам'яті або нелокальності за часом, що міститься в ядрі інтегрального оператора вихідного рівняння (4), можна позиціонувати як функцію пам'яті (Учайкин, 2009)

$$R(t - \tau) = \frac{(t - \tau)^{\frac{\alpha-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (5)$$

що описує прояв ередитарності явища концентрації електроактивних елементів на поверхні контакту середовищ.

Якщо функція пам'яті є степеневою (як у наших задачах із фрактальною геометрією контактів і неперервним розподілом фізичних параметрів на них та в задачах з фрактальними розподілами зарядів і струмів на гладких компактах), то виникає природній перехід до рівнянь з дробовими похідними.

Відмічаємо, що у випадку збігу функції пам'яті (5) з виразом для функції Хевісайда розглядуваний процес має повну пам'ять, а для збігу з функцією Дірака пам'ять у процесі відсутня.

Для одержаного нами виду функції пам'яті $R(t - \tau)$ процес має часткову втрату пам'яті і розглядається як прояв дофрактальності з можливістю контролювати, а також регулювати ступінь втрачання пам'яті за допомогою величини скейлінгу α у природніх та штучно створюваних метаматеріальних шарах середовищах, геометричні або фізичні властивості котрих моделюються фракталами (Onufrienko, 2020).

Визначено перспективи подальшого застосування розробленої математичної концепції для аналізу й синтезу штучних метаматеріальних фрактальних елементів з необхідними механічними й електродинамічними характеристиками.

Список літератури

- Coimbra, C. (2003) Mechanics with variable-order. *Annalen der Physik*, 12(11), 692–703.
- Onufrienko, V. M., Slyusarova, T. I., & Onufriyenko L. M. (2020). Modeling characteristics of field-effect fractal nanotransistor. In *Proceedings 15th Intern. Conf. on advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering*, February 25–29 (pp. 586–589). Lviv.
- Westerlund, S. (1991). Dead matter has memory. *Physica Scripta*, 43(2), 174–179.
- Вольтерра, В. (1982). *Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений*. Москва: Наука.
- Гинзбург, А. И., & Карапетянц, Н. К. (1994). Дробное интегро-дифференцирование в гильдеровских классах переменного порядка. *Доклады АН*, 339(4), 439–441.
- Учайкин, В. В. (2009). *Метод дробных производных*. Ульяновск: Артишок.

Математична модель диферінтегрального гістерезису комплексного хвильового опору та провідності фізичних фракталів

В. М. Онуфрієнко, Т. І. Слюсарова, Л. М. Онуфрієнко

Національний університет «Запорізька політехніка», Запоріжжя, Україна
onvm@i.ua

Для моделювання незворотного процесу вимірювання геометричної протяжності фрактальної множини запроваджено до розгляду покриття з подальшими граничними переходами до диферінтегралів. Диферінтегральна модель апробована на прикладах розрахунків провідності та опору середовищ з розподіленими та зосередженими параметрами. Виявлено зв'язок комплексних значень скейлінгового показника з еквівалентними матеріальними параметрами, що пояснює гістерезис сегнетоелектричного та магнітодіелектричного фізичного фрактала.

Ключові слова: фрактальна множина, диферінтеграл, скейлінговий показник, гістерезис, хвильовий опір, провідність.

Явище гістерезису тісно пов'язується з незворотними процесами і, у зв'язку з цим, важко піддається моделюванню. Проблема полягає в тому, що в будь-який момент часу стан матеріалу залежить не тільки від його внутрішніх властивостей, але і від його історії. Структура матеріалу доменів, що визначає реакцію матеріалу на зміну електричних, механічних, оптичних параметрів є результатом складних просторових взаємодій, які відбуваються під час природного «народження» матеріалу, а також від частотно-часової області розвитку явища, процесу.

Останнім часом актуалізується напрямок штучного створення метаматеріалів з притаманними їм екзотичними властивостями, а це спонукає дослідників зосереджувати зусилля на розробці математичних моделей для технологічного конструювання і прогнозування протікання процесів у таких середовищах, що проявляють ефект виникнення від'ємних функцій і параметрів, на основі напівпровідного середовища з розподіленими параметрами. Існує розробка фрактального аналогу сегнетоелектричного гістерезису на основі апроксимації дробової похідної (Vin, 2014). Моделювання фрактальної динаміки чисельним розв'язком дробово-диференціального рівняння, що є модифікацією термодинамічної моделі, здійснюється в роботі Мороз (2019). Для моделювання екзотичних ефектів просторового перебігу, що можуть виникати у приладах з від'ємними ємностями та індуктивностями, запропонована диферінтегральна модель імітації появи компонент від'ємної провідності (опору) фізичних фракталів (Onufrienko, 2020), що розвивається на основі вводу хаусдорфової метрики та міри фрактальних точкових зарядів у вигляді диферінтегральної альфа-форми множин фізичних зарядів (елементів струму) в метаматеріальному середовищі. Для класичних множин відомі результати їх ортогонального проектування на підпростори з нижчою розмірністю. Для випадку фракталів існує мо-

жливість інтегродиференціального визначення α -міри Хаусдорфа фрактально-го носія заряду (струму) через застосування ортогонального проектування фракталу на діаметр L розглядуваної множини (Онуфрієнко, 2002).

Для моделювання незворотного процесу, пов'язаного з вимірюванням геометричної протяжності досліджуваної фрактальної множини, що подається точками, відрізками, плоскими та об'ємними компактами, розглядаємо їх покриття прямолінійними ланками $l_{i(k)}$ (i — номер ланки у k -му поколінні покриття), при цьому довжина ланок $(k + 1)$ -го покриття менше довжини ланок (k) -го покриття:

$$l_{i(k+1)} < l_{i(k)}.$$

Кількість N ланок $l_{i(k+1)} < l_{i(k)}$ покриття, що вкладаються на $l_{i(k)}$ є деякою функцією їх відношення:

$$N_{l_{i(k+1)}l_{i(k)}} = f(l_{i(k)} / l_{i(k+1)}).$$

Аналогічно знаходимо:

$$N_{l_{i(k+2)}l_{i(k+1)}} = f(l_{i(k+1)} / l_{i(k+2)}).$$

Далі помічаємо, що

$$N_{l_{i(k+1)}l_{i(k)}} \times N_{l_{i(k+2)}l_{i(k+1)}} = N_{l_{i(k+2)}l_{i(k)}}.$$

Для проєкцій ланок покриття на вісь OX складаємо функціональне рівняння

$$f(\Delta x_{i(k)} / \Delta x_{i(k+1)}) \cdot f\left(\frac{\Delta x_{i(k)} / \Delta x_{i(k+2)}}{\Delta x_{i(k)} / \Delta x_{i(k+1)}}\right) = f(\Delta x_{i(k)} / \Delta x_{i(k+2)}). \quad (1)$$

Гладкий розв'язок такого типу рівняння (1) існує і є єдиним у формі степеневої функції (див., наприклад, (Фихтенгольц, 1962, с.160))

$$N_{\Delta x_{i(k+1)}\Delta x_{i(k)}} \cdot \Delta x_{i(k+1)} = \Delta x_{i(k+1)}^{1-\alpha} \Delta x_{i(k)}^\alpha;$$

$$f(\Delta x_{i(k)} / \Delta x_{i(k+1)}) = (\Delta x_{i(k)} / \Delta x_{i(k+1)})^\alpha, \quad -\infty < \alpha < \infty. \quad (2)$$

Сумою

$$\gamma(\alpha) \left(\sum_{i=1}^{\infty} l_i \right)^\alpha$$

апроксимується протяжність розглядуваної фрактальної множини. У загальному випадку можна передбачити побудову покриття діаметра L фрактально конфігурованої множини з кінцевої точки $L_{-(l_i)}$. Такий процес, звичайно, дозволяє провести апроксимаційний процес з очікуваним результатом для сум у вигляді

$$\gamma(\beta) \left(\sum_{j=1}^{\infty} l_j \right)^\beta$$

з іншим скейлінговим показником β , числовим значенням якого (додатним, від'ємним, комплексним, залежним від просторової та часової координати) ураховуються особливості незворотності фрактальних процесів.

Граничний перехід в апроксимаційних сумах з урахуванням протяжності фрактально конфігурованої множини, формул (1). (2), дає можливість записати формулу для диференціала

$$d^\alpha(x - x') = {}_a D_x^\alpha(x - x') dx^\alpha = \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} dx^\alpha,$$

де $\Gamma(\alpha)$ — гама-функція Ейлера, α — порядок диференціального оператора (показник скейлінгу), де дробова похідна (інтеграл) визначається як (Samko, 1993)

$$({}_a D_x^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \left(\int_a^x f(t) \frac{dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \right).$$

Такий фізико-математичний підхід до опису фрактальної конфігурації матеріалу середовища надає можливість моделювати скалярні компоненти поляризації та струму як розвинення в ряд за степенями електричної напруженості (Онуфрієнко, 2006). З аналізу такої математичної моделі випливає висновок про те, що впровадженням у штучне діелектричне, металеве або напівпровідникове з неоднорідною структурою середовище сторонніх джерел енергії з фрактальним дельта-подібним за полем розподілом зарядів (струмів) можна створити штучну «спонтанну» нелінійну електричну поляризацію та електропровідність, що імітують від'ємні ємності та індуктивності.

Для характеристики фрактально конфігурованого середовища з розподіленими параметрами розглядаємо комплексний хвильовий опір

$$\dot{Z}^{(\alpha)} = \frac{Z_0}{\Delta^{(\alpha)} \left(1 - j \frac{k''^{(\alpha)}}{k'^{(\alpha)}} \right)}, \quad (3)$$

де $Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0}$ — хвильовий опір вільного простору, $\Delta^{(\alpha)} \equiv k'^{(\alpha)} Z_0 / \omega \mu^{(\alpha)}$, ω — частота, ε, μ, k — діелектрична, магнітна проникності та стала поширення хвиль.

Одержано трансцендентні рівняння, що зв'язують провідність (хвильовий опір), діелектричну проникність напівпровідника певної товщини з вимірюваними значеннями потужності відбиття та проходження та такі, що допускають чисельне розв'язування. Як і у випадку нефрактального матеріалу, для обраних зразків товщини, кратної $\lambda / 4$, можна одержати наближений розв'язок зазначених рівнянь, але вже з нелінійним зв'язком між надвисокочастотною потужністю та питомою провідністю за рахунок наявності у формулах скейлінгового показника, що характеризує фрактальну організацію матеріалу, що впливає на появу гістерезису.

Теоретично просторовий гістерезис, що виникає в середовищі за рахунок фрактальної будови доменних структур із зосередженими параметрами метаматеріалу, проявляється в скейлінгових залежностях для коефіцієнтів відбиття і проходження, коли процес зростання потужності хвиль ураховується запровадженням деякого скейлінгового показника α_1 , а спадання — значенням α_2 . Питома провідність графенового транзистора з шириною каналу $2a$ за розробленою схемою моделюється формулою

$$g = \frac{2a}{L} \sigma z \left(1 - \left(\frac{u_{GS} + \psi}{U_0} \right)^{\frac{1}{\alpha_i + 1}} \right), \quad i = 1, 2. \quad (4)$$

Одержана формула (4) для нормованої провідності каналу з фрактально провідним шаром (значення сталого скейлінгу $\alpha = 1$ перетворює модель у класичну (Cobbold, 1970)) демонструє теоретичну можливість керування петлею просторового гістерезису.

Із загальних теоретичних міркувань на прикладах знаходження провідності та опору середовищ з розподіленими та зосередженими параметрами виявлено наявність зв'язку комплексних значень скейлінгового показника з еквівалентними матеріальними параметрами, що пояснює гістерезисність сегнетоелектричного та магнітодіелектричного середовищ. Це пов'язано з наявністю спонтанної електричної поляризації, виникненням фрактально конфігурованих електричних доменів та перебудовою фрактальної доменної структури, що впливає на перебіг гістерезисного ефекту. Крім цього, виявлено, що варіацією скейлінгу теоретично можна керувати діелектричними і магнітними втратами у фрактально конфігурованому нефострівському елементі.

Список літератури

- Cobbold, R. (1970). *Theory and applications of field-effect transistors*. New York: Wiley Ed.
- Onufrienko, V. M., Slyusarova, T. I., & Onufriyenko, L. M. (2020). Modeling characteristics of field-effect fractal nanotransistor. In *Proceedings of 15th Intern. Conf. on advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering, February 25–29* (pp. 586–589). Lviv.
- Samko, S. G., Kibas, A. A., & Marichev, O. I. (1993). *Fractional integrals and derivative. Theory And Application*. Langhorne, PA: Gordon Breach Sci. Publ.
- Zhang, B. (2014). *Model for coupled ferroelectric hysteresis using time fractional operators: Application to innovative energy harvesting* (Doctoral dissertation, INSA de Lyon).
- Мороз, Л. И., & Масловская, А. Г. (2019). Дробно-дифференциальная модель эрдитарных гистерезисных явлений в сегнетоэлектриках. *V Международная конференция «Информационные технологии и высокопроизводительные вычисления» (ИТНПС-2019), 16-19 сентября* (с. 160–165). Хабаровск.
- Онуфрієнко, В. М. (2002). Диферінтегральні альфа-форми у хаусдорфовій метриці на фрактальних множинах. *Радіоелектроніка. Інформатика. Управління, 2002(2)*, 31–39.
- Онуфрієнко, В. М., & Місюра, А. О. (2006). Поляризованість та намагніченість несущільного фрактального середовища. *Радіоелектроніка. Інформатика. Управління, 2006(1)*, 14–20.
- Фихтенгольц, Г. М. (1962). *Курс дифференциального и интегрального исчисления* (Т. 1). Москва: Физматлит.

Пошук «аномалій» в інформаційних моделях складних систем

О. Д. Поліщук

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача
НАН України, Львів, Україна
od_polishchuk@ukr.net*

Методи теорії оцінювання застосовуються для вирішення проблеми пошуку помилкових даних та прихованої новизни в інформаційних моделях складних ієрархічно-мережевих систем.

Ключові слова: складна система, інформаційна модель, аномалії, викиди, прихована новизна, оцінювання.

У праці Поліщук та Яджак (2018) було описано принципи формування інформаційних моделей складних ієрархічно-мережевих систем (СІМС), які містять дані про стан, процес функціонування та взаємодію складових системи на усіх рівнях ієрархії. Інформаційна модель (ІМ) системи створюється для реалізації методики її комплексного оцінювання (Поліщук та ін., 2015), як математично формалізованої основи систем підтримки прийняття рішень щодо подальших дій стосовно СІМС. Ця методика базується на використанні інформації, отриманої під час планових регулярних досліджень елементів системи та неперервного моніторингу процесу її функціонування (Поліщук та ін., 2016). Однак, в ІМ системи під час її поповнення можуть потрапляти різного роду «аномалії», які прийнято поділяти на два основні види — так звані викиди та приховану новизну (Hodge & Austin, 2004, Pimentel et al, 2014).

Пошук викидів полягає в ідентифікації помилкових (похибок у вимірюваннях, помилок у текстах або числових таблицях), а також недостовірних, неважливих або дублюючих даних та подальшому їх виправленні або видаленні (Rousseeuw & Leroy, 2005). У даний час для вирішення цієї проблеми викиди поділяються на окремі типи та для їх виявлення розробляються спеціалізовані програмні застосунки: програми для перевірки правопису, виявлення дублювання або плагіату, для викриття фейків і т. ін. Видалення з ІМ системи такого роду викидів дозволяє суттєво знизити рівень її «засміченості», скорочуючи час пошуку необхідної інформації, зменшуючи її обсяги та прискорюючи процес аналізу та прийняття відповідного рішення.

Пошук новизни полягає в цілеспрямованому виявленні даних, нетипових за тими чи іншими ознаками для відповідної реальної системи, несумісних з існуючими уявленнями та теоріями або таких, що не відповідають новим вимогам і стандартам (Faria et al, 2016). Так, деякі захворювання були відомі медикам десятиліттями: ВІЛ-інфекція була виявлена у 20-ті роки минулого століття в Африці, вірус Зіка — у 50-ті роки в Південній Америці, віруси типу SARS Cov — у 2002 р. в Китаї, а MERS — у 2010 р. в країнах Близького Сходу. Тобто, ця інформація була відомою, але «знехтуваною» медичним співтовариством

або відповідними державними структурами, незважаючи на високу летальність цих захворювань. Загалом, основною особливістю прихованої новизни є присутність відповідної інформації у сховищах даних, але неврахування її під час аналізу функціонування відповідної системи. Зазвичай дані, які є прихованою новизною, не виявляються під час регулярних досліджень системи або неперервного моніторингу процесу її функціонування, оскільки вони не є цілком таких досліджень. Так, під час оглядів залізничної колії можна виявити ділянки, стан яких є близьким до незадовільного (Поліщук та ін., 2007). Однак, для визначення наскільки часто та швидко погіршується стан таких ділянок протягом тривалого періоду експлуатації, необхідний аналіз даних про ці ділянки, які містяться в ІМ колійного господарства УЗ. Наприклад, у 2009 р. після сильної зливи внаслідок підмиву земляного полотна на ділянці Львів-Клепарів сталося сходження з рейок 9 вагонів вантажного поїзда. Після аналізу виявилось, що подібні підмиви в саме цьому місці траплялися неодноразово. Ця інформація містилася в базі даних УЗ, однак через відсутність аварій на неї «не звертали уваги». Тільки надзвичайна ситуація примусила провести відповідне укріплення загрозованої ділянки залізничного шляху.

Помилкова та нова за своїм змістом інформація часто буває формально подібною. Так, під час оцінювання якості протезування інвалідів (Поліщук, 2001) неодноразово зустрічалися експериментальні дані зміни кутів в основних суглобах опорно-рухового апарату, які містили точкові «піки» амплітудою у $30^{\circ} - 40^{\circ}$. Очевидно, що людський організм неспроможний здійснювати подібні рухи, а отже ці піки були наслідком збоїв у роботі вимірювального обладнання. У той же час, результати оцінювання вагоном-дефектоскопом стану рейок залізничної колії (Поліщук та ін., 2007) на наявність тріщин нерідко містили дані з такими «піками», що було свідченням існування тріщини, тобто важливою інформацією, яка потребувала оперативного реагування (заміни тріснутої рейки). Звичайно, такий пік у даних може з'явитися внаслідок збою в роботі дефектоскопа, але його наявність за будь-яких обставин потребує термінової реакції. У 60-х роках минулого століття були отримані радіосигнали з космосу, які містили різкі періодичні «сплески». Спочатку їх сприйняли, як збої в роботі радіотелескопа, потім — як ущільнені повідомлення позаземних цивілізацій. Зрештою, після відповідного аналізу, був відкритий новий клас зірок — пульсари або нейтронні зірки. Тобто, один критерій пошуку (наявність «піків» у числових даних) може давати і правильний, і хибний, і спірний результат, який потребує ретельнішого дослідження.

У кожній інформаційній моделі необхідно виділяти два основні етапи опрацювання та аналізу даних. Перший з них полягає в неперервному моніторингу та попередній обробці даних, які вводяться до ІМ системи. На цьому етапі відбувається аналіз та відсів безумовно помилкової, непридатної до використання або дублюючої інформації. Залежно від застосованих критеріїв та обсягів даних, які можуть надходити неперервно з багатьох джерел, та чи інша частка

даних з «викидами» потрапляє у сховища даних, а дані з присутньою новизною можуть відкидатися, як помилкові. Безумовному реагуванню підлягає інформація, яка містить очевидну загрозу системі. Якщо такі дані надходять до інформаційної моделі, то вони потребують прийняття оперативних рішень для протидії загрозі, що виникла.

Збережені в інформаційній моделі після попередньої обробки дані є базою для пошуку прихованої новизни. Ефект, який визначається новизною, може проявлятися одинично або масово, бути одноразовим або повторюватися регулярно. Для виявлення таких ефектів необхідно здійснити пошук у всій інформаційній моделі, тобто в усій сукупності наявних даних про систему, яких може бути надзвичайно багато, різної якості та розподілених по різних складових ІМ. Таким чином відбувається пошук у базі даних по ході інваліда з ампутованою нижньою кінцівкою найкращих результатів протезування, які приймаються за практично досяжний критерій якості (Поліщук, 2004), а також ділянок колії, які внаслідок несприятливих геологічних або кліматичних чинників регулярно призводили до залізничних аварій (Поліщук та ін., 2015), ділянок автошляху, на яких найчастіше відбувалися дорожньо-транспортні пригоди і т. ін. Пошук у всій ІМ здійснюється у випадках, коли процес функціонування системи змінюється або не відповідає передбачуваному через причин, які складно встановити, наприклад, території, на яких кількість певних захворювань значно перевищує або тривалість життя населення є значно меншою відомої статистичної норми.

Часто пошук новизни повинен виявити готовність або неготовність системи чи окремих її складових до нових умов функціонування. Наприклад, бази даних УЗ містять інформацію про поточний стан та історію результатів оцінювань усіх ділянок колійного господарства. Ці дані дозволяють визначати, наскільки цей стан відповідає умовам, необхідним для впровадження швидкісного руху поїздів на визначених наперед маршрутах, шляхом оцінювання відповідності поведінки характеристик поточного стану елементарних ділянок, які лежать на маршруті, умовам, необхідним для впровадження швидкісного руху поїздів (безстикова колія, зміцнена верхня будова колії, збільшене вертикальне зміщення ниток колії на кривих ділянках і т. ін.).

Ще однією особливістю пошуку прихованої новизни є визначення її масовості, повторюваності та розподіленості у просторі та часі. Цікавим прикладом такої задачі є виявлення реальної кількості захворілих COVID-19. Критерієм пошуку в цьому випадку є позитивний результат ПЛР- або ІФА-тестування. Оскільки далеко не всі громадяни проходять таке тестування та близько 80% інфікованих переносять це захворювання без жодних симптомів і не звертаються до лікарів, то реальну картину поширення коронавірусу натепер не встановлено і навряд чи буде встановлено в майбутньому. Тобто, незважаючи на наявність чітких критеріїв пошуку, сформулювати об'єктивний висновок про реальний стан системи неможливо. Подібна ситуація склалася з інфекціями гепатиту В та С, СНІДу та ін., перебіг яких може бути непомітним принаймні протягом кількох років. У той же час інфікована людина створює реальну загрозу для оточуючих.

Як впливає з наведених вище прикладів, «новизна» у збережених ІМ даних може мати різний, інколи достатньо специфічний характер. З метою вирішення цієї проблеми натеper розробляються методи інтелектуального аналізу даних, машинного навчання, нейронних мереж і т. ін. Методи теорії оцінювання також можна успішно використовувати в задачах пошуку прихованої новизни. Дещо полегшити її вирішення допомагає числовий формат даних, що зберігаються на електронних носіях. Так, обробка аудіофайлу на ідентифікацію голосу або відеофайлу на розпізнавання обличчя конкретної людини достатньо ефективно може здійснюватися за допомогою алгоритмів локального оцінювання (оцінка відхилення чисельного зображення аудіо- або відеоряду від заданого зразка) (Поліщук та ін., 2015). Для узагальнення отриманих результатів пошуку та формування висновків стосовно їх масовості та повторюваності, доцільно застосовувати методи нелінійної та гібридної агрегації (Поліщук та ін., 2007).

Проблема пошуку новизни встановлює достатньо жорсткі вимоги до ІМ системи: структурованість, ретельна попередня обробка даних, які вводяться до неї, регулярне очищення від інформаційного «сміття» тощо. Очевидно, що створення інформаційної моделі системи, яка задовольняє цим вимогам, потребує значних зусиль, але подальші переваги, пов'язані із значно простішим, швидшим та результативнішим пошуком необхідної інформації, безумовно виправдовують ці зусилля.

Список літератури

- Hodge, V., & Austin, J. (2004). A survey of outlier detection methodologies. *Artificial Intelligence Review*, 22, 85–126.
- Rousseeuw, P. J., & Leroy, A. M. (2005). *Robust regression and outlier detection*. New York: John Wiley & Sons.
- Pimentel, M. A. F., Clifton, D. A., Clifton L., & Tarassenko, L. (2014). A review of novelty detection. *Signal Processing*, 99, 215–249.
- Faria, E. R., Goncalves, I., de Carvalho, A., & Gama, J. (2016). Novelty detection in data streams. *Artificial Intelligence Review*, 45, 235–269.
- Поліщук, О. Д. (2001). Оптимізація оцінки функціонування опорно-рухового апарату людини. *Комп'ютерна математика. Оптимізація обчислень*, (2), 360–367.
- Поліщук, О. Д. (2004). Про вибір оптимальної динамічної системи з класу еквівалентних систем. *Відбір і обробка інформації*, (20), 23–28.
- Поліщук, О. Д., Тютюнник, М. І., & Яджак, М. С. (2007). Оцінка якості функціонування складних систем на основі паралельної організації обчислень. *Відбір і обробка інформації*, (26), 121–126.
- Поліщук, Д. О., Поліщук, О. Д., & Яджак, М. С. (2015). Комплексне детерміноване оцінювання складних ієрархічно-мережевих систем: I. Опис методики. *Системні дослідження та інформаційні технології*, (1), 21–31.
- Поліщук, Д. О., Поліщук, О. Д., & Яджак, М. С. (2016). Комплексне детерміноване оцінювання складних ієрархічно-мережевих систем: IV. Інтерактивне оцінювання. *Системні дослідження та інформаційні технології*, (1), 7–16.
- Поліщук, О. Д., & Яджак, М. С. (2018). Мережеві структури та системи: III. Ієрархії та мережі. *Системні дослідження та інформаційні технології*, (4), 82–95.

Функціональна центральна гранична теорема для загальних процесів дробового ефекту

Б. С. Рашитов

КНУ ім. Тараса Шевченка, Київ, Україна

mr.rashytov@gmail.com

Доповідь базується на результатах статті 2020-го року «A functional limit theorem for the general shot noise processes» у співавторстві з проф. О. М. Іксановим. Під загальним процесом дробового ефекту ми розуміємо процес дробового ефекту, у якому лічильний процес моментів збурень є довільним локально скінченим. Припускаючи, що для вищезгаданого лічильного процесу виконується функціональна центральна гранична теорема у просторі Скорохода із граничним процесом, що є майже напевно локально неперервним за Гельдером, та що функція відповіді правильно змінюється на нескінченності, доведемо, що для загального процесу дробового ефекту також виконується така теорема, але з іншим граничним процесом та іншими нормалізацією та центруванням. Наприклад, якщо граничним процесом для лічильного процесу є броунівський рух, то граничним процесом для процесу дробового ефекту є процес Рімана — Ліувілля. Процеси дробового ефекту мають широке використання у різних сферах. Наприклад, для моделювання та дослідження деяких природних явищ, а також процесів у страхуванні та фінансах.

Ключові слова: процес дробового ефекту, неперервність за Гельдером, слабка збіжність у просторі Скорохода, центральна гранична теорема.

Позначимо через $(S_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ необов'язково впорядковану послідовність додатних випадкових величин. Визначимо лічильний процес $(N(t))_{t \geq 0}$ так

$$N(t) := \#\{k \in \mathbb{N}_0 : S_k \leq t\} = \sum_{k \geq 0} 1_{\{S_k \leq t\}}, \quad t \geq 0.$$

Будемо припускати, що $N(t) < \infty$ майже напевно (м.н.) для всіх $t \geq 0$. Нехай $D := D[0, \infty)$ є простором Скорохода дійснозначних неперервних справа функцій, що визначені на $[0, \infty)$ та мають скінченні лівобічні границі в додатних точках. Для функції $h \in D$ випадковий процес $X := (X(t))_{t \geq 0}$ визначається так

$$X(t) := \sum_{k \geq 0} h(t - S_k) 1_{\{S_k \leq t\}} = \int_{[0, t]} h(t - y) dN(y), \quad t \geq 0.$$

Процес X називатимемо *загальним процесом дробового ефекту*, оскільки, крім $N(t) < \infty$ м.н., жодних припущень щодо вхідної послідовності $(S_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ не робиться. Зрозуміло, що $X \in D$ м.н.

У роботах Iksanov (2013), Iksanov et al. (2014), Iksanov, Kabluchko and Marynych (2016), Iksanov, Kabluchko, Marynych and Shevchenko (2016) досліджується слабка збіжність процесів дробового ефекту, побудованих за процесами

відновлення. Такі процеси є окремим випадком процесів X , для яких вхідна послідовність $(S_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ є стандартним випадковим блуканням.

Основною рушійною силою розвинення теорії слабкої збіжності для процесів дробового ефекту, побудованих за процесами відновлення, була затребуваність відповідних результатів для асимптотичного аналізу різних характеристик випадкових регенеративних структур: порядку випадкових перестановок (Bingham et al., 1989), числа нульових блоків та числа ненульових блоків слабких випадкових композицій (Alsmeyer et al., 2017; Iksanov et al., 2015), числа зіткнень коалесцентів із множинними зіткненнями (Gnedin et al., 2018), числа зайнятих серверів у системі масового обслуговування $G / G / \infty$ (Iksanov et al., 2018), випадкових процесів з імміграцією, що керуються процесом відновлення (Iksanov et al., 2017a, 2017b).

Уперше процеси дробового ефекту були введені для моделювання струму, індукованого потоком електронів, що надходить на анод вакуумної трубки (Schottky, 1918). З моменту їх першої появи в літературі процеси дробового ефекту також використовувались для моделювання та дослідження природних явищ (наприклад, опадів (Rodriguez-Iturbe et al., 1987; Waymire & Gupta, 1981), течії та потоків річок (Lawrance & Kottegoda, 1977; Weiss, 1977), землетрусів (Vere-Jones, 1970), комп'ютерних збоїв (Lewis, 1964), шуму дорожнього руху (Marcus, 1975), затримки в урегулюванні страхових позовів (Kluppelberg & Mikosch, 1995a, 1995b) та декількох процесів у фінансах (Samorodnitsky, 1996).

Для формулювання основного результату потрібні додаткові позначення. Нехай $W_\alpha := (W_\alpha(u))_{u \geq 0}$ — гаусівський процес, що є м.н. локально неперервним за Гельдером з показником $\alpha > 0$ та задовольняє $W_\alpha(0) = 0$ м.н. Зокрема, для довільного $T > 0$, усіх $0 \leq x, y \leq T$ та деякої м.н. скінченної випадкової величини M_T

$$|W_\alpha(x) - W_\alpha(y)| \leq M_T |x - y|^\alpha. \quad (1)$$

Для $\rho > 0$ визначимо випадковий процес $Y_{\alpha, \rho} := (Y_{\alpha, \rho}(u))_{u \geq 0}$ так

$$Y_{\alpha, \rho}(u) := \rho \int_0^u (u - y)^{\rho-1} W_\alpha(y) dy, \quad u > 0, \quad (2)$$

$$Y_{\alpha, \rho}(0) := \lim_{u \rightarrow +0} Y_{\alpha, \rho}(u),$$

а для $-\alpha < \rho < 0$ так

$$Y_{\alpha, \rho}(u) := u^\rho W_\alpha(u) + |\rho| \int_0^u (W_\alpha(u) - W_\alpha(u - y)) y^{\rho-1} dy, \quad u > 0, \quad (3)$$

$$Y_{\alpha,\rho}(0) := \lim_{u \rightarrow +0} Y_{\alpha,\rho}(u).$$

Нарешті покладемо $Y_{\alpha,0} = W_\alpha$. Використовуючи (1), робимо висновок, що $Y_{\alpha,\rho}(0) = 0$ м.н. для $\rho > -\alpha$. Якщо W_α є броунівським рухом (при цьому $\alpha = 1/2 - \varepsilon$ для довільного $\varepsilon \in (0, 1/2)$), процес $Y_{\alpha,\rho}$ можна подати в еквівалентній формі як інтеграл Скорохода

$$Y_{\alpha,\rho}(u) := \int_{[0,u]} (u-y)^\rho dW_\alpha(y), \quad u > 0.$$

Так заданий процес називається процесом Рімана — Ліувілля або дробово інтегровним броунівським рухом з параметром ρ для $\rho > -1/2$.

Визначимо процес W_α на всій осі. Для цього покладемо $W_\alpha(x) = 0$ при $x < 0$. З такою домовленістю праву частину формули (3) можна подати у еквівалентному вигляді

$$Y_{\alpha,\rho}(u) = |\rho| \int_0^\infty (W_\alpha(u) - W_\alpha(u-y)) y^{\rho-1} dy, \quad u > 0.$$

Крім того, виявляється, що формула (1) залишається правильною і для від'ємних x, y . Таким чином, ми стверджуємо, що для довільного $T > 0$, усіх $-\infty < x, y \leq T$ та тієї ж випадкової величини M_T , що і у (1),

$$|W_\alpha(x) - W_\alpha(y)| \leq M_T |x - y|^\alpha.$$

Ця нерівність тривіальна у випадку $\max(x, y) \leq 0$ та впливає з (1) у випадку $\min(x, y) \geq 0$. Припустимо тепер, що $\min(x, y) \leq 0 < \max(x, y)$. Тоді

$$|W_\alpha(x) - W_\alpha(y)| \leq |W_\alpha(\max(x, y))| \leq M_T \max(x, y)^\alpha \leq M_T |x - y|^\alpha,$$

де перша нерівність впливає з (1) при $y = 0$.

Збіжність інтегралів у (2) та (3) та м.н. неперервність процесів $Y_{\alpha,\rho}$ встановлені в такій лемі.

Лема. Нехай $\rho > -\alpha$. Тоді виконується наступні твердження:

1. $|Y_{\alpha,\rho}(u)| < \infty$ м.н. для кожного фіксованого $u > 0$;
2. Процес $Y_{\alpha,\rho}$ є м.н. локально неперервним за Гельдером з показником $\min(1, \alpha + \rho)$ при $\alpha + \rho \neq 1$ та будь-яким додатним показником, меншим за 1, при $\alpha + \rho = 1$; більш точно, у останньому випадку для будь-якого $T^* > T$ виконується нерівність

$$\sup_{0 \leq u \neq v \leq T} \frac{|Y_{\alpha, \rho}(u) - Y_{\alpha, \rho}(v)|}{|u - v| \log \left(T^* |u - v|^{-1} \right)} < \infty \text{ м.н.}$$

Уважатимемо, що простір D наділений J_1 -топологією, та позначимо слабку збіжність у цьому просторі через $\xrightarrow{J_1}$. Детальна інформація щодо J_1 -топології міститься у книгах Billingsley (1968), Jacod and & Shiryaev (2003). Також будемо використовувати позначення $\mathbb{R}^+ := [0, \infty)$. Казатимеом, що функція h правильно змінюється на нескінченності з показником β , якщо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{h(tx)}{h(t)} = x^\beta \text{ для всіх } x > 0.$$

Далі сформулюємо основний результат.

Теорема. Нехай функція $h \in D$ має обмежену варіацію, не спадає при великих значеннях аргументу та правильно змінюється на нескінченності з показником $\beta \geq 0$. Припустимо, що

$$\frac{N(t) - b(t)}{a(t)} \xrightarrow{J_1} W_\alpha(\cdot), \quad t \rightarrow \infty,$$

де функція $a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ правильно змінюється на нескінченності з додатним показником, а $b : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ є функцією, що не спадає. Тоді

$$\frac{X(t) - \int_{[0, t]} h(t - y) db(y)}{a(t)h(t)} \xrightarrow{J_1} Y_{\alpha, \beta}(\cdot), \quad t \rightarrow \infty.$$

Оскільки b є функцією обмеженої варіації, а h є локально обмеженою та майже всюди неперервною функцією, внаслідок того, що $h \in D$, то інтеграл $\int_{[0, t]} h(t - y) db(y)$ існує як інтеграл Рімана — Стілтєсса.

Доведення основної теореми та допоміжних результатів можна знайти в Iksanov and Rashytov (2020).

Список літератури

- Alsmeyer, G., Iksanov, A., & Marynych, A. (2017). Functional limit theorems for the number of occupied boxes in the Bernoulli sieve. *Stoch. Proc. Appl.*, 127, 995–1017.
- Billingsley, P. (1968). *Convergence of probability measures*. Wiley.
- Bingham, N. H., Goldie, C. M., & Teugels, J. L. (1989). *Regular variation*. Cambridge Univer. Press.
- Gnedin, A., Iksanov, A., Marynych, A., & Mohle, M. (2018). The collision spectrum of Λ -coalescents. *Ann. Appl. Probab.*, 28, 3857–3883.
- Iksanov, A. (2013). Functional limit theorems for renewal shot noise processes with increasing response functions. *Stoch. Proc. Appl.*, 123, 1987–2010.
- Iksanov, A., Jedidi, W., & Bouzzefour, F. (2018). Functional limit theorems for the number of busy servers in a $G=G=1$ queue. *J. Appl. Probab.*, 55, 15–29.

- Iksanov, A., Kabluchko, Z., & Marynych, A. (2016). Weak convergence of renewal shot noise processes in the case of slowly varying normalization. *Stat. Probab. Letters*, 114, 67–77.
- Iksanov, A., Kabluchko, Z., Marynych, A., & Shevchenko, G. (2016). Fractionally integrated inverse stable subordinators. *Stoch. Proc. Appl.*, 127, 80–106.
- Iksanov, A., Marynych, A., & Meiners, M. (2014). Limit theorems for renewal shot noise processes with eventually decreasing response functions. *Stoch. Proc. Appl.*, 124, 2132–2170.
- Iksanov, A., Marynych, A. & Meiners, M. (2017a). Asymptotics of random processes with immigration I: scaling limits. *Bernoulli*, 23, 1233–1278.
- Iksanov, A., Marynych, A., & Meiners, M. (2017b). Asymptotics of random processes with immigration II: convergence to stationarity. *Bernoulli*, 23, 1279–1298.
- Iksanov, A., Marynych, A., & Vatutin, V. (2015). Weak convergence of finite-dimensional distributions of the number of empty boxes in the Bernoulli sieve. *Theor. Prob. Appl.*, 59, 87–113.
- Iksanov, A., & Rasytov, B. (2020). A functional limit theorem for the general shot noise processes. *J. Appl. Probab.*, 57, 280–294.
- Jacod, J. & Shiryaev, A. N. (2003). Limit theorems for stochastic processes (2nd ed.). Springer.
- Kluppelberg, C., & Mikosch, T. (1995a). Explosive Poisson shot noise processes with applications to risk reserves. *Bernoulli*, 1, 125–147.
- Kluppelberg, C., & Mikosch, T. (1995b). Delay in claim settlement and ruin probability approximations. *Scand. Actuar. J.*, 1995(2), 154–168.
- Lawrance, A. J., & Kottegoda, N. T. (1977). Stochastic modelling of riverflow time series. *Journal of the Royal Statistical Society: Series A (General)*, 140(1), 1–31.
- Lewis, P. A. W. (1964). A branching Poisson process model for the analysis of computer failure patterns. *J. R. Stat. Soc. Ser. B Stat. Methodol.*, 26, 398–456.
- Marcus, A. H. (1975). Some exact distributions in traffic noise theory. *Adv. Appl. Probab.*, 7, 593–606.
- Rodriguez-Iturbe, I., Cox, D.R., Isham, V. (1987). Some models on rainfall based on stochastic processes. *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A.*, 410, 269–288.
- Samorodnitsky, G. (1996). A class of shot noise models for financial applications. In *Athens conference on applied probability and time series analysis* (pp. 332–353). New York, NY: Springer.
- Schottky, W. (1918). Spontaneous current fluctuations in electron streams. *Ann. Phys.*, 57, 541–567.
- Vere-Jones, D. (1970). Stochastic models for earthquake occurrence. *J. R. Stat. Soc. Ser. B Stat. Methodol.*, 32, 1–62.
- Waymire, E., Gupta, V.K. (1981). The mathematical structure of rainfall representations: 1. A review of the stochastic rainfall models. *Water Resour. Res.*, 17, 1261–1272.
- Weiss, G. (1977). Shot noise models for the generation of synthetic streamflow data. *Water Resour. Res.*, 13, 101–108.

Використання ізохронних діаграм при визначенні параметрів ядер спадковості лінійних в'язкопружних матеріалів

В. С. Резнік

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна

creep@inmech.kiev.ua

Запропоновано метод і викладені основні процедури методу визначення параметрів ядер спадковості лінійно-в'язкопружних матеріалів з використанням ізохронних діаграм. Метод ґрунтується на гіпотезі подібності ізохронних діаграм діаграмі миттєвого деформування. У якості критерія найкращого узгодження використовується умова мінімізації квадратичного відхилення розрахункових значень ядер повзучості від отриманих експериментально. Апроксимація функції подібності здійснюється кубічними сплайнами.

Ключові слова: лінійно-в'язкопружні матеріали, ізохронні діаграми, функція подібності, ядра спадковості, лінійна повзучість, довірчий інтервал.

1. Вступ. При вирішенні прикладних задач лінійної і нелінійної теорії в'язкопружності одне з головних місць займають методи визначення в'язкопружних характеристик матеріалу, які у випадку рівнянь спадкового типу зводяться до відшукування ядер повзучості і релаксації. Структура ядер повинна відповідати найкращому узгодженню з експериментальними даними, що накладає суттєві обмеження на аналітичні вирази ядер і методи визначення їх параметрів.

Знаходження параметрів ядер спадковості, як правило, здійснюють за експериментальними даними, які проводяться на основі незалежних випробувань на повзучість по функції повзучості (Голуб и др., 2009, 2012).

У даній роботі запропонований метод визначення параметрів ядер спадковості лінійно-в'язкопружних матеріалів виходячи з гіпотези подібності ізохронних діаграм і діаграми миттєвого деформування.

2. Постановка задачі. Визначальне рівняння спадкового типу теорії в'язкопружності, що описує процес повзучості задається інтегральним рівнянням (Голуб и др., 2009, 2012)

$$\phi_0(\varepsilon(t)) = \sigma(t) + \lambda \int_0^t \tilde{K}(t - \tau) \sigma(\tau) d\tau. \quad (1)$$

Тут $\varepsilon(t)$ — повна деформація, що включає пружну компоненту ε^e і деформацію повзучості ε^c в моменти часу t й τ ; $\sigma(t)$, $\sigma(\tau)$ — напруження, що діє в моменти часу t й τ ; $\phi_0(\cdot)$ — функція, що задає діаграму миттєвого деформування; $\tilde{K}(t - \tau)$ — ядро повзучості; λ — реологічний параметр; t — час спостереження; τ — час, що передує моменту спостереження.

Якщо матеріал лінійний, то $\phi_0(\cdot)$ задається одночленною апроксимацією у формі закону Гука

$$\phi_0(\varepsilon) = E\varepsilon, \quad (2)$$

де E — модуль пружності.

У якості ядер спадковості можна вибрати структури у вигляді ядра Абеля и його резольвенти

$$K_s(t - \xi) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)(t - \xi)^\alpha}; R_s(t - \xi) = \frac{1}{(t - \xi)^\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda_s)^n (t - \xi)^{(1+\alpha)n}}{\Gamma[(1 - \alpha)(1 + n)]}, \quad (3)$$

степеневі функції і відповідної резольвенти

$$K_s(t - \xi) = \frac{1}{(t - \xi)^{1-\alpha}}; R_s(t - \xi) = \frac{1}{t - \xi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\lambda_s)^{n-1} [\Gamma(\alpha)]^n (t - \xi)^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n)}, \quad (4)$$

комбінації степеневі і експоненціальної функції і відповідної резольвенти

$$K_s(t - \xi) = \frac{1}{e^{\beta(t-\xi)}(t - \xi)^{1-\alpha}}; R_s(t - \xi) = \frac{1}{e^{\beta(t-\xi)}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{1+n} [\lambda_s \Gamma(\alpha)]^n (t - \xi)^{\alpha n - 1}}{\Gamma(\alpha n)}, \quad (5)$$

а також дробово-експоненціальної функції (Голуб и др., 2012; Колтунов, 1969)

$$K_s(t - \xi) = \frac{1}{(t - \xi)^\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t - \xi)^{(1-\alpha)n}}{\Gamma[(1 - \alpha)(1 + n)]};$$

$$R_s(t - \xi) = \frac{1}{(t - \xi)^\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(\lambda_s + \beta)^n (t - \xi)^{(1-\alpha)n}}{\Gamma[(1 - \alpha)(1 + n)]}, \quad (6)$$

Тут α, β, λ — параметри ядер спадковості, які визначаються з дослідів на повзучість або релаксацію; $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функція Ейлера.

Задача полягає в розробці ефективного методу визначення параметрів ядер спадковості лінійно-в'язкопружних матеріалів з використанням гіпотези подібності ізохронних діаграм і діаграми миттєвого деформування.

3. Єдина ізохронна діаграма деформування. Визначальні рівняння моделі в'язкопружності (1) побудовано виходячи з гіпотези подібності ізохронних діаграм повзучості і діаграми миттєвого деформування. Це дозволяє лінійність або нелінійність моделі задавати лінійністю або нелінійністю діаграми незалежно від часу.

Існування єдиної ізохронної діаграми деформування може бути обґрунтовано виконанням із заданою точністю процедури зведення ізохронних діаграм повзучості $\phi_t(\varepsilon_i(t), t_j)$ до діаграми миттєвого деформування $\phi_0(\varepsilon(0), 0)$. Зведе-

ні дискретні значення $\bar{\phi}_t(\varepsilon_i(t), 0)$ функцій $\phi_t(\varepsilon_i(t), t_j)$ можуть бути визначені зі співвідношення

$$\bar{\phi}_t(\varepsilon_i(t), 0) = \left(1 + G(t_j)\right) \cdot \phi_t(\varepsilon_i(t), t_j) \quad \left(i = \overline{1, q}, \quad j = \overline{1, \ell}\right), \quad (7)$$

де коефіцієнт пропорційності

$$\overline{1 + G(t_j)} = \frac{\sum_{i=1}^q \left\{ \phi_0(\varepsilon_i(0), 0) \cdot \phi_t(\varepsilon_i(t), t_j) \right\}}{\sum_{i=1}^q \left\{ \phi_t(\varepsilon_i(t), t_j) \right\}^2} \quad (8)$$

осереднює значення функцій подібності $\left(1 + G(t_j)\right)$, що отримані для кожної j -ї ізохронної діаграми повзучості. Ізохронні діаграми $\phi_t(\cdot)$ побудуємо за експериментальними кривими повзучості « $\varepsilon_c - t$ », що отримані для декількох рівнів напружень. У статті прийнято, що єдина діаграма обґрунтовується з наперед заданою похибкою, яка становить $\pm 5\%$.

Дискретні значення (8) апроксимуються згладжувальними кубічними сплайнами

$$\overline{1 + G(t_j)} = A_j + B_j(t - t_j) + C_j(t - t_j)^2 + D_j(t - t_j)^3, \quad (9)$$

коефіцієнти якого

$$B_j = \frac{\bar{G}_{j+1} - \bar{G}_j}{h_j} - \frac{h_j}{6} (2k_j + k_{j+1}); \quad C_j = \frac{k_j}{2}; \quad D_j = \frac{k_{j+1} - k_j}{6h_j}$$

Виходячи з механічного змісту функції подібності, отримаємо співвідношення для дискретних значень ядер спадковості

$$\lambda_s K_s(t_j) = B_j + 2C_j(t - t_j) + 3D_j(t - t_j)^2, \quad (10)$$

Дискретні значення ядер спадковості (3.4) апроксимуються наперед вибраними структурами ядер (3)–(6). Задача зводиться до мінімізації виразу

$$\delta = \sum_{j=1}^n \left\{ K_s(t_j) - \lambda_0 K_s(t, q_{s0}) \right\}^2, \quad (11)$$

що здійснюється методом найменших квадратів. У структурі (11) усі дискретні значення ядер є рівноважними, що спричиняє похибки в області сингулярності. Для покращення апроксимації можна використати метод вагових функцій (Работнов, 1977), які зменшують вплив дискретних значень в області малих часів

Висновки. Запропоновано метод визначення параметрів ядер спадковості лінійної моделі в'язкопружності, що ґрунтується на гіпотезі подібності ізохронних діаграм повзучості й діаграми миттєвого деформування. Метод дозволяє досить точно визначити параметри ядер спадковості лінійно-в'язкопружних

матеріалів за даними дослідів на одновісну повзучість при постійних навантаженнях. У якості ядер спадковості можна використати ядра у вигляді ядер Абеля, степеневі функції, комбінації степеневі і експоненціальної функції, а також дробово-експоненціальної функції.

Список літератури

- Голуб, В. П., Кобзарь, Ю. М., & Рагулина, В. С. (2009). Метод определения параметров ядер наследственности нелинейно-вязкоупругих материалов с использованием весовых функций. *Теорет. и прикл. механика*, (46), 70–80.
- Голуб, В. П., Кобзарь, Ю. М., & Рагулина, В. С. (2012). Определение параметров ядер наследственности изотропных нелинейно-вязкоупругих материалов при сложном напряженном состоянии. *Теоретическая и прикладная механика*, (5), 26–35.
- Колтунов, А. А. (1969). Метод определения объемных и сдвиговых характеристик упруго-вязких наследственных сред по экспериментам на одноосное растяжение (сжатие). *Механика полимеров*, (4), 754–758.
- Колтунов, М. А. (1976). *Ползучесть и релаксация*. Москва: Высшая школа.
- Работнов, Ю. Н. (1977). *Элементы наследственной механики твердых тел*. Москва: Наука.

Про вплив параметрів на напружений стан порожнистих циліндрів із двопараметричним відхиленням форми поперечного перерізу від кругової

Л. С. Рожок

Національний транспортний університет, Київ, Україна

r.l.s@ua.fm

На основі методу апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є розв'язано задачу про напружений стан ізотропних порожнистих циліндрів з двопараметричним відхиленням форми поперечного перерізу від кругової (гофровані еліпси). Проведений аналіз впливу еліптичності на напружений стан гофрованих циліндрів та частоти гофрування на напружений стан еліптичних порожнистих ізотропних циліндрів.

Ключові слова: дискретні ряди Фур'є, двопараметричне відхилення від кругової форми, крайова задача, напружений стан, некругові порожнисті циліндри, суперпозиція форм поперечних перерізів.

Елементи конструкцій з гофрами знаходять широке застосування в різних галузях (Ross, 2005; Wang, 2020; Woodruff, 2020). Під час аналізу напружено-деформованого стану порожнистих циліндрів з еліптичним гофрованим поперечним перерізом (Grigorenko, 2004, 2006; Григоренко, 2005), що знаходяться під дією поверхневого навантаження, виникло питання про вплив еліптичності на напружений стан гофрованих циліндрів та частоти гофрування на напружений стан еліптичних порожнистих циліндрів.

Розглядаються ізотропні порожнисті циліндри з еліптичним гофрованим поперечним перерізом при дії внутрішнього рівномірного тиску. Поперечний переріз розглядуваних циліндрів описується рівнянням в полярній системі координат (Корн и Корн, 1968), що дозволяє розглядати одразу чотири форми поперечного перерізу: кругову, еліптичну, кругову гофровану й еліптичну гофровану

$$\rho(\psi) = \frac{a}{(1 - e^2 \cos^2 \psi)^{1/2}} + \alpha \cos m \psi, \quad e = \frac{2\sqrt{\Delta}}{1 + \Delta} \quad (0 \leq \psi \leq 2\pi)$$
$$a = \frac{r_0(1 - \Delta)}{f}, \quad f = 1 + \frac{\Delta^2}{4} + \frac{\Delta^4}{64} + \frac{\Delta^6}{256} + \dots,$$

де ρ — полярний радіус, ψ — центральний кут в поперечному перерізі, α — амплітуда гофрування, m — частота гофрування, ε — ексцентриситет еліпса (Δ — степінь еліптичності), r_0 — радіус вихідного кола.

На основі підходу, що базується на застосуванні просторової моделі лінійної теорії пружності з використанням методу апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є (Grigorenko, 2014) проведено аналіз напруженого стану ізотропних порожнистих циліндрів з поперечним перерізом, яке має двопараметричне відхилення від кругової форми, що знаходяться під дією внутрішнього тис-

ку за певних граничних умов на торцях, з метою дослідження суперпозиції двох форм поперечних перерізів (еліптичної та гофрованої).

Задачу розв'язано за таких вихідних даних: довжина циліндрів $l = 60$, радіус вихідного кола $r_0 = 40$, товщина $h = 2$, амплітуда гофрування $\alpha = 1$, частота гофрування $m = 4$, степінь еліптичності $\Delta = 0; 0,1; 0,2$, механічні характеристики $E = E_0$, $\nu = 0,3$. На рис. 1 наведено поперечні перерізи розглядуваних циліндрів, для яких досліджується суперпозиція двох форм поперечного перерізу, а саме, вплив параметрів еліптичності (Δ) та наявності гофрів (m).

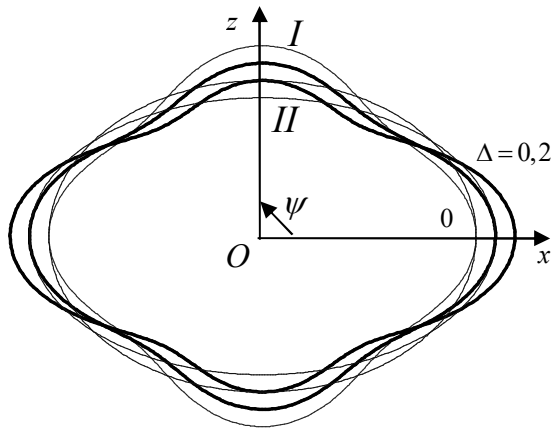


Рис. 1. Суперпозиція еліптичної (тонкі лінії II) та гофрованої (тонка лінія I) форм поперечних перерізів

Результати розв'язання задачі наведено для розподілу полів нормальних переміщень поверхні відліку на рис. 2 а та на рис. 2 б максимальних значень напружень σ_ψ на внутрішній поверхні в середньому перерізі довжини.

Ефект суперпозиції двох форм поперечних перерізів стосовно розподілу нормальних переміщень можна сформулювати в такий спосіб (рис. 2 а). На спільному симетричному інтервалі зміни напрямної ($0 \leq \psi \leq \pi/2$) монотонні криві розподілу нормальних переміщень (пунктирні лінії $\Delta = 0,1; 0,2$), що характерні для еліптичних форм, втрачають свою монотонність, набуваючи хвилеподібного вигляду (суцільні лінії).

При цьому хвилеподібна крива, яка характерна для гофрованої кругової форми (пунктирна лінія $\Delta = 0$) перестане бути симетричною.

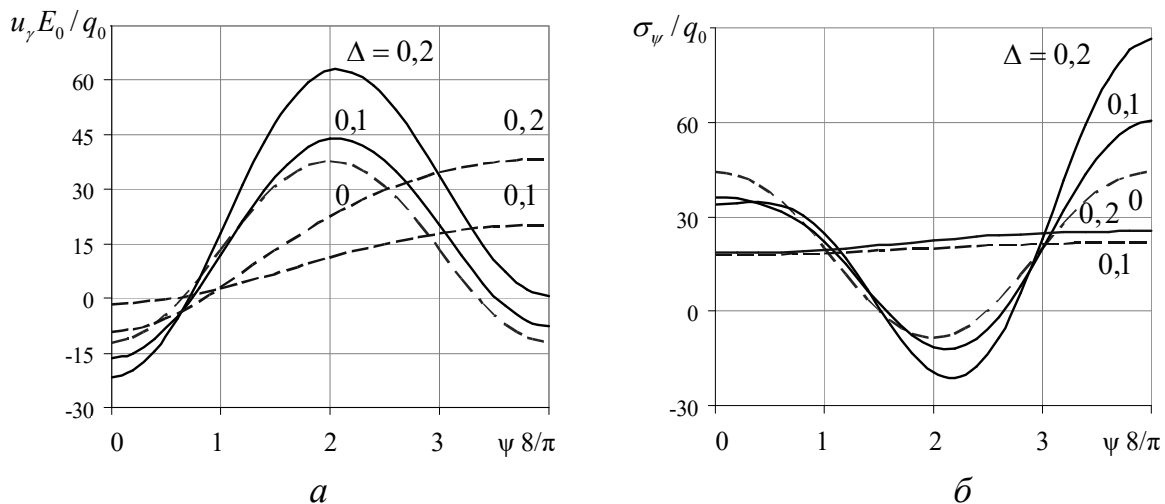


Рис. 2. Вплив суперпозиції форм поперечних перерізів на розподіл нормальних переміщень поверхні відліку вздовж напрямної циліндра

ною відносно середини розглядуваного інтервалу зміни напрямної. Зі збільшенням степеня еліптичності відхилення від симетричності носить більш виражений характер. Схожу картину мають графіки розподілу полів напружень σ_ψ (рис. 2 б). При цьому, якщо своїх максимальних значень напруження σ_ψ в еліптичних циліндрах досягають на зовнішній поверхні в зоні мінімальної жорсткості ($\psi = \pi / 2$), у гофрованих кругових циліндрах — на внутрішній поверхні у вершинах гофрів, то в еліптичних гофрованих циліндрах максимальні значення напружень σ_ψ припадають на внутрішню поверхню в перерізі $\psi = \pi / 2$ для циліндрів з чотирма гофрами.

Таким чином, варіюючи параметрами, що характеризують відхилення форми поперечного перерізу від кругової, можна впливати на розподіл полів переміщень та напружень в порожнистих циліндрах розглядуваного класу з метою вибору раціональнішої форми.

Список літератури

- Grigorenko, Ya. M., & Rozhok, L. S. (2004). Influence of corrugation frequency and amplitude on the stress state of hollow elliptic cylinders. *Int. App. Mech.*, 40(9), 1012–1017.
- Grigorenko, Y. M., & Rozhok, L. S. (2006). Equilibrium of elastic hollow inhomogeneous cylinders of corrugated elliptic cross-section. *Journal of engineering mathematics*, 54(2), 145–157.
- Grigorenko, Y. M., & Rozhok, L. S. (2014). Applying discrete Fourier series to solve problems of the stress state of hollow noncircular cylinders. *International Applied Mechanics*, 50(2), 105–127.
- Ross, C. T. (2005). Collapse of corrugated circular cylinders under uniform external pressure. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 5(02), 241–257.
- Wang, D., Wang, L., & Tang, C. (2021). Mechanical characteristic analysis of corrugated steel webs using asynchronous construction technology. *KSCE Journal of Civil Engineering*, 25(1), 185–196. <https://doi.org/10.1007/s12205-020-0069-3>
- Woodruff, S. R., & Filipov, E. T. (2020). Curved creases redistribute global bending stiffness in corrugations: theory and experimentation. *Meccanica*. <https://doi.org/10.1007/s11012-020-01200-7>
- Григоренко, Я. М., & Рожок, Л.С. (2005) Застосування дискретних рядів Фур'є до розв'язання крайових задач статички пружних тіл неканонічної форми. *Мат. методи та фіз. – мех. поля*, 48(2), 79–100.
- Корн, Г., & Корн, Т. (1968). *Справочник по математике для научных работников и инженеров*. Москва: Наука.

Математическая модель растительного объекта для его цифровой идентификации

А. В. Розанов¹, С. Н. Потемкина², С. И. Ткачев¹,

¹Саратовский ГАУ им. Н. И. Вавилова, Саратов, Россия

²Тольяттинский государственный университет, Тольятти, Россия

arosnov@yandex.ru, s.potemkina@tltsu.ru, tkachevsi@sgau.ru

Рассматриваются особенности математического моделирования характеристик растительных объектов на основе теоремы Гаусса для вектора электрического смещения с целью повышения эффективности датчиков сельскохозяйственного назначения.

Ключевые слова: моделирование растительных объектов, диэлектрики, вектор электрического смещения, электростатическая теорема Гаусса, расчет характеристик электрических полей.

Цифровая трансформация агропромышленного производства требует разработки и применения эффективных математических моделей и алгоритмов для цифровизации технических средств и датчиков сельскохозяйственного назначения (Национальная программа и др., 2019). Для высокоскоростной инфраструктуры новой цифровой агроэкономики аналоговые методы и приборы оказываются слишком медленными и малоэффективными, поскольку слабо приспособлены для работы в быстродействующей среде обработки больших данных (Big Data) и интернета вещей (Internet of things).

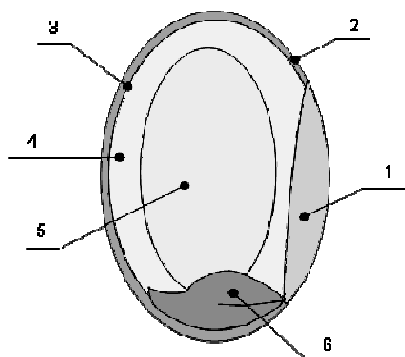


Рис. 1. Зерно пшеницы. 1 – цветочная пленка, 2 – плодовая оболочка, 3 – семенная оболочка, 4 – алейроновый слой, 5 – эндосперм, 6 – зародыш

В настоящей статье рассмотрены особенности выбора математической модели, предназначенной для цифровой идентификации растительных объектов, например, в потоке зерна, загрязненного фрагментами небιологического происхождения.

С физической точки зрения ряд продуктов сельского хозяйства, например, зёрна пшеницы, ячменя, нута, гороха, фасоли и других, представляют собой объекты, которые могут быть описаны математическими моделями в форме многослойных диэлектрических сфер или эллипсоидов (См. рис. 1).

В предыдущей работе авторов сформулирована теоретическая основа применения теоремы Гаусса для расчета электрических полей в диэлектриках (Потемкина и Розанов, 2018). Основное внимание в ней было уделено обоснованию преимуществ использования вектора электрического смещения для повышения оперативности и точности расчета физически наблюдаемых характеристик. В настоящей работе полученные результаты применены для построения математической модели, близкой к реальным растительным объектам.

Пусть электрическое поле в диэлектрической среде создается точечным зарядом Q . Необходимо определить поток вектора электрического смещения \mathbf{D} через круглую площадку (вертикальное сечение зерна) радиусом R . Заряд равноудален от краев площадки, которые находятся на расстоянии a от него.

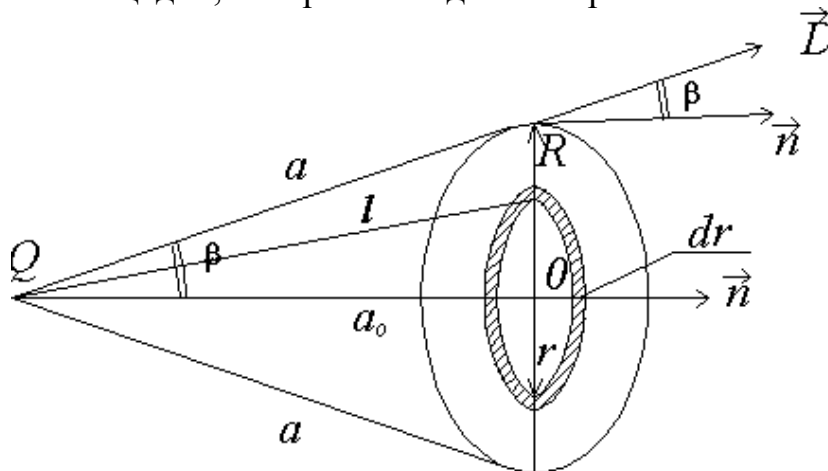


Рис. 2. К расчету потока вектора электрического смещения

Поле создается зарядом Q , следовательно, в каждой точке площадки вектор \mathbf{D} составляет некоторый угол β с вектором нормали \mathbf{n} (рис. 2). Величину потока можно рассчитать по теореме Гаусса для поля вектора \mathbf{D} :

$$\Phi_D = \oint \vec{D} \cdot d\vec{S} \quad (1)$$

С этой целью разобьём площадку на кольца радиусом r с малой ширины dr , тогда:

$$dS = 2\pi r dr \quad (2)$$

Проекция D_n вектора \mathbf{D} на рассматриваемую площадку равна:

$$D_n = D \cos \beta \quad (3)$$

По определению (Матвеев, 2010)

$$D = \frac{\epsilon_0 \epsilon Q}{r^2}, \quad l^2 = r^2 + a_0^2 \quad (4)$$

Тогда поток вектора \mathbf{D} сквозь замкнутую площадку будет равен:

$$\Phi_D = \oint_S D_n \cdot dS = \oint_S D \cos \beta dS \quad (5)$$

Значение тригонометрической функции $\cos \beta$ находим из рис. 2:

$$\cos \beta = \frac{a_0}{l} = \frac{a_0}{\sqrt{r^2 + a_0^2}} \quad (6)$$

Рассчитаем численное значение Φ_D потока вектора \mathbf{D} сквозь выбранную поверхность.

$$\Phi_D = 2\pi \frac{Qa_0}{4\pi} \int_0^R \frac{rdr}{(r^2 + a_0^2)^{3/2}} = \frac{Qa_0}{2} \int_0^R \frac{rdr}{(r^2 + a_0^2)^{3/2}} = \frac{Qa_0}{2} \left(1 - \frac{a_0}{\sqrt{a_0^2 + R^2}} \right) \quad (7)$$

Если известны величины диэлектрической проницаемости ε в разных сечениях объекта, например, в центре зерна (область 5 на рис. 1), то по формуле связи легко рассчитать значения напряженности электростатического поля в этой области:

$$E_{05} = \frac{\varepsilon Q_{05}}{a_0^2 \varepsilon}, \quad (8)$$

а также величину разности потенциалов между точками O и A :

$$\phi_O - \phi_A = \int_0^R \frac{\varepsilon_0 \varepsilon Q}{(a_0^2 + r^2)} dr \quad (9)$$

Зафиксировать и оцифровать величины этих полей и потенциалов несложно с применением современных быстродействующих радиочастотных методов.

Таким образом, использование специфических свойств вектора электрического смещения \mathbf{D} и применение теоремы Гаусса к расчёту основных параметров поля в диэлектрической среде: напряженности, электрического смещения, потенциала и других физически наблюдаемых характеристик растительных объектов, связанных с их структурой, позволяет повысить быстродействие и расширить границы применимости датчиков электромагнитных полей, применяемых на практике в сфере АПК и инновационной агроэкономики (Розанов и Потемкина, 2019).

Список литературы

- Матвеев, А. Н. (2010). *Электричество и магнетизм* (3-е изд.). Санкт-Петербург: Лань.
- Национальная программа «Цифровая экономика РФ». (2019, 14 марта). *Цифровая экономика 2024*. <https://digital.ac.gov.ru/>
- Потемкина, С. Н., & Розанов, А. В. (2018). Применение теоремы Гаусса к расчету электростатического поля в диэлектрике. В *Материалах VI Международной научно-практической конференции «Математика в современном техническом университете»* (с. 113–116). Киев: КПИ им. Игоря Сикорского.
- Розанов, А. В., & Потемкина, С. Н. (2019). Математическое моделирование объектов для их цифровой идентификации. В *IV Международной научно-практической конференции «Экономико-математические методы анализа деятельности предприятий АПК»* (с. 294–299). Саратов: ФГБОУ ВО «Саратовский ГАУ».

Інформаційна система прогнозування поточкових параметрів конвеєра з використанням нейронної мережі

А. В. Ситнікова

НТУ «ХПІ», Харків, Україна

an.sitnickowa31@gmail.com

У статті стисло розглянуто результати роботи моделі прогнозування поточкових параметрів розподіленої транспортної системи конвеєрного типу. Показано, що модель транспортної системи, яка базується на нейронній мережі, може бути успішно застосована для прогнозування поточкових параметрів транспортної системи, що складається з дуже великої кількості секцій.

Ключові слова: конвеєр, модель прогнозування, нейронна мережа.

Розгляньмо актуальну проблему моделювання розгалуженої багатосекційної транспортної системи. Існують проблеми підвищення надійності конвеєрного транспорту на різних видах підприємств, підвищення ефективності виробництва, прогнозування та контролювання всіх робочих процесів і обладнання, попередження небезпечних режимів роботи обладнання, автоматичні сигналізації, регулювання, управління і т. п.

Моделювання — важливий інструмент для розуміння динаміки корпоративних систем, особливо в останні роки. Успішні компанії вже давно використовують моделювання як інструмент для оперативного і стратегічного управління (Pihnastyi, 2018). Багато крупних систем, у тому числі й конвеєрні, потребують моделювання і подальшого аналізу. Моделювання конвеєрних систем необхідно для проведення інженерного аналізу та подальшого затвердження ефективнішого інженерного рішення. Одна зі складних і великих транспортних систем — шахта Любін, що знаходиться на заході Польщі в Любіні. На рис. 1 зображено одну з ліній цієї шахти. Інформаційна графічна модель цієї шахти, розроблена мною зображена на рис. 2.

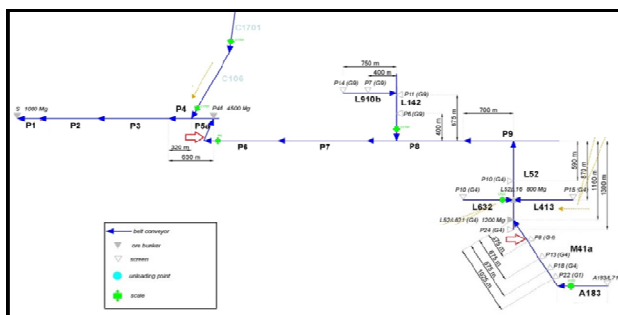


Рис. 1. Інформаційна схематична модель однієї з ліній конвеєрної системи Любін (Jurdziak et al., 2019)

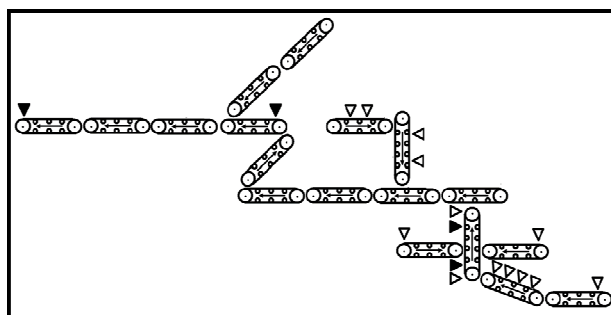


Рис. 2. Інформаційна графічна модель однієї з ліній конвеєрної системи Любін

Моделі з використанням нейронних мереж являють собою досить перспективний клас моделей для проектування високоєфективних систем управління

розподіленою динамічною транспортною системою конвеєрного типу. Основними моделями, які використовуються для проектування оптимальних систем керування параметрами потоку транспортного конвеєра є чисельні методи. Навчання нейронної мережі є основним фактором, що визначає якість моделі. Якісне навчання нейронної мережі, здатної моделювати конкретну транспортну систему, вимагає збору відповідних даних у великих кількостях. Штучні нейронні мережі — це моделювання людського мозку з найпростішим визначенням, а будівельним матеріалом є нейрони. Під час навчання інформація розповсюджується на ці точки підключення, так що мережа навчається (Pihnastyi et al., 2020).

Для аналізу процесу навчання нейронної мережі порядок даних для навчання зафіксовано. Це дозволило проводити багаторазові повторення навчання з різними параметрами мережі і порівнювати ефект від зміни параметрів. Вагові коефіцієнти ініціалізували випадковими значеннями в діапазоні $[0.0;1.0]$ з рівномірною щільністю розподілу. За вхідні вузли нейронної мережі для моделювання транспортної системи використані характеристики $\gamma_m(\tau)$, $g_m(\tau)$ вхідних секцій 1, 2, 4, 5 на інтервалі $0 \leq \tau \leq T_k = 100$. Для прикладу наведено декілька з експериментів. Прогнозування значень параметрів вихідного потоку для секцій 1, 2, 4, 5 представлено на рис. 3. Обчислення потоку матеріалу 1-ї та 2-ї секції, вихідна — 3-тя зображено на рис. 4, обчислення потоку матеріалу секцій 1, 2, 4, 5, на виході 7 і 8 на рис. 5.

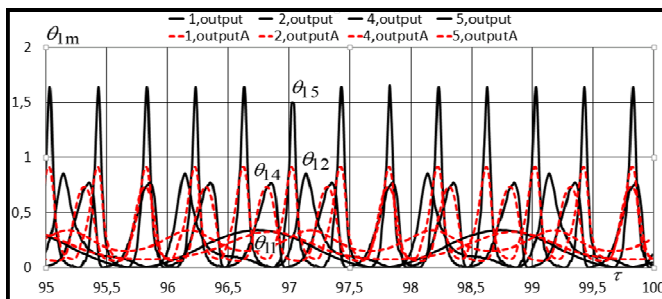


Рис. 3. Обчислення вихідного потоку матеріалу $\theta_{1m}(\tau, \xi_m)$ m -ї з використанням нейронної мережі

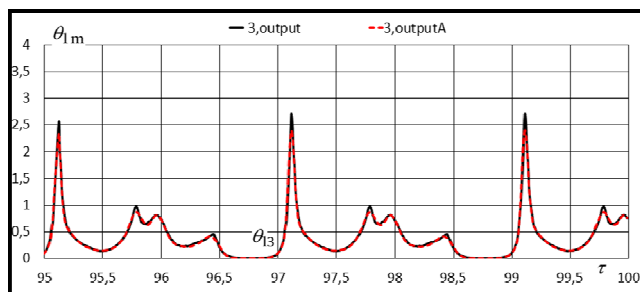


Рис. 4. Обчислення вихідного потоку матеріалу $\theta_{1m}(\tau, \xi_m)$ 3-ї з використанням нейронної мережі

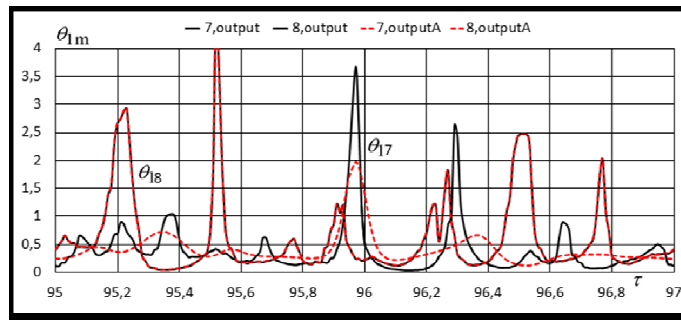


Рис. 5. Обчислення вихідного потоку матеріалу $\theta_{1m}(\tau, \xi_m)$ 7-ї та 8-ї з використанням нейронної мережі

Результати аналізу моделі з використанням нейронної мережі демонструють, що нейронна мережа є гарним інструментом для прогнозування стану вихідних поточкових параметрів розгалуженої транспортної системи, що складається з великої кількості окремих секцій. Прогнозна модель дозволяє визначати пікові значення параметрів транспортної системи. У статті подано методику прогнозування параметрів для багатосекційних транспортних систем. Важливим результатом проведених досліджень є висновок про те, що дана інформаційна модель з використанням нейронної мережі є доцільною і вдалою у використанні транспортними системами конвеєрного типу, адже вдало справляється з поставленою задачею — прогнозування поточкових параметрів. Отримані припущення в ході експериментів можна вважати перспективною для подальших досліджень з ціллю удосконалень.

Список літератури

- Jurdziak, L., Kawalec, W., & Krol, R. (2019). Guidelines for Ore tracking system in the complex underground transportation got from the DISIRE Project. In *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science* (Vol. 221, No. 1, p. 012101). IOP Publishing.
- Pihnastyi, O. M. (2018). *Statistical theory of control systems of the flow production*. Lambert Academic Publishing.
- Pihnastyi, O., Kozhevnikov, G., & Bondarenko, T. (2020, May). An analytical method for generating a data set for a neural model of a conveyor line. In *2020 IEEE 11th International Conference on Dependable Systems, Services and Technologies (DESSERT)* (pp. 202–206). IEEE.

Аналітичне розв'язання задач статки для циліндричної оболонки з урахуванням трансверсального зсуву й геометричної нелінійності

Є. А. Сторожук

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна
stevan@ukr.net

Дано постановку геометрично нелінійних задач статки для податливих на поперечний зсув довгих циліндричних оболонок кругового перерізу. Система розв'язувальних рівнянь записана на основі геометрично нелінійної теорії пологих оболонок у квадратичному наближенні, яка базується на гіпотезі прямої лінії. Отримано точний розв'язок крайової задачі для циліндричної оболонки з шарнірно закріпленими повздовжніми краями при дії рівномірного внутрішнього тиску.

Ключові слова: довга циліндрична оболонка, статичне навантаження, рівняння рівноваги, геометрично нелінійна задача, поперечний зсув, точний розв'язок.

Довгі циліндричні оболонки, як елементи сучасних конструкцій, знаходять широке застосування в інженерній практиці. З них складаються обшивки крил і фюзеляжів сучасних літаків, корпусів кораблів і підводних човнів, резервуари в нафтовій і газовій промисловості, перекриття інженерних споруд тощо. Тому дослідження напружено-деформованого стану довгих циліндричних оболонок є актуальним.

Постановка задачі й основні рівняння. Розглянемо незамкнену пологу нескінченно довгу кругову циліндричну оболонку радіуса R і товщини h , виготовлену із трансверсально-ізотропного матеріалу. Віднесемо серединну поверхню оболонки до криволінійної ортогональної системи координат (x, s) з початком у вершині поперечного перерізу, де x, s — довжини твірної і дуги напрямної (рис. 1). Уважаємо, що оболонка має сталі жорсткісні характеристики й навантажена рівномірним нормальним тиском інтенсивності q , прикладеним з боку вгнутості оболонки, як показано на рис. 1. З викладеного вище випливає, що переміщення, деформації та напруження в кожному поперечному перерізі оболонки будуть однаковими, а всі шукані величини будуть змінюватися тільки вздовж напрямної (будуть залежати тільки від координати s ($-\delta \leq s \leq \delta$)).

Нехай при підвищених рівнях діючого навантаження в оболонці виникають великі (скінченні) прогини, порівняні із товщиною. Вихідними при дослідженні напружено-деформованого стану даного класу гнучких циліндричних оболонок є рівняння геометрично нелінійної теорії пологих оболонок у квадратичному наближенні, яка базується на гіпотезі прямої лінії (ураховується деформація поперечного зсуву).

Згідно прийнятої моделі компоненти деформації оболонки визначаються за формулами (Галимов и др., 1996):

$$\varepsilon = \frac{du}{ds} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{ds} \right)^2; \quad \gamma = \vartheta + \frac{dw}{ds}; \quad \mu = \frac{d\vartheta}{ds}, \quad (1)$$

де u, w — тангенціальне переміщення і прогин точок серединної поверхні оболонки; ϑ — кут повороту нормалі.

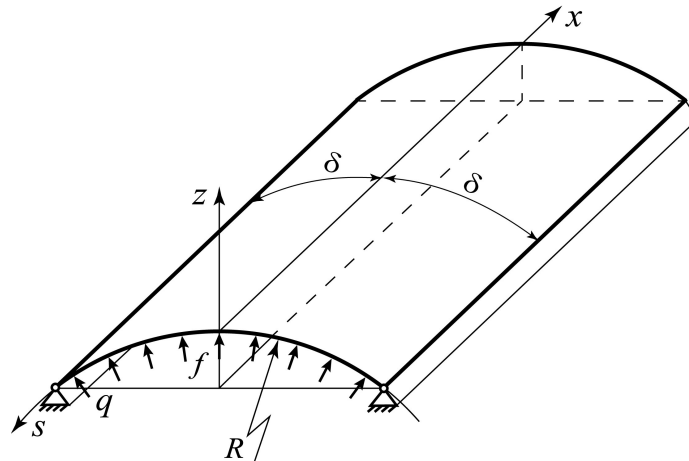


Рис. 1. Кругова циліндрична панель при дії внутрішнього тиску

Зв'язок внутрішніх зусиль і момента з компонентами деформації оболонки (1) записуємо на основі закону Гука у вигляді:

$$\begin{aligned} N = D_N \varepsilon; \quad D_N = \frac{Eh}{1 - \nu^2}; \quad Q = D_Q \gamma; \quad D_Q = m G_{yz} h; \\ M = D_M \mu; \quad D_M = D_N h^2 / 12. \end{aligned} \quad (2)$$

У співвідношеннях (2) позначено: N, Q — тангенціальне і перерізує зусилля; M — згинний момент; D_N, D_M, D_Q — жорсткісні характеристики оболонки; E, ν — модуль пружності й коефіцієнт Пуассона матеріалу оболонки в площині ізотропії; G_{yz} — модуль зсуву у площині поперечного перерізу; m — коефіцієнт, який залежить від характеру розподілу зсуву по товщині.

Рівняння рівноваги мають такий вигляд:

$$\frac{dN}{ds} = 0; \quad \frac{dQ^*}{ds} - \frac{N}{k} + q = 0; \quad \frac{dM}{ds} - Q = 0, \quad (3)$$

де $Q^* = Q + N \frac{dw}{ds}$.

При розв'язанні конкретних задач до системи рівнянь (1)–(3) потрібно приєднати відповідні крайові умови.

Уважаємо, що повздовжні краї оболонки шарнірно закріплені. Тоді граничні умови на цих краях записуються так:

$$w(\pm\delta) = 0; \quad \left. \frac{d\vartheta}{ds} \right|_{s=\pm\delta} = 0; \quad u(\pm\delta) = 0. \quad (4)$$

Останню з умов (4) на одному краї можна замінити еквівалентною умовою

$$\Delta = \int_{-\delta}^{\delta} \frac{du}{ds} ds = 0, \quad (5)$$

яка означає, що зближення між краями відсутнє.

Розв'язок геометрично нелінійної задачі. Оскільки поверхневе навантаження q напрямлене від центра кривизни, як показано на рис. 1, то тангенціальне зусилля є розтягувальним ($N > 0$).

Інтегруючи перше рівняння рівноваги, отримуємо, що $N = C_0 = const$, тобто, тангенціальне зусилля не змінюється вздовж напрямної.

Запровадимо безрозмірні величини (Карпов & Семенов, 2015; Grigorenko & Kharitonova, 2005):

$$\begin{aligned} \eta = \frac{s}{\delta}; \quad \tilde{w} = \frac{wR}{\delta^2}; \quad \tilde{u} = \frac{u}{k^2\delta^3}; \quad \tilde{\vartheta} = \frac{\vartheta}{k\delta}; \quad \tilde{k} = \frac{k\delta^2}{h}; \\ \tilde{q} = \frac{q\delta^2}{kD_M}; \quad \alpha = \frac{N\delta^2}{D_M} > 0; \quad \beta = \frac{D_M}{D_Q\delta^2}, \end{aligned} \quad (6)$$

де $k = 1/R$ — кривизна циліндра.

З використанням співвідношень (1), (2), (6) запишемо друге і третє рівняння рівноваги (3) в безрозмірних переміщеннях:

$$\begin{cases} (1 + \alpha\beta) \frac{d^2\tilde{w}}{d\eta^2} + \frac{d\tilde{\vartheta}}{d\eta} = \alpha\beta - \beta\tilde{q}; \\ \beta \frac{d^2\tilde{\vartheta}}{d\eta^2} - \tilde{\vartheta} - \frac{d\tilde{w}}{d\eta} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Система (7) є системою лінійних звичайних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами. При цьому безрозмірні прогин \tilde{w} і кут повороту $\tilde{\vartheta}$ виражаються лінійно через праву частину, тобто через параметр навантаження \tilde{q} . З іншого боку, у вирази для коефіцієнтів системи (7) входить безрозмірне тангенціальне зусилля α , яке нелінійно залежить від \tilde{q} , що спричиняє нелінійну залежність \tilde{w} і $\tilde{\vartheta}$ від \tilde{q} .

За допомогою методів Ейлера й невизначених коефіцієнтів знаходимо загальний розв'язок системи (7):

$$\begin{aligned} \tilde{w} &= C_1 + C_2\eta + C_3 \operatorname{ch}\lambda\eta + C_4 \operatorname{sh}\lambda\eta + 0,5P\eta^2; \\ \tilde{\vartheta} &= -C_2 - \lambda(1 + \alpha\beta)(C_3 \operatorname{sh}\lambda\eta + C_4 \operatorname{ch}\lambda\eta) - P\eta. \end{aligned} \quad (8)$$

Тут $P = 1 - \tilde{q} / \alpha$.

Задовольняючи перші чотири граничні умови (4), отримаємо значення сталих інтегрування:

$$C_1 = \frac{(2 - \alpha)P}{2\alpha}; \quad C_2 = 0; \quad C_3 = -\frac{P}{\alpha \operatorname{ch} \lambda}; \quad C_4 = 0. \quad (9)$$

Остаточні вирази для кута повороту й прогину з урахуванням значень сталих інтегрування (9) мають такий вигляд:

$$\tilde{w} = \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{\eta^2}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\operatorname{ch} \lambda \eta}{\alpha \operatorname{ch} \lambda} \right) P; \quad \tilde{\vartheta} = \left(\frac{\operatorname{sh} \lambda \eta}{\lambda \operatorname{ch} \lambda} - \eta \right) P. \quad (10)$$

Справджуючи граничну умову (5) одержимо залежність між безрозмірними параметрами навантаження та тангенціального зусилля як квадратне рівняння відносно P

$$aP^2 + bP + c = 0, \quad (11)$$

коефіцієнти якого обчислюються за формулами:

$$a = \frac{\lambda^2}{\alpha^2} \operatorname{th}^2 \lambda + \left(\frac{\lambda}{\alpha^2} + \frac{4}{\alpha \lambda} \right) \operatorname{th} \lambda + \frac{2}{3} - \frac{\lambda^2}{\alpha^2} - \frac{4}{\alpha};$$

$$b = 4 \left(-\frac{\operatorname{th} \lambda}{\alpha \lambda} + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{3} \right); \quad c = -\frac{\alpha}{3\tilde{k}^2}.$$

Таким чином, точний розв'язок нелінійної крайової задачі (1)–(5) отримано в параметричній формі з величиною α в якості параметра.

Залежності $\tilde{w}(\tilde{q}), \tilde{\vartheta}(\tilde{q})$ при фіксованому значенні координати η можна отримати так. Спочатку за допомогою рівняння (11) чисельно знаходимо залежність $\tilde{q}(\alpha)$. Далі з виразів для $\tilde{w}, \tilde{\vartheta}$ (10), перебираючи α і враховуючи зв'язок $\tilde{q}(\alpha)$, одержуємо залежності $\tilde{w}(\tilde{q}), \tilde{\vartheta}(\tilde{q})$.

Список літератури

- Галимов, К. З., Паймушин, В. Н., & Терегулов, И. Г. (1996). *Основания нелинейной теории оболочек*. Казань: Изд-во Акад. наук Татарстана «ФЭН».
- Карпов, В. В., & Семенов, А. А. (2015). Безразмерные параметры в теории подкрепленных оболочек. *Вестник ПНИПУ. Механика*, (3), 74–94.
- Grigorenko, Ya. M., & Kharitonova, L. V. (2005). To determination of critical values of the load under deformation of flexible non-circular cylindrical shells with rigidly fixed edges. *Int. Appl. Mech*, 41(11), 1278–1287.

Комбінаторні конфігурації та їх властивості

Н. К. Тимофієва

МННЦІТiС НАН та МОН України, Київ, Україна

TymNad@gmail.com

Наведено означення комбінаторних конфігурацій та означено рекурентні комбінаторні оператори, завдяки яким вони утворюються. Показано, що вони можуть бути простими та комбінованими, скінченними та нескінченними, ізоморфними та не ізоморфними. У задачах комбінаторної оптимізації вони є аргументом цільової функції.

Ключові слова: комбінаторні конфігурації, рекурентні комбінаторні оператори, перестановки, вибірки, розбиття натурального числа.

Вступ. Розглядаються властивості комбінаторних конфігурацій та їхніх множин. Уведено їхнє означення, вводяться рекурентні комбінаторні оператори, завдяки яким вони утворюються, та сформульовано правила, за якими упорядковуються їхні множини. Показано, що у прикладних задачах комбінаторної оптимізації комбінаторні конфігурації є аргументом цільової функції. Залежно від певного класу цих задач вони можуть бути як з повтореннями, так і без повторень, як скінченними, так нескінченними. У літературі ці властивості комбінаторних конфігурацій ґрунтовно не досліджувалися.

Постановка задачі. У комбінаториці, як правило, розглядаються скінченні комбінаторні конфігурації (перестановки, розбиття n -елементної множини на підмножини, різні типи вибірок). Але у прикладних задачах комбінаторної оптимізації вони виступають як аргумент цільової функції та залежно від умови задачі можуть бути як скінченними, так і нескінченними, як з повтореннями, так і без повторень. Як аргумент цільової функції в задачах комбінаторної оптимізації вони достатньою мірою не вивчалися. Тому однією із проблем є вивчення властивостей цих об'єктів, їхнє формулювання, визначення правил їхнього утворення та впорядкування.

Аналіз останніх досліджень та публікацій за темою. Дослідженню комбінаторних конфігурацій та способам їхнього генерування в літературі присвячено багато робіт, наприклад Рейнгольд и др. (1980), Липский (1988), Berge (1968). Генерування комбінаторних множин, як правило, проводиться алгоритмами за строгою схемою або як рівномірно розподілені випадкові об'єкти. У таких алгоритмах закладаються процедури, які підвищують ефективність їхньої роботи за швидкодією. Деякі алгоритми орієнтовані на розв'язання прикладних задач комбінаторної оптимізації, тому за їх допомогою генерується не вся комбінаторна множина, а її певна підмножина. Оскільки у природі існує багато впорядкувань комбінаторних конфігурацій, то ефективність та швидкодія алгоритмів залежить від того, яка множина з існуючих вибрана для генерування і задає правила для її впорядкування. На основі цих правил розробляється певний алгоритм.

Підхід, що пропонується. Для розв'язання поставленої задачі проводиться аналіз комбінаторних конфігурацій різних типів та структури комбінаторних множин. Цей аналіз показує, що утворення комбінаторних конфігурацій проводиться за допомогою трьох рекурентних комбінаторних операторів, а їхнє строге впорядкування виконується також за трьома правилами. Тобто, для генерування комбінаторних множин достатньо задати тип комбінаторної конфігурації, базову множину та правила їхнього утворення та впорядкування.

Комбінаторні конфігурації. Термін комбінаторна конфігурація увів французький математик Клод Берж. У літературі комбінаторну конфігурацію формалізують так (Berge, 1968; Сачков, 1977). Нехай $X = \{1, 2, \dots, m\}$, $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$. На Y задано строгий лінійний порядок $y_1 < y_2 < \dots < y_n$. Відображення $\varphi : X \rightarrow Y$, що задовольняє деякому комплексу обмежень λ , названо *конфігурацією*. Комплекс обмежень λ , якому задовольняє відображення φ , визначає деякий клас конфігурацій, що відповідає умовам на комбінаторні конструкції в задачі, що розглядається. Наведене означення відображає перестановки.

Існують праці, де під комбінаторною конфігурацією розуміють скінченні конструкції, а нескінченні названо комбінаторним об'єктом. Як показує аналіз, їхня множина має фрактальну структуру, тому вона одночасно скінченна й нескінченна. Уважатимемо, що терміни комбінаторна конфігурація, комбінаторний об'єкт та комбінаторна конструкція мають один і той же зміст.

Комбінаторні конфігурації різних типів утворюються трьома рекурентними комбінаторними операторами з елементів заданої множини, а їхнє впорядкування також проводиться за трьома правилами. Для задання цих правил та встановлення властивостей об'єктів, що розглядаються, уведемо наступне їхнє формулювання.

Комбінаторною конфігурацією називаємо будь-яку сукупність елементів, яка утворюється з усіх або з деяких елементів заданої множини $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ (Тимофієва, 2007). Позначимо її впорядкованою множиною $w^k = (w_1^k, \dots, w_\eta^k)$, $\eta \in \{1, \dots, n\}$ — кількість елементів у w^k , $W = \{w^k\}_1^q$ — множина комбінаторних конфігурацій. Верхній індекс k ($k \in \{1, \dots, n\}$) у w^k позначає порядковий номер w^k у W , q — кількість w^k у W . Під символом $w_j^k \in A$ розуміємо як окремі елементи, так і підмножини (блоки). Комбінаторні конфігурації, одна з яких утворена з $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ вибиранням усіх або частини її елементів, можуть утворюватися одна з другої певною операцією.

Означення 1. Множину $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, з елементів якої утворюються комбінаторні конфігурації, називаємо *базовою*.

Означення 2. Рекурентним комбінаторним оператором називаємо сукупність правил, за допомогою яких з елементів базової множини A утворюється комбінаторна конфігурація w^k .

Різноманітні типи комбінаторних конфігурацій утворюються за допомогою трьох рекурентних комбінаторних операторів: вибирання, транспозиція, арифметичний.

Означення 3. Дві нетотожні комбінаторні конфігурації $w^k = (w_1^k, \dots, w_\eta^k)$ та $w^i = (w_1^i, \dots, w_\eta^i)$ називаємо *ізоморфними*, якщо $\eta^k = \eta^i$.

Означення 4. Підмножину $W_\eta^k \subset W$ називаємо *підмножиною ізоморфних комбінаторних конфігурацій*, якщо її елементи — ізоморфні комбінаторні конфігурації.

Рекурентні комбінаторні оператори вибирання та арифметичний породжують як ізоморфні, так і неізоморфні комбінаторні конфігурації $w^k \in W$.

Множина W складається із підмножин ізоморфних комбінаторних конфігурацій W_η .

Зауваження. Оскільки операція транспозиції змінює лише порядок слідування елементів у $w^k \in W$, то множина перестановок W є множиною ізоморфних комбінаторних конфігурацій.

Називатимемо *простими* комбінаторні конфігурації, які утворюються одним і лише одним типом рекурентних комбінаторних операторів. До простих віднесемо перестановки, розбиття натурального числа, сполучення, бінарні послідовності.

Називатимемо *комбінованими* комбінаторні конфігурації, усіляка множина яких утворюється кількома рекурентними комбінаторними операторами. До комбінованих віднесемо розбиття n -елементної множини на підмножини, розміщення з повтореннями і без повторень та ін.

Комбінаторні конфігурації як аргумент цільової функції. Як правило, задачі комбінаторної оптимізації розв'язуються на скінченній множині комбінаторного характеру. Аргументом цільової в них є комбінаторні конфігурації різних типів (Тимофієва, 2007). Це — перестановки, вибірки різних типів, розбиття натурального числа, графи тощо. Але, якщо детально їх дослідити, то можна побачити, що їхні множини можуть бути як скінченними, так і нескінченними.

Розглянемо розбиття n -елементної множини на підмножини. Ця комбінаторна конфігурація є аргументом цільової функції в різноманітних задачах розбиття, зокрема таких як класифікація, кластеризація, задача покриття тощо. При розв'язанні задачі кластеризації кількість кластерів та їхні характеристики невідомі, зате задано множину елементів, які необхідно розподілити по кластерах. Тому аргументом цільової функції в ній є розбиття n -елементної множини на підмножини без повторень, які утворюються із n елементів скінченної базової

множини $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Відповідно їхня множина — скінченна. У класифікації характеристика класів, як правило, відома, але невідома кількість елементів, які підлягають класифікації. До того ж один і той самий об'єкт може належати різним класам. Тому в цій задачі аргумент цільової функції утворюється з елементів нескінченної базової множини. Відповідно їхня множина — нескінченна. Вона містить розбиття n -елементної множини на підмножини з повтореннями. До задач розбиття належить і задача покриття об'єктами заданої поверхні. Змоделивавши її в рамках теорії комбінаторної оптимізації можна побачити, що аргументом цільової функції в ній є розбиття n -елементної множини на підмножини як з повтореннями так і без повторень.

У задачах з розпізнавання проводиться розпізнавання сигналів різної природи (мовленнєві сигнали, електрокардіограми, електроенцефалограми), які є для них вхідними даними. Ці сигнали описуються комбінаторними конфігураціями, зокрема розміщенням з повтореннями. При утворенні розміщення з повтореннями за певними правилами воно впорядковано так, як вибирається елемент із базової множини. Для одного і того ж слова (речення) природний сигнал упорядковано послідовністю одних елементів. Другий сигнал того ж самого слова утворюється тією ж послідовністю, але сусідні елементи можуть повторюватися, або мати інше значення. Ці сигнали передають суть одного й того слова, але відрізняються кількістю елементів або самими елементами. При їхньому розпізнаванні та порівнянні з еталоном ці елементи, як правило, не збігаються. У цьому полягає нечіткість вхідної інформації. Для деяких різних звуків послідовності чисел, якими описуються сигнали, можуть бути подібними. Тобто, у цьому разі фонем перетинаються. Звідси при розпізнаванні з'являється невизначеність вхідної інформації.

Висновки. Отже множини комбінаторних конфігурацій можуть бути як скінченними так і нескінченними. Наприклад, підмножина ізоморфних сполучень та розміщень з повтореннями $W_\eta^k \subset W$ для фіксованого n — скінченна, а їхня множина W для цього ж n — нескінченна. Залежно від умови задачі комбінаторної оптимізації розбиття n -елементної множини на підмножини може бути як з повтореннями так і без повторень, а їхня множина — як скінченною так і нескінченною.

Аналіз комбінаторних конфігурацій як аргументу цільової функції дозволяє виявляти характерні їхні властивості, адекватно будувати математичні моделі задач певного класу та розробляти ефективні алгоритми для їхнього розв'язання.

Список літератури

- Berge, C. (1968). *Principes de combinatoire*. Paris: Dunod.
- Липский, В. (1988). *Комбинаторика для программистов*. Москва: Мир.
- Рейнгольд, Э., Нивергельт, Ю., & Део, Н. (1980). *Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика*. Москва: Мир.
- Сачков, В. Н. (1977). *Комбинаторные методы дискретной математики*. Москва: Наука.
- Тимофієва, Н. К. (2007). *Теоретико-числові методи розв'язання задач комбінаторної оптимізації: Автореф. дис. докт. техн. наук*. Київ: ІК ім. В. М. Глушкова НАН України.

Розвиток геометричних концепцій Ешера

А. В. Ткаченко

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

912kiev.nt@gmail.com

Розглянуто деякі концептуальні інструменти впливу математики на образотворче мистецтво та їх відображення в роботах голландського художника-графіка Мауріца Корнеліса Ешера. Показано відтворення ідей художника у віртуальних світах комп'ютерних ігор.

Ключові слова: багатогранники, перспектива, ізометрична проекція, тесе́ля́ція, логіка простору, віртуальна реальність.

Історія мистецтва — це історія відроджень.

Семюель Батлер

Хочеться вірити, що слова вченого-біофізика Михайла Волькенштейна є пророчими: «Єдність науки і мистецтва — найважливіша запорука подальшого розвитку культури. Потрібно шукати й культивувати те, що об'єднує науку й мистецтво, а не роз'єднує їх. За науково-технічною революцією повинна слідувати нова епоха Відродження». Математику здавна описували як мистецтво, мотивоване красою. Помітний зв'язок цієї науки з музикою, танцем, живописом, архітектурою, скульптурою тощо.

Митці використовували математику принаймні з V ст. до н. е., коли давньогрецький скульптор Поліклет з Аргоса написав свій «Канон», за яким ідеальними пропорціями оголеного чоловіка були пропорції, засновані на співвідношенні $1 : \sqrt{2}$. Популярною є думка й про використання золотого перерізу у стародавньому та античному мистецтві, зокрема, архітектурі: піраміді Хеопса, Парфеноні, Пантеоні.

Одним з типів зв'язку є вплив математики на мистецтво такими концептуальними інструментами, як: перспектива, симетрія, математичні об'єкти (багатогранники, стрічка Мебіуса, мозаїка Пенроуза тощо), методи нарисної геометрії, які активно застосовуються в комп'ютерному програмуванні тіл. Комп'ютерне мистецтво використовує фрактали, зокрема, множину Мандельброта, килима Серпінського, криву Коха та деколи інші математичні об'єкти, як клітинний автомат. Такі математичні концепції, як рекурсія та логічний парадокс можна побачити в картинах Рене Магрітта, Джованні Гвіда, гравюрах Мауріца Ешера та в кінострічках Жермен Дюлак.

Математика існує самостійно, якби поза, власне, науковим дослідженням, а так само і в художній творчості. Вона є свого роду методом, що озброює дослідника, ученого або художника, надаючи форму й конкретність знань. Спробуємо дослідити математичну складову творчості Мауріца Ешера та її інтерактивну інтерпретацію в сьогоденні.

Мауріц Корнеліс Ешер — всесвітньо відомий голландський художник-графік, майстер головоломок та оптичних ілюзій. Хоча художник не належав до

основного потоку авангардного мистецтва ХХ століття, його творчість слід розглядати в контексті теорії відносності Ейнштейна, фрейдового психоаналізу, магічного реалізму та кубізму. Його картини виводять поза межі реальності, неможливі фігури та перетворення буквально заворожують; усе змінюється, переходить з однієї форми в іншу, з можливого в неможливе та навпаки. Ідеї Ешера є джерелом натхнення для сучасних представників мистецтва, а розвиток сучасних технологій ХХІ століття дає новий спосіб їх реалізації. Геометричні концепції — це розгадка творчості митця, їх перелік наводиться надалі.

Багатогранники.

Оволодіти простором — така перша мотивація всього живого.

Ле Корбюзьє

Багатогранник — тривимірне тіло, гранями якого є багатокутники. Існує всього п'ять правильних багатогранників, тобто таких тіл, у яких усі грані — однакові правильні багатокутники, а всі вершини — рівновіддалені від деякої точки. Вони відомі, як Платонові тіла: тетраедр, гранями якого є чотири правильні трикутники; куб із шістьма квадратними гранями; октаедр, що має вісім трикутних граней; додекаедр, гранями якого є дванадцять правильних п'ятикутників; ікосаедр з двадцятьма трикутними гранями. Також існує тринадцять опуклих багатогранників, гранями яких є один, два або більше типів правильних багатокутників, що прилягають до ідентичних вершин. Вони відомі як тіла Архімеда. Крім цього існує безліч призм і антипризм із гранями у вигляді правильних багатокутників.

Мауріц Корнеліс Ешер використовував багатогранники в багатьох своїх роботах. Наприклад, на гравюрі «Чотири тіла» він зобразив перетин основних правильних багатогранників, розташованих на одній осі симетрії. Багатогранники виглядають напівпрозорими, і крізь будь-який з них можна побачити інші.

Гравюра «Зірки» зображує тіла, отримані перетином тетраедрів, кубів і октаедрів. Художник створив у даній роботі не лише різні варіанти багатогранників — він помістив всередину центральної фігури хамелеонів, щоб ускладнити сприйняття й змусити поглянути по-новому, відійшовши від звичайного.

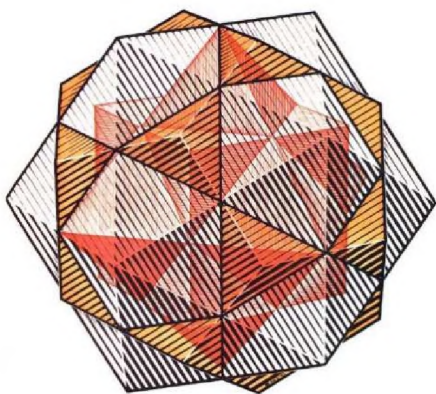


Рис. 1. Чотири тіла, 1948, гравюра

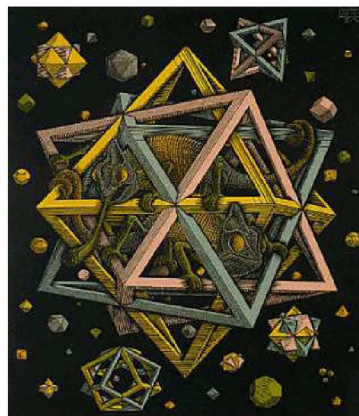


Рис. 2. Зірки, 1948, ксилографія

Перспектива.

*Всі проблеми перспективи можна пояснити за допомогою п'яти термінів математики: точка, лінія, кут, поверхня та тіло.
Леонардо да Вінчі*

Перспектива — система зображення об'ємних тіл на площині або якій-небудь іншій поверхні, яка враховує їх просторову структуру й віддаленість окремих їх частин від спостерігача.

Розділ геометрії, у якому вивчають методи зображення просторових форм на площині, називається нарисною геометрією. В основу покладено метод проєкцій, сутність якого така: у просторі вибирають фіксовану точку S — центр проєктування і площину проєкцій K (площину зображення), що не проходить через S . Для отримання зображення (проєкції) об'єкта на площину K через центр проєкцій S і кожену точку A, B, C, \dots об'єкта проводять промені до перетину із площиною K . Сукупність точок перетину проєктуючих променів із площиною K утворює зображення об'єкта, яке називають центральною проєкцією.

Якщо центр проєктування S рухати в нескінченність, тоді проєктуючі промені стають паралельними між собою. Таким чином, вважаючи центр проєктування розташованим у нескінченно віддаленій точці S_∞ , приходимо до паралельного проєктування. Важливим окремим випадком паралельних проєкцій є ортогональні проєкції, коли проєктуючі промені ортогональні K , тобто утворюють прямі кути із площиною проєкцій K .

Перспектива — один з аспектів логіки простору. На рисунках, в яких присутній ефект перспективи, виділяють так звані точки зникнення, які повідомляють окові людини про нескінченність простору. Вивчення особливостей перспективи почалося ще за часів Відродження багатьма художниками. Їх спостере-

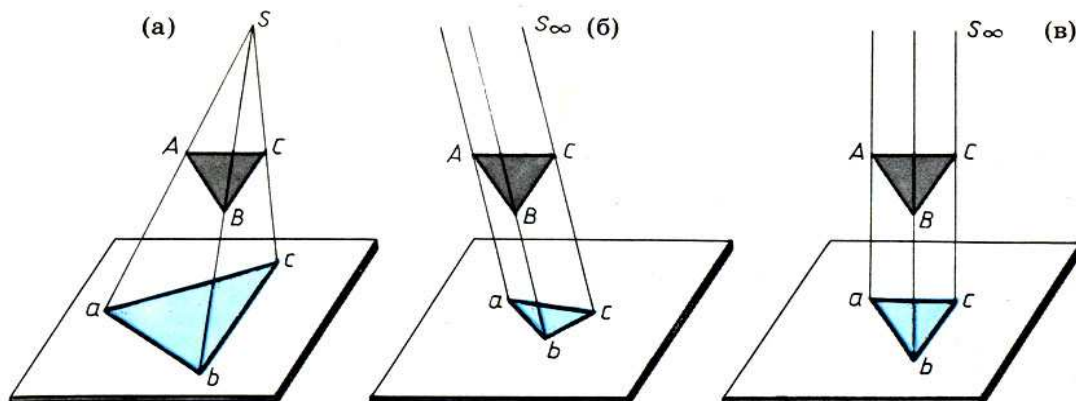


Рис. 3. Проєкції: центральна (а), паралельна (б), ортогональна (в)

ження і висновки лягли в основу сучасної геометрії проєкцій.

Уводячи додаткові точки зникнення і трохи змінюючи елементи композиції для досягнення потрібного ефекту, Мауріц Ешер зміг зобразити картини, у яких змінюється орієнтація елементів залежно від того, як глядач дивиться на картину.

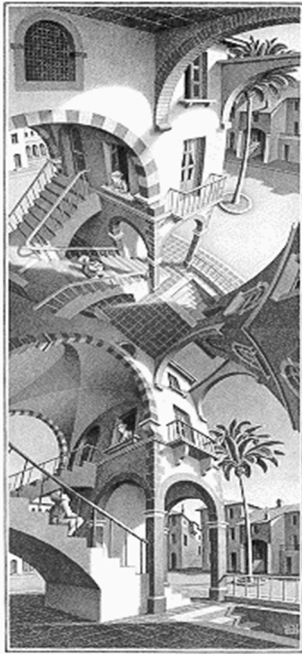


Рис. 4. Зверху і знизу, 1947, літографія

ташування один відносно одного неможливо. Крім того, об'єкти мають однаковий вигляд у випадку, коли вони нахилені до спостерігача та від спостерігача під однаковим кутом. Прикладом такої неоднозначності є фігура Тьєрі.

Ізометрія є основою для різних візуальних ефектів та оптичних ілюзій, зокрема, для створення неможливих фігур. Творчість Мауріца Ешера нараховує чимало робіт із застосуванням такої техніки відображення. Наприклад, літографія «Водоспад», основою для якої став неможливий трикутник Пенроуза.



Рис. 6. Водоспад, 1961, літографія

Наприклад, на літографії «Зверху і знизу» художник розмістив відразу п'ять точок зникнення — по кутах і в центрі. В результаті, для глядача створюється враження, що він дивиться вгору, коли спостерігає нижню частину картини, та навпаки. Для підкреслення цього ефекту Ешер зобразив два види однієї і тієї ж композиції.

Ізометрична проєкція.

Математика — єдиний бездоганний метод, що дозволяє водити себе самого за ніс.

Альберт Ейнштейн

Ізометрична проєкція — спосіб відображення тривимірного об'єкта на площину. Її особливість полягає в тому, що кут між проєкцією осей є однаковим, а пропорції відстані між паралельними прямими зберігаються у всіх трьох вимірах. Така проєкція зберігає відносну пропорцію 3D об'єктів, на відміну від звичайних перспектив. Зрозуміло, що зображувані об'єкти є об'ємними, однак визначити їх точно роз-

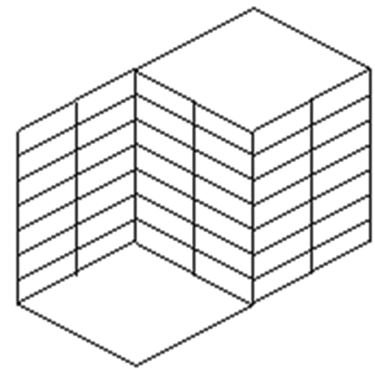


Рис. 5. Фігура Тьєрі

ташування один відносно одного неможливо. Крім того, об'єкти мають однаковий вигляд у випадку, коли вони нахилені до спостерігача та від спостерігача під однаковим кутом. Прикладом такої неоднозначності є фігура Тьєрі.

Ізометрія є основою для різних візуальних ефектів та оптичних ілюзій, зокрема, для створення неможливих фігур. Творчість Мауріца Ешера нараховує чимало робіт із застосуванням такої техніки відображення. Наприклад, літографія «Водоспад», основою для якої став неможливий трикутник Пенроуза. Створюється враження, що водоспад — замкнена система, що працює за аналогом вічного двигуна, але, розглянувши детальніше, стає зрозуміло — художник зображує нереальну споруду, і будь-яка спроба побудувати цю конструкцію приречена на невдачу. До речі, додатковою прикрасою веж слугують багатогранники.

Тесе́ляція.

Знання деяких принципів легко заміщує незнання деяких фактів.

Клод Анріан Гельвецій

Тесе́ляція, або мозаїка, — заміщення площини плитками, набір фігур, які покривають усю математичну площину, поєднуючись один з одним без

накладання і проміжків. Правильні теселяції складаються з фігур у вигляді правильних багатокутників, при поєднанні яких усі кути мають однакову форму. Основою для правильних мозаїк можуть слугувати лише правильний трикутник, квадрат та правильний шестикутник. Напівправильними теселяціями називають такі теселяції, у яких використані правильні багатокутники двох або більше типів, для будь-яких двох вершин яких існує перетворення симетрії.

У свою чергу розрізняють періодичну та неперіодичну мозаїки, відмінність між якими полягає в наявності трансляційної симетрії — періодичного повтору фрагментів, що досягається паралельним перенесенням. Для неперіодичних мозаїк властиві симетрії типів: нескінченне повторення, поворот та відображення будь-якого обмеженого фрагменту. Найвідомішими прикладами такого розбиття площини є мозаїки Пенроуза, фрагменти яких є розгортками багатогранників.

Сферичний багатогранник — багатогранник, утворений січними площинами, що проходять через центр сфери, та відрізками прямих, що з'єднують центр і вершини або середини сторін відповідних багатокутників, які й утворюють грані багатогранника. Фактично сферичний багатогранник — теселяція на сфері, тоді тіла Платона можна розглядати, як правильні сферичні мозаїки. Теселяцію можна розширити і до трьохвимірної, тоді заміщення простору буде здійснюватися багатогранниками.

Ешер використовував правильні заміщення площин, застосовуючи до них трансформації: симетрії, віддзеркалення, зміщення тощо. Зберігаючи властивість покриття площини без накладань та проміжків, він перетворив базові фігури в найрізноманітніших істот. Плавні переходи від одного орнаменту до іншого, від геометричних фігур до тварин, від комах до риб буквально зачаровують. Неможливі перетворення птахів уже в геометричну неперіодичну мозаїку, що створює ефект об'ємного зображення, а потім у міський пейзаж, що плавно змінюється шаховою дошкою з фігурами, поєднують два виміри. Такі переходи яскраво демонструють поєднання різних геометричних концепцій.

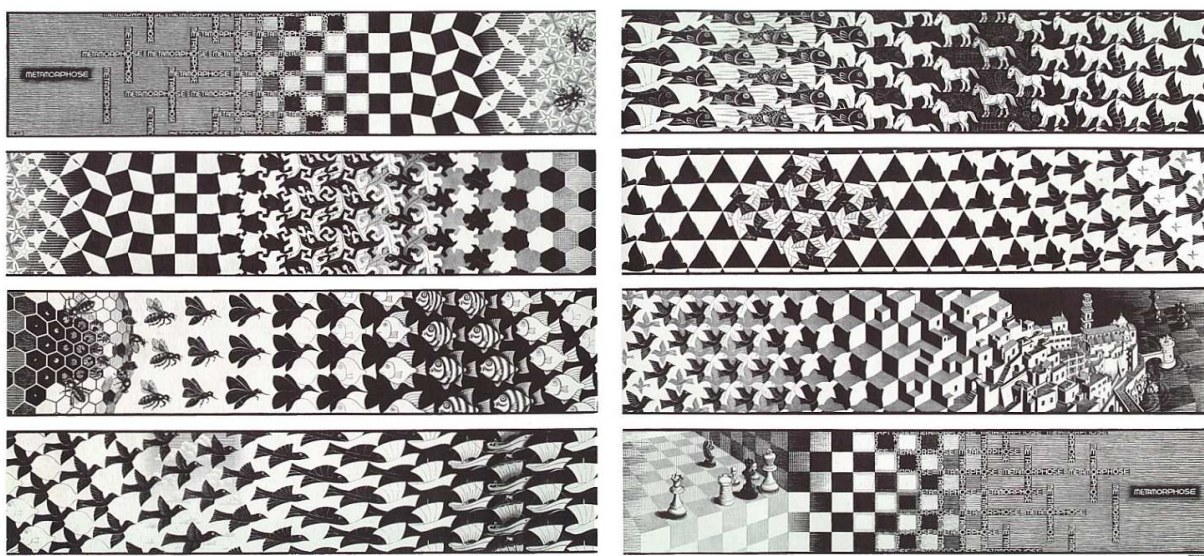


Рис. 7. Метаморфози III, 1967-1968, ксилографія

Математика відкриває великі можливості для творчої особистості, вона є унікальним способом пізнання краси та почуття прекрасного. Творчість Ешера є яскравим прикладом тісного зв'язку математики та мистецтва. Такі геометричні концепції, як: перспектива, ізометрія, теселяція, багатогранники та ще багато інших знайшли застосування в дизайнерській діяльності, у реальних архітектурних об'єктах, у виробництві облицювальних матеріалів, текстилю, прикрас тощо. Зокрема, ізометрія та перспектива активно використовується у комп'ютерній графіці. Граючи з логікою просторів, сучасні програмісти створюють неможливі світи, застосовують ті самі візуальні пастки художника-графіка. Ідеї неможливих фігур і нетипової навігації відмінно лягають в основу ігор-головоломок.

Автор гри *Manifold Garden* Вільям Чир зробив неможливі простори основою геймплея, дав гравцеві можливість маніпулювати гравітацією і досліджувати архітектурні конструкції, що нагадують літографії Ешера. Наприклад, основою для одного з рівнів гри стала робота художника під назвою «Кубічний поділ простору».

Досить нестандартним рішенням було перетворення внутрішньоігрового світу у тривимірну проєкцію чотиривимірного простору — створення чогось на зразок тесеракта. Така візуалізація принесла в гру зовсім новий підхід до навігації та розв'язання просторових пазлів, допомогла вирішити проблеми з дизайном.

Багато гравців стверджують, що світ гри підпорядковується законам неевклідової геометрії, хоча сам розробник описує свій світ, як «неможливу геометрію» в евклідовому просторі, де сам простір за кільцьований, утворює ілюзію нескінченного фрактального світу.

Ще одна мобільна гра, натхненна творчістю Ешера, — *Monument Valley*. Основний ігровий процес обертається навколо вирішення головоломок шляхом дослідження лабіринтів. Використання ізометричної проєкції дало змогу створити оптичні ілюзії, неможливі фігури, які і стали головною особливістю гри.

Математика — це не тільки система законів, теорем і завдань, а й унікальний спосіб пізнання краси, засіб маніпуляції зі сприйняттям дійсності. Науково-технічний прогрес дозволяє розширити поняття мистецтва, а математичні концепції

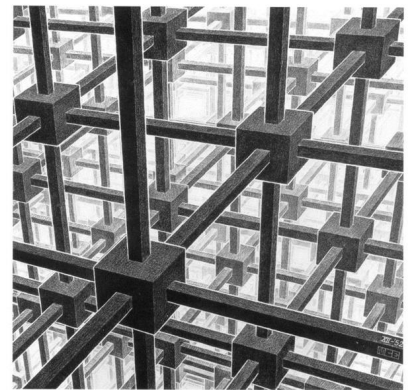


Рис. 8. Кубічний поділ простору, 1952, літографія

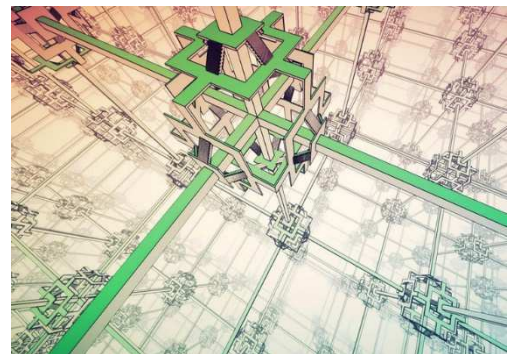


Рис. 9. Кадр з *Manifold Garden*

є знаряддям його сучасної інтерактивної інтерпретації. Як приклад зв'язку, розглянуто творчість голландського художника-графіка Мауріца Корнеліса Ешера: математика пояснює основні творчі ідеї, а комп'ютерне програмування відроджує їх у сучасності, створюючи нові неможливо-можливі віртуальні світи.

Список літератури

- Волошинов, А. В. (2000). *Математика и искусство: Книга для тех, кто не только любит математику или искусство, но и желает задуматься о природе прекрасного и красоте науки* (2-е изд.). Москва: Просвещение.
- Невозможные пространства: как игры используют неевклидову геометрию. <https://media-xyz.com/ru/articles/738-nevozmozhnye-prostranstva-kak-igry-ispolzuiut>.
- Smith, B. (12 Feb 2014). The mathematical art of M.C. Escher. <http://platonirealms.com/minitexts/Mathematical-Art-Of-M-C-Escher/>

Математичні аспекти розрахунку металевих конструкцій на вогнестійкість

Н. А. Якимчук, Н. Б. Сокульська

НАСВ ім. гетьмана Петра Сагайдачного, Львів, Україна
nazarii15012000@gmail.com, natalya.sokulska@gmail.com

Добре організоване інженерне забезпечення бойових дій підрозділів родів військ та спеціальних військ є однією зі складових загального успіху в бою. Розрахунки та досвід командно-штабних навчань та військових конфліктів, що відбулися останнім часом, свідчать про те, що в сучасних умовах, приблизно 60–65% окремих заходів інженерного забезпечення мають самостійно здійснюватись частинами та підрозділами родів військ і спеціальних військ. До таких заходів зокрема можна віднести й фортифікаційне обладнання позицій та районів зосередження, їх маскування і захист. На жаль, скрутне становище, у якому перебувають Збройні Сили України, не дає можливості повністю вжити всіх необхідних заходів щодо покращення інженерного забезпечення бойових дій. Але й зараз продовжує вдосконалюватись штатна структура інженерних підрозділів, розглядаються питання щодо підвищення їхньої бойової ефективності, зокрема через удосконалення існуючого обладнання шляхом вивчення його властивостей та відповідної модернізації.

Ключові слова: теплотехнічна задача, статична задача, критична температура, граничний стан, межа вогнестійкості елементів металевих конструкцій.

Ще під час Першої світової війни через швидку зміну лінії фронту виникла потреба в мобільних казармах. Канадський військовий інженер Пітер Норман Ніссен у 1916 році розробив, запатентував і поставив на виробництво легкі, збірні, недорогі споруди із гофрованої сталі. Такі споруди використовувались під час обох світових воєн та в післявоєнні роки не лише як житло для солдат, а й в якості госпіталів, складів, бункерів, вогневих позицій для солдат та боєприпасів, ангарів для зберігання військової техніки.

Оскільки такі сховища легкого типу (Дяков та ін., 2018) широко застосовуються в зонах збройних конфліктів, то актуальним залишається питання про можливий термін їх використання під час різного роду пожеж, вплив останніх на ці сховища та шляхи їх зміцнення.

Відомо (Васильченко та ін., 2015), що розрахунок розподілу температури по перерізу елементів будівельних конструкцій у різні моменти часу роблять з використанням диференціального рівняння теплопровідності Фур'є, яке при змінних теплотехнічних характеристиках має вигляд:

$$\rho C(t) \frac{\partial t}{\partial \tau} = \nabla [\lambda(t) \nabla t], \quad (1)$$

де t — температура, °С, τ — час, хв; $\lambda(t)$ — коефіцієнт теплопровідності, Вт/(м град); $C(t)$ — питома теплоємність, Дж/(кг·град); ρ — щільність, м³; ∇ — оператор Гамільтона.

Для металевих конструкцій отримати аналітичні розв'язки рівняння (1) можна, використовуючи граничні умови третього роду, тобто необхідно знати закон зміни температури нагрівального середовища і зміни коефіцієнта теплообміну між нагрівальним середовищем і металевою конструкцією. Для спрощення теплообмін з навколишнім середовищем приймається за законом Ньютона, відповідно до якого кількість тепла, переданого в одиницю часу з одиниці поверхні елемента в навколишнє середовище з температурою t_s , є прямо пропорційною різниці температур між поверхнею тіла і навколишнім середовищем:

$$q(t) = \alpha(t - t_s) = -\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right) \quad (2)$$

З урахуванням сталого значення питомої теплоємності металу рівняння (2) можна переписати у вигляді:

$$\alpha(t_d - t_{cr})Sd\tau = C_m \rho_0 V dt_{cr} \quad (3)$$

де α — коефіцієнт теплообміну, Вт/(м²К); t_d — температура нагрівального середовища, t_{cr} — критична температура в момент настання граничного стану, °С; S — поверхня стержня, що обігривається, м²; C_m — усереднене значення питомої теплоємності металу, Дж/(кг·град); ρ_0 — середня щільність металу, кг/м³; V — об'єм стержня, м³.

Рівність (3) можна перетворити до вигляду:

$$t_{cr, \Delta\tau} = t_{cr} + \frac{\alpha(t_d - t_{cr})}{C_m \rho_0 h_{red}}, \quad (4)$$

де $t_{cr, \Delta\tau}$ — зміна температури стержня за розрахунковий інтервал часу $\Delta\tau$, °С; h_{red} — наведена товщина металу, яка дає можливість стержень з будь-якою конфігурацією поперечного перерізу привести до простої пластини, м.

Критична температура t_{cr} , центрально стиснутих і позацентрово стиснутих сталевих елементів визначатися з умови втрати їх міцності з використанням рівностей:

$$\begin{aligned} t_{cr} &= 750 - 440\gamma_T \quad \text{при} \quad \gamma_T < 0,6; \\ t_{cr} &= 1300 - \gamma_T \quad \text{при} \quad \gamma_T \geq 0,6, \end{aligned} \quad (5)$$

де γ_T — коефіцієнт, який враховує зміну міцності сталі при нагріванні.

Для центрально стиснутих елементів з умови втрати несучої здатності внаслідок втрати їх стійкості, критична температура визначається з використанням кривих деформації повзучості ε_π залежно від значення коефіцієнта γ_T і обчислюється з рівності:

$$t_{cr} = 20 + \sqrt{2,5R_{yn} \cdot 10^8 \left(\frac{\pi^2}{\lambda^2 \sigma_n} - \frac{1}{E} \right)}, \quad (6)$$

де R_{yn} — нормативний опір конструкційних прокатних сталей за межею текучості при початковій температурі $t = 20$ °С, λ — максимальна гнучкість елемента, σ_n — напруження в перерізі від дії нормативного навантаження; E — модуль пружності сталі при температурі 20 °С.

Для подальшого визначення межі вогнестійкості стиснутих елементів потрібно знаходити мінімальне значення критичної температури з умов (5) та (6).

Таким чином, для визначення фактичної межі вогнестійкості незахищених елементів металевих конструкцій при дії пожежі необхідно визначити значення коефіцієнта γ_T і критичної температури t_{cr} (статична задача), а потім значення наведеної товщини металу h_{red} і межі вогнестійкості τ_{ϕ} (теплотехнічна задача).

На практиці ж межа вогнестійкості металевих конструкцій, які знаходяться в умовах реальної пожежі, визначається таким чином: для обраних проміжків часу Δt за рівністю (4) розраховується зміна температури в конструкції $t_{cr, \Delta t}$, що знаходиться з співвідношень:

$$\gamma_T = \frac{750 - t}{440} \quad \text{при } t \leq 500^\circ\text{C}, \text{ та } \gamma_T = \frac{1330 - t}{1330} \quad \text{при } t > 500^\circ\text{C}.$$

Наступний крок — знаходження коефіцієнта $\gamma_T = f(t_{cr})$, що дає змогу обчислити значення міцності сталі при нагріванні $R_T = R_{\gamma_n} \gamma_T$.

Залежно від характеру роботи конструкції визначають її несучу здатність

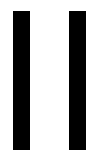
$$\Phi_t = N_t(M_t)$$

та будують графік залежності $\Phi_{ti} - \tau_i$. Для граничного стану, при якому несуча здатність, знижуючись, досягає значення зусилля N_n або згинального моменту M_n від нормативних навантажень, визначають фактичну межу вогнестійкості τ_{ϕ} .

Таким чином можна визначити інтервал часу, протягом якого під час пожежі металеві конструктивні елементи прогріються до критичної температури, тобто визначити межу вогнестійкості металевої конструкції за першим граничним станом та здійснити усі заходи, необхідні для евакуації та збереження життя особового складу і його майна.

Список літератури

- Дяков, С. І., Колос, О. Л., Верстівський, А. А., Жарий, А. А., & Кобанов, В. М. (2018). *Військові фортифікаційні споруди*. Львів: Національна академія сухопутних військ.
- Васильченко, О. В., Квітковський, Ю. В., Миргород, О. В. & Стельмах, О. А. (2015). *Будівельні конструкції та їх поведінка в умовах надзвичайних ситуацій: Навчальний посібник*. Харків: ХНАДУ.



МЕТОДИКА ВИКЛАДАННЯ
МАТЕМАТИКИ
У ВИЩІЙ ШКОЛІ

Encouraging students study mathematics through liaison of mathematical connections

K. E. Ilina, V.V. Lystopadova

Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, Kyiv, Ukraine

kateilinaev@gmail.com

Proof that math connections develop students' interest regarding in-depth studying mathematics.

Reveal that mathematics and our life are close through math connections.

Key words: mathematical connections, students, lecturer, strategy, math tasks.

According to the most students' surveys regarding math lectures, there are usually a lot of negatives feedbacks because all of them cannot understand: "Why we need to study math in university, while chosen profession is separate from the area of job". That is why, I would recommend, to include math connections in the study materials. The best way to include them is by adding new information with an old knowledge, and conduct more hours of practice lessons.

First, students should develop ability to understand and use variety of strategies with regard to finding a solution, to show mathematical thinking, consider different ways of solving an assignment and support with right answers. Establish math connection comes out, when students exploit new materials and old knowledge interchangeably. Practice of students' encouragement includes many ways of giving information, which they can use for solving mathematical tasks and justification of their thinking. Practice may include diagrams, graphs, graphs with coordinates, visual models etc. By practicing each of the ways of encouragement, students will begin to create new strategies and representations, which match to their knowledge. It is highly recommending for lecturer to give help as a hint, to make new strategies regarding newly introduced information. For instance, there are lots of tasks which lead to the proof of theorems. Illustrated by L'Hopital's rule, when there is this rule, which needs to be represented to students — lecturer may consider already solved limits, instead of simply giving a definition of L'Hopital's rule (<https://math.stackexchange.com/questions/314817/any-limitations-to-this-simple-proof-of-lhopitals-rule>). Teacher can give a hint, as mentioned above, about an interval $(a, x]$, when we can assume that:

$$f(a) = g(a) = 0$$

(since the limit is not affected by the value of the function at a), they become continuous on interval $(a; x]$ and will satisfy Rolle's theorem, so there is a point c , which belongs to $(a; x]$, so

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Therefore, students are moving to limit and proof L'Hopital's rule by themselves. This strategy may help students independently find new ways of solving tasks not only in math.

Secondly, students need to be encouraged by lecturer to spread their knowledge. By this way math connections could be established. For example, making graphs: since the beginning of the studying graphs at school, students solving easy assignments, without finding asymptotic by limit of the function or continuity research. First, students build simple functions, such as

$$f(x) = 3x^2 - x^3.$$

Students need to make step by step research relatively building graph, during making such type of assignments (find area of definition, check for parity, set points of intersection with axes, find critical points, areas of rise and fall and values at points of local extreme) and then, finally, they can create a graph. In university students are taught to make graphs of harder functions, by replenishment of already learned material. Consequently, young people replenish their knowledge by including higher mathematics for finding responses to questions. Obviously, such application of the knowledge replenishment actually happening in a real life. Whilst person had a bad experience about something, so in future he or she will avoid the mistakes, based on previous experiences.

It is commonly believed that “math language” is highly effective in studying mathematics. Math connections can be established, while students begin to use “math language” on a day-to-day basis, and connect it with calculations, answers. Math connections can be able to be seen at such examples: 10 is commonly called as a dozen, 13, is an odd number and prime number that’s why 13 cannot be divide by 2 etc. Students explore establishment of mathematical connections by speaking “math language” (official terminology and symbols).

Furthermore, opponents of mathematical connections’ positive influence claim that discussion of the solving process establishes math connections. Student should explain in what way he or she found the right answer to classmates or lecturer, this leads to not only better understanding of study material, but also provides the deepest understanding of mathematical connections. In their discussions will be the useful to use math terminology, as mentioned above. Lecturer may ask specific questions regarding work progress and share acquire knowledge, consequently mathematical connections will become one of the most important parts of solving process. There are lots of math tasks around us and students do not even notice mathematical connections in daily life. For instance, during cooking you need to use the proportions and measure a certain part of the vessel. Quite often in communication about weather, a person does not notice how he or she uses the phrase, “What is the probability that it will rain?” Moreover, once you got to get to the place, it's possible to roughly calculate the speed, with which you would like to maneuver to arrive on time.

Eventually, possibility of self-assessment and assessment from classmates plays an important role. When students by themselves assess their tasks, with the help of classmates or lecturer. The more opportunities students have regarding using evaluation criteria and mark their works, the more independent students become, while making life decisions, which will include mathematical connections.

In conclusion, according to my personal opinion, mathematical connections are very important for students, since they will find response to a question: “Why we need to study math?” Mathematical connections will provide information about how closes math assignments are to our environment. So, if student can easily solve math tasks, it will be easier to overcome life problems.

References

- Minero, E. (2018, June 13). 7 Real-World Math Strategies. <https://www.edutopia.org/article/7-real-world-math-strategies>
- Rogers, P. A. M., Volkman, J. M., & Abell, S. K. (2007). Science and mathematics: A natural connection. *Science and Children*, 45(2), 60–61.

Поглиблене вивчення елементарної математики у процесі викладання математичних дисциплін у вищій школі

Т. Ю. Бохонова¹, О. П. Томащук², В. А. Гроза², І. В. Матвєєва²,
В. В. Тихонова³, О. Л. Лещинський³

¹Київський природничо-науковий ліцей № 145, Київ, Україна

²Національний авіаційний університет, Київ, Україна

³Коледж інженерії та управління
Національного авіаційного університету, Київ Україна

valentina.groza@gmail.com

У доповіді наводяться приклади з системи вправ, присвяченої поглибленому вивченню елементарної математики на практичних заняттях з математичного аналізу та вищої алгебри.

Ключові слова: формули перетворення складного кубічного радикалу, критичні точки функції, алгебраїчні рівняння.

Наукова група авторів цієї роботи вивчає і досліджує принцип неперервності математичної освіти, зокрема, ланки «школа — університет». На жаль, у багатьох математичних курсах вищої школи використання елементарної математики значно звужується, що приводить до суттєвої відокремленості дисциплін елементарної і вищої математики. З іншого боку, деякі факти елементарної математики можуть бути корисними при розв'язанні завдань з диференціального та інтегрального числення функцій однієї змінної, функцій багатьох змінних, вищої алгебри тощо. Можна розглянути деякі приклади з системи вправ, при розв'язанні яких знання з елементарної математики є далеко не зайвими.

Вправа 1. Знайти критичні точки функції $y = f(x)$, якщо

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt[3]{3x-2} + \sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{3-2x}.$$

Очевидно, що для розв'язання цієї вправи треба вміти розв'язувати рівняння

$$\sqrt[3]{3x-2} + \sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{3-2x} = 0.$$

Для розв'язання цього рівняння можна скористатися відомими фактами з елементарної математики: якщо на множині дійсних чисел, множина розв'язків системи

$$\begin{cases} a(x) = b(x), \\ a(x) = c(x) \end{cases}$$

є порожньою, то на ній ірраціональне рівняння

$$\sqrt[3]{a(x)} + \sqrt[3]{b(x)} + \sqrt[3]{c(x)} = 0$$

рівносильне раціональному рівнянню

$$(a(x) + b(x) + c(x))^3 - 27a(x)b(x)c(x) = 0$$

відносно $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$.

Доведення цього факту само по собі може стати цікавим для студентів.

Нехай система рівнянь

$$\begin{cases} a(x) = b(x), \\ a(x) = c(x) \end{cases}$$

не має розв'язків. Тоді рівняння

$$\left(\sqrt[3]{a(x)} - \sqrt[3]{b(x)}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{b(x)} - \sqrt[3]{c(x)}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{c(x)} - \sqrt[3]{a(x)}\right)^2 = 0$$

також не має коренів. Тоді рівняння

$$\sqrt[3]{a(x)} + \sqrt[3]{b(x)} + \sqrt[3]{c(x)} = 0$$

рівносильне рівнянню

$$\frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{a(x)} + \sqrt[3]{b(x)} + \sqrt[3]{c(x)} \right) \times \\ \times \left[\left(\sqrt[3]{a(x)} - \sqrt[3]{b(x)} \right)^2 + \left(\sqrt[3]{b(x)} - \sqrt[3]{c(x)} \right)^2 + \left(\sqrt[3]{c(x)} - \sqrt[3]{a(x)} \right)^2 \right] = 0,$$

$$\frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{a(x)} + \sqrt[3]{b(x)} + \sqrt[3]{c(x)} \right) \left[\left(\sqrt[3]{a(x)} \right)^2 - 2\sqrt[3]{a(x)}\sqrt[3]{b(x)} + \left(\sqrt[3]{b(x)} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\sqrt[3]{b(x)} \right)^2 - 2\sqrt[3]{b(x)}\sqrt[3]{c(x)} + \left(\sqrt[3]{c(x)} \right)^2 + \left(\sqrt[3]{a(x)} \right)^2 - 2\sqrt[3]{a(x)}\sqrt[3]{c(x)} + \left(\sqrt[3]{c(x)} \right)^2 \right] = \\ = \left(a(x) + b(x) + c(x) \right)^3 - 3^3 a(x)b(x)c(x) = 0.$$

Це рівняння, в свою чергу, рівносильне рівнянню:

$$\left(a(x) + b(x) + c(x) \right)^3 - 27a(x)b(x)c(x) = 0.$$

Таким чином, розв'язуючи рівняння

$$\sqrt[3]{3x-2} + \sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{3-2x} = 0,$$

можна розглянути систему

$$\begin{cases} 3x - 2 = 2x - 1, \\ 3x - 2 = 3 - 2x, \end{cases}$$

яка має порожню множину розв'язків при $x \neq 1$.

Розглянемо рівняння

$$\left(3x - 2 + 2x - 1 + 3 - 2x \right)^3 - 27(3x - 2)(2x - 1)(3 - 2x) = 0,$$

$$27x^3 - 27(6x^2 - 7x + 2)(3 - 2x) = 0,$$

$$x^3 + 2x^3 - 18x^2 + 21x - 14x^2 - 6 + 4x = 0,$$

$$13x^3 - 32x^2 + 25x - 6 = 0,$$

$$13x^3 - 32x^2 + 25x - 6 = (x - 1)(13x^2 - 19x + 6),$$

$$13x^2 - 19x + 6 = 0.$$

Значення $x_1 = 1$ не підходить за попереднім міркуванням. Тому розв'язком буде значення $x_2 = \frac{6}{13}$.

Перевірка

$$\sqrt[3]{\frac{18-26}{13}} + \sqrt[3]{\frac{12-13}{13}} + \sqrt[3]{\frac{39-12}{13}} = -\frac{2}{\sqrt[3]{13}} - \frac{1}{\sqrt[3]{13}} + \frac{3}{\sqrt[3]{13}} = 0.$$

При вивченні методу Кардано розв'язання загальних алгебраїчних рівнянь третього ступеня корисними стають знання формули перетворення складного кубічного радикалу

$$\sqrt[3]{x \pm \sqrt{y}} = z \pm \sqrt{t}. \quad (1)$$

Тому можна звернути увагу студентів на вправу 2 і на її основі вправу 3.

Вправа 2. При умові, що $x, y \in \mathbb{Q}$, знайти умови раціональності z і t для (1).

Вправа 3. Спростити вираз $\sqrt[3]{-16 + \sqrt{320}}$.

Можливі міркування до вправи 2.

1. До $\sqrt[3]{x + \sqrt{y}} = z + \sqrt{t}$ додамо $\sqrt[3]{x - \sqrt{y}} = z - \sqrt{t}$, тоді

$$\sqrt[3]{x + \sqrt{y}} + \sqrt[3]{x - \sqrt{y}} = 2z, \quad \left(\sqrt[3]{x + \sqrt{y}} + \sqrt[3]{x - \sqrt{y}} \right)^3 = (2z)^3,$$

$$x + \sqrt{y} + x - \sqrt{y} + 3\sqrt[3]{x + \sqrt{y}}\sqrt[3]{x - \sqrt{y}} \left(\sqrt[3]{x + \sqrt{y}} + \sqrt[3]{x - \sqrt{y}} \right) = 8z^3,$$

$$8z^3 - 2x - 3\sqrt[3]{x^2 - y} \cdot 2z = 0, \quad 8z^3 - 2x - 6z\sqrt[3]{x^2 - y} = 0.$$

Нехай $\sqrt[3]{x^2 - y} = p$. Тоді $p^3 = x^2 - y$. Необхідною умовою раціональності числа $z \in \mathbb{Q}$ є раціональність числа p .

Нехай $k = 2z$. Тоді достатньою умовою раціональності числа $z \in \mathbb{Q}$ є існування раціонального кореня t зведеного кубічного рівняння $k^3 - 3pk - 2x = 0$, тобто

$$z = \frac{k}{2}, \quad \sqrt[3]{x + \sqrt{y}} \cdot \sqrt[3]{x - \sqrt{y}} = (z + \sqrt{t})(z - \sqrt{t}), \quad \sqrt[3]{x^2 - y} = z^2 - t, \quad p = \left(\frac{k}{2} \right)^2 - t.$$

Таким чином, $z = \frac{k}{2}$, $t = \frac{k^2}{4} - p$, тобто з раціональності z випливає раціональність t .

Можливе розв'язання вправи 3. Відповідно до формули перетворення складного кубічного радикала маємо:

$$x = -16, y = 320, p^3 = (16)^2 - 320 = -64, p = -4.$$

Маємо рівняння

$$k^3 - 3pk - 2x = 0, k^3 + 12k + 32 = 0,$$

розв'язком якого є

$$k = -2, z = \frac{k}{2} = -1, t = \frac{k^2}{4} - p = 1 - (-4) = 5.$$

Таким чином,

$$\sqrt[3]{-16 + \sqrt{320}} = -1 + \sqrt{5}.$$

Вправа 4. Обчислити інтеграл $\int \frac{xdx}{\sqrt{\sum_{k=1}^n (n + (n - k)x} \sqrt[n]{(x + 1)^{k-1}}}}, x > 0.$

Можливі міркування:

1. Розглянемо функцію $f(x) = \frac{x}{\sqrt{\sum_{k=1}^n (n + (n - k)x} \sqrt[n]{(x + 1)^{k-1}}}}, x > 0.$

Введемо позначення:

$$y = \sqrt[n]{x + 1}, x > 0, S = \sum_{k=1}^n (n + (n - k)x) \sqrt[n]{(x + 1)^{k-1}}, x > 0.$$

Скористаємося прийомом підсумовування членів геометричної прогресії:

$$S = (n + (n - 1)x) + ((n + (n - 2)x)y) + \dots + (n + x)y^{n-2} + ny^{n-1},$$

$$yS = n(x + 1) + (n + (n - 1)x)y + \dots + (n + 2x)y^{n-2} + (n + x)y^{n-1},$$

$$yS - S = x + xy + \dots + xy^{n-2} + xy^{n-1}, (y - 1)S = x \frac{y^n - 1}{y - 1},$$

$$S = x \frac{x + 1 - 1}{(y - 1)^2} = \frac{x^2}{(y - 1)^2} = \frac{x^2}{(\sqrt[n]{x + 1} - 1)^2}, \sqrt{S} = \frac{x}{\sqrt[n]{x + 1} - 1}, x > 0,$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{\sum_{k=1}^n (n + (n - k)x} \sqrt[n]{(x + 1)^{k-1}}}} = \frac{x(\sqrt[n]{x + 1} - 1)}{x} = \sqrt[n]{x + 1} - 1, x > 0.$$

$$\int f(x)dx = \int (\sqrt[n]{x + 1} - 1)dx = \frac{n}{n + 1}(x + 1)^{\frac{n}{n + 1}} - x + C, x > 0.$$

Список літератури

- Бохонова, Т. Ю., Лещинський, О. Л., Тихонова, В. В., Томашук, О. П. & Гроза, В. А. (2017). Професійно орієнтована пропедевтична система математичної освіти молодших спеціалістів-програмістів. У *Матеріалах Вісімнадцятої Міжнародної наукової конференції ім. акад. Михайла Кравчука, Луцьк — Київ, 7–10 жовтня* (т. 2, с. 198–201). Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського.
- Гроза, В. А., Тихонова, В. В., Томашук, О. П., Бохонова, Т. Ю. & Лещинський, О. Л. (2020). Елементи поглиблення вмінь та навичок спрощення ірраціональних виразів в процесі надання неперервної математичної освіти. У *Abstracts of the 1st International scientific and practical conference Modern science: problems and innovations, Stockholm, April 5–7* (pp. 373–379).

Оптимізація структури математичних курсів в інженерному ЗВО

Ю. П. Буценко¹, О. І. Баліна², І. С. Безклубенко²

¹*КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна,*

²*Київський національний університет будівництва і архітектури,
Київ, Україна*

armchairdoc@ukr.net, elena.i.balina@gmail.com, i.bezklubenko@gmail.com

Стаття присвячена можливостям «реструктуризації» математичних курсів, які викладаються в інженерному ЗВО. Розглянуто причини цієї «реструктуризації», до яких відносяться постійні зміни навчальних планів, переформатування спеціальностей, специфіка вимог до навчальних програм, особливості організації самостійної роботи студентів та їх оцінювання. Зазначено, що, хоча це й не йде на користь відповідним компетентностям студентів, проте може розглядатись як спосіб мінімізації відповідних втрат. Окреслено коло проблем, пов'язане з можливостями «реструктуризації» математичних курсів, які викладаються в інженерному ЗВО. Як один із шляхів вирішення цієї проблеми розглянуто питання, пов'язані з максимально можливим «укрупненням» бакалаврських програм, тобто зменшення їх кількості шляхом об'єднання. Це, у свою чергу, за рахунок розширення набору дисциплін фундаментальної та загально-інженерної підготовки істотно звужує комплекс спеціальних дисциплін, «відсуваючи» їх вивчення на більш пізній час та, природним чином, зменшуючи їх об'єм. Запропоновано основні принципи підходу до вирішення цих проблем.

Ключові слова: реструктуризація, математичні компетентності, бакалаврат, міждисциплінарні зв'язки

Аналізуючи питання узгодження математичних курсів з рештою навчальних дисциплін, то, перш за все, у випадку технічного ЗВО, слід визначити головну задачу, якою у сучасних умовах є досягнення так званих TML (techno-mathematical literacies) (van der Wal et al, 2019), як наразі визначається оволодіння майбутнім фахівцем усім комплексом знань та умінь математичного апарату інженера відповідного профіля, включно з прикладними методами та їх комп'ютерною реалізацією. Стартовою при цьому є проблема зв'язку між викладанням математики та фізики. Це питання виникає в аспекті міждисциплінарних зв'язків найпершим та виявляється багато в чому вирішальним. Саме «через фізику» переважно реалізуються застосування понять та методів, вивчених у математичних курсах, у загально-технічних та спеціальних дисциплінах. Принципово важливим є те, що, не маючи належної математичної бази, студенти-першокурсники саме при вивченні фізики вперше зіштовхуються з наочними недоліками в організації навчального процесу. Існування цієї проблеми справляє неабиякий негативний вплив на якість навчання та психологічний стан студентів. Поряд з нею існують також інші аналогічні проблеми. Наприклад, при вивченні студентами інформатики вже в першому семестрі звичайною практикою є використання в якості прикладів задач обчислювальної математики. З точки зору засвоєння сту-

дентами поняття алгоритму та практичної його реалізації, це зрозуміло й виправдано, але тут криється небезпека призвичаювання студентів до поверхового підходу у використанні математичних методів та пакетів прикладних програм. Наша позиція полягає у тому, що розгляд комп'ютерної реалізації того чи іншого математичного алгоритму повинен обов'язково бути пов'язаний з розглядом можливостей використання точних, чисельно-аналітичних, суто чисельних методів, статистичного моделювання тощо, знайомством з поняттями збіжності обчислювальних процедур та точності отримуваних результатів. Наразі узгодження курсу інформатики з математичними курсами є практично нульовим. Це доконаний факт, який, однак, є постійним подразнюючим фактором для викладачів математики, програмування та інших дисциплін. Слід зазначити, що ситуація для них насправді є принципово різною. Якщо навички програмування абсолютно незнайомих алгоритмів можуть, безперечно, виявитись навіть корисними, то використання пакетів типу MathCad або MATLAB без розуміння їх математичної основи є у деяких випадках просто позбавлене сенсу (Harris et al., 2015). Що ж стосується математичних курсів, то відсутність у них розгляду таких аспектів практичного використання математики, з одного боку істотно їх збіднює, а з іншого — позбавляє значної частини привабливості для студентів. Дещо ліпшою є ситуація з узгодженістю курсів математики та прикладної (нарисної) геометрії, але тут маємо яскраво виражену тенденцію до погіршення — в міру комп'ютеризації останнього курсу, переходу від традиційної «ручної» інженерної графіки до комп'ютерної студентами втрачається уява про геометричні образи, особливо просторові, викладачам математики стає дуже важко пояснити їм сенс побудови лінії по точках або визначення характеру лінії перетину двох поверхонь за їх рівняннями. Зайве казати про необхідність та життєву важливість для майбутніх інженерів досконалого володіння комп'ютерними засобами, у тому числі для розв'язання математичних задач, але в останньому випадку принциповою є наявність перелічених вище суто математичних компетентностей (Баліна та ін., 2020). Ураховуючи типові для навчального процесу обставини (відсутність комп'ютерних класів у математичних кафедр, пріоритет, який зазвичай віддається комп'ютерним дисциплінам при плануванні навчального процесу), автори вважають оптимальним наступний підхід до вирішення проблеми узгодження між математичними, комп'ютерними та «користувацькими» (тобто такими, що істотно використовують вищезгадані програмні пакети або аналогічні до них) курсами.

По-перше, кожна програма підготовки бакалаврів інженерних напрямів повинна містити курс обчислювальної математики. Указаний курс, має містити якомога більш повний комплекс лабораторних робіт з комп'ютерної реалізації відповідних математичних методів, лекційні та практичні заняття повинні забезпечувати розгляд вищезгаданих специфічних особливостей таких методів: сфери можливого використання, точності, збіжності, обсягу необхідних обчислень та ін. Такий курс повинен вивчатись студентами після закінчення вивчення всіх традиційних математичних курсів.

По-друге, розглядаючи у математичних курсах поняття та алгоритми, які в майбутньому будуть «переосмислені» в курсі обчислювальної математики, викладачі повинні надавати відповідні коментарі для студентів, хоча це й дещо суперечить указаним вище принципам викладання математики. Також ці коментарі можуть негативно впливати на мотивацію студентів до вивчення точних математичних методів.

По-третє, при розгляді вищезгаданих понять та методів у «комп'ютерних» курсах, які викладаються раніше за той таки курс обчислювальної математики, викладачі повинні обов'язково надавати належні коментарі.

По-четверте, розгляд геометричних образів, які вивчають у математичних курсах, при використанні їх у курсі геометрії прикладної знову ж таки повинен супроводжуватись відповідними коментарями та, дуже бажано, відповідним ілюстративним матеріалом. Нам також здається вельми корисним використання у навчальному процесі таких програмних засобів, як наприклад, GeoGebra.

Повертаючись до питання узгодження курсів математики та фізики, зауважимо, що радикальне розв'язання цієї проблеми можливе лише на основі прийняття насправді принципового політичного рішення — визнання бакалаврського циклу підготовки «суто академічним», тобто продовженням навчання у загальноосвітній школі, з мінімальним набуттям професійних компетентностей. Складнощі, пов'язані із прийняттям такого рішення, аж надто великі й добре зрозумілі. Але, доцільність такого підходу пов'язана не тільки і, зрозуміло, не стільки з питанням узгодження вивчення студентами курсів фізики та математики, причини тут значно серйозніші (Безклубенко та ін., 2019). Справа в тому, що, вибір програми підготовки при вступі на перший курс рідко буває достатньо свідомим і це вкрай негативно відбивається на рівні мотивації студентів молодших курсів та, відповідно, якості їх підготовки. Протягом навчання в бакалавраті студенти зазвичай істотно переосмислюють свої пріоритети, та й свої потенціальні можливості також. До того ж відбуваються неминучі зміни на ринку праці. Реакцією системи вищої освіти на ці фактори має бути створення максимальних можливостей для академічної мобільності, що може бути здійснене тільки шляхом максимально можливого «укрупнення» бакалаврських програм, тобто зменшення їх кількості шляхом об'єднання. Це, у свою чергу, за рахунок розширення набору дисциплін фундаментальної та загально-інженерної підготовки істотно звужує комплекс спеціальних дисциплін, «відсуваючи» їх вивчення на більш пізній час та зменшуючи їх об'єм. У той же час можна стверджувати, що такий характер бакалаврської підготовки істотно підвищить «попит» на професійні дисципліни, які пропонуватимуться студентам за їх вибором, у тому числі і поза навчальним планом. Звісно, це не зовсім те, що маємо зараз, коли вони належать до обов'язкових, але ж ідеться про зовсім інший рівень мотивації студентів, які, до того ж будуть значно краще підготовлені до їх сприйняття. Ще одним проблемним моментом у цьому випадку є неминучий перехідний період, під час якого напевне виникнуть серйозні проблеми з навантаженням спеціальних кафедр.

Повертаючись до питання про можливі варіанти диспозиції розділів у курсі вищої математики зазначимо, перш за все, що, об'єднання всіх розділів у єдиний математичний курс є абсолютно неприпустимим. Основними причинами цього є відсутність у такому випадку можливості паралельного вивчення студентами двох, або навіть трьох у деяких випадках, не пов'язаних між собою математичних дисциплін.

На закінчення зазначимо, що у зв'язку з особливим місцем математичної підготовки в навчальних програмах інженерних спеціальностей, викладені вище міркування будуть корисними не тільки для викладачів-математиків, але й для представників інженерних кафедр, особливо тих, хто істотно використовує у своїх курсах компетентності математичного характеру або ж пов'язаний з плануванням програм підготовки відповідних фахівців.

Список літератури

- Harris, D., Black, L., Hernandez-Martinez, P., Pepin, B., Williams, J., & with the TransMaths Team. (2015). Mathematics and its value for engineering students: what are the implications for teaching? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 46(3), 321–336.
- van der Wal, N. J., Bakker, A., & Drijvers, P. (2019). Teaching strategies to foster techno-mathematical literacies in an innovative mathematics course for future engineers. *ZDM*, 51(6), 885–897.
- Баліна, О. І., Безклубенко, І. С., Буценко, Ю. П., & Лабжинський, В. А. (2020). Кластерний підхід до діагностування складних систем. У *Матеріалах VII Міжнародної науково-практичної конференції «Управління розвитком технологій. Інформаційні технології розвитку освіти»* (с. 51–53.). Київ: КНУБА.
- Безклубенко, І. С., Баліна, О. І., Гетун, Г. В., & Буценко, Ю. П. (2019). Вибір стратегії викладання курсу вищої математики в технічному ЗВО. У *Матеріалах XIV International conference «Modern achievements of science and education»*, Netania, Israel, 26.09–3.10.2019 (pp. 86–88).

Тестування теоретичних знань студентів у курсі математичного аналізу

В. В. Дрозд

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

Slava572@ukr.net

Доповідь присвячена питанню змісту та структури такої важливої складової учбового процесу як тестування теоретичних знань студентів в курсі математичного аналізу.

Ключові слова: колоквиум, тестування, означення, теорема.

Зазвичай, тобто в умовах очного навчання, перевірка теоретичних знань з курсу математичного аналізу у студентів спеціальності «математика» на протязі семестру відбувається у формі колоквиуму. Студенти отримують перелік теоретичних питань, які було розглянуто на лекціях з математичного аналізу і які становлять частину певної робочої програми певного семестру з названої дисципліни. Колоквиум проводиться в запланований час у запланованій аудиторії. Кожний студент випадковим чином сам вибирає картку з певним теоретичним питанням та на протязі двадцяти хвилин письмово занотовує відповідь на нього. Після цього викладач проводить співбесіду з кожним студентом з метою перевірки реальних знань студента з розділу математичного аналізу, який було винесено на даний колоквиум.

Цілком очевидно, що в умовах карантину, або так званого «віддаленого» навчання подібна форма перевірки теоретичних знань студентів абсолютно неможлива. Але давайте з'ясуємо, що насамперед ми хочемо перевірити, проводячи колоквиум. Перш за все, чи розуміє той чи інший студент зміст того чи іншого математичного поняття. Точніше кажучи, чи може цей студент сформулювати чітке математичне означення верхньої границі послідовності, інтеграла Рімана — Стілтєса тощо.

По-друге, ми хочемо перевірити, чи розуміє той чи інший студент зміст тієї чи іншої теореми. Тобто, що є умовою теореми, що є наслідком теореми, чи дає теорема достатні умови для виконання деякого твердження, чи дає теорема необхідні умови для виконання деякого твердження, чи вона дає необхідні та достатні умови для цього.

По-третє, ми хочемо перевірити, чи розуміє той чи інший студент, якими методами доводиться та чи інша теорема. У режимі «живої» співбесіди з цим студентом ми маємо можливість обговорити з ним будь-який пункт доведення від початку до самого кінця. Що абсолютно неможливо в режимі віддаленого навчання. Що ж тоді можливо в цьому режимі? Кажуть, що політика — це мистецтво можливого. За цією логікою перевірка знань студентів у режимі віддаленого навчання — це мистецтво можливого у квадраті.

Нумо розбиратись, що можливо зробити в режимі віддаленого навчання за-
 для перевірки теоретичних знань з курсу математичного аналізу у студентів спе-
 ціальності «Математика» на протязі семестру. Отже, пункт перший: означення.
 Чи можливо перевірити за допомогою тесту, наскільки вірно розуміє студент
 означення того чи іншого математичного поняття? Цілком. За умови, що за пев-
 ний період семестру, який виноситься на колоквиум, на лекціях було розглянуто
 не менше семи-десяти нових математичних понять. І за умови, що на певне пи-
 тання тесту буде відведено достатньо обмежений час. Наведемо типові приклади
 тестів:

1. Число a називають *точкою скупчення* множини M , якщо

а) існує її ε -окіл $U(a; \varepsilon)$, який містить хоча б один елемент множини M ,
 який не дорівнює a ;

б) існує її ε -окіл $U(a; \varepsilon)$, який містить тільки один елемент множини M ,
 який не дорівнює a ;

в) будь-який її ε -окіл $U(a; \varepsilon)$, містить хоча б один елемент множини M ,
 який не дорівнює a ;

г) будь-який її ε -окіл $U(a; \varepsilon)$, містить тільки один елемент множини M , який
 не дорівнює a .

2. Сукупність G нескінченно малих у точці x_0 функцій $g(x)$ називають *шка-
 лою порівняння*, якщо:

1) $\forall g \in G \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in U(x_0; \delta) \setminus \{x_0\} : g(x) \neq 0$;

2) для довільної пари функцій $f \in G, g \in G$

а) або $f = o(g)$, або $g = O(f)$, або $f(x) \equiv g(x)$;

б) або $f = o(g)$, або $g = o(f)$, або $f(x) \equiv g(x)$;

в) або $f = O(g)$, або $g = o(f)$, або $f(x) \equiv g(x)$;

г) або $f = O(g)$, або $g = O(f)$, або $f(x) \equiv g(x)$.

Перейдімо до другого пункту: зміст тієї чи іншої теореми. Позначивши
 умову теореми через A , а наслідок теореми через B , можна запропонувати сту-
 дентам вибрати один з варіантів відповіді стосовно змісту тієї чи іншої теореми:
 « $B \Rightarrow A$ », або « $A \Rightarrow B$ », або « $A \Leftrightarrow B$ », або, нарешті, « A та B є несумісними».
 І хоча останній варіант відповіді є логічним варіантом заповнення вакууму, зна-
 ходяться студенти, які обирають саме його. Наведемо типові прикладі тестів:

3. Нехай твердження A : «*послідовність обмежена*», а твердження B : «*пос-
 лідовність є фундаментальною*». Тоді

а) $A \Leftrightarrow B$

б) A та B є несумісними

в) $B \Rightarrow A$

г) $A \Rightarrow B$.

4. Нехай твердження A : «функція рівномірно неперервна в $(a; b)$ », а твердження B : «функція неперервна в $(a; b)$ ». Тоді

- а) $B \Rightarrow A$
- б) A та B є несумісними
- в) $B \Leftrightarrow A$
- г) $A \Rightarrow B$.

Наведений вище тест можна переформулювати у вигляді: «Така-то теорема дає необхідні, або достатні умови, того, що...». Наприклад:

5. Теорема Ферма дає:

- а) достатні умови існування екстремуму функції в точці
- б) необхідні умови існування екстремуму функції в точці
- в) необхідні та достатні умови існування екстремуму функції в точці
- г) необхідні умови монотонності функції в точці

Нарешті, за допомогою тестів можна перевірити, чи знає студент основні методи, які було застосовано при доведенні тієї чи іншої теореми. Звісно, методи тестування мають занадто обмежені можливості перевірки подібних знань. Але, як казав наш перший президент, «маємо те, що маємо». А маємо ми можливість задати студентам тільки такі питання:

6. При доведенні **нерівності Єнсена** в конспекті лекцій використовується

- а) метод математичної індукції
- б) теорема Коші
- в) формула Тейлора
- г) формула Лагранжа

7. При доведенні теореми **Кантора** в конспекті лекцій використовується

- а) теорема Больцано-Коші №2
- б) нерівність Коші — Буняковського
- в) нерівність Бернуллі
- г) метод «від супротивного»

Зауваження: оскільки кожному теорему можна доводити різними методами, то в останніх наведених тестах ключовою є фраза «в конспекті лекцій використовується».

Як показує життя (а вже відбулось шість тестувань подібного типу), вісім подібних питань, розрахованих на тридцять хвилин, є достатньо оптимальним варіантом. У результаті процентів 10–15 студентів правильно відповідають на 7–8 питань, процентів 10–15 студентів вірно відповідають на 4 та менше питань, інші студенти вірно відповідають на 5–6 питань. Приблизно така ж картина на протязі багатьох років мала місце на «очних» колоквіумах.

Безумовно, подібна схема тестування теоретичних знань студентів потребує обговорення та подальшого корегування. Але звичайна логіка та спілкування з колегами говорить про те, що навіть в умовах звичайного, «очного» навчання вказані вище напрацювання можуть бути використані як додаткові та суттєво важливі важелі.

Застосування методів лінійної алгебри в економічних моделях

Т. В. Іваненко

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

tivanenko2015@gmail.com

У доповіді наведено модель Леонтєва багатогалузевої економіки як приклад застосування методів лінійної алгебри в задачах макроекономіки. Основною задачею міжгалузевого балансу є знаходження такого значення валового випуску кожної галузі, яке забезпечує задане кінцеве споживання всіх видів продукції, а також проміжне споживання кожною галуззю виробництва.

Ключові слова: балансовий аналіз, продуктивна модель, коефіцієнт прямих витрат, матриця повних витрат.

В. Леонтєв — американський економіст, лауреат Нобелівської премії з економіки 1973 року, яку отримав за розробку моделі «витрати — випуск», яку ще називають міжгалузевим балансом. У цій моделі автор скористався методами лінійної алгебри, з якої студенти економічних спеціальностей зазвичай починають вивчення курсу «Математики для економістів». Модель Леонтєва є досить простим і наочним прикладом застосування математичних методів для розв'язання прикладних макроекономічних задач. Тому її розгляд сприяє заохоченню студентів до вивчення даної дисципліни.

Суть моделі полягає в розрахунку такого значення валового випуску продукції кожної галузі, яке забезпечить як проміжне споживання іншими галузями, так і кінцеве споживання цієї продукції усіма споживачами.

Розглянемо модель докладніше. Нехай кожна галузь економіки виробляє продукт, частина якого використовується іншими галузями для виробництва своєї продукції (проміжне споживання), а частина спрямовується на кінцеве споживання. Позначимо:

n — кількість галузей і, відповідно, кількість видів продукції (для спрощення вважаємо, що кожна галузь виробляє лише один вид продукції);

x_i — валовий випуск продукції i -ю галуззю ($i = 1, \dots, n$);

x_{ij} — обсяг продукції i -ї галузі, що використовується для проміжного споживання j -ю галуззю ($j = 1, \dots, n, j \neq i$);

y_i — обсяг продукції i -ї галузі, спрямований на кінцеве споживання.

Тоді балансове співвідношення має вигляд:

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in} + y_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} + y_i.$$

Статистичні дані за ряд років показують, що при незмінній технології зв'язок між x_{ij} та x_j лінійний:

$$x_{ij} = a_{ij}x_j,$$

де $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$ — коефіцієнти прямих витрат, які показують видатки продукції i -ї

галузі на виробництво одиниці продукції j -ї галузі. Ураховуючи це, балансове співвідношення набуває вигляду:

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + y_i, \quad (i = 1, \dots, n).$$

Основною задачею міжгалузевого балансу є знаходження такого значення валового випуску i -ї галузі x_i , яке забезпечує задане кінцеве споживання y_i для $i = 1, \dots, n$. При всіх $x_i \geq 0$ модель Леонтьєва називають *продуктивною*.

Балансове співвідношення є системою лінійних алгебраїчних рівнянь, яка в матричній формі має вигляд:

$$X = AX + Y, \quad (1)$$

де $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ — матриця-стовпець валового випуску, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ —

матриця прямих витрат; $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$ — матриця-стовпець кінцевого споживання.

Виразимо X із балансового співвідношення (1):

$$X = (E - A)^{-1}Y.$$

Позначимо $(E - A)^{-1} = S$ — матрицю повних витрат, її елементи s_{ij} показують величину валових видатків i -ї галузі на виробництво одиниці продукції j -ї галузі, спрямованої на кінцеве споживання (тобто при $y_i = 1 \quad \forall j = 1, \dots, n$).

Проілюструємо балансовий аналіз на такому прикладі.

У таблиці 1 наведено дані про виконання міжгалузевого балансу за звітний період в умовних грошових одиницях. Треба знайти необхідний обсяг валового випуску кожної галузі, якщо споживання металургії та електроенергетики збільшаться у 1.5 та 1.8 разів відповідно, а споживання верстатобудування зменшиться у 1.2 рази.

Виконання міжгалузевого балансу за звітний період

(в умовних грошових одиницях)

галузі		споживання			кінцевий продукт	валовий випуск
		металургія	електро-енергетика	верстатобудування		
виробництво	металургія	8	5	10	120	200
	електро-енергетика	18	7	15	150	230
	верстатобудування	12	9	20	140	250

Розв'язання. З даних таблиці відомо, що

$$x_1 = 200, x_2 = 230, x_3 = 250;$$

$$x_{11} = 8, x_{12} = 5, x_{13} = 10, x_{21} = 18, x_{22} = 7, x_{23} = 15,$$

$$x_{31} = 12, x_{32} = 9, x_{33} = 20; y_1 = 120, y_2 = 150, y_3 = 140.$$

Знайдемо коефіцієнти прямих витрат:

$$a_{11} = \frac{x_{11}}{x_1} = \frac{8}{200} = 0.04; a_{12} = \frac{x_{12}}{x_2} = \frac{5}{230} = 0.02; a_{13} = \frac{x_{13}}{x_3} = \frac{10}{250} = 0.04;$$

$$a_{21} = \frac{x_{21}}{x_1} = \frac{18}{200} = 0.09; a_{22} = \frac{x_{22}}{x_2} = \frac{7}{230} = 0.03; a_{23} = \frac{x_{23}}{x_3} = \frac{15}{250} = 0.06;$$

$$a_{31} = \frac{x_{31}}{x_1} = \frac{12}{200} = 0.06; a_{32} = \frac{x_{32}}{x_2} = \frac{9}{230} = 0.04; a_{33} = \frac{x_{33}}{x_3} = \frac{20}{250} = 0.08.$$

Таким чином, матриця прямих витрат має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 0.04 & 0.02 & 0.04 \\ 0.09 & 0.03 & 0.06 \\ 0.06 & 0.04 & 0.08 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо матрицю повних витрат

$$S = (A - E)^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.04 & 0.02 & 0.04 \\ 0.09 & 0.03 & 0.06 \\ 0.06 & 0.04 & 0.08 \end{pmatrix} \right]^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0.96 & -0.02 & -0.04 \\ -0.09 & 0.97 & -0.06 \\ -0.06 & -0.04 & 0.92 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1.05 & 0.02 & 0.05 \\ 0.1 & 1.04 & 0.07 \\ 0.07 & 0.05 & 1.09 \end{pmatrix}.$$

За умови обсяг кінцевого продукту має бути:

$$Y = \begin{pmatrix} 120 \cdot 1.5 \\ 150 \cdot 1.8 \\ 140 \cdot 1.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 \\ 270 \\ 116.67 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$X = SY = \begin{pmatrix} 200.3 \\ 306.4 \\ 153.2 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо зміну валового випуску продукції:

$$\Delta X = \begin{pmatrix} 200 \\ 230 \\ 250 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 200.3 \\ 306.4 \\ 153.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 76.4 \\ -96.8 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: обсяг валового випуску продукції металургії треба збільшити на 0.3, електроенергетики — збільшити на 76.4, а верстатобудування — зменшити на 96.8 умовних грошових одиниць.

Список літератури

- Валєєв, К. Г., Джалладова, І. А., & Дегтяр, С. В. (2011). *Вища математика для економістів: Навчальний посібник*. Київ: Знання.
- Клепко, В. Ю., & Голець, В. Л. (2009) Задачі балансового аналізу. У *Вища математика в прикладах і задачах* (2-ге вид.). Київ: Центр учбової літератури
- Ляшенко, І. М., Коробова, М. В., & Горіцина, І. А. (2010). *Моделювання економічних, екологічних і соціальних процесів: Навчальний посібник*. Київ: ВПЦ «Київський університет».

Багатовимірна задача Дідони

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
aleksei_kalaida@comcast.net, alekseykalaida@gmail.com

За аналогією з одновимірною задачею Дідони ставиться та розв'язується не розглядувана до цього відповідна багатовимірна задача.

Ключові слова: задача Дідони, багатовимірна, рівняння Ейлера — Остроградського, варіаційна кривизна, розв'язок.

Відома задача Дідони є ізопериметрична варіаційна задача про екстремум одновимірного інтегрального функціоналу (Калайда, 1999)

$$J(y) = \int_a^b y dx \Rightarrow \text{extr} \quad (1)$$

при наявності інтегральної в'язі

$$V(y) = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx = l. \quad (2)$$

Рівняння Ейлера — Лагранжа для інтегранта (функції Лагранжа для (1), (2))

$$F(y, y') = y + \lambda \sqrt{1 + y'^2} \quad (3)$$

цієї задачі має вигляд

$$F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx} (\sqrt{1 + y'^2})'_{y'} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \kappa = \frac{1}{\lambda} = r, \quad (4)$$

тобто розв'язком задачі є крива сталої кривизни. У літературі ж для розв'язування цієї задачі використовували перший інтеграл рівняння (4) і тому виник довгий шлях до розв'язку задачі.

У випадку багатовимірної задачі виду (1), (2)

$$J(u) = \int_G u d\omega \rightarrow \text{extr}, V(u) = \int_S ds = l = \text{const},$$

маємо рівняння Ейлера — Остроградського (для функції $F = u + \lambda(1 + \sum_i u_{x_i}^2)^{1/2}$)

$$F'_u - (F'_{u_{x_1}})'_{x_1} - \dots - (F'_{u_{x_n}})'_{x_n} = 0 \Rightarrow \kappa_m = \frac{1}{\lambda} = \text{const},$$

тобто варіаційна кривизна (Калайда, 2016) поверхні шуканого многовиду є стала, а отже, розв'язком задачі є, знову ж таки, поверхня сталої кривизни.

Список літератури

- Калайда, О. Ф. (1999). *Варіаційне числення: Навчальний посібник*. Київ: ВЦ «Київський університет».
- Калайда, О. Ф. (2016). Про варіаційне трактування кривизни многовидів. У *Матеріалах Четвертої Міжнародної науково-практичної конференції «Математика в сучасному технічному університеті», 24–25 грудня 2015 р.* (с. 163). Київ: НТТУ «КПІ».

Дробово-раціональні колоканти та інтерліанти для функцій двох змінних

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
aleksei_kalaida@comcast.net, alekseykalaida@gmail.com

Побудовано явні та напівявні дробово-раціональні колоканти та інтерліанти для функцій двох змінних.

Ключові слова: змінна, функція, колоканта, інтерліанта.

1. Зауваження про одновимірні дробово-раціональні колоканти. Якщо у випадку многочленів типу Лагранжа

$$L_n(x; f) = \sum_{j=0}^n \omega_j(x) f_j$$

за нормальною системою базисних функцій ω_j , $\omega_j(x_i) = \delta_{j,i}$, є умова

$$\omega_0(x) + \dots + \omega_n(x) \equiv 1,$$

то у випадку дробово-раціональних колокант, будованих як частка, узагалі кажучи, різних многочленів типу Лагранжа, (α_j — параметри, визначувані з умов колокації в додаткових заданих вузлах або з умов кратності наявних основних вузлів)

$$R_{n,n}(x; f) = \frac{\sum_{j=0}^n \omega_j(x) f_j \alpha_j}{\sum_{j=0}^n \tilde{\omega}_j(x) \alpha_j}, \quad \alpha_j \neq 0, \quad \alpha_0 = 1 \vee \alpha_n = 1, \quad f_j = f(x_j),$$

ця умова не є необхідною. Тут можна використовувати і функції $\pm \omega_j$, $\pm \tilde{\omega}_j$, та й, взагалі, кожен з них з різних систем елементарних базисних функцій, аби виконувалась умова їх дельтуватості у вузлах колокації. Це дає можливість апроксимувати ширший клас функцій, як-от, функцій з полюсами. Так, наприклад, колоканта

$$R_{1,1}(x; f) = \frac{\omega_0(x) f_0 - \omega_1(x) f_1}{\omega_1(x) - \omega_0(x)} = \frac{(x_1 - x) f_0 - (x - x_0) f_1}{2x - x_0 - x_1}$$

при $x_0 = -1$, $x_1 = 1$ являється точною для $f(x) = 1/x$.

2. Дробово-раціональні колоканти для функцій двох змінних. Найпростіший спосіб побудови таких колокант є одновимірна колоканта, наприклад, многочлен типу Лагранжа за однією змінною (за змінною x)

$$L_n(x; f(y)) = \sum_{j=0}^n \omega_j(x) f_j(y), \quad f_j(y) = f(x_j, y), \quad \omega_j(x_i) = \delta_{j,i}, \quad \omega_0(x) + \dots + \omega_n(x) \equiv 1,$$

в якому функції $y \mapsto f_j(y)$ апроксимовано дробово-раціональними колокантами $R_{m_j}(y; f)$. В результаті матимемо дробово-раціональну колоканту

$$R(x, y; f) = \sum_{j=0}^n \omega_j(x) R_{m_j}(y; f).$$

Помінявши місцями змінні x, y , дістанемо аналогічну дробово-раціональну колоканту

$$R(y, x; f) = \sum_{j=0}^n \omega_j(y) R_{m_j}(x; f).$$

Якщо у цих колокантах їхні складові дробово-раціональні колоканти повні, тобто задовольняють максимальну кількість можливих умов колокації (за простими або/і кратними вузлами), то матимемо повні дробово-раціональні колоканти для функції двох змінних. Повною правильною явною дробово-раціональною колокантою також, очевидно, являтиметься колоканта

$$R_{nm}(x, y; f) = 1 / L_{nm}(x, y; 1/f) = 1 / \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^m \omega_j(x) \hat{\omega}_i(y) / f_{ji}.$$

Нарешті, напівявною неправильною повною колокантою є колоканта з параметрами

$$R(x, y; f) = \frac{\omega_0(x) \hat{\omega}_0(y) f_{00} + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \omega_j(x) \hat{\omega}_i(y) \alpha_{ji} f_{ji}}{\omega_0(x) \omega_0(y) + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \omega_j(x) \omega_i(y) \alpha_{ji}},$$

визначуваних з умов колокації в додаткових простих вузлах або/і в кратних основних вузлах.

3. Дробово-раціональні інтерліанти за паралельними прямими. Розглянемо наступні дробово-раціональні колоканти з параметрами (Калайда, 2000)

$$R_x(x, y; f) = \frac{\sum_{j=0}^n \omega_j(x) \alpha_j f_j(y)}{\sum_{j=0}^n \omega_j(x) \alpha_j}, \quad \alpha_j \neq 0, \alpha_0 = 1 \vee \alpha_n = 1, f_j(y) = f(x_j, y),$$

$$R_y(x, y; f) = \frac{\sum_{i=0}^m \hat{\omega}_i(y) \beta_i f_i(x)}{\sum_{i=0}^m \hat{\omega}_i(y) \beta_i}, \quad \beta_i \neq 0, \beta_0 = 1 \vee \beta_m = 1, f_i(x) = f(x, y_i).$$

Перша з них являється інтерліантою функції f за вертикальними паралельними прямими, друга — інтерліантою цієї ж функції за горизонтальними паралельними прямими. Невідомі параметри α_j, β_i в них можна визначати з умов додаткових колокацій за простими або/і двократними основними простими вуз-

лами, тим самим вдвічі підвищивши порядок точності інтерлінації. З кожної з цих інтерлінацій за допомогою параметрів можна добути пару двосторонніх інтерлінант.

Список літератури

Калайда, О. Ф. (2000). *Чисельні методи: Навчальний посібник*. Київ: ВПЦ «Київський університет».

Загальний рекурентний та прямий метод побудови колокант функцій

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
aleksei_kalaida@comcast.net, alekseykalaida@gmail.com

Побудовано рекурентний та прямий алгоритм для так званих гібридних колокант функцій як лінійну комбінацію з різноманітних за будовою їхніх колокант.

Ключові слова: функція, колоканта, алгоритм, рекурентний, прямий.

Побудовано загальний простий рекурентний алгоритм для колокант функцій, у тому числі й так званих гібридних колокант. Наприклад, нехай на основі многочлена Тейлора потрібно побудувати колоканту змішаного типу, що складається зі згаданого многочлена Тейлора $T_n(x; a)$ з центром у точці a та многочлена типу Лагранжа $L_m(x)$ або дробово-раціональної колоканти $R_k(x)$ із простими вузлами, відмінними від центра многочлена Тейлора, та многочлена Ерміта — Маркова $H_l(x)$, або дробово-раціональної колоканти $R_k(x)$ та многочлена типу Лагранжа тощо. Покажемо, що всі такі гібридні колоканти можна будувати у вигляді їх певної лінійної комбінації за допомогою відповідних так званих буферних функцій (Калайда, 2000). Усі такі колоканти дають змогу зменшити сталу Ліпшиця, яка для многочлена Лагранжа, наприклад, за завищеними оцінками сягає 2^n (Калайда, 2002). Колоканти будь-якої структури із простими вузлами (многочлени, дробово-раціональні колоканти тощо) можна рекурентно подати у вигляді (у випадку кратних вузлів аналогічно, Калайда, 2009)

$$K_{n+m+1}(x; f) = K_n(x; f) + \psi(x) \sum_{j=0}^m \omega_j(x) (\bar{f}_j - K_n(\bar{x}_j; f)) / \psi(\bar{x}_j), \quad (1)$$

$$K_n(x_i; f) = f(x_i) = f_i, \quad i = 0, n, \quad \psi(x_i) = 0, \quad \psi'(x_i) \neq 0, \quad i = 0, n, \quad x_i \neq \bar{x}_j, \quad i \neq j.$$

(ψ — згадана буферна функція, ω_j — нормальна система базисних функцій).

При цьому нові вузли можна вибирати довільно. Цим узагальнюється формула Ньютона і відпадає потреба в побудові таблиці розділених різниць апроксимованої функції та виборі з них потрібних (для інтерполяції вперед-назад тощо). Рекурентний алгоритм побудови многочленів Ерміта — Маркова з фіксованим числом вузлів побудовано (Калайда, 2009). За цим методом, до речі, легко будувати многочлен Тейлора (з центром a , і так доводити це на лекціях студентам)

$$T_0(x) = f(a),$$

$$T_{i+1}(x) = T_i(x) + (x - a)^{i+1} (f^{(i+1)}(a) - T_i^{(i+1)}(a)) / ((x - a)^{i+1})^{(i+1)}, \quad i = 0, 1, \dots$$

За допомогою нормальної системи базисних функцій ω_j із простими вузлами теж можна будувати колоканти із кратними вузлами (так званим прямим методом), а також з іншою різноманітною інформацією про апроксимовану функцію у вузлах колокації, як-от, наприклад, середнє арифметичне або середнє зважене значень функції у певних множинах вузлів, ковзне усереднення тощо, у вигляді многочлена типу Лагранжа з параметрами α_i

$$L_n(x; f; \alpha) = \sum_{j=0}^m \omega_j(x) f_j + \sum_{i=m+1}^n \omega_i(x) \alpha_i = \Omega(x) Y(f, \alpha),$$

$$\Omega(x) = (\omega_0(x) \dots \omega_n(x)), Y(f, \alpha) = (f_0 \dots f_m \alpha_{m+1} \dots \alpha_n)^T, f_j = f(x).$$

визначивши ці параметри із заданих умов, зокрема з умов кратної колокації (при $\alpha_i = f_i$ матимемо многочлен типу Лагранжа). Правда, при кратній колокації необхідно розв'язувати відповідну лінійну алгебричну систему рівнянь.

Так, при чотирьох вузлах та двох параметрах маємо колоканту з двома простими вузлами (вона, апріорі, задовольняє умови колокації $L(x_0) = f_0, L(x_1) = f_1$)

$$L_3(x; f; \alpha) = \omega_0(x) f_0 + \omega_1(x) f_1 + \omega_2(x) \alpha_1 + \omega_3(x) \alpha_2,$$

а за рахунок параметрів можемо дістати колоканту із двократними вузлами, а також колоканти із пропусками інформації про функцію у вузлах. Для цього досить задати, наприклад, умови колокації у вузлах $L'(x_0) = f'_0, L'(x_1) = f'_1$,

звідки для параметрів дістанемо систему алгебричних рівнянь

$$\begin{aligned} \omega'_2(x_0) \alpha_1 + \omega'_3(x_0) \alpha_2 &= f'_0 - \omega'_0(x_0) f_0 - \omega'_1(x_0) f_1 = b_1, \\ \omega'_2(x_1) \alpha_1 + \omega'_3(x_1) \alpha_2 &= f'_1 - \omega'_0(x_1) f_0 - \omega'_1(x_1) f_1 = b_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \alpha_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta_0}, \alpha_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_0} \end{aligned}$$

(Δ_k — визначники системи), так що, остаточно, маємо

$$L_3(x; f; \alpha) \cong H_3(x) = \frac{\omega_0(x) f_0 + \omega_1(x) f_1 \Delta_0 + \omega_2(x) \Delta_1 + \omega_3(x) \Delta_2}{\Delta_0}.$$

Для порівняння наведемо вигляд многочлена $H_3(x)$ за формулою (1)

$$\begin{aligned} H_3(x) &= f_0 + \frac{x - x_0}{h} \Delta f + \\ &+ (x - x_0)(x - x_1) \left(\frac{x - x_1}{h} \frac{f'_0 - \Delta f / h}{h} + \frac{x - x_0}{h} \frac{f'_1 - \Delta f / h}{h} \right) \\ &h = x_1 - x_0, \Delta f = f_1 - f_0. \end{aligned}$$

У випадку колокації вищої кратності для полегшення побудови чинників алгебричної системи корисно використовувати матричні алгоритми чисельного диференціювання (Калайда, 2000)

$$L^{(k)}(x; f; \alpha) = \Omega(x)\theta^k Y(f; \alpha), \theta = \begin{pmatrix} \Omega'(x_0) \\ \dots\dots\dots \\ \Omega'(x_n) \end{pmatrix}, k = 1, 2, \dots$$

Список літератури

- Калайда, О. Ф. (2000). *Чисельні методи: Навчальний посібник*. Київ: ВПЦ «Київський університет».
- Калайда, О. Ф. (2002). Про спадкову похибку апроксимації функцій колокантами. *Вісник Київськ. ун-ту, серія фіз.-матем. науки*, (2), 99–105.
- Калайда, О. Ф. (2009). Про один простий алгоритм побудови многочленів Маркова — Ерміта. У *Матеріалах Третьої Міжнародної конференції «Обчислювальна та прикладна математика»*. Присвячена пам'яті академіка НАН України Івана Івановича Ляшка, Київ, 11–12 вересня (с. 39). Київ: КНУ імені Тараса Шевченка.

Матричні алгоритми чисельного диференціювання на основі дробово-раціональних колокант

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

aleksei_kalaida@comcast.net, alekseykalaida@gmail.com

Матричні алгоритми чисельного диференціювання на основі многочленів типу Лагранжа $L_n(x)$ вперше були винайдені і детально дослідженні (Калайда, 1982, 2000). Як відомо, для побудови алгебричних формул чисельного диференціювання традиційно покладають

$$f^{(k)}(x) \approx L_n^{(k)}(x) = \Omega_n^{(k)}(x)Y(f), \Omega_n(x) = (\omega_0(x) \dots \omega_n(x)), \quad (1)$$

$$\omega_j(x) = \psi_j(x) / \psi_j(x_j), \psi_j(x) = \prod_{i=0, i \neq j}^n (x - x_i), Y(f) = (f_0 \dots f_n)^T, f_j = f(x_j),$$

(тобто матриця-стрічка $\Omega_n(x)$ є нормальна матриця алгебричних базисних функцій ω_j ; зрозуміло, що замість алгебричних базисних функцій можна вибирати й інші системи — тригонометричні, експоненціальні тощо) і тоді

$$\tilde{f}^{(k)}(x_j) = L_n^{(k)}(x_j), j = \overline{0, n}.$$

Суть матричних алгоритмів чисельного диференціювання полягає в компактній реалізації рівності (1) у вигляді рівності (Калайда, 1982)

$$f^{(k)}(x) \approx \Omega_n(x)\theta^k Y(f), \theta = \begin{pmatrix} \Omega'(x_0) \\ \dots \\ \Omega'(x_n) \end{pmatrix} \quad (2)$$

(матриця θ — це чисельний аналог оператора d / dx), тобто похідні вищого порядку в довільній точці (а не тільки у вузлах) подано через степені матриці коефіцієнтів формул чисельного диференціювання для похідної лише першого порядку. Порядок цієї матриці дорівнює кількості вузлів (на одиницю вищий від порядку відповідного їй многочлена Лагранжа $L_n(x)$). Зауважимо, що рівність (2) з метою зменшення на порядок кількості операцій доцільно здійснювати за одним з аналогів алгоритму Ейткена (для алгебричних многочленів)

$$(\dots(\Omega_n(x)\theta)\theta \dots)\theta Y(f), \Omega_n(x)(\theta(\dots \theta(\theta Y(f)))$$

(перший алгоритм — зліва направо, другий — справа наліво).

Тут за допомогою дробово-раціональних колокант апроксимованої функції побудовано економніші (дробово-раціональні) матричні алгоритми чисельного диференціювання.

Розглянемо дробово-раціональну колоканту (Калайда, 2000)

$$R_n(x; f) = \frac{\Omega_n(x)Y(\alpha f)}{\Omega_n(x)Y(\alpha)}, Y(\alpha f) = (f_0 \alpha_1 f_1 \dots \alpha_n f_n)^T, Y(\alpha) = (1 \alpha_1 \dots \alpha_n)^T, \quad (3)$$

яка, за побудовою, при довільних $\alpha_j \neq 0$ апіорі задовольняє умови колокації $f_j = R(x_j; f)$, $j = \overline{0, n}$. Якщо ж, наприклад, параметри α_j визначити з умов колокації $R(\bar{x}_i; f) = f_i$, $i = \overline{1, n}$, $\bar{x}_i \neq \forall x_j$, тобто з системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\Omega_n(\bar{x}_i)Y(\alpha f) = f_i \Omega_n(\bar{x}_i)Y(\alpha), \quad i = \overline{1, n},$$

то матимемо колоканту (3), еквівалентну за порядком точності колоканті-многочленові Лагранжа $L_{2n}(x)$. У той же час формули чисельного диференціювання $f^{(m)}(x) \approx R^{(m)}(x, f)$, $m < n$, виражатимуться через степені матриці θ нижчого, лише $(n + 1)$ -го (а не $(2n + 1)$ -го) порядку. Так, наприклад, для першої похідної маємо

$$f'(x) \approx R'_n(x, f) = \frac{\Omega_n(x)\theta Y(\alpha f)}{\Omega_n(x)Y(\alpha)} - \frac{\Omega_n(x)Y(\alpha f)\Omega_n(x)\theta Y(\alpha)}{(\Omega_n(x)Y(\alpha))^2}.$$

Звернемо також увагу на ще одну можливість побудови дробово-раціональних формул чисельного диференціювання. А саме, розглянемо просту дробово-раціональну колоканту функції f (при $f(x) \neq 0$)

$$R_n(x, f) = 1 / L_n(x, 1 / f) = \frac{1}{\Omega_n(x)Y(1 / f)} \Rightarrow R_n(x_j, f) = f_j, \quad j = \overline{0, n}.$$

Звідси, очевидно, теж матимемо дробово-раціональні формули чисельного диференціювання $f^{(k)}(x) \approx R_n^{(k)}(x, f)$, $k < n$.

При диференціюванні дробово-раціональних колокант доцільно користуватись аналогом формул Лейбніца для частки функцій (Калайда, 2012).

Формули чисельного диференціювання можна будувати також за допомогою різноманітних функціональних колокант (Калайда, 2000), як-от (для знакосталих функцій)

$$\Phi_n(x, f) = \exp(\Omega_n(x)Y(\ln f)) \Rightarrow \Phi_n(x_j) = f_j, \quad j = \overline{0, n},$$

так що $f^{(k)}(x) \approx \Phi_n^{(k)}(x, f)$.

Усі використовувані колоканти мають однаковий порядок точності (з порядком точності многочленів типу Лагранжа), а отже, порядок точності утворюваних з них формул чисельного диференціювання теж однаковий (Калайда, 2000).

Список літератури

- Калайда, О. Ф. (2000). *Чисельні методи: Навчальний посібник*. Київ: ВПЦ «Київський університет».
- Калайда, А. Ф. (1982). Матричные алгоритмы численного дифференцирования функций. *Вычисл. и прикл. матем.*, (46), 7–13.
- Калайда, О. Ф. (2012). Про аналоги формули Лейбніца для похідних частки функцій. У *Матеріалах XIV Міжнародної наукової конференції імені академіка М. Кравчука*, 27–29 травня (т. 2, с. 122). Київ: НТУУ «КПІ».

Про виродженість колокант функцій

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
aleksei_kalaida@comcast.net, alekseykalaida@gmail.com

Звертається увага на можливу втрату точності або інших очікуваних результатів (некоректність) при апроксимації функцій колокантами.

Ключові слова: апроксимація, функція, колоканти, некоректність.

Тут ми звертаємо увагу на можливу виродженість, тобто втрату порядку точності (своєрідну некоректність) колокант функцій. Для цього наведемо відповідні приклади такого явища. Як відомо, некоректність чисельного диференціювання проявляється у втраті вірних знаків результату при надмірному згущенні сітки вузлів, невідповідно низькому порядку формули та малій кількості розрядів використовуваного обчислювального пристрою. Це обумовлено тим, що при цьому оперують близькими величинами, їхня сума дорівнює нулеві, а отже, над цими величинами здійснюється операція віднімання і, як результат, багато вірних знаків взаємно знищується, а тому обчислювальна похибка, ділена, до того ж, на малу величину, значно зростає. Регуляризуючими в цій ситуації є формули чисельного диференціювання високого порядку (багатоточкові формули), здатні надавати потрібну точність при рідкій сітці вузлів. Із сказаного випливає, що при використанні близьких величин некоректність або втрата інших очікуваних властивостей може виникати і в інших задачах апроксимації, зокрема, при апроксимації функцій колокантами, як з простими, так, особливо, з кратними вузлами.

Розглянемо колоканти з простими вузлами — многочлени типу Лагаранжа (Калайда, 2000)

$$L_n(x; f) = \sum_{j=0}^n \omega_j(x) f_j = \Omega(x) Y(f) = \bar{f} + \sum_{j=0}^n \omega_j(x) (f_j - \bar{f}), \quad (1)$$

$$\Omega(x) = (\omega_0(x) \dots \omega_n(x)), Y(f) = (f_0 \dots f_n)^T, f_j = f(x_j),$$

за нормальною системою базисних функцій ω_j ($\omega_j(x_i) = \delta_{j,i}$, $\sum_{j=0}^n \omega_j(x) \equiv 1$). Ба-

чимо, що при

$$f_j = \bar{f}, f(x \neq x_j) \neq \bar{f} \Rightarrow L_n(x, f) \equiv \bar{f}.$$

Отже, при невдалому виборі вузлів x_j , такому, що

$$f_j \approx \bar{f}, j = \overline{0, n},$$

похибка апроксимації функції многочленом (1) може бути досить значною. Таке ж явище може бути й при співвідношеннях $f_j \approx \bar{f}$ не в усіх вузлах, а лише в певній їх підмножині. Так, наприклад, при

$$f_j \approx \bar{f}, j = 0, k, k < n,$$

многочлен (1) набуває вигляду

$$L_n(x; f) = \bar{f} \sum_{j=0}^k \omega_j(x) + \sum_{j=0}^k \omega_j(x)(f_j - \bar{f}) + \sum_{j=k+1}^n \omega_j(x)f_j,$$

(зокрема, при $k = n - 1$ $L_n(x; f) = \bar{f} + \omega_n(x)(f_n - \bar{f})$), звідки випливає, що й тут може бути суттєве зростання похибки. Тому, щоб уникнути цього, доцільно апроксимувати функцію многочленом (1) лише на інтервалах її монотонності або застосовувати інші застереження.

Наведемо, далі, більш разючий приклад у випадку многочленів з кратними вузлами.

Двохвузлові многочлени Маркова — Ерміта другого порядку з одним двократним вузлом

$$\begin{aligned} \hat{H}_2(x; f) &= f_0 + \frac{(x - x_0)(f_1 - f_0)}{h} + (x - x_0)(x - x_1) \frac{f_1 - f_0 - hf_0'}{h^2}, h = x_1 - x_0 > 0, \\ \check{H}_2(x; f) &= f_0 + \frac{(x - x_0)(f_1 - f_0)}{h} - (x - x_0)(x - x_1) \frac{f_1 - f_0 - hf_1'}{h^2}, f_j = f(x_j), \end{aligned}$$

при

$$(f_1 - f_0 - hf_0')(f_1 - f_0 - hf_1') \neq 0, \text{sign } f'''(x) = \text{const}$$

являються двосторонніми наближеннями функції f на інтервалі (x_0, x_1) і досить симетричними, оскільки

$$\hat{r}(f) = f(x) - \hat{H}(x) = \frac{(x - x_0)^2(x - x_1)}{3!} f'''(\hat{c}), \check{r}(f) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)^2}{3!} f'''(\check{c}),$$

а тому

$$\hat{r}(f)\check{r}(f) = \frac{(x - x_0)^3(x - x_1)^3}{3!3!} f'''(\hat{c})f'''(\check{c}) < 0.$$

Однак, якщо $(f_1 - f_0 - hf_0')(f_1 - f_0 - hf_1') = 0$, то принаймні один з цих многочленів вироджується в лінійний многочлен. При умові ж

$$(f_1 - f_0 - hf_0') = 0 \text{ та } \text{sign } f'''(x)f''(x) = \text{const}$$

дані многочлени залишаються двосторонніми (але не симетричними), а при $(f_1 - f_0 - hf_1') = 0$ двосторонніми не являються, оскільки тоді

$$\text{sign } \hat{r}(f)\check{r}(f) = \frac{(x - x_0)^2(x - x_1)^2}{3!2!} f''(c)f'''(\hat{c}) = \text{const}, c, \hat{c} \in (x_0, x_1).$$

Список літератури

Калайда, О. Ф. (2000). *Чисельні методи: Навчальний посібник*. Київ: ВПЦ «Київський університет».

Про лінійне диференціальне рівняння першого порядку

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

aleksei_kalaida@comcast.net, alekseykalaida@gmail.com

Наведено два найпростіші методи побудови загального розв'язку лінійного скалярного диференціального рівняння першого порядку.

Ключові слова: диференціальне рівняння, порядок, загальний розв'язок, метод.

Розглянемо рівняння

$$y' + p(x)y = q(x). \quad (1)$$

Замість традиційного, описаного в усіх посібниках з диференціальних рівнянь (Ляшко та ін., 1987), досить складного методу побудови загального розв'язку рівняння (1) наведемо два найелементарніші методи (вони напевне сподобаються студентам).

Перший метод. Введемо заміну

$$y = ze^{-\int \lambda(x) dx}.$$

У результаті для функції z при $\lambda(x) = p(x)$ дістаємо елементарне інтегровне у квадратурах рівняння

$$z' = q(x)e^{\int p(x) dx},$$

а отже,

$$\begin{aligned} z &= C + \int q(x)e^{\int p(x) dx} \Rightarrow \\ \Rightarrow y &= e^{-\int p(x) dx} \left(C + \int q(x)e^{\int p(x) dx} dx \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Другий метод. Помножимо рівняння (1) на $e^{\int p(x) dx}$. У результаті матимемо також елементарне інтегровне у квадратурах рівняння

$$(ye^{\int p(x) dx})' = q(x)e^{\int p(x) dx},$$

з якого й дістаємо загальний розв'язок (2).

Список літератури

Ляшко, И. И., Гай, Я. Г., Боярчук, А. К., & Калайда, А. Ф. (1987). *Математический анализ: учебник* (Ч. 3). Киев: Вища школа.

Про неусувну похибку апроксимації функцій многочленами-колокантами

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
aleksei_kalaida@comcast.net, alekseykalaida@gmail.com

Поданням многочленів типу Лагранжа через відхилення значень функції у вузлах колокації від їхнього середнього арифметичного одержано нові оцінки неусувної похибки у другій та третій нормах векторів.

Ключові слова: многочлен Лагранжа, неусувна похибка, стала Лебега, функція Лебега.

Неусувна похибка інтерполяції функцій досліджена досить ґрунтовно у випадку многочлена Лагранжа із сталим кроком та з вузлами Чебишова (Калайда, 2000). Вона вимірюється за допомогою так званої сталої Лебега. Більш прискіпливо це питання досліджено (Калайда, 2002). Доведено, що вона необмежена згори і, натомість, введено ще поняття функції Лебега. Тут це питання досліджується в інший, більш простий спосіб та добуто прозоріший і простіший результат.

Розглянемо многочлени типу Лагранжа за системою вузлів x_j

$$L_n(x; f) = \sum_{j=0}^n \omega_j(x) f_j, \quad \omega_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\psi_j(x_j)} \Rightarrow \omega_j(x_i) = \delta_{j,i}, \quad \sum_{j=0}^n \omega_j(x) \equiv 1 \quad (1)$$

або, що теж саме,

$$L_n(x; f) = \bar{f} + \sum_{j=0}^n (\omega_j(x) - 1/(n+1))(f_j - \bar{f}), \quad \bar{f} = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n f_j. \quad (1')$$

Якщо, замість точних значень $f_j = f(x_j)$, задано їх наближення \tilde{f}_j , $f_j - \tilde{f}_j = \varepsilon_j$, то, замість (1), дістанемо наближення функції f з неусувною похибкою (теж у вигляді многочлена (1) або (1'))

$$L_n(x; \varepsilon) = \sum_{j=0}^n \omega_j(x) \varepsilon_j. \quad (2)$$

Звідси на основі другої норми векторів й слідують відомі оцінки (Калайда, 2000)

$$\left| L_n(x; \varepsilon) \right| \leq \hat{\varepsilon} \Lambda(x) \leq \hat{\varepsilon} \Lambda, \quad \left| \varepsilon_j \right| \leq \hat{\varepsilon}, \quad \Lambda(x) = \sum_{j=0}^n \left| \omega_j(x) \right| \leq \hat{\Lambda} = \max \Lambda(x). \quad (3)$$

Їх уточнення наведено в Калайда (2002). Оскільки ж многочлен (2) можна подати у вигляді

$$L_n(x; \varepsilon) = \bar{\varepsilon} + \sum_{j=0}^n \omega_j(x) (\varepsilon_j - \bar{\varepsilon}), \quad \bar{\varepsilon} = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n \varepsilon_j, \quad (4)$$

то при $\bar{\varepsilon} \neq 0$, замість (3), дістаємо більш точну оцінку вигляду (3)

$$|L_n(x; \varepsilon)| \leq \bar{\varepsilon} + \max_{0 \leq j \leq n} |\varepsilon_j - \bar{\varepsilon}| \Lambda(x) \leq \max_{0 \leq j \leq n} |\varepsilon_j - \bar{\varepsilon}| \hat{\Lambda}.$$

На основі (4) теж можна добути відповідні уточнення виду (Калайда, 2002).

З (2) застосуванням, далі, третьої норми векторів, згідно нерівності Коші — Буняковського, маємо кращі оцінки

$$|L_n(x; \varepsilon)| \leq \bar{\varepsilon} + \check{\Lambda}(x) \sqrt{\sum_{j=0}^n (\varepsilon_j - \bar{\varepsilon})^2} \leq \max \check{\Lambda}(x) \sqrt{n} \max |\varepsilon_j - \bar{\varepsilon}|,$$

$$\check{\Lambda}(x) = \sqrt{\sum_{j=0}^n \omega_j^2(x)} < \Lambda(x).$$

Аналогічні оцінки заміною $\omega_j(x)$ на $\omega_j(x) - 1 / (n + 1)$ матимемо на основі рівності виду (1') для рівності (2).

І, нарешті, у гіпотетичному випадку, виділивши в (2) з похибок окремо додатні та від'ємні та подавши (2) у вигляді суми двох відповідних многочленів у вигляді (1'), дістанемо оцінки неусувної похибки через відхилення додатніх та, відповідно, від'ємних похибок у вузлах від їх середніх арифметичних та самих середніх арифметичних, а також відповідних функцій та констант Лебега.

Список літератури

- Калайда, О. Ф. (2000). *Чисельні методи: Навчальний посібник*. Київ: ВПЦ «Київський університет».
- Калайда, О. Ф. (2002). Про спадкову похибку апроксимації функцій колокантами. *Вісник Київського університету. Серія фіз.-матем науки*, (2), 99–105.

Про побудову повних правильних дробово-раціональних колокант функцій з простими вузлами

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
aleksei_kalaida@comcast.net, alekseykalaida@gmail.com

На основі повної нейтральної дробово-раціональної колоканти з простими вузлами за допомогою многочлена типу Лагранжа побудовано у явному вигляді повні правильні дробово-раціональні колоканти з простими вузлами.

Ключові слова: дробово-раціональні колоканти, многочлен типу Лагранжа, правильні дробово-раціональні колоканти.

Розглянемо повну нейтральну дробово-раціональну колоканту

$$R_{2n}(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = \frac{\omega_0(x)f_0 + \sum_{j=1}^n \alpha_j \omega_j(x)f_j}{\omega_0(x) + \sum_{j=1}^n \alpha_j \omega_j(x)}, \alpha_i \leftarrow \quad (1)$$

$$R_{2n}(\bar{x}_i) = \bar{f}_i, i = \overline{1, n}, \bar{x}_i \neq x_j, i \neq j,$$

$$\omega_j(x) = \psi_j(x) / \psi_j(x_j) \Rightarrow \omega_j(x_i) = \delta_{j,i}, f_j = f(x_j), \bar{f}_i = f(\bar{x}_i).$$

На основі колоканти (1) та інших колокант такого типу можна у явному вигляді будувати правильну більш точну дробово-раціональну колоканту $R_{2n+m}(x)$ за простими вузлами $\hat{x}_k, k = \overline{0, m}$, відмінними від попередніх вузлів x_j, \bar{x}_i .

Покажемо, що шуканою колокантою є дробово-раціональна колоканта

$$R_{2n+m}(x) = \frac{A(x)}{B(x) + \omega(x) \sum_{i=0}^m \hat{\omega}_i(x) (\hat{f}_i^{-1} A(\hat{x}_i) - B(\hat{x}_i)) / \omega(\hat{x}_i)},$$

$$\omega(x_j) = 0, \omega(\bar{x}_i) = 0, \hat{f}_i \neq 0,$$

ω — так звана буферна функція (Калайда, 2000), $\hat{\omega}_i(\hat{x}_l) = \delta_{i,l}$.

Дійсно, за побудовою

$$R_{2n+m}(x_i) = f_i, i = \overline{0, n}, R_{2n+m}(\bar{x}_k) = \bar{f}_k, k = \overline{1, n},$$

а оскільки

$$\sum_{l=0}^m \hat{\omega}_l(\hat{x}_k) (\hat{f}_l^{-1} A(\hat{x}_l) - B(\hat{x}_l)) / \omega(\hat{x}_l) = (f_k^{-1} A(\hat{x}_k) - B(\hat{x}_k)) / \omega(\hat{x}_k),$$

то $R_{2n+m}(\hat{x}_k) = \hat{f}_k, k = \overline{0, m}$.

Залишковий член так побудованої колоканти є (доведення традиційне)

$$r(f) = \frac{\psi(x)r^{(m+2(n+1))}(c)}{\psi^{(m+2(n+1))}(c)},$$

$$\psi(x_j) = 0, j = \overline{0, n}, \psi(\bar{x}_i) = 0, i = \overline{1, n}, \psi(\hat{x}_k) = 0, k = \overline{0, m},$$

де c — середня точка відрізка апроксимації.

Список літератури

Калайда, О. Ф. (2000). *Чисельні методи: Навчальний посібник*. Київ: ВПЦ «Київський університет».

Про прості методи знаходження нулів скалярної функції

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
aleksei_kalaida@comcast.net, alekseykalaida@gmail.com

Досліджено метод хорд, доведено його двосторонність до методу дотичних, побудовано нові методи: метод двох дотичних, методи перпендикуляра до хорди з точки перетину дотичної з віссю абсцис та з точки перетину дотичних.

Ключові слова: функція, корінь, нуль, хорда, січна, метод, перпендикуляр, похибка.

1. Про похибку методу хорд. Метод хорд є, поряд з методом ділення навпіл, найпростіший та найневибагливіший серед методів знаходження простих коренів $\alpha \in (x_0, x_1)$ скінченного рівняння $f(x) = 0$ (придатний і для кратних коренів шляхом застосування до функції f / f' як такої, що має лише прості нулі). Наведемо новий вираз його похибки.

Оскільки при $x \in (x_0, x_1)$ (Калайда, 2000)

$$f(x) = f_0 + (x - x_0)\Delta f / \Delta x + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2} f''(c(x)),$$

то при $x = \alpha$ ($f(\alpha) = 0$, вважаємо, що $x_0 < x_1$, $x_0 - x_1 = h$) дістаємо

$$\alpha = x_0 - f_0 \frac{h}{\Delta f} - \frac{(\alpha - x_0)(\alpha - x_1)}{2} \frac{f''(c(\alpha))}{\Delta f}, \quad c(\alpha) \in (x_0, x_1), \quad \tilde{\alpha} = x_0 - f_0 \frac{h}{\Delta f}.$$

Отже,

$$\alpha - \tilde{\alpha} = -\frac{(\alpha - x_0)(\alpha - x_1)(x_1 - x_0)}{2} \frac{f''(c(\alpha))}{f_1 - f_0} = -\frac{(\alpha - x_0)(\alpha - x_1)}{2} \frac{f''(c(\alpha))}{f'(c_1(\alpha))},$$

$c_1(\alpha) \in (x_0, x_1)$.

Тому

$$|\alpha - \tilde{\alpha}| \leq \frac{(x_1 - x_0)^2}{8} \max \left| \frac{f''(x)}{f'(x)} \right|, \quad x \in (x_0, x_1).$$

Для порівняння у випадку методу дотичних з рівності (формули Тейлора з центром x_0)

$$f(x) = f_0 + (x - x_0)f'_0 + \frac{(x - x_0)^2}{2} f''(c_2(x)), \quad c_2(x) \in (x_0, x),$$

при $x = \alpha$ ($f(\alpha) = 0$) маємо

$$\alpha = x_0 - f_0 / f'_0 - \frac{(\alpha - x_0)^2}{2} \frac{f''(c_2(\alpha))}{f'_0},$$
$$\tilde{\alpha} = x_0 - \frac{f_0}{f'_0}, \quad \alpha - \tilde{\alpha} = -\frac{(\alpha - x_0)^2}{2} \frac{f''(c_2(\alpha))}{f'_0}.$$

З виразів для похибки цих методів слідує аналітичне підтвердження геометричної інтерпретації цих методів, що в достатньо малому околі кореня вони двосторонні (оскільки $(\alpha - x_0)(\alpha - x_1) < 0$).

Як бачимо, при застосуванні обох методів (з-за двосторонності їх корисно поєднувати також з методом поділу навпіл) процес наближення до шуканого кореня буде значно швидшим. Сам метод хорд з-за фіксованості відрізка $[\alpha, x] \vee [x_0, \alpha]$ у процесі ітерацій являється методом першого порядку. Однак в парі з методом дотичних ця вада зникає, і тому обидва методи являються методами другого порядку. До методу дотичних співмірним являтиметься також так званий метод паралельних хорд

$$\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha} - f(\tilde{\alpha})h / \Delta f,$$

де $\tilde{\alpha}$ — наближення за методом дотичних, а величина $h / \Delta f$ — стала у процесі ітерацій, визначається на першому кроці методу хорд.

2. Метод перпендикуляра до хорди 1. За допомогою наближення $\tilde{\alpha}$ кореня методом хорд та точки перетину з хордою перпендикуляра до неї, проведеного з точки $a = x_0 \vee x_1 \Rightarrow f(\tilde{\alpha})f(a) < 0 \Rightarrow \alpha \in (\tilde{\alpha}, a)$, дістанемо краще наближення кореня α , ніж за методом хорд

$$\hat{\alpha} = a + hf(a) / \Delta f,$$

за формулою

$$\tilde{\alpha} = \frac{x_1 h^2 + x_0 (\Delta f)^2 - f_0 h \Delta f}{h^2 + (\Delta f)^2}.$$

Можна також скористатись середнім арифметичним цих наближень. Після цього легко знайти новий інтервал належності шуканого кореня.

3. Метод перпендикуляра до хорди 2. Метод дотичних також дозволяє добути покращення наближення за методом хорд. Для цього досить з точки перетину дотичної з віссю абсцис провести перпендикуляр до хорди та визначити абсцису точки перетину хорди зі згаданим перпендикуляром. У результаті матимемо (можливо, і двостороннє до методу дотичних) наближення (краще, ніж за методом хорд)

$$\bar{x} = x_0 - \frac{h \Delta f}{h^2 + (\Delta f)^2} \left((x_0 + x_1) \frac{\Delta f}{h} - f_0 - \frac{hf_1}{f'_1 \Delta f} \right).$$

4. Метод двох дотичних. Розглянемо так званий метод двох дотичних. Суть його в тому, що за наближення кореня приймається абсциса точки перетину дотичних до графіка функції в точках x_0, x_1 . Вона, можливо, знаходитиметься й з іншого боку від кореня, ніж точка перетину хорди з віссю абсцис. Його перевага перед методом дотичних у тому, що він не вимагає необхідності вибору початкової точки (наближення кореня) для запобігання збільшення похибки наступного наближення порівняно з похибкою попереднього наближення

за допомогою добутку похідних першого та другого порядку (Калайда, 2000). Наведемо схему даного методу.

Легко переконатись, що відстань від точки x_0 до абсциси точки перетину дотичних до графіка кривої у точках $(x_0, f_0), (x_1, f_1) \in$

$$\rho h = \rho(x_1 - x_0), \rho = \frac{f'_1 - \Delta f / h}{\Delta f'}.$$

Тому за методом двох дотичних наступним за x_0 наближенням кореня є

$$\tilde{\alpha} = x_0 + h \frac{f'_1 - \Delta f}{\Delta f'}.$$

Якщо при цьому

$$f_0 + h\rho f'_0 < 0, h = x_1 - x_0,$$

то за методом двох дотичних матимемо краще наближення, ніж за методом дотичних, у супротивному випадку — навпаки. Відмітимо, що метод двох дотичних придатний і у випадку відокремлених (за допомогою зміни знаку функції $\varphi = f / f'$ як такої, що має лише прості нулі) коренів парної кратності. Тому при невідомій кратності метод можна застосовувати для функції φ^2 .

Відмітимо, що для суми функції f та лінійної функції величина ρ та сама. Крім того для цієї величини вірне наближення

$$\rho \approx \sqrt[3]{f''_1} / (\sqrt[3]{f''_0} + \sqrt[3]{f''_1}),$$

яке, як бачимо, також не залежить від лінійної складової функції f .

5. Метод перпендикуляра до хорди 3. За допомогою наближення кореня методом двох дотичних та абсциси точки перетину перпендикуляра до хорди, проведеного з точки перетину дотичних, теж дістанемо наближення кореня (можливо, краще ніж за методом хорд).

Таким чином, метод хорд, метод дотичних та метод двох дотичних співпрацюють з відповідними методами перпендикуляра, а також з методом паралельних хорд.

На завершення відзначимо, що ефективними та потужними методами розв'язування скінченних рівнянь являються багатоточкові (машинні) методи, утворювані за допомогою колокант оберненої функції, як за простими (Калайда, 2000), так і за кратними вузлами (методи Чебишова). Усі такі методи, крім того, придатні й для знаходження нулів аналітичних функцій комплексної змінної.

Список літератури

Калайда, О. Ф. (2000). *Чисельні методи: Навчальний посібник*. Київ: ВПЦ «Київський університет».

Про рекурсивні диференціальні рівняння

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
aleksei_kalaida@comcast.net, alekseykalaida@gmail.com

Вводяться до розгляду так звані рекурсивні диференціальні рівняння — рівняння з елементами-диференціальними виразами, що належать до класів рівнянь з понижувальним порядком або до класу інтегровних в квадратурах рівнянь.

Ключові слова: диференціальне рівняння, рекурсивне, пониження порядку, інтегровність.

Відомі ряд класів неявних звичайних диференціальних рівнянь, що допускають пониження їх порядку або інтегровних у квадратурах (Ляшко та ін., 1987; Гай & Калайда, 1997). Кількість таких класів можна значно збільшити (наприклад, нерозглядувані до цього неявні рівняння вигляду

$$F(y^{(m)} + f(x)) = 0, F(x, y^{(m)} + f(x)) = 0$$

тощо). Розгляньмо так звані рекурсивні диференціальні рівняння, елементами (рекурсіями) яких є диференціальні вирази з понижувальним порядком або інтегровні диференціальні вирази. Ці класи рекурсивних диференціальних рівнянь теж належать до тих же класів, до яких належать їх складові елементи. Цим самим ми дістаємо значне розширення множини рівнянь з понижувальним порядком або, відповідно, множини інтегровних у квадратурах рівнянь.

Розглянемо рекурсивне диференціальне рівняння

$$R_1(R_2(\dots R_k(y))) = 0 \quad (1)$$

з елементами $R_i(\dots R_k(y))$ або з понижувальним порядком, або інтегровними. У результаті з (1) дістанемо рекурентну систему диференціальних рівнянь

$$R_i(R_{i-1}(\dots R_k(y))) = \varphi_i(x), \quad i = \overline{1, k}, \quad (2)$$

(отже, і рекурентні рівняння виду (2) теж варті уваги), кожне з яких або допускає пониження його порядку, або воно інтегровне в квадратурах.

Так, наприклад, рівняння

$$R(y)' + p(x)R(y) = q(x),$$

де $R(y)$ — один з інтегровних в квадратурах диференціальних виразів, зводиться до інтегровного і квадратурах рівняння

$$R(y) = e^{-\int p(x)dx} \left(C + \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx \right).$$

Список літератури

- Головач, Г. П., & Калайда, О. Ф. (1997). *Збірник задач з диференціальних та інтегральних рівнянь: Навчальний посібник*. Київ: Техніка.
- Ляшко, И. И., Гай, Я. Г., Боярчук, А. К., Калайда, А. Ф. (1987). *Математический анализ: учебник (Ч. 3)*. Киев: Вища школа.

Простіші способи відновлення функції за її повним диференціалом

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
aleksei_kalaida@comcast.net, alekseykalaida@gmail.com

На основі формул загального інтеграла у формі Коші для рівняння в повних диференціалах будуються простіші формули для загальний інтеграла рівняння.

Ключові слова: рівняння, повний диференціал, загальний інтеграл.

Розглянемо відомі (Ляшко та ін., 1987) формули загального інтеграла у формі Коші

$$u(x, y) - u(x_0, y_0) = \int_{x_0}^x P(s, y_0) ds + \int_{y_0}^y Q(x, t) dt = 0, \quad (1)$$

$$u(x, y) - u(x_0, y_0) = \int_{x_0}^x P(s, y) ds + \int_{y_0}^y Q(x_0, t) dt = 0. \quad (2)$$

рівняння в повних диференціалах

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (3)$$

Цими формулами доцільно користуватись лише при чисельному обчисленні наявних в них інтегралів. Якщо ж згадані інтеграли задані в елементарних функціях, то ці формули надто трудомістські. Наведемо для цього випадку дві простіші формули загального інтеграла рівняння (3).

1. Якщо в рівнянні (3)

$$P(x, y) = \hat{P}(x, y) + p(x), P'_y = Q'_x \Rightarrow \hat{P}'_y = Q'_x,$$

то з рівності (1) випливає, що

$$u(x, y) = \int p(x)dx + \int Q(x, y)dy = C \quad (4)$$

є загальний інтеграл цього рівняння.

Приклад 1. Розглянемо рівняння в повних диференціалах (воно, очевидно, належить до класу (4))

$$(\cos(x + y) + x)dx + \cos(x + y)dy = 0.$$

За формулою (4) маємо

$$u(x, y) = \sin(x + y) + \frac{x^2}{2} = C.$$

2. Якщо ж в (3)

$$Q(x, y) = \hat{Q}(x, y) + q(y), P'_y = Q'_x \Rightarrow P'_y = \hat{Q}'_x,$$

то з рівності (2) слідує, що загальний інтеграл рівняння (3) має вигляд

$$\int P(x, y)dx + \int q(y)dy = C. \quad (5)$$

Приклад 2. Роглянемо рівняння $e^{x+y}dx + (e^{x+y} + 2y)dy = 0$ (належить до класу рівнянь (5)). За формулою (5) маємо його загальний інтеграл

$$u(x, y) = e^{x+y} + y^2 = C.$$

Список літератури

Ляшко, И. И., Гай, Я. Г., Боярчук, А. К., & Калайда, А. Ф. (1987). *Математический анализ: Учебник* (Ч. 3). Киев: Вища школа.

Явний рекурентний автономний метод розв'язування задачі Коші для лінійних нормальних систем

О. Ф. Калайда

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
aleksei_kalaida@comcast.net, alekseykalaida@gmail.com

За допомогою двоточкового уточнення до формули Сімпсона формули трапецій та інтегрально-дискретної квадратурної формули автора побудовано дві явні схеми рекурентного процесу у вигляді рекурентних лінійних систем алгебричних рівнянь для розв'язування задачі Коші для лінійних нормальних систем диференціальних рівнянь.

Ключові слова: задача, формула, система, рівняння.

Розглядається задача Коші (узагалі кажучи, векторна)

$$y' = p(x)y + q(x), y(x_0) = y_0. \quad (1)$$

Для її чисельного інтегрування побудуємо дві явні автономні (двоточкові) схеми четвертого (локального п'ятого) порядку.

Схема 1. За допомогою двоточної квадратурної формули

$$\tilde{J}(f) = h \frac{f_0 + f_1}{2} - \frac{h^2}{12}(f_1' - f_0'), r(f) = J(f) - \tilde{J}(f) = O(h^5) = \frac{h^5}{720} f_0^{(IV)} + \dots,$$

еквівалентної, як бачимо, за порядком формулі Сімпсона, зінтегрувавши рівняння (1), дістанемо рекурентну автономну систему лінійних алгебричних рівнянь

$$A_{n+1}y_{n+1} = B_n y_n + b_n, \quad (2)$$

де

$$A_{n+1} = E - \frac{h_n}{2} p_{n+1} + \frac{h_n^2}{12}(p_{n+1}' + p_{n+1}^2), B_n = E + \frac{h_n}{2} + \frac{h_n^2}{12}(p_n' + p_n^2),$$

$$b_n = \frac{h_n}{2}(q_n + q_{n+1}) - \frac{h_n^2}{12}(q_{n+1}' - q_n' + p_{n+1}q_{n+1} - p_n q_n), h_n = x_{n+1} - x_n,$$

(E — одинична матриця), причому вираз

$$-\frac{h_n^2}{12}((py + q)_{n+1} - (py + q)_n)$$

слугуватиме контролем точності $O(h_i^3)$ одержуваних на кожному кроці результатів.

Схема 2. За допомогою інтегрально-дискретної квадратурної формули (Калайда, 1968, 2000)

$$\tilde{J}(fg) = \frac{1}{h} J(f)J(g) + \frac{h}{12} \Delta f \Delta g, J(fg) - \tilde{J}(fg) = O(h^5), J(\alpha) = \int_a^{a+h} \alpha(x) dx, \quad (3)$$

знову ж таки, зінтегрувавши рівняння (1), дістанемо рекурентну лінійну алгебричну систему виду (2)

$$\widehat{A}_{n+1}y_{n+1} = \widehat{B}_n y_n + \widehat{b}_n,$$

де

$$\widehat{A}_{n+1} = E - \frac{h_n}{12}(\Delta p_n + \Delta P_n p_{n+1}), \quad \widehat{B}_n = E - \frac{h_n}{12}(\Delta p_n + \Delta P_n p_{n+1}),$$

$$\widehat{b}_n = \Delta Q_n + \frac{h_n}{12} \Delta P_n \Delta q_n.$$

$$\Delta P_n = \int_{\Delta_n} p(x) dx, \quad \Delta Q_n = \int_{\Delta_n} q(x) dx, \quad \Delta_n = [x_n, x_n + h_n].$$

При цьому, як і в першій схемі, матимемо наближений розв'язок з локальною похибкою $O(h_i^5)$. А контролювати точність результату з похибкою $O(h_i^3)$ мож-

на за допомогою виразу (другого доданку формули (3)) $\frac{h_n}{12} \Delta p_n \Delta y_n$

Зауважимо, що якщо у формулі (3) використати лише перший доданок, то дістанемо відомий метод осереднення коефіцієнтів (елементів $p_{ij}(x)$ матриці $p(x)$) з похибкою $O(h_i^3)$ (кандидатська дисертація проф. І. М. Ляшенка, Київський національний університет імені Тараса Шевченка).

Список літератури

- Калайда, А. Ф. (1968). Об одной квадратурной формуле. *Сб. Вычисл. и прикл. матем.*, (6), 131–136.
- Калайда, О. Ф. (2000). *Чисельні методи: Навчальний посібник*. Київ: ВПЦ «Київський університет».

Про деякі особливості викладання аналітичної геометрії англомовним студентам НАУ

О. В. Карупу, Т. А. Олешко, В. В. Пахненко

Національний авіаційний університет, Київ, Україна
karupu@ukr.net, 111ota@ukr.net, pobeda586@gmail.com

Проаналізовано особливості викладання англійською мовою окремих розділів аналітичної геометрії іноземним та українським студентам технічних спеціальностей у Національному авіаційному університеті. Надано рекомендації для покращення засвоєння студентами теоретичного матеріалу та вироблення ними навичок розв'язування задач.

Ключові слова: викладання аналітичної геометрії, викладання вищої математики, викладання математики англійською.

Оскільки англійська мова є однією з офіційних мов ІКАО (Міжнародна організація цивільної авіації), для майбутніх фахівців у галузі авіації дуже важливою є можливість отримання професійної освіти англійською мовою. У НАУ з 1999 року успішно діє Програма «Вища освіта іноземною мовою». В англомовних групах мають можливість навчатися як іноземні, так і українські студенти. Вибір мови навчання студентами залежить від їх мовної підготовки та планів на майбутнє працевлаштування. Розвиток академічної мобільності в останні роки сприяє впровадженню навчання англійською мовою і в інших ЗВО України.

Перед викладачами, задіяними в роботі в англомовних групах, виникає ціла низка питань щодо специфіки викладання різних дисциплін, зокрема математичних, англійською мовою студентам, для яких ця мова не є рідною. Загальні проблеми викладання вищої математики англійською мовою студентам Національного авіаційного університету розглядалися в Карупу та ін. (2013). Викладання вищої математики англійською мовою для іноземних студентів будівельних спеціальностей Тернопільського національного технічного університету ім. Івана Пулюя вивчали Федак та ін. (2017). Застосування інформаційних технологій до математичної освіти ІТ-спеціалістів в англомовних академічних групах НАУ розглядалися в Карупу та ін. (2019б). Особливості викладання вищої математики англійською мовою студентам комп'ютерних спеціальностей у Харківському національному економічному університеті ім. Семе́на Кузне́ця вивчали Рибалко та Степанова (2020).

Національний авіаційний університет є одним з найпотужніших авіаційних закладів вищої освіти, добре відомим не тільки в Україні, але і за її межами. За останні 50 років (відколи на навчання в НАУ приймаються іноземці) підготовлено більш як 200 000 висококласних спеціалістів для 160 країн. Інтеграція України у світову систему освіти посилює її роль у підготовці фахівців з інших країн. Кількість іноземних громадян у вищих навчальних закладах України збільшується з кожним роком. Тому досить важливим є вивчення різноманітних питань, пов'язаних з навчанням іноземних студентів. Проблеми розвитку систе-

ми підготовки іноземних студентів в Україні розглядалися Довгодько (2012), адаптація студентів-іноземців до вивчення природничо-математичних дисциплін у закладах вищої освіти вивчалася Зінонос та Віхровою (2019), методичні основи формування математичної культури студентів розглядалися Трофименко (2005), викладання математики іноземним студентам технічних спеціальностей вивчалася Ічанською та Наливайко (2017). Викладання математичних дисциплін англійською мовою, особливості викладання вищої математики українським та іноземним студентам і проблеми викладання математичних дисциплін у мультинаціональних групах у Національному авіаційному університеті розглядалися Карупу та ін. (2012; 2013; 2018б).

Для студентів більшості технічних спеціальностей окремі питання аналітичної геометрії викладаються в складі відповідних розділів синтетичної дисципліни «Вища математика» і тільки для окремих спеціальностей, що потребують поглибленої математичної підготовки, студентам викладають окремо дисципліну «Лінійна алгебра та аналітична геометрія». Викладання аналітичної геометрії студентам НН ІАН НАУ розглядалося Пахненко (2017а; 2017б). Певні особливості викладання англійською мовою деяких розділів аналітичної геометрії розглядалися авторами в рамках дослідження викладання аналітичної геометрії (Карупу та ін., 2016), (Карупу та ін., 2019а) та в рамках дослідження викладання лінійної алгебри та аналітичної геометрії (Карупу та ін., 2018а).

Аналіз контингенту іноземних студентів, що навчаються в НАУ, показує, що вони є представниками різних систем освіти. Тому при викладанні математичних дисциплін для таких студентів необхідно враховувати особливості викладання елементарної математики в середніх школах відповідних країн. Крім того, оскільки для українських студентів (і для іноземних також) є важливим володіння спеціальною англійською термінологією, слід також підкреслювати певну специфіку термінів.

Значна частина проблем, що постають під час викладання аналітичної геометрії іноземним студентам, пов'язана з недостатнім рівнем шкільної підготовки переважної більшості цих студентів саме з геометрії, особливо зі стереометрії, а також з недоліками їхнього просторового мислення. Відносно кращою є ситуація для значної частини українських студентів.

Переважає більшість студентів англійськомовних груп в цілому непогано засвоюють мікромодуль «Пряма на площині». Набагато складнішим для засвоєння іноземними студентами є мікромодуль «Площина і пряма у просторі». При роботі в таких групах бажано достатню увагу приділяти виробленню навичок розпізнавання основних форм рівнянь площини і прямої в просторі. При чіткому викладі викладачем алгоритму розпізнавання найпростіших їх типів і алгоритмів переходу між різними формами рівнянь значна частина іноземних студентів достатньо добре засвоює і застосовує ці навички.

Відмітимо, що засвоєння мікромодуля «Криві другого порядку» є також порівняно непоганим, хоча деякі труднощі виникають у певній частині іноземних студентів при знаходженні характеристик кривих. Набагато складнішим

для засвоєння іноземними студентами є мікромодуль «Поверхні другого порядку». При цьому основним чинником такої ситуації є погане просторове мислення, характерне для переважної більшості цих студентів. Для справедливості зауважимо, що засвоєння цього матеріалу є складним і для значної частини українських студентів. При викладанні цього мікромодуля в таких групах бажано достатню увагу приділяти виробленню навичок розпізнавання видів поверхонь другого порядку за їх канонічними рівняннями. Відмітимо при цьому, що при чіткому викладі викладачем алгоритму розпізнавання типів поверхонь значна частина іноземних студентів достатньо добре засвоює навички застосування цих алгоритмів. Особливо ефективним є використання різноманітних опорних конспектів, поєднане з організацією обговорення алгоритму студентами на практичному занятті.

Особливо важкими для вивчення іноземними студентами (на жаль, і українськими також) є мікромодуль «Дослідження алгебраїчних рівнянь кривих другого порядку» і особливо мікромодуль «Дослідження алгебраїчних рівнянь поверхонь другого порядку». Ці складнощі, як правило, є наслідком недостатнього рівня навичок оперування квадратичними формами, низького рівня аналітичних навичок при застосуванні квадратичних форм і особливо поганим відчуттям геометричної суті розв'язуваної задачі. Українські студенти, особливо ті, що навчалися в середній школі в класах з поглибленим вивченням математики, показують дещо кращі результати.

Критично необхідною для переважної більшості як іноземних, так і українських студентів є наявність англомовних опорних матеріалів та англомовних посібників. Розділи, пов'язані з викладанням в НАУ аналітичної геометрії англійською мовою студентам технічних спеціальностей, супроводжуються двома базовими англомовними посібниками. Крім того, теорію квадратичних форм та її застосування до дослідження кривих та поверхонь другого порядку, наведено в англомовному посібнику (Grebeniuk & Karuru, 2004).

Аналіз практики викладання в Національному авіаційному університеті англійською мовою окремих розділів аналітичної геометрії іноземним та українським студентам, проведений авторами, дає можливість сформулювати рекомендації по роботі викладача в англомовних групах. Рекомендується детальна алгоритмізація процесу розв'язування типових задач і використання різноманітних опорних матеріалів. Також ми вважаємо корисним рекомендувати студентам активне використання систем комп'ютерної математики та пошукових систем. Крім того, для кращого сприйняття студентами навчального матеріалу дуже важливим є посилення на його зв'язок з авіаційною проблематикою.

Список літератури

- Довгодько, Т. І. (2012). Розвиток системи підготовки іноземних студентів в Україні. *Вища освіта України*, (3), С. 102–104.
- Grebeniuk, M. F. & Karuru, O. W. (2004). *Bilinear and quadratic forms in geometry: Manual*. Kyiv: NAU.

- Зінонос, Н. О. & Віхрова, О. В. (2019). Адаптація студентів-іноземців до вивчення природничо-математичних дисциплін у закладах вищої освіти: монографія. *Теорія та методика навчання фундаментальних дисциплін у вищій школі*. Кривий Ріг: Видавничий центр Криворізького національного університету, XIV (1(14)): спецвипуск «Монографія в журналі».
- Ічанська, Н. В. & Наливайко, Л. Г. (2017). Викладання математики іноземним студентам технічних спеціальностей. *Витоки педагогічної майстерності. Серія: Педагогічні науки*, 20, 116–120.
- Карупу, О. В., Олешко, Т. А. & Пахненко, В. В. (2012). Про викладання математичних дисциплін англійською мовою іноземним студентам. *Східно-Європейський журнал передових технологій*, 56 (2/2), 11–14.
- Карупу, О. В., Олешко, Т. А. & Пахненко, В. В. (2013). Аналіз практики викладання вищої математики українським та іноземним студентам в Національному авіаційному університеті. *Science and Education a New Dimension: Pedagogy and Psychology*, 5, 88–92.
- Карупу, О. В., Олешко, Т. А. & Пахненко, В. В. (2016). Про викладання деяких питань аналітичної геометрії в рамках англійського проекту НАУ. *Вісник Черкаського університету. Серія: Педагогічні науки*, (17), 57–64.
- Карупу, О. В., Олешко, Т. А. & Пахненко, В. В. (2018a). Про викладання лінійної алгебри та аналітичної геометрії англійським студентам технічних спеціальностей в НАУ. *Фізико-математична освіта*, 18(4), 59–64. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2018-018-4-009>
- Карупу, О. W., Oleshko, T. A. & Pakhnenko, V. V. (2018b). On some aspects of modeling of professional activity of future aviation engineer in teaching of mathematical disciplines in multinational groups. In *Proceedings of the Eighth World Congress «Aviation in the XXI-st century»*, Kyiv, October 12–15 (p. 4.3.15–4.3.19). Kyiv: NAU.
- Карупу, О. В., Олешко, Т. А. & Пахненко, В. В. (2019a). Про особливості викладання окремих розділів аналітичної геометрії англійським студентам Національного авіаційного університету. *Фізико-математична освіта*, (4), 61–67. <https://doi.org/10.31110/2413-1571-2019-022-4-010>
- Карупу, О. W., Oleshko, T. A., Pakhnenko, V. V. & Pashko, A. O. (2019b). Applying information technologies to mathematical education of IT specialists in English-speaking academic groups. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics*. (4), 70–75.
- Пахненко В. В. (2017a). Про особливості викладання аналітичної геометрії студентам НН ІАН в рамках програми «Вища освіта іноземною мовою». У *Матеріалах 13 Міжнародної науково-технічної конференції «ABIA-2017», Київ, 19–21 квітня* (с. 7.66–7.69). Київ: НАУ.
- Пахненко В. В. (2017б). Про викладання окремих питань аналітичної геометрії англійським студентам НН ІАН НАУ. *Сучасна освіта та інтеграційні процеси. У Збірнику наукових праць Міжнародної науково-методичної конференції, Краматорськ, 22–23 листопада* (с. 165–167). Краматорськ: ДДМА.
- Рибалко А. П., Степанова К. В. (2020). Особливості викладання вищої математики англійською мовою студентам комп'ютерних спеціальностей. *Професіоналізм педагога: теоретичні й методичні аспекти*. Слов'янськ, (12), 33–44.
- Трофименко В. І. (2005). Методичні основи формування математичної культури студентів технічного університету. *Науковий часопис НПУ імені МП Драгоманова. Серія 2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання*, 2(9), 278–287.
- Федак С. І., Романюк Л. А., Федак С. А. (2017). Викладання предмета «Вища математика» англійською мовою для іноземних студентів будівельних спеціальностей. *Наукові записки. Серія: Педагогічні науки. Кропивницький*, (156), 106–111.

Про одну комбінаторну задачу

С. В. Левізов, І.Ф. Курбико

Vladimir state university, Vladimir, Russia

levizov@rambler.ru

Викладається метод оцінки ймовірності одержання «щасливого квитка» для випадків з 4- значними та 6- значними номерами.

Ключові слова: «щасливий квиток», розкладання полінома, ділення «куточком», формула Маклорена, біноміальні коефіцієнти.

Визначимо (або нагадаємо), що «щасливим квитком» будемо називати таку послідовність (складену з парної кількості цифр), для якої виконана умова: суми цифр першої та другої половини цієї послідовності збігаються.

Розгляньмо спочатку таке питання: скількома способами можна зібрати суму, рівну десяти, кидаючи гральну кістку (кубик) тричі?

Нескладно зрозуміти, що це питання рівнозначне такому: яким буде коефіцієнт при x^{10} в розкладі многочлена

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^3?$$

Ми розв'язуємо це таким чином: перетворюючи останній вираз, маємо, що

$$\begin{aligned} (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^3 &= x^3 \cdot (1 + x + \dots + x^5)^3 = \\ &= \frac{x^3 \cdot (x^6 - 1)^3}{(x - 1)^3} = \frac{x^{21} - 3x^{15} + 3x^9 - x^3}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}. \end{aligned}$$

Ділячи «куточком», знаходимо, що шуканий коефіцієнт дорівнює 27.

Зі сказаного ясно, що якщо взяти поліном виду

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^9)^2,$$

то коефіцієнт при x^m буде дорівнювати кількості способів розбивки числа m на два таких доданки, кожний з яких приймає значення від нуля ($1 = x^0$) до 9.

Те ж саме можна сказати про коефіцієнт при $(x)^{-m}$ у виразі

$$(1 + x^{-1} + x^{-2} + \dots + x^{-9})^2.$$

Значить, якщо нам задана послідовність з чотирьох цифр (чотирьох однозначних чисел!) — таких, що сума двох перших (m) дорівнює сумі двох останніх ($-m$), то загальна кількість таких послідовностей буде дорівнювати

коефіцієнту при x^0 у виразі виду

$$\begin{aligned} (1 + x + x^2 + \dots + x^9)^2 \cdot (1 + x^{-1} + x^{-2} + \dots + x^{-9})^2 &= \\ = (1 + x + x^2 + \dots + x^9)^2 \cdot x^{-18} \cdot (1 + x + x^2 + \dots + x^9)^2 &= \\ = (x)^{-18} \cdot (1 + x + x^2 + \dots + x^9)^4. \end{aligned}$$

Звідси зрозуміло, що коефіцієнт при $(x)^0$ дорівнює коефіцієнту при $(x)^{18}$ у виразі

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^9)^4 = \frac{(1 - x^{10})^4}{(1 - x)^4}.$$

Цей коефіцієнт простіше за все обчислити розкладаючи в ряд функцію

$$f(x) = \frac{1}{(1 - x)^4}.$$

Використовуючи формулу Маклорена, маємо

$$f^{(k)}(x) = 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (4 + k - 1) \cdot (1 - x)^{-4-k},$$

тобто

$$f^{(k)}(0) = 4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (k + 3) \text{ и } \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (k + 3)}{k!} = \frac{(k + 3)!}{3!k!} = C_{k+3}^3,$$

де C_{k+3}^3 — відповідний біноміальний коефіцієнт.

Отже,

$$(1 - x)^{-4} = 1 + C_4^3 \cdot x + C_5^3 \cdot x^2 + \dots + C_{21}^3 \cdot x^{18} + x^{19} \cdot F(x),$$

де $F(x)$ — нескінченна сума від'ємних степенів x .

Тому

$$\begin{aligned} (1 - x^{10})^4 \cdot (1 - x)^{-4} &= \\ &= (1 - C_4^1 \cdot x^{10} + C_4^2 \cdot x^{20} - C_4^3 \cdot x^{30} + C_4^4 \cdot x^{40}) \times \\ &\times (1 + C_4^3 \cdot x + C_5^3 \cdot x^2 + \dots + C_{21}^3 \cdot x^{18}) + (1 - x)^{10} \cdot x^{19} \cdot F(x). \end{aligned}$$

Коефіцієнти при x^{18} в обох частинах рівності повинні співпадати, а у правій частині цей коефіцієнт легко обраховується — він дорівнює числу

$$C_{21}^3 - C_4^1 \cdot C_{11}^3 = 670.$$

Це і є кількість «щасливих» номерів зі всіх можливих 4-значних «квитків» (тобто з 10000 загальної кількості). Ймовірність одержання такої «комбінації» дорівнює 0,067.

Аналогічно вирішується питання в разі шестизначного номера. Беремо поліном

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^9)^3,$$

тоді коефіцієнт при x^m (в його розкладі по степеням x) буде дорівнювати кількості способів розкладу числа m на три невід'ємних доданки. Тоді для послідовності із шести цифр (у якій сума трьох перших збігається із сумою трьох останніх) — побудуємо поліном такого виду:

$$\begin{aligned}
& (1 + x + x^2 + \dots + x^9)^3 \cdot (1 + x^{-1} + x^{-2} + \dots + x^{-9})^3 = \\
& = (1 + x + x^2 + \dots + x^9)^3 \cdot x^{-27} \cdot (1 + x + x^2 + \dots + x^9)^3 = \\
& = (x)^{-27} \cdot (1 + x + x^2 + \dots + x^9)^6.
\end{aligned}$$

Загальна кількість «щасливих» послідовностей буде дорівнювати коефіцієнту при x^0 в розкладі цього полінома, а значить — коефіцієнту при x^{27} в розкладі виразу

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^9)^6 = \frac{(1 - x^{10})^6}{(1 - x)^6}.$$

Знову користуючись методом розкладу в ряд для функції

$$f(x) = \frac{1}{(1 - x)^6},$$

одержимо:

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (6 + k - 1)}{k!} = \frac{(k + 5)!}{5!k!} = C_{k+5}^5.$$

Розмірковуючи, як і вище, перемножуємо $(1 - x^{10})^6 \cdot (1 - x)^{-6}$ і обчислюємо шуканий коефіцієнт: він виявляється рівним числу

$$C_{32}^5 - C_6^1 \cdot C_{22}^5 + C_6^2 \cdot C_{12}^5 = 55252.$$

Відповідна ймовірність дорівнює

$$\frac{55252}{10^6} \approx 0,055 \text{ (або 5,5\%)}.$$

Деякі проблемні аспекти викладання теорії числових рядів у курсі вищої математики для студентів технічних спеціальностей

В. К. Репета¹, Л. А. Репета²

¹ Національний авіаційний університет, Київ, Україна

² КІІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

repetavk@gmail.com, repetala@bigmir.net

У статті проведено аналіз проблем і помилок, які виникають під час вивчення студентами теорії числових рядів. Запропоновано можливі шляхи усунення цих проблем.

Ключові слова: числовий ряд, границя послідовності, частинна сума, збіжність, сума ряду, ознаки збіжності, гармонічний ряд.

Важливу роль у математичній підготовці фахівців різних напрямів, зокрема, й інженерного профілю, відіграє теорія числових та функціональних рядів як невід’ємна складова курсу вищої математики. Ряди є важливим математичним апаратом для вивчення та дослідження функцій, проведення наближених обчислень. Певне уявлення у студентів про числові ряди (можливо без уживання цього терміну) сформовано ще в дев’ятому класі на уроках алгебри під час вивчення арифметичної та геометричної прогресій. Розв’язуючи задачу про перетворення нескінченного періодичного десяткового дробу у звичайний дріб за допомогою нескінченно спадної геометричної прогресії, по суті, оперують з геометричним рядом. Окрім цього, у старших, здебільшого фізико-математичних, класах, учні зустрічалися із завданнями, іноді олімпіадного характеру, на знаходження суми числового виразу $f(1) + f(2) + \dots + f(n)$. За різних значень n ці суми є частинними сумами відповідного числового ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

У закладах вищої освіти технічного спрямування теорію рядів ґрунтовно розпочинають вивчати після вивчення диференціального та інтегрального числення функції однієї змінної. Необхідною базою для опанування теорії рядів незаперечно є теорія границь послідовностей, адже, за означенням числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

є збіжним, якщо існує скінченна границя $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ послідовності частинних сум

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k.$$

Поняття границі послідовності фігурує також у формулюваннях багатьох теорем і тверджень.

На вивчення теорії числових і функціональних рядів відводиться обмежена кількість лекційних та практичних годин, здебільшого 10–14 годин на лекції і приблизно стільки ж — на практику, з яких на вивчення теорії числових рядів 4–6 годин на лекції і практичні заняття. Традиційно викладення матеріалу з теорії числових рядів здійснюється у такій послідовності:

- 1) основні поняття та означення, збіжність, приклади збіжних та розбіжних рядів;
- 2) властивості числових рядів;
- 3) необхідна ознака збіжності та достатня ознака розбіжності;
- 4) достатні ознаки збіжності знакододатних рядів;
- 5) знакозмінні ряди, ряд Лейбніца (ряд, у якого знаки сусідніх членів строго чергуються), ознака Лейбніца;
- 6) абсолютна й умовна збіжності.

Виокремимо деякі проблемні моменти, які щороку в тій чи іншій мірі кожен викладач спостерігає під час вивчення студентами теорії числових рядів.

1. Понятійний апарат теорії числових рядів (числовий ряд; збіжність ряду; сума ряду; знакозмінний ряд і його різновиди; абсолютна й умовна збіжності) для значної частини студентів є складним, особливо це стосується понять, пов'язаних зі знакозмінними рядами. Уже саме поняття числового ряду та його суми викликає в багатьох студентів певне нерозуміння, зокрема того, як це можна додати та ще й знайти суму нескінченної кількості доданків. Студентам слід пояснити, що насправді ніхто не додає нескінченну кількість доданків — це є неможливим. Насправді, розв'язання задачі визначення суми числового ряду складається з кількох кроків, на першому з яких потрібно записати й ретельно проаналізувати частинні суми ряду, спробувати подати загальний член ряду (відповідно й усі інші, починаючи від u_1 до u_{n-1}) так, щоб можна було частинну суму S_n «згорнути» до кількох доданків. Доцільно студентам навести та проілюструвати таке твердження.

Нехай потрібно знайти суму

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k,$$

де u_1, u_2, \dots, u_n — задані числа або функціональні вирази.

Якщо $f(k)$ — функція натурального аргументу k така, що

$$u_n = f(n) - f(n+1) \tag{1}$$

тоді

$$S_n = f(1) - f(n+1).$$

Аналогічно, якщо

$$u_n = f(n+1) - f(n), \tag{2}$$

тоді

$$S_n = f(n+1) - f(1).$$

Тут основна проблема — це правильний вибір функції $f(n)$. У загальному випадку представлення (1) чи (2) отримати не завжди просто, проте таке представлення завжди існує.

Може трапитися так, що

$$u_n = f(n+k) - f(n),$$

де k — деяке натуральне число, відмінне від 1.

Тоді

$$S_n = f(n+1) + f(n+2) + \dots + f(n+k) - f(1) - f(2) - \dots - f(k).$$

На другому кроці необхідно лише знайти границю $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ послідовності частинних сум заданого ряду і зробити висновок про його збіжність та суму.

2. Необхідна ознака збіжності: якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

збігається, то границя $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

На практиці часто можна спостерігати таку картину: на прохання викладача сформулювати цю ознаку, яка складається лише з одного рядка, студенти чомусь все переплутують і здебільшого кажуть навпаки: якщо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0,$$

то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_n$$

є збіжним. Цієї помилки студенти припускаються з року в рік.

Пояснення такого негативного феномену слід шукати насамперед у неувважності та небажанні осмислити формулювання ознаки — можливо, занадто воно коротке, щоб приділяти йому достатню увагу. Якщо ж разом з необхідною ознакою збіжності запитувати студентів ще й достатню ознаку розбіжності, то тоді багато студентів просто губляться. У цьому разі розгляд класичних рядів як гармонічного та геометричного дещо покращують ситуацію.

3. У курсі вищої математики для технічних спеціальностей розглядають зазвичай п'ять достатніх ознак збіжності знакододатних рядів (порівняння — перша й гранична, д'Аламбера, Коші — радикальна й інтегральна). Ці ознаки умовно можна об'єднати в дві групи: перша — ознаки порівняння, друга — ознаки д'Аламбера та Коші. Різниця між цими групами ознак очевидно полягає в тому, що для застосування ознак порівняння потрібно правильно вибрати еталонний ряд. А для цього потрібно, по суті, знати збігається чи розбігається початковий ряд. Тоді у студентів виникає слушне запитання: навіщо обґрунтовувати те, що й так вже відомо?

І все ж таки зауважимо, що серед двох ознак порівняння переважно зручнішою є гранична ознака. Це пов'язано з тим, що задача знаходження границі відношення двох виразів є більш стандартизованою, ніж задача їх порівняння. Під час застосування граничної ознаки можна використовувати широкий набір еквівалентних як нескінченно малих так і нескінченно великих величин.

Проте зустрічаються випадки, коли слід користуватися саме першою ознакою порівняння. Приміром, ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$$

легко дослідити на збіжність, якщо розглянути графіки функцій $y = \ln x$ та $y = x$. З графіків цих функцій видно, що для всіх додатних значень x справджується нерівність $\ln x < x$. Отже, для всіх натуральних n , починаючи з 2, правдиві нерівності

$$0 < \ln n < n \text{ і } \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}.$$

Оскільки гармонічний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

розбігається, то й заданий ряд також розбіжний.

Після дослідження цього ряду слушно запропонувати студентам дослідити на збіжність узагальнений ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^p n},$$

де p — довільна стала.

Щодо ознаки д'Аламбера зазначимо таке. Якщо для знакододатного ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1,$$

то це не дає відповіді про його збіжність. У цьому випадку потрібно застосовувати іншу ознаку. Чи можна наперед передбачити такий результат? Так, можна. Якщо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1,$$

то це означає, що члени u_n та u_{n+1} є еквівалентними, коли $n \rightarrow \infty$. І навпаки, якщо u_n та u_{n+1} є еквівалентними, коли $n \rightarrow \infty$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1.$$

Тому перед застосуванням ознаки д'Аламбера доцільно з'ясувати чи еквівалентні n -й та $(n + 1)$ -й члени знакододатного ряду, зокрема коли $n \rightarrow \infty$ еквівалентними є такі вирази $\ln n$ та $\ln(n + 1)$, поліноми k -го степеня $P_k(n)$ та $P_k(n + 1)$ тощо.

Приміром, ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n + 1) \ln^2 n}{n^3}$$

досліджувати за ознакою д'Аламбера не має сенсу.

Аби ознака д'Аламбера була продуктивною, необхідно, щоб загальний член ряду містив принаймні один вираз $a(n)$, який не еквівалентний виразу $a(n + 1)$, коли $n \rightarrow \infty$.

Висновки.

1. Кожну тему, і це стосується не лише теорії рядів, студенти зазвичай сприймають в обмеженому ракурсі, не розуміючи, що для розв'язання конкретної задачі часто можна використати знання з інших розділів математики, як вищій так і елементарній.

2. Використання на лекціях та практичних заняттях з теорії числових рядів елементів проблемного навчання сприяє більш глибокому розумінню теоретичного та практичного матеріалу.

3. Спрощення шкільної програми з алгебри та геометрії погіршує стартові можливості для успішного навчання у вузі, зокрема на технічних спеціальностях.

Математика у військовій справі

О. В. Терещук , І. А. Александров

*Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного,
Львів, Україна*

ok.flyud@gmail.com, vkontakte1901@gmail.com

Доцільним на нашу думку є вивчення «Вищої математики» із практичним спрямуванням у вищих військових закладах. Наведені приклади застосування математичних розрахунків у військовій справі та висвітлені приклади їх застосування в військах.

Ключові слова: військова справа, математика, теорія ймовірності, лінійна алгебра, військові задачі

Система військової освіти є складовою загальнодержавної системи вищої освіти. Саме вона є основним джерелом підготовки висококваліфікованих офіцерських кадрів та комплектування ними Збройних Сил України. ХХІ століття висуває істотно нові вимоги до освіти, значно підвищуючи її роль у суспільстві. Справа підготовки офіцера в умовах сьогодення є достатньо складним завданням, складність якого обумовлена в більшій мірі низьким рівнем мотивації вивчати предмети, які безпосередньо не пригодяться курсантам у ході служби. І запити такого роду є вимогою часу. Після здобуття освіти курсант приступає до служби і часу на здобуття додаткових знань немає. Офіцер повинен бути готовим до прийняття рівень і відповідальності за них уже й зараз.

Ще в давньоєгипетських папірусах і шумеро-вавілонських клинописних табличках ми можемо побачити поради щодо застосування математики у військовій справі. Для воєначальників та інтендантів наводилися зразки розв'язання практичних задач: процес визначення необхідної кількості воїнів для відкопування рову за певний час, за який час загін воїнів може здійснити переміщення на певну відстань.

З того часу математика у військовій справі невпинно продовжувала поширюватися та розвиватися. Відтак, сьогодні, інженерні війська використовують математичні розрахунки для визначення необхідної кількості машин для переправлення особового складу через водну перешкоду, необхідної кількості води для підрозділу. Навіть для визначення кількості необхідної вибухової речовини для перебиття сталевого канату потрібна математика. Проте царця наук застосовується далеко не тільки в інженерних військах. Наприклад, найбільше вона застосовується артилеристами у практиці стрільби, а також під час теоретичних досліджень способів підготовки та ведення вогню часто виникають такі питання: чи буде за певних умов мати місце влучення в ціль, чи завжди або як часто за цих умов буде мати місце влучення в ціль, скільки потрібно за цих умов витратити снарядів, щоб мати бажану кількість влучень, для того щоб, влучно вцілити по противнику із ствольної артилерії «Д-30» або реактивних систем залпового вогню типу «Смерч» чи «Ураган» потрібно використовувати теорію ймовірності (а саме одно з основних понять як «подія»). Під «подією» в теорії ймовірностей

розуміють усякий факт, що в результаті досліду може відбутися або не відбутися. Наприклад, у результаті пострілу може бути влучення в ціль. У практичній діяльності часто доводиться мати справу з випадковими подіями. Випадкові події, що є результатом таких випробувань, називають масовими або статистичними. Якщо подія має масовий характер, тобто вона виникає і під час повторення досліду, то цілком закономірне прагнення зафіксувати результат з кількісного боку з тим, щоб використовувати ці дані у подальшому. У деяких сучасних працях із теорії ймовірностей такі події називають стохастичними.

Єдиноможливими називають такі події, якщо в результаті проведеного випробування повинна виникнути хоча б одна з них. Наприклад, за двох пострілів по цілі, можлива поява однієї з трьох подій:

- 1) двох влучень у площу M ;
- 2) одного влучення й одного промаху;
- 3) двох промахів.

Усі ці події єдиноможливі. Вони повністю вичерпують явище.

Кажуть, що кілька подій у цьому досліді утворюють повну групу подій, якщо в результаті досліду неодмінно повинна виникнути хоча б одна з них. Протилежними подіями називають дві єдиноможливі та несумісні події.

Припустимо, відношення кількості m разів появи подій, що цікавить нас, до кількості проведених випробувань, називають частотою появи цієї події, тобто

$$r = \frac{m}{n}$$

де r — частота разів події, m — кількість разів появи події, що цікавить, n — кількість усіх проведених випробувань.

Розгляньмо приклад. Під час стрільби по цілі з 20 випущених 5 снарядів влучили в ціль. Яка буде частота влучення в ціль?

Загальна кількість пострілів $n = 20$, а кількість разів появи подій, що цікавить нас $m = 5$. Тоді частота влучення за цієї стрільби можна обчислити за формулою

$$r = \frac{m}{n} = \frac{5}{20}$$

Варто зазначити, що результат, одержаного після підстановки чисел m та n у формулу, звичайні арифметичні дії, по суті кажучи несприятливі. Якщо для простоти одержаний звичайний дріб скорочується або виражається десятковими дробом, необхідно зазначити кількість проведених випробувань. За прикладом:

$$r_n = \frac{5}{20}, \text{ то } r_{10} = 0,5.$$

З формули випливає, що $0 \leq r \leq 1$, а також і те, що частота є числом абстрактним. Уважне вивчення статистичних подій показує, що хоча частота появи багатьох випадкових подій змінюється зі зміною кількості випробувань, проти за деяких певних умов ця зміна частоти коливається в дуже вузьких межах.

Залежно від умов і наявних відомостей про обставини, за яких можлива поява тієї чи іншої події, варто розрізняти три способи обчислення чисельних значень імовірності події: класичний, статистичний, геометричний. Класичний спосіб обчислення чисельного значення ймовірності події ґрунтується на можливості відомості досліду до «схеми випадків». Під «випадками» будемо розуміти рівноможливі несумісні події, що утворюють повну групу. «Схема випадків» характерна тим, що всі випадки являють собою систему можливих і виключних один одного результатів досліду.

Якщо дослід зводиться до схеми випадків, то ймовірність події можна оцінити щодо відносної частки сприятливих випадків. Математично це може бути виражено так:

$$p = \frac{M}{N},$$

де p — імовірність появи події, що нас цікавить, M — кількість випадків, що сприяють появі події, що нас цікавить, N — кількість усіх рівноможливих випадків.

Іноді формулу вважають визначенням поняття ймовірності, що неправильно. За нею можна лише підрахувати ймовірність, якщо можна визначити кількість сприятливих і всіх рівноможливих випадків.

Проте математика застосовується не тільки в розрахунках артилеристів. Навіть тим самим військовим водолазам потрібно обчислити час виконання завдання під водою таким чином, щоб під час підйому з великих глибин їм вистачало повітря на зупинки на певних глибинах для виходу азоту з тіла. Не менш важливою є роль математики у створенні й удосконаленні нової бойової техніки. Візьмемо, наприклад, авіацію. Розв'язання вченими-математиками важливих проблем аеродинаміки дало змогу авіаконструкторам досягти блискучих результатів у вдосконаленні бойових літаків. Не оминула математика й саму тактику ведення бою. Наприклад, щоб поставити противника, що має 3-кратну чисельну перевагу, у програшну ситуацію, потрібно мати в 9 разів більш ефективну зброю. Також можна визначати необхідну кількість особового складу для досягнення поставленої мети, знаючи чисельність та бойову ефективність противника.

Теоретичний матеріал з лінійної алгебри також має широке застосування на практиці, наприклад, задача про виготовлення певної кількості різних видів зброї за наявних запасів сировини розглядається для випадку: три види сировини і три види зброї. Зрозуміло, що аналогічно можна розв'язати задачу, коли число рівнянь і число невідомих може складати кілька десятків, а то і сотень. Цю тему можна використати у картографії, у розвідці (для кодування повідомлень), у задачах при плануванні виробництва тощо.

Розглянемо модельний приклад: завод випускає три види зброї: I, II, III. При цьому застосовують три види сировини C_1, C_2, C_3 . Запаси кожного виду сировини складають відповідно (k_1, k_2, k_3) одиниць, які використовують повністю. Кількість сировини кожного виду, яка необхідна для виробництва однієї одиниці

зброї, задається матрицею $A = (a_{ij})$, де a_{ij} — кількість сировини i -го виду, яка необхідна для виробництва одиниці зброї j -го виду.

Написати в матричному вигляді систему рівнянь, яка характеризує рівність між обсягом сировини, яка використовується, і тими, що є в наявності, для кожного виду товарів, а також визначити випуск кожного із трьох видів зброї, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \vec{k} = \begin{pmatrix} 25 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Варто зазначити, що ми розглянули модельні задачі, які ілюструють застосування математики у військовій справі. Проте, наведення навіть найпростіших прикладів значно підвищує інтерес курсантів до предмету. При якісній мотивації зростає і ефективність засвоєння матеріалу. Ураховуючи вищезазначене, у Національній академії сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного дисципліна «Вища математика» викладається з військовим спрямуванням.

Список літератури

- Huzyk, N., Brodyak, O., Petruchenko, O., & Tereshchuk, O. (2019). Coefficient inverse problem for the degenerate parabolic equation. In *IV International Scientific and Practical Conference "Scientific Achievements of Modern Society"*, December 4–6 (pp. 999–1006).
- Бродяк, О., Гузик, Н., Ліщинська, Х., Петрученко, О., Пінчук, І., & Терещук, О. (2019). Шляхи підвищення якості військової освіти. *Наукові записки. Серія: Педагогічні науки*, (177.1), 72–78.
- Короткий курс історії воєнного мистецтва (з давніх часів до другої світової війни): Навчальний посібник. Львів: ЛІСВ, 2006.
- Макеєв, В. І, Пушкарьов, Ю. І., Ляпа, М. М. та ін. (2019). *Використання теорії ймовірностей в артилерії: підручник*. Суми: Сумський державний університет.
- Сокіл, Б. І., Андрухів, А. І., Білаш, О. В. та ін. (2019). *Збірник військово-прикладних задач з вищої математики: Навчальний посібник*. Львів: НАСВ.
- Сокіл, Б. І., Білаш, О. В., Терещук, О. В. та ін. (2020). *Теорія ймовірностей та математична статистика в задачах військового спрямування: Навчальний посібник*. Львів: НАСВ.

Методичні аспекти використання методів проблемного навчання в процесі викладання математичних дисциплін у закладах вищої освіти

О. П. Томашук¹, Н. П. Тупко¹, О. Л. Лещинський²

¹Національний авіаційний університет, Київ, Україна

²Фаховий коледж інженерії та управління
Національного авіаційного університету, Київ, Україна
natupko@ukr.net, al_vesna@ukr.net

Розкрито зміст методів проблемного навчання та надано рекомендації щодо використання цих методів на лекціях і практичних заняттях з математичних дисциплін. Наведено фрагмент лекції з використанням методів проблемного навчання.

Ключові слова: математична дисципліна, проблемне навчання, частково-пошуковий метод, евристична бесіда, дослідницький метод, проблемна лекція, застосування похідної, інтервали зростання і спадання функції.

Одним з основних завдань закладу вищої освіти є підготовка фахівців, здатних самостійно здобувати нові знання, розв'язувати проблеми, які виникають як у професійній діяльності, так і в повсякденному житті. Одним із шляхів розв'язування цього завдання є впровадження в навчальний процес прогресивних методів навчання, зокрема, методів проблемного навчання.

Проблемне навчання здійснюється за допомогою трьох методів: *методу проблемного викладення навчального матеріалу, частково-пошукового або евристичного методу, дослідницького методу* (Кузьмінський, 2005, с. 264).

Спільне у всіх цих методів — навчання шляхом розв'язування пізнавальних проблем, а відрізняються вони за рівнем самостійності пошукової діяльності студентів.

Метод проблемного викладення навчального матеріалу передбачає залучення студентів у пізнавальну діяльність в умовах, коли викладач сам ставить проблему, сам показує шляхи її розв'язування наукою, а студенти стежать за ходом думки викладача, разом з ним розмірковують, тим самим включаючись в атмосферу наукового пошуку. При використанні цього методу студенти вчаться логічно міркувати під час розв'язування проблем, глибше засвоюють матеріал.

Суть **частково-пошукового (евристичного) методу** навчання полягає в тому, що викладач (як і при методі проблемного викладення навчального матеріалу) сам планує етапи розв'язування проблеми, а студент сприймає та осмислює проблему і за пропозицією викладача самостійно бере участь у виконанні окремих етапів її розв'язування. Таким чином, студент не тільки відтворює знання, а й, що найголовніше, здійснює невеликий пошук. Наприклад, він може сформулювати проблему або зробити висновок з наведених даних, висловити гіпотезу або запропонувати спосіб її доведення (спростування). Істотним тут є те, що студенти розв'язують проблему не повністю від початку і до завершення, а лише частково, на окремих етапах. Звідси і назва методу — частково-пошуковий.

Найбільш поширеною формою частково-пошукового методу є **евристична бесіда**. У процесі її проведення викладач не повідомляє студентам готових знань, а вміло поставленими запитаннями змушує студентів актуалізувати раніше набуті знання, власний життєвий досвід і на цій основі підводить їх до самостійного формулювання нових правил, тверджень, висновків.

Дослідницький метод означається як спосіб організації пошукової діяльності студентів, спрямований на розв'язування нових для них пізнавальних проблем. Важливо чітко відрізнити частково-пошуковий метод від дослідницького, суть якого на відміну від першого, полягає в пошуку розв'язання не часткової, а цілісної проблеми.

У процесі навчання математичних дисциплін у вищих навчальних закладах традиційно використовують два види занять: лекції та практичні заняття. Розкриємо особливості проблемної організації лекцій і практичних занять з математичних дисциплін та дамо деякі рекомендації щодо їх організації та проведення.

Проблемна лекція з математичної дисципліни. Для розвитку інтелекту студентам важливо бачити еталон культури мислення. Проблемна лекція з математичної дисципліни якраз і покликана показати студентам зразки ефективної розумової діяльності, зразки прояву творчої думки.

Оскільки лекція є головною інформаційною магістраллю в навчальному процесі вищої школи, то вона покликана забезпечувати максимальну передачу й засвоєння навчального матеріалу. Ця вимога до лекції визначає методи, які можуть бути застосовні на проблемних лекціях. Переважаючим на них повинен бути *метод проблемного викладення навчального матеріалу*, іноді — *частково-пошуковий метод*.

Проблемні практичні заняття з математичних дисциплін. На практичних заняттях частка самостійності студентів у розв'язуванні проблем більша, ніж на лекціях. На цих заняттях викладач створює проблемну ситуацію і частіше всього формулює проблему. Надалі його роль зводиться до керування і контролю за розв'язуванням проблеми.

На проблемних практичних заняттях з математичних дисциплін переважаючим повинен бути *частково-пошуковий (евристичний) метод*. Цей метод найбільш повно відповідає завданням, які стоять перед практичними заняттями і відповідає їх дидактичній структурі.

На практичних заняттях з математичних дисциплін можливе використання також дослідницького методу навчання. Оскільки цей метод передбачає максимальну самостійність студентів при розв'язуванні проблем (задач), то найчастіше він повинен використовуватися при проведенні самостійних і контрольних робіт, при розв'язуванні домашніх завдань.

Як приклад, наведемо фрагмент лекції з вищої математики з теми «Застосування похідної до знаходження інтервалів зростання і спадання функції», побудованої проблемно.

Лекцію потрібно розпочати з означень понять зростаючої, спадної, незростаючої і неспадної функцій на проміжку, інтервалів зростання (спадання) функції, використавши при цьому відповідні графічні ілюстрації.

Викладач зазначає, що коли функція задана графічно, то знаходити інтервали зростання і спадання легко. Як же знаходити ці інтервали, коли функція задана аналітично? Щоб сформулювати відповідні твердження, викладач використовує графічну ілюстрацію.

Викладач: Розгляньмо функцію $y = f(x)$, яка зростає в інтервалі $(a; b)$ і диференційовна в цьому інтервалі (рис. 1). Нехай x — довільна точка з інтервалу $(a; b)$. Що можна сказати про знак похідної $f'(x)$?

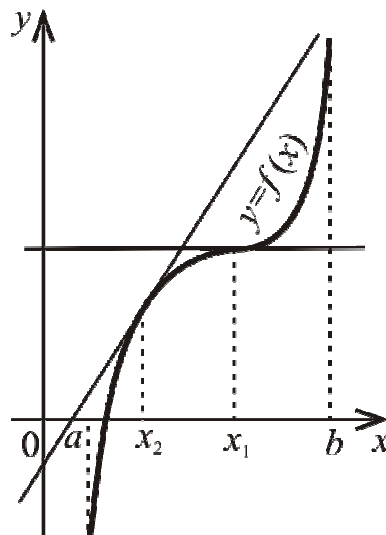


Рис. 1

Якщо студенти не в змозі відповісти на це запитання, у точках з абсцисами x_1 і x_2 викладач будує дві дотичні до графіка функції, одна з яких відповідно паралельна осі x , а друга — утворює з додатним напрямом осі x гострий кут (див. рис. 1). Спираючись на геометричний зміст похідної, студенти самостійно роблять висновок, що $f'(x_1) = 0$ і $f'(x_2) > 0$. На основі проведених міркувань студенти висувають гіпотезу, що справедливе таке твердження:

Теорема 1 (необхідна умова зростання (спадання) функції). Якщо функція $y = f(x)$ зростає (спадає) в інтервалі $(a; b)$ і диференційовна в цьому інтервалі, то $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) для всіх $x \in (a; b)$.

Викладач зазначає, що ця гіпотеза є правильною і доводить теорему 1.

Викладач: Сформулюйте твердження, обернене до теореми 1.

Студенти: Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна в інтервалі $(a; b)$ і $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) для всіх $x \in (a; b)$, то функція f зростає (спадає) в цьому інтервалі.

Викладач: Як ви думаєте, чи правильним є це твердження?

Як правило, серед студентів немає одностайної відповіді. Тоді викладач будує графік, зображений на рис. 2. Спираючись на теорему 1 і враховуючи, що на відрізку $[c; d]$ функція f є сталою, студенти роблять висновок, що $f'(x) \geq 0$ для всіх $x \in (a; b)$. Разом з тим зазначають, що функція f не є зростаючою в інтервалі $(a; b)$. Тим самим підтверджують, що твердження, обернене до теореми 1, є неправильним.

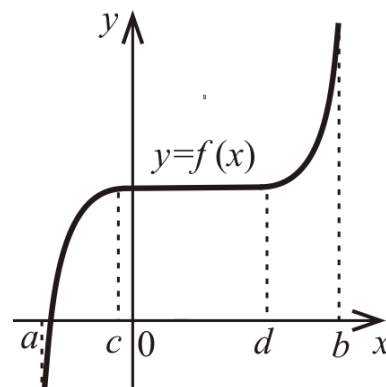


Рис. 2

Викладач: Що потрібно змінити в умові оберненого твердження, щоб воно було правильним?

Як показує досвід викладання, студенти пропонують такі два варіанти:

1) в умові твердження додатково вимагати, щоб точки $x \in (a;b)$, у яких $f'(x) = 0$, не утворювали жодного відрізка;

2) в умові твердження вимагати, щоб $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для всіх $x \in (a;b)$.

Викладач зазначає, що запропоновані варіанти є правильними. Формулює і доводить такі твердження:

Теорема 2 (достатня умова зростання (спадання) функції). Якщо функція $y = f(x)$ диференційована в інтервалі $(a;b)$ і $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) для всіх $x \in (a;b)$, причому точки $x \in (a;b)$, у яких $f'(x) = 0$, не утворюють жодного відрізка, то функція $y = f(x)$ зростає (спадає) в інтервалі $(a;b)$.

Теорема 3 (достатня умова зростання (спадання) функції). Якщо функція $y = f(x)$ диференційована в інтервалі $(a;b)$ і $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для всіх $x \in (a;b)$, то на цьому інтервалі функція f зростає (спадає).

На окремих етапах доведення тверджень шляхом формулювання відповідних запитань викладач активно залучає студентів до процесу доведення.

Далі викладач наголошує, що для знаходження інтервалів зростання (спадання) функції використовують теорему 3, та розглядає відповідний приклад.

У наведеному фрагменті лекції в основному використовується частково-пошуковий метод навчання. Студенти беруть активну участь на кожному етапі розв'язування проблем: висувають гіпотези, «підказують» викладачеві наступні кроки в доведенні тверджень, роблять висновки із проведених ним міркувань тощо.

Як показує досвід, використання методів проблемного навчання сприяє свідомому засвоєнню студентами теоретичного матеріалу, розвиває інтелектуальні і творчі здібності студентів, підвищує пізнавальний інтерес. І саме це й указує на необхідність їхнього використання у процесі викладання математичних дисциплін у вищих навчальних закладах.

Список літератури

Кузьмінський, А. І. (2005). *Педагогіка вищої школи: Навчальний посібник*. Київ: Знання.

Опорні конспекти як засіб дистанційного навчання системи аксіом Д. Гільберта Евклідової геометрії

Н. В. Шаповалова, Л. Л. Панченко, А. С. Бублик

НПУ імені М. П. Драгоманова, Київ, Україна

shaponv@gmail.com, larpan97@gmail.com, bublikalina@ukr.net

У доповіді представлені опорні конспекти, які можна використовувати як один із засобів навчання системи аксіом Д. Гільберта для обґрунтування евклідової геометрії.

Ключові слова: опорний конспект, навчання, поняття, відношення, аксіома, теорема, геометрія, основи геометрії, дистанційне навчання.

Мета полягає у створенні опорних конспектів при навчанні системи аксіом Д. Гільберта евклідової геометрії для впровадження в навчальних процес у закладах вищої освіти в умовах дистанційного навчання.

Д. Гільберт і обґрунтування евклідової геометрії.

Наприкінці ХІХ ст. перед математиками постала задача обґрунтування геометрії — інакше кажучи задача побудови системи аксіом, на якій можна було б побудувати теорію – *геометрію*.

Кінець ХІХ ст. — початок ХХ ст.

Паш, Пеано, Пієрі, Гільберт, Вейль

++ Д. Гільберт,

Уперше було дано достатній список аксіом для побудови евклідової геометрії

1899 р. «Основи геометрії»

Г. Вейль

векторна аксіоматика

Основні поняття: точки, прямі, площини.

Основні відношення: належності, лежати між, конгруентності, неперервності, паралельності.

Аксіоми (20): .

у них описано властивості відношень

I група (аксіоми належності, інцидентності або сполучення) (8 аксіом)

- I_1 . Які б не були дві точки, існує пряма, яка проходить через ці точки.
- I_3 . На кожній прямій лежить принаймні дві точки. Існує три точки, які не лежать на одній прямій.

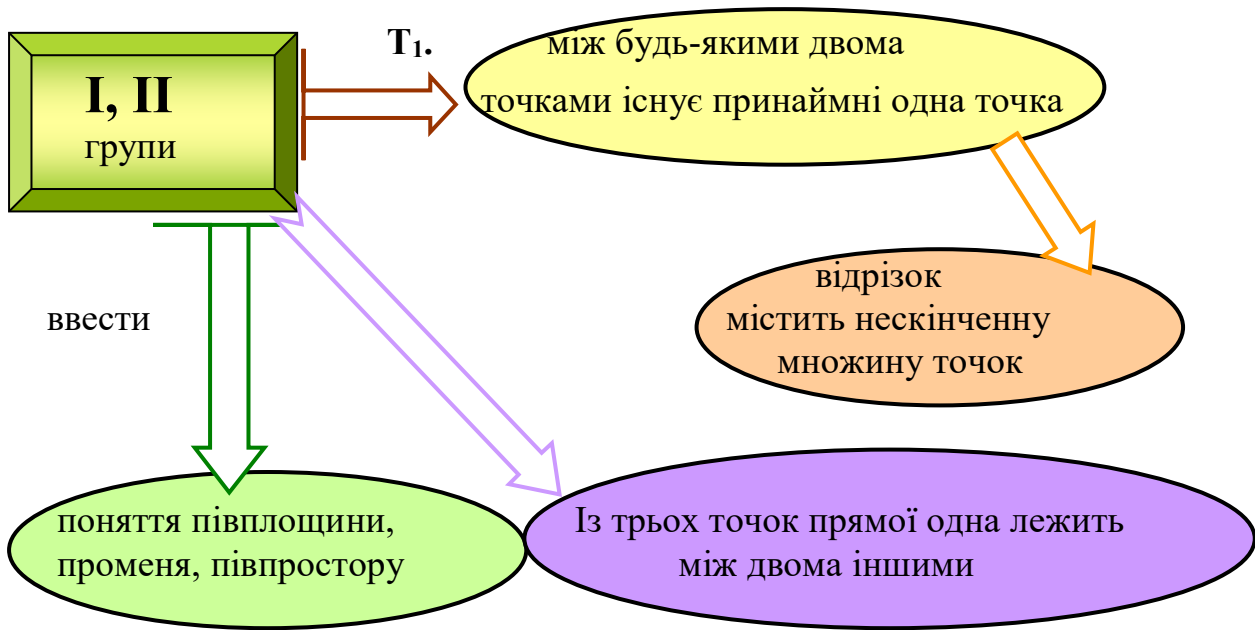
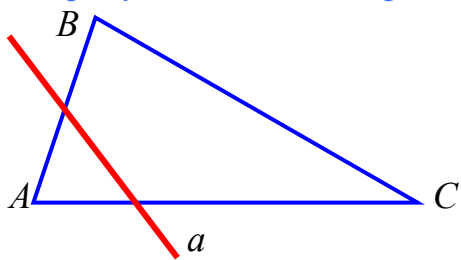


довести

- T_1 . Дві прямі мають не більше однієї спільної точки.
- T_2 . Через пряму й точку, що їй не належить, проходить одна й тільки одна площина.

II група (аксіоми порядку) (4 аксіоми)

- II_1 . Якщо виконується порядок точок $A-B-C$, то A, B, C — різні точки прямої і має місце порядок точок $C-B-A$.
- II_2 (*про існування зовнішніх точок відрізка*). Які б не були дві точки A і B , $\exists! C$ на прямій AB така, що виконується порядок точок $A-B-C$.
- II_3 . Із трьох різних точок, які належать до однієї прямої, не більше як одна лежить між двома іншими.
- II_1-III_3 . — *лінійні аксіоми порядку*.
- II_4 (*аксіома Паша*): Нехай A, B, C — три точки, які не лежать на одній прямій, і пряма a не проходить через жодну з цих точок. Тоді, якщо пряма a перетинає сторону AB , то вона перетинає ще або сторону AC , або BC .

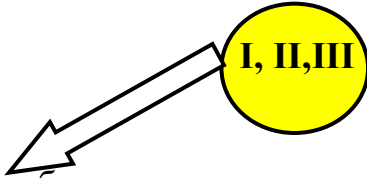


III група (аксіоми конгруентності) (5 аксіом)

III₁. Якщо дано відрізок AB і промінь $A'M$, то $\exists! B' \in A'M : AB = A'B'$.

III₅. Нехай A, B, C — три точки, які не лежать на одній прямій і A', B', C' — три точки, які теж не лежать на одній прямій, та, якщо

$AB = A'B', AC = A'C', \angle BAC = \angle B'A'C'$, то $\angle ABC = \angle A'B'C'$.



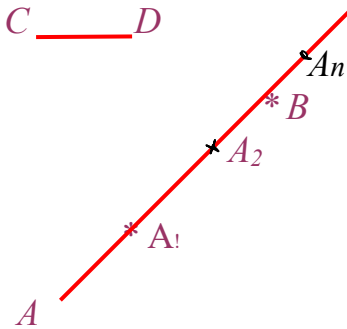
T₁. У рівнобедреному трикутнику кути при основі рівні.

T_{2,3,4}. Ознаки рівності трикутників.

T₅. Зовнішній кут трикутника $>$

IV група (аксіоми неперервності) (2 аксіоми)

IV₁. (аксіома Архімеда): Нехай AB і CD — які-небудь відрізки.

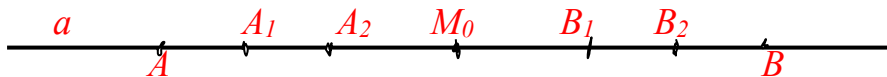


На прямій AB

1. $\exists m. A_1, A_2, \dots, A_n \in AB : A-A_1-A_2, \dots, A_{n-2}-A_{n-1}-A_n$
2. $AA_1 = A_1A_2 = \dots = CD$
3. $A-B-A_n$

$nCD > AB$.

IV₂. (аксіома Кантора): C _____ D

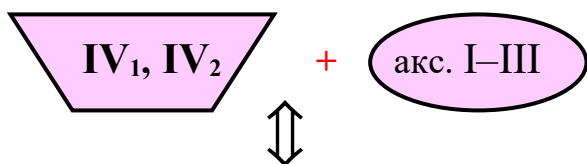


Нехай на прямій a задана нескінченна послідовність відрізків AB, A_1B_1, \dots і крім того задано $\forall CD$

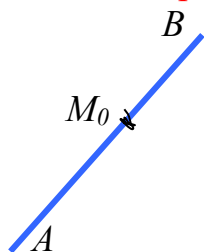
$\exists n \mid A_nB_n < CD$

$\exists m. M_0 !$
 $M_0 \in AB$
 $M_0 \in A_1B_1$
 $M_0 \in A_2B_2$

 $M_0 \in A_nB_n$

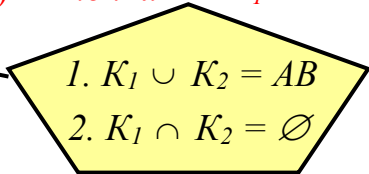


Перерізу Дедекінда.



Нехай дано розбиття відрізка AB на класи K_1 і K_2 , яке задовольняє умовам :

- 1) $A \in K_1, B \in K_2$ і класи K_1 і K_2 містять точки, відмінні від т. A і B .
- 2) \forall точки $X \in K_1 \Rightarrow A-X-Y (y \in K_2)$.



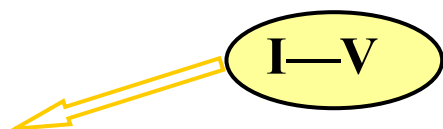
$$\exists M_0 \left| \begin{array}{l} \forall X : A-X-M_0 \Rightarrow X \in K_1 \\ \forall Y : M_0-Y-B \Rightarrow Y \in K_2 \end{array} \right.$$

Кажуть: точка M_0 здійснює переріз

$$\in K_1 \text{ або } \in K_2$$

V група (аксіома паралельності) (1 аксіома)

V_1 . Нехай a — довільна пряма і A — точка, що не належить цій прямій. Тоді в площині, що визначається точкою A і прямою a , існує не більше однієї прямої, яка проходить через точку A і не перетинає пряму a .



Теорія паралельних, теореми про суму кутів трикутника, тригонометрію, властивості паралелограма, трапеції, Декартові координати, ...

Геометрію побудовану на аксіомах I—IV групи системи аксіом Гільберта, називають **абсолютною геометрією**.

О работе кафедры высшей математики по повышению качества образовательного процесса

В. А. Шилинец

*Международный университет «МИТСО», Минск, Республика Беларусь,
v.shilinec@mitso.by*

Кафедра высшей математики Международного университета «МИТСО» обеспечивает организацию образовательного процесса по учебной дисциплине «Математика» для студентов специальности «Информационные системы и технологии (по направлениям)» (направление специальности: «Информационные системы и технологии (в экономике)») и по дисциплине «Высшая математика» для обучающихся по специальностям «Логистика», «Менеджмент», «Маркетинг», «Мировая экономика» и «Управление информационными ресурсами».

Учебные дисциплины «Высшая математика» и «Математика» имеют огромное значение в фундаментальной подготовке будущего специалиста в плане формирования у него научного мировоззрения, определенного уровня математической культуры, особенно по таким компонентам, как понимание сущности прикладной и практической направленности математики, овладение методом математического моделирования.

С целью повышения качества образования в настоящее время разрабатываются и используются различные подходы к организации образовательного процесса в УВО. На наш взгляд, наиболее эффективным подходом является создание таких дидактических условий, в которых студент занимает активную личностную позицию и наиболее полно раскрывается как субъект образовательного процесса. Это подразумевает создание педагогических условий осознанности, осмысленности учения, включение в него студента как на уровне интеллектуальной, так и личностной активности.

Для эффективной деятельности будущему специалисту надо уметь ориентироваться в постоянно меняющемся мире, поэтому система высшего образования должна быть направлена на формирование у специалиста потребности в постоянном пополнении и обновлении знаний, совершенствовании умений и навыков, закреплении и превращении их в компетенции.

Сегодня в качестве ведущего подхода выступает компетентностный подход, который акцентирует внимание на результате образования. В качестве результата рассматривается не сумма усвоенной информации, а способность обучающегося действовать в различных жизненных ситуациях. Поэтому преподаватель УВО обязан активизировать работу студента, организовав управление познавательной деятельностью. Он должен помочь студенту научиться критически мыслить; самостоятельно овладевать профессиональными знаниями и творчески применять их на практике для решения разнообразных проблем; самостоятельно трудиться над повышением культурного и профессионального уровней.

Для подготовки специалистов, обладающих академическими, социально-личностными и профессиональными компетенциями в соответствии с образовательными стандартами и способных свободно конкурировать на рынке труда, необходимо организовать эффективный образовательный процесс. Очевидно, что без качественного учебно-методического обеспечения образовательного процесса по указанным выше учебным дисциплинам невозможна эффективная работа преподавателей и студентов при любой форме получения высшего образования.

На кафедре высшей математики УО ФПБ «Международный университет «МИТСО» ведется значительная работа по созданию учебно-методического сопровождения образовательного процесса: запланирована разработка и издание учебно-методического пособия «Практикум по высшей математике» в 4 частях. На данный момент разработаны и изданы первая, вторая и третья части указанного выше учебно-методического пособия (Шилинец и др., 2017, 2018, 2019).

Изданные учебно-методические пособия Шилинец и др. (2017) содержат упражнения по следующим темам высшей математики: «Матрицы», «Системы линейных уравнений и неравенств», «Аналитическая геометрия на плоскости», «Элементы аналитической геометрии в пространстве», «Числовая последовательность и ее предел», «Предел функции одной переменной», «Непрерывные функции одной переменной», «Производная и дифференциал функции одной переменной», «Основные теоремы о дифференцируемых функциях», «Приложения дифференциального исчисления». Учебно-методическое пособие Шилинец и др. (2018) — это сборник задач и упражнений по разделам «Дифференциальное исчисление функций многих переменных», «Интегральное исчисление функций одной переменной», «Интегральное исчисление функций многих переменных», «Обыкновенные дифференциальные уравнения», «Числовые и функциональные ряды», «Ряды Фурье». Третья часть комплекса учебно-методических пособий «Практикум по высшей математике» Шилинец и др. (2019) является сборником задач и упражнений по разделу «Теория вероятностей и математическая статистика».

Разработана и находится в издательстве и последняя четвертая часть комплекса учебно-методических пособий «Практикум по высшей математике», которая посвящена разделу «Математическое программирование».

Главная цель указанных учебно-методических пособий состоит в том, чтобы способствовать глубокому усвоению теории, развитию конкретного математического мышления студентов, привитию им навыков решения примеров и задач. Указанные учебно-методические пособия обеспечивают проведение практических занятий в рамках единого организационно-методического подхода, позволяют организовать аудиторную и самостоятельную работу студентов, реализуя принципы непрерывности математической подготовки и дифференцированного подхода в обучении.

В учебной литературе, рекомендованной для изучения теории функций комплексной переменной, имеется много содержательных учебников и учебных пособий, авторами которых являются известные ученые-математики. Од-

нако большинство из них не приспособлено как по объему, так и по выбору и распределению материала к учебной программе по дисциплине «Математика» для специальности «Информационные системы и технологии (по направлениям)». Данные проблемы стали основанием для написания и издания учебно-методического пособия Шилинец и Гардейчик (2020).

Обеспечение качества подготовки специалистов в УВО неразрывно связано с вопросами самостоятельности студентов. Один из путей активизации самостоятельной работы в условиях современного образовательного процесса заключается в создании мотивации к активной учебно-познавательной деятельности. Потребность в новых знаниях возникает у обучающихся только в случае осознания их значимости для будущей профессиональной деятельности.

Учебные дисциплины «Высшая математика» и «Математика» должны быть лично ориентированными и направленными на формирование общенаучных знаний, умений и навыков и на удовлетворение профессиональных требований студентов. Программа обучения при изучении абстрактных математических понятий должна быть наполнена задачами с профессионально-ориентированным содержанием. Изучение каждого раздела следует начинать с постановки соответствующей экономической задачи, которую затем предстоит решить средствами полученного математического аппарата. При рассмотрении указанных задач студенты видят практическое применение имеющегося математического аппарата. Так мы сможем сформировать у студентов потребность и интерес к изучению учебных дисциплин «Математика» и «Высшая математика».

Возрастание роли самостоятельной работы студентов (СРС) в высшей школе с необходимостью требует новых условий организации самостоятельной учебной деятельности студентов. Одним из важнейших условий является создание дидактических средств, способных упорядочить и активизировать процесс самостоятельного освоения обучающимися дисциплин учебного плана. На наш взгляд, дидактические средства, применяемые в СРС, должны отражать лично деятельностный, дифференцированный, вариативный характер обучения, наиболее полно учитывать индивидуальные возможности и интересы обучаемых, выполнять ряд новых функций, обеспечивающих результативность обучения. В качестве такого современного дидактического средства в системе СРС может быть рабочая тетрадь (РТ) студента. На данный момент преподавателями кафедры высшей математики Международного университета «МИТСО» разработаны и внедрены в образовательный процесс РТ по всем разделам учебных дисциплин «Высшая математика» и «Математика».

Современное общество характеризуется сильным влиянием информационных технологий на все сферы деятельности. В образовании эти технологии призваны стать не дополнением, а неотъемлемой частью образовательного процесса, повышающей его качество. Компьютерные технологии – это новые дополнительные источники информации, новый способ обработки информации, новые формы проверки знаний обучающихся. Необходимо использовать техноло-

гии так, чтобы они помогали решать образовательные, воспитательные, развивающие задачи обучения.

Одним из актуальных направлений внедрения информационных технологий в образовательный процесс по учебным дисциплинам «Математика», «Высшая математика», на наш взгляд, являются мультимедийные презентационные технологии и компьютерное тестирование.

Мультимедийные средства обучения, отражая принципы наглядности и доступности, позволяют интенсифицировать процесс обучения. При хорошо продуманной презентации лекция получается насыщенной и интересной, происходит значительная экономия учебного времени. Однако, помня обо всех достоинствах применения мультимедиа, не надо забывать о том, что живое общение преподавателя и студента не заменит ни одно даже самое качественное наглядное средство.

С целью обеспечения надлежащего качества образования, обязательного освоения всеми обучающимися образовательных программ высшего образования по учебным дисциплинам «Высшая математика», «Математика» значительная работа на кафедре высшей математики осуществляется по использованию в образовательном процессе системы электронного обучения Moodle. Это очень удобный инструмент не только для обучения, но и для контроля знаний.

Опыт показывает, что все используемые кафедрой высшей математики пути совершенствования образовательного процесса повышают качество математической подготовки обучаемых.

Список литературы

- Шилинец, В. А., Кибалко, П. И., & Подгорная, В. В. (2017). *Практикум по высшей математике: Учеб.-метод. пособие* (Ч. 1). Минск: Междунар. ун-т «МИТСО».
- Шилинец, В. А., Кибалко, П. И., & Подгорная, В. В. (2018). *Практикум по высшей математике: Учеб.-метод. пособие* (Ч. 2). Минск: Междунар. ун-т «МИТСО».
- Шилинец, В. А., Кибалко, П. И., & Подгорная, В. В. (2019). *Практикум по высшей математике: Учеб.-метод. пособие* (Ч. 3.). Минск: Междунар. ун-т «МИТСО».
- Шилинец, В. А., & Гардейчик, С. М. (2020). *Функции комплексной переменной: практикум: Учеб.-метод. пособие*. Минск: Междунар. ун-т «МИТСО».

О некоторых вопросах усовершенствования процесса обучения студентов высшей математике

В. С. Якимович

Белорусский национальный технический университет,

Минск, Республика Беларусь

Vika_klass@mail.ru

Данная статья посвящена вопросом повышения качества процесса обучения в техническом вузе. Выделены общие, для всех студентов БНТУ трудности процесса обучения и предложены шаги усовершенствования процесса обучения математики в техническом Вузе, на примере БНТУ.

Ключевые слова: усовершенствование процесса обучения математики в техническом вузе.

В настоящее время в связи с повышением уровня экономического развития и промышленно-техническим прогрессом возрастает потребность в специалистах нового поколения: разработчиках высокоэффективных технологий, владеющих самым современным инструментарием, в том числе и современными математическими методами. В связи с этим основной задачей профессионального образования является подготовка высококвалифицированного работника соответствующего уровню и профилю, который являлся бы не только конкурентоспособным на рынке труда, свободно владел бы своей профессией, был бы компетентным, ответственным, способным к эффективной работе по специальности на уровне мировых стандартов, но и ориентировался в различных смежных областях деятельности, был готов к постоянному профессиональному росту, социальной и профессиональной мобильности. По этой причине педагогика высшей школы стала уделять огромное внимание специальным исследованием по различным проблемам усовершенствования учебного процесса в высших учебных заведениях.

Курс высшей математики представляет собой образовательную дисциплину, изучаемую в вузе, и служащую фундаментом для изучения других общеобразовательных, инженерных и специальных дисциплин. Ей отводится особая роль в становлении и развитии научного мировоззрения студентов, воспитании их интеллекта, в совершенствовании умственных способностей. В связи с этим перед педагогикой высшей школы остро встает вопрос о повышении эффективности процесса обучения студентов курсу высшей математики в вузах. Актуальность проблемы повышения качества процесса обучения математике студентов технических вузов определяется в первую очередь задачами дальнейшего эффективного обучения их, как будущих специалистов. Быстрое и эффективное включение студентов в учебный процесс, с одной стороны позволяет решать проблему сохранения контингента обучаемых, который существенно сокращается во время первых сессий, с другой — помогает повысить качество подготовки молодых людей в высшей школе.

Анализ литературы позволил выделить основное противоречие между возрастающими требованиями к процессу обучения математике студентов технического вуза и недостаточным реальным уровнем его организации. В связи с переходом на четырехлетнее обучение в высших учебных заведениях технического профиля наблюдается резкое сокращение часов, отводимых на изучение дисциплины «Математика», хотя запрос на получения знаний по данному предмету и определенное их практическое применение постоянно возрастает. Учебные планы предполагают сократить количество лекционных и аудиторных занятий и увеличить время на самостоятельное изучение курса высшей математики.

С первых дней пребывания в вузе студенты находятся в непривычной для них социокультурной среде, к которой им предстоит адаптироваться в кратчайшие сроки. Академическая успеваемость, общественная и научная активность воспринимаются как факторы успешной адаптации студентов. С другой стороны, безразличие, равнодушие, неуспеваемость, отсутствие интереса со стороны учащегося позволяют говорить о трудностях адаптационного периода.

Нами выделены следующие общие для всех студентов БНТУ трудности процесса обучения:

- низкий общеобразовательный уровень;
- слабая подготовка по профильным дисциплинам и специальным предметам;
- отсутствие в школьной программе (в базовой, в частности) по математике ряда важнейших для ВУЗов разделов, таких как «Производная», «Вектора» и др. необходимых для дальнейшего эффективного процесса обучения в ВУЗе;
- отличие форм и методов обучения в вузе от форм и методов обучения в школе; отсутствие навыков самостоятельной работы.

Студенты не умеют конспектировать лекции, работать с источниками информации, анализировать информацию большого объема. Они не умеют и не хотят пользоваться библиотекой. Практические и лабораторные работы вызывают дополнительный стресс ввиду непривычности и неумения правильно употреблять необходимые материалы. Следствие — перегрузка учебными материалами и накопление непонятого и неосвоенного объема информации.

Выходом из сложившейся ситуации, на наш взгляд, может быть:

- 1) корректировка программ всех предметов естественно-научных дисциплин ВУЗа, учитывающая отсутствия в школьных программах ряда важнейших разделов, влияющих на дальнейшее эффективное обучение в ВУЗе;
- 2) определение уровня подготовки студентов по различным разделам школьного курса математики для выявления пробелов и определения дальнейшего направления индивидуальной работы с каждым студентом;
- 3) создание либо адаптационного курса для первокурсников, включающего ряд лекционно-практических занятий по математике, позволяющего преподавателям, ведущим предмет, исключить пробелы по данным разделам, либо увеличение количества часов, которые позволили бы преподавателям восполнить пробелы в рамках изучаемого предмета;

4) обращение особого внимания на профилирующие предметы и на получение практических навыков по математике, учитывающие запросы специальных и общетехнических дисциплин, для дальнейшей более успешной профессиональной подготовки будущих специалистов;

5) использование преподавателями в процессе обучения математике информационно-коммуникативных средств, таких как Google Класс; проведение дополнительных консультаций посредством платформы Zoom, Microsoft Teams; применение пакетов прикладных программ Mathcad, MATLAB и Mathematica, позволяющих автоматизировать математические и инженерно-технические расчёты, тем самым способствуя расширению сферы их применения в научных и инженерных исследованиях;

6) создание базы видеоматериалов по обучению решению задач различных разделов программного курса высшей математики, учитывающие рекомендации обучения общеметодическим приемам к решению задач Ю.К. Бабанского;

7) построение процесса обучения математике студентов осуществлять на основе развития умственных способностей, сообразительности, умения быстро схватывать обстановку и принимать решения с использованием компьютерных технологий, а не на зубрежке, бездумном заучивании учебного материала, тем самым позволяя расширить уровень развития творческого мышления, культурный кругозор обучаемых;

8) привлечение студентов к внеаудиторной самостоятельной деятельности, которая подразумевает не самообразование обучающегося по собственному произволу, а систематическую, управляемую преподавателем самостоятельную деятельность, за счет организации индивидуального подхода при выполнении расчетно-графических работ, оформленных в специальные рабочие тетради для самостоятельного обучения: студент по своему желанию выбирает для самостоятельного решения простые или более сложные задачи, но в меньшем количестве, причем количество задач базового уровня, которое должен решить каждый студент необходимо выбрать таким образом, чтобы обеспечить ему крепкие и качественные знания в дальнейшем;

9) введение модульно-рейтинговой системы оценки знаний, умений и навыков студентов, представляющей собой интегральную оценку результатов всех видов деятельности студента, способствующей не только повышению уровня усвоения изучаемого материала студентами, но и интенсификации его познавательной активности.

Реализация практико-ориентированного обучения высшей математики студентов технического вуза посредством задачного подхода

В. С. Якимович, И. С. Кленовская

Белорусский национальный технический университет, Минск,

Республика Беларусь,

Vika_klass@mail.ru

Рассмотрен задачный подход, как один из основных методов практико-ориентированного обучения математики в техническом вузе.

Ключевые слова: задачный подход, практико-ориентированное обучение высшей математики, личностный подход.

Стремительный рост и развитие индустрии ставит перед вузами задачу о повышении качества подготовки специалистов, основываясь на практико-ориентированном обучении, направленном на приобретение студентами опыта практической деятельности, который выступает как готовность студента к определённым действиям и операциям на основе имеющихся знаний, умений и навыков и способствует в дальнейшем повышению мотивированности студентов на приобретение профессиональной компетентности.

Совершенствование процесса обучения математики в высших учебных заведениях осуществляется за счет внедрения задачного подхода, который предполагает включение в учебную деятельность специально подобранных практико-ориентированных задач для достижения поставленных целей.

Специфика математики как науки и учебного предмета состоит в деятельности субъектов, спроектированной через систему решения разнообразных задач. Задача — это нормативное представление о способе достижения мыслительной или деятельностной цели, полагающей переход к реализации содержания способа. Введение исходных условий и вопроса о статусе неизвестного содержания предопределяет, мотивирует и организует поиск ответа на него или искомого содержания исходных условий. Последний процесс открывает другую сторону мыслительных поисков, постановку и решения проблем подчиненную целостности решения задачи (Анисимов, 2002, с. 45).

Фридман и Турецкий (1984, с. 8) рассматривает решение задач как основной метод обучения, как метод приобретения новых знаний, как наиболее устоявшийся способ развития математического мышления учащихся. Проблема использования задач при обучении математике имеет много аспектов: уяснение функций и целей задач в преподавании, вопросы типологизации и классификации задач, определение содержания и методов их решения, совершенствование методики обучения решению задач, вопросы взаимосвязи задач и теоретических знаний. Многие исследователи, такие как Г. Ф. Дорофеев, Ю. М. Колягин, Г. А. Саранцев, И. Г. Шарыгин среди основных средств, повышающих эффек-

тивность обучения математике, выделяют системы задач, использование которых позволяет достичь у обучаемых более осознанного и полного представления об изучаемом предмете.

Говоря о процессе обучения, хотелось бы отметить, что некоторые из студентов достаточно быстро овладевают новым материалом и в состоянии решать более сложные задачи, другим требуется более длительный промежуток времени. Таким студентам необходимо решать больше базовых задач, так как быстрый переход к более сложным задачам приведет у них к потере интереса к самостоятельному творчеству.

В связи с вышесказанным возникает вопрос о построении процесса обучения студентов курсу высшей математики на основе развития умственных способностей, используя индивидуализацию.

Под индивидуализацией мы понимаем «учёт в процессе обучения индивидуальных особенностей учащихся во всех его формах и методах, независимо от того, какие особенности и в какой мере учитываются» (Унт, 1990, с. 8).

Методологическим основанием разработки проблемы индивидуализации в педагогике выступает личностный подход. В обучении математике личностный подход рассматривается как необходимая методологическая установка. Он предполагает помощь студенту в выявлении, осознании и развитии его математических способностей, становлении математического мышления, личностно-значимого и общественно-приемлемого самоутверждения.

Реализация личностного подхода осуществляется посредством создания дифференцированных по темам баз задач, включающих в себя:

- 1) базовые задачи;
- 2) задачи профессионально-ориентированного характера;
- 3) нетривиальные задачи.

Студентам, быстро овладевшим новым материалом и решившим базовый блок задач, в рамках осуществления личностного подхода, на первоначальном этапе необходимо предложить решать задачи с профессионально-ориентированным содержанием, которые позволят раскрыть потенциал

Более талантливым студентам, которых можно в будущем привлечь как к научно-исследовательской работе по тематике кафедры, так и привлечь к олимпиадному движению, выдавать индивидуальные исследовательские, проектные и конструкторские (нетривиальные) задачи, имеющие научную и практическую значимость. Например, в рамках рассмотрения раздела «Дифференциальные уравнения» изучая тему «Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными» пока часть студентов работает над базовыми и задачами профессионально-ориентированного характера, талантливым студентам необходимо показать, что уравнение

$$y' = a'(x) \cdot f(a(x) + by + c),$$

где $b, c \in \mathbb{R}, b \neq 0$, $a(x)$ и $f(x)$ — заданные функции, используя введения новой функции

$$u(x) = a(x) + by + c$$

приводится к решению дифференциального уравнения с разделяющимися переменными. Затем подробно рассмотреть решение следующей задачи:

$$\text{«Решить задачу Коши: } y' = \cos^2(y - x), y(0) = \frac{\pi}{4}.\text{»}$$

Решение. Вводим новую функцию

$$u(x) = y - x,$$

выразим

$$y = u(x) + x.$$

Продифференцируем

$$y' = u'(x) + 1$$

и подставим. Тогда уравнение примет вид:

$$u'(x) + 1 = \cos^2 u(x).$$

Перенесем единицу вправо и используем основное тригонометрическое тождество мы получим:

$$u'(x) = \cos^2 u(x) - 1 \Rightarrow u'(x) = \cos^2 u(x) - (\cos^2 u(x) + \sin^2 u(x));$$

$$u'(x) = -\sin^2 u(x) \Rightarrow \frac{d(u(x))}{dx} = -\sin^2 u(x).$$

Разделим переменные

$$\frac{d(u(x))}{-\sin^2 u(x)} = dx$$

и проинтегрируем полученное выражение

$$\int \frac{d(u(x))}{-\sin^2 u(x)} = \int dx \Rightarrow \operatorname{ctg} u(x) = x + C \Rightarrow \operatorname{ctg}(y - x) = x + C.$$

Затем решим задачу Коши:

$$y(0) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = 0 + C \Rightarrow C = 1.$$

Таким образом получили ответ: $\operatorname{ctg}(y - x) = x + 1$.

Далее в рамках индивидуальной работы талантливым студентам можно предложить рассмотреть следующие задачи:

- 1) решить уравнение $y' = \sqrt{2x + 2y - 1}$;
- 2) решить уравнение $y' = 2x \cos(x^2 + y)$;
- 3) решить уравнение $(x + y - 1) dx = (x + y + 1) dy$;
- 4) решить уравнение $y' = 3x^2(x^3 + y + 1)$.

Хотелось бы отметить, что данный тип задач может быть так же предложен талантливым студентам для решения в рамках контролируемой самостоятельной работы, которая оформляется в специальные рабочие тетради, причем количество задач, которые необходимо решить, можно предложить выбрать самостоятельно самому студенту, но учитывая тот факт, что их количество должно быть достаточно, чтобы обеспечить ему крепкие и качественные знания в дальнейшем

Список литературы

- Анисимов, О. С. (2002). *Методологический словарь для управленцев*. Москва.
- Фридман, Л. М., & Турецкий, Е. Н. (1984). *Как научиться решать задачи: Пособие для учащихся* (2-е изд.). Москва: Просвещение.
- Унт, И. Э. (1990). *Индивидуализация и дифференциация обучения*. Москва: Педагогика.



ІСТОРІЯ
ТОЧНИХ НАУК

Про екстремальні значення деяких лінійних функціоналів

В. В. Бовсуновська¹, М. В. Гаєвський², П. В. Задерей¹,

Н. М. Задерей¹, Г. Д. Нефьодова¹

¹КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

²Центральноукраїнський державний педагогічний університет
імені Володимира Винниченка, Кропивницький, Україна

mgaevskij@gmail.com, zadereypv@gmail.com, zadereynm@gmail.com,
g.nefyodova@gmail.com

У роботі розглядається внесок двох відомих математиків М. П. Корнейчука та С. Б. Стечкіна в установленні точної верхньої грані функціоналу, що є визначеним інтегралом від добутку двох функцій, одна з яких фіксована, а друга належить класу, який задається модулем неперервності.

Ключові слова: функціонал, точна верхня грань, модуль неперервності функції, екстремальна функція.

У 2020 році математична спільнота відзначала 100-річчя із дня народження академіка НАН України М. П. Корнейчука. Відмітимо один з перших вагомих результатів, одержаних цим видатним математиком.

У теорії наближення функцій важливою є задача знаходження точної верхньої грані лінійного функціоналу

$$\mathcal{E}(\mathfrak{M}, \psi) = \sup_{f \in \mathfrak{M}} \left| \int_a^b f(x) \cdot \psi(x) dx \right|, \quad (1)$$

де $\psi(x)$ деяка задана функція, а \mathfrak{M} — фіксована множина функцій.

Якщо $\mathfrak{M} = \{f : |f(x)| \leq 1, \text{ для майже всіх } x \in [a; b]\}$, то, як добре відомо,

$$\mathcal{E}(\mathfrak{M}, \psi) = \sup_{|f| \leq 1} \left| \int_a^b f(x) \cdot \psi(x) dx \right| = \int_a^b |\psi(x)| dx.$$

Екстремальна функція в цьому випадку має вигляд

$$f^*(x) = \text{sign } \psi(x), x \in [a; b].$$

Модулем неперервності функції, що належить $C[a; b]$ називається функція (Корнейчук (1976), с. 176)

$$\omega(f; t) = \sup_{|x' - x''| \leq t} |f(x') - f(x'')|,$$

що має такі властивості:

- $\omega(f; 0) = 0$,
- $\omega(f; t)$ не спадна на $[0, b - a]$,
- $\omega(f; t)$ — півадитивна на $[0, b - a]$, тобто

$$\omega(f; t_1 + t_2) \leq \omega(f; t_1) + \omega(f; t_2), \quad t_1, t_2 \in [0; b - a],$$

- $\omega(f; t)$ — неперервна функція на $[0; b - a]$.

Модулем неперервності називають неперервну на $[0; +\infty)$ функцію $\omega(t)$, яка задовольняє наступні умови:

- $\omega(0) = 0$,
- $0 \leq \omega(t') - \omega(t'') \leq \omega(t' - t'')$, $0 \leq t' \leq t''$.

Якщо $\psi(t) \in C[0; d]$ має сформульовані вище властивості, то її модуль неперервності $\omega(\psi; t)$ дорівнює їй, тобто

$$\omega(\psi; t) = \psi(t), \quad t \in [0; d].$$

Нехай $\omega(t)$ — заданий модуль неперервності.

Через H_ω будемо позначати множину неперервних функцій $f(x)$ таких, що

$$|f(x') - f(x'')| \leq \omega(|x' - x''|) \quad \forall x', x'' \in [a; b]. \quad (2)$$

Умова (2) є узагальненням умови Ліпшиця

$$|f(x') - f(x'')| \leq |x' - x''|^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Розв'язання задачі (1) при $\mathfrak{M} = H_\omega$ залежить від властивостей функції $\psi(x)$.

Розглянемо приклад, коли $\psi(x) = \sin x$, $a = \frac{\pi}{2}$, $b = \frac{3\pi}{2}$. Тоді

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(H_\omega, \psi) &= \sup_{f \in H_\omega} \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) \sin x dx \right| = \sup_{f \in H_\omega} \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x) \sin x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(2\pi - x) \sin x dx \right| = \\ &= \sup_{f \in H_\omega} \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [f(x) - f(2\pi - x)] \sin x dx \right| \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \omega(2\pi - 2x) \sin x dx = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega(2x) \sin x dx. \end{aligned}$$

Функція $\psi(x)$ у цьому прикладі є симетричною відносно точки π . Нехай тепер функція $\psi(x)$ не є симетричною, але задовольняє такі умови:

- 1) функція $\Psi(x) = \int_a^x \psi(t) dt$ строго зростає (спадає) на $(a; c)$, $a < c < b$ і строго спадає (зростає) на $(c; b)$;
- 2) $\Psi(b) = 0$.

Чому дорівнює $\mathcal{E}(H_\omega, \psi)$ в цьому випадку, тобто у випадку, коли $\psi(x)$ задовольняє умовам 1) і 2)? Відповідь на це питання була дана М. П. Корнейчуком

при $\omega(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$ в Корнейчук (1959), а при довільному $\omega(t)$ в Корнейчук (1971). У Корнейчук (1959) відмічається, що незалежно такий же результат отримав С. Б. Стечкін.

Теорема 1 Нехай сумовна на проміжку $[a; b]$ функція $\psi(x)$ задовольняє умови 1) і 2). Тоді

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(H_\omega, \psi) &= \sup_{f \in H_\omega} \left| \int_a^b f(t) \psi(t) dt \right| \leq \\ &\leq \int_a^c \omega(\rho(t) - t) |\psi(t)| dt = \int_c^b \omega(t - \rho^{-1}(t)) |\psi(t)| dt, \end{aligned} \quad (3)$$

де функція $\rho(x)$ визначена для $a \leq x \leq c$ рівностями $\Psi(x) = \Psi(\rho(x))$,
 $a \leq x \leq c \leq \rho(x) \leq b$,

а $\rho^{-1}(x)$ — функція, обернена до $\rho(x)$.

Якщо $\omega(t)$ — випуклий вгору модуль неперервності, тобто для

$$\forall t_1 \geq 0 \text{ і } \forall t_2 \geq 0 \quad \alpha \omega(t_1) + \beta \omega(t_2) \leq \omega(\alpha t_1 + \beta t_2), \quad \alpha + \beta = 1, \quad 0 \leq \alpha \leq 1,$$

то в (3) має місце знак рівності, причому верхню грань реалізують функції з класу H_ω виду $K \pm f_0(x)$, де K — довільна стала, а

$$f_0(x) = \begin{cases} - \int_a^c \omega'(\rho(t) - t) dt, & a \leq x \leq c, \\ \int_c^b \omega'(t - \rho^{-1}(t)) dt, & c \leq x \leq b. \end{cases}$$

Відмітимо, що це твердження широко використовувалось М. П. Корнейчуком, В. К. Дзядиком, О. І. Степанцем і їх учнями в теорії наближень. У математичній літературі воно відоме як «лема Корнейчука — Стечкіна».

Таке ж твердження для функцій багатьох змінних було встановлене О. І. Степанцем (1981). Його застосування для відшукування точних верхніх граней наближення періодичних функцій багатьох змінних на деяких класах функцій склали основу докторської дисертації О. І. Степанця, одним з офіційних опонентів по якій був М. П. Корнейчук.

Список літератури

- Корнейчук, Н. П. (1959). О приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица, суммами Бернштейна — Рогозинского. *ДАН СССР*, 125(2), 258–261.
- Корнейчук, Н. П. (1971). Экстремальные значения функционалов и наилучшее приближение на классах периодических функций. *Изв. АН СССР, Сер. Математика*, 35(1), 93–124.
- Корнейчук, Н. П. (1976). *Экстремальные задачи теории приближения*. Москва: Наука.
- Степанец, А. И. (1981). *Равномерные приближения тригонометрическими полиномами*. Киев: Наукова думка.

Видатний український математик ХХ століття
Микола Павлович Корнейчук
(до 100-річчя від дня народження)

П. В. Задерей, Г. Д. Нефьодова, Н. М. Задерей, А. В. Ткаченко

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
zadereypv@ukr.net, g.nefyodova@gmail.com,
zadereynm@gmail.com, 912kiev.nt@gmail.com



У січні 2020 року світова математична спільнота відзначила 100-річчя від дня народження видатного українського математика, фундатора потужної наукової школи з теорії наближення академіка НАН України (1997) Миколи Павловича Корнейчука.

М. П. Корнейчук відомий у світі як учений, що зробив фундаментальний внесок у розвиток теорії функцій, теорії наближень та інших розділів математичного аналізу. Він досяг вагомих результатів у різних напрямках теорії апроксимації, таких, як найкращі наближення поліномами і сплайнами, поперечники функціональних класів, найкращі квадратурні формули, оптимальне відновлення функціоналів і операторів, найкращі наближення за наявності обмежень, інформаційні аспекти теорії апроксимації.

Микола Павлович Корнейчук народився 22 січня 1920 року в селі Бобрик Петриківського району Гомельської області (Білорусь) в селянській родині. Після закінчення в 1938 році Гомельського індустріально-педагогічного технікуму працював вчителем математики. У 1940–1949 роках служив у лавах Радянської армії, був учасником бойових дій у Другій світовій війні, двічі був поранений.

Після звільнення з військової служби Микола Павлович працював вчителем математики середньої школи і заочно навчався на математичному відділенні Дніпропетровського університету. Після закінчення з відзнакою університету вступив до аспірантури кафедри математичного аналізу Дніпропетровського університету, де ще в довоєнні роки відомими математиками А. М. Колмогоровим та С. М. Нікольським була заснована знаменита школа з теорії наближень.

Саме академік Сергій Михайлович Нікольський став для Миколи Павловича науковим наставником і порадиником на все подальше життя. Дорога в науку в Миколи Павловича була досить непростюю. Хоча порівняно пізно він почав

займатись науковою діяльністю, але відразу яскраво заявив про себе в науковому середовищі. У 1959 році М. П. Корнейчук успішно захистив кандидатську дисертацію «Деякі питання наближення періодичних функцій тригонометричними многочленами».

Від початку своєї наукової діяльності Микола Павлович брався за розв'язання важких задач, досліджуваних математиками протягом довгого періоду. Відома задача Фавара про точне значення верхніх меж найкращих наближень тригонометричними поліномами для класів W^r для цілих r була повністю розв'язана Ж. Фаваром, Н. І. Ахієзером, М. Г. Крейном, а для довільних r — В. К. Дзядиком. М. П. Корнейчук зробив наступний крок — знайшов розв'язок задачі Фавара для класів Гельдера. Для її розв'язання він уперше застосував метод проміжного наближення, який виявився ефективним і для інших задач теорії наближень. Згодом Микола Павлович знайшов розв'язок цієї задачі на класах функцій, r -ті похідні яких не перевищують заданого модуля неперервності, тобто на класах $W^r H_\omega$.

У 1963 році М. П. Корнейчук блискуче захищає докторську дисертацію і в цьому ж році стає завідувачем кафедри теорії функцій Дніпропетровського державного університету, успішно керує аспірантами. Серед його учнів «дніпропетровського періоду» (до 1974 року) 10 кандидатів наук, з них троє захистили докторські дисертації.

Наукова творчість Миколи Павловича Корнейчука була спрямована на вирішення фундаментальних проблем, які вимагали створення нових методів досліджень, пов'язаних з екстремальними задачами теорії наближень. Одним з його найвагоміших внесків у світову математичну скарбницю стало створення теорії Σ -перестановок. Функція представляється у вигляді зліченної суми так званих простих функцій. Тоді Σ -перестановкою функції називається сума спадних перестановок (так званих перестановок Гарді) цих простих функцій. Перестановки Гарді зберігають L_p -норми $1 \leq p < +\infty$) функцій. Σ -перестановки Корнейчука залишають без зміни не тільки норму функції в L_1 , але й не змінюють її варіацію.

Доведені М. П. Корнейчуком теореми порівняння Σ -перестановок і перестановок Гарді в поєднанні з теоремами двоїстості заклали основу створеного ним методу дослідження екстремальних задач теорії апроксимації, в тому числі задач про точні значення поперечників функціональних класів.

У 1972 році М. П. Корнейчука було обрано членом-кореспондентом АН УРСР, а в 1973 році за цикл праць з екстремальних задач теорії наближень він був удостоєний Державної премії СРСР. За запрошенням оргкомітету XVII Міжнародного конгресу математиків, який проходив 1974 року у Ванкувері (Канада) М. П. Корнейчук виступив з годинною доповіддю.

У 1974 році Микола Павлович переїхав до Києва, з 1974 року очолював відділ геометричної теорії функцій та топології Інституту математики НАН України, а з 1987 року — відділ теорії наближень.

Серед його учнів «київського періоду» — 15 кандидатів наук, з них п'ятеро захистили докторські дисертації. Нині учні Миколи Павловича працюють в Україні, США, Австрії, Вірменії, Таджикистані.

Величезні досягнення Миколи Павловича і в теорії сплайнів. За цикл праць «Теорія сплайнів та її застосування в оптимізації наближень» М. П. Корнейчуку присуджено Державну премію України в галузі науки і техніки.

У 1997 році Миколу Павловича Корнейчука було обрано дійсним членом Національної академії наук України.

В особі Миколи Павловича талант вченого поєднувався з великими організаторськими здібностями. Багато років він очолював Київське математичне товариство, був заступником академіка-секретаря Відділення математики НАН України. Протягом двох десятиліть він був керівником наукового семінару з теорії наближень в Інституті математики НАН України. Ці семінари були досить представницькими, їх відвідували аспіранти, співробітники, науковці з різних міст України. Викладачі кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей КПІ імені Ігоря Сікорського П. В. Задерей, Л. А. Репета, В. С. Романюк, В. В. Дрозд, Н. М. Задерей були активними учасниками даного семінару М. П. Корнейчука, виступали на ньому з доповідями.

Микола Павлович Корнейчук обіймав посади голови спеціалізованої вченої ради із захисту кандидатських та докторських дисертацій в Інституті математики НАН України, а також голови експертної ради ВАК України з математики. Внесок Миколи Павловича Корнейчука у сфері підготовки наукових кадрів вищої кваліфікації був досить вагомим.

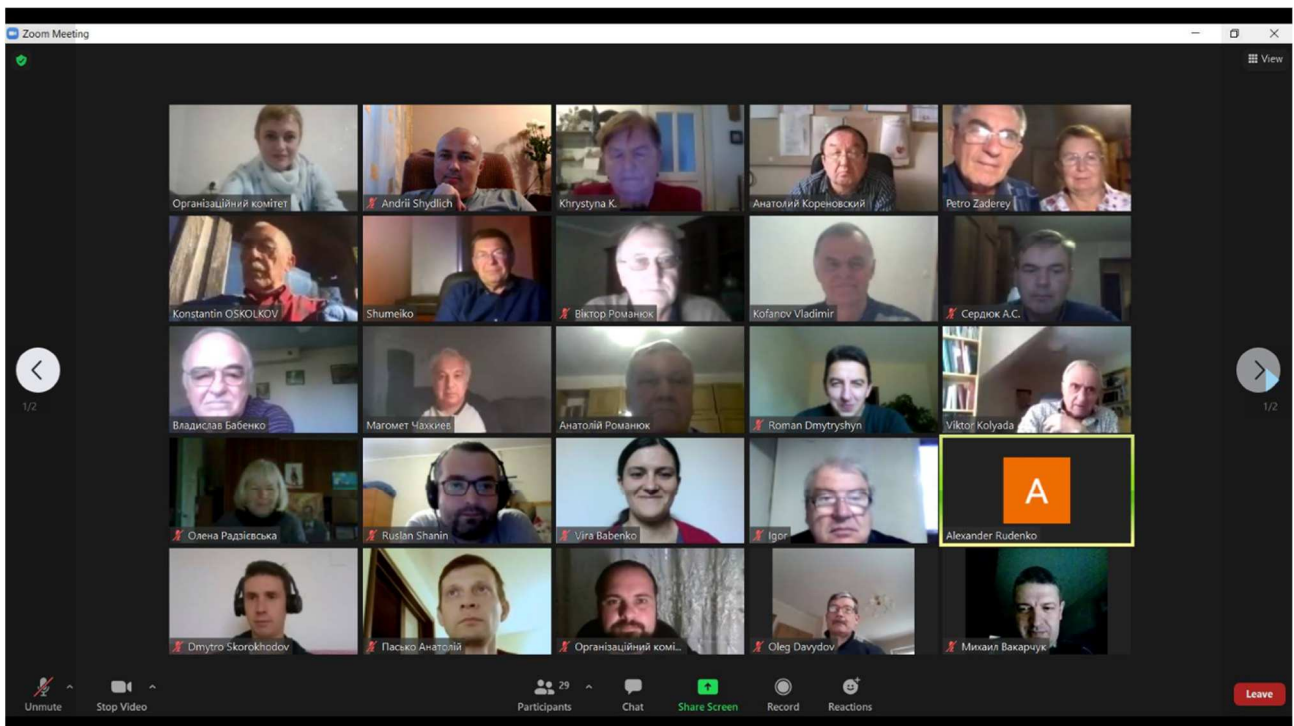
В останні роки М. П. Корнейчук вивчав інформаційні аспекти теорії наближень — адаптивні методи апроксимації, порівняння функціоналів за їх інформативністю, складність апроксимаційних задач, оптимальне відновлення математичних об'єктів за наявності неповної інформації стосовно їх складових. І в цій галузі він досяг значних результатів.

Результати досліджень Миколи Павловича та його учнів викладено у 8 монографіях. Ці монографії відразу після їх виходу ставали дуже популярними серед фахівців з теорії наближень, математичного аналізу. Монографія «Exact constants in approximation theory» М. П. Корнейчука опублікована у видавництві Кембриджського університету.

Микола Павлович Корнейчук відійшов у вічність 22 липня 2003 року, похований на Байковому кладовищі в Києві.

Пам'яті М. П. Корнейчука присвячені міжнародні математичні конференції «Теорія наближень та її застосування», що відбулися в 2010 та 2020 роках.

Остання конференція, присвячена 100-річчю від дня народження вченого, відбулась дистанційно за участю Інституту математики НАН України, Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара, Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Гіссенського університету (Німеччина). Міжнародна конференція була досить представницькою, у її роботі прийняли участь більш, як 50 вчених з багатьох країн, були представлені такі



країни, як Україна, Австрія, Німеччина, США, Туреччина, Білорусь, Росія. Було зроблено 25 наукових доповідей, кожна з яких супроводжувалася жвавим обговоренням.

Викладачі кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей фізико-математичного факультету КПІ імені Ігоря Сікорського активно долучилися до роботи у Міжнародній науковій конференції, зокрема, у конференції брали участь професори кафедри П. В. Задерей, В. А. Михайлець, В. С. Романюк, доценти Н. М. Задерей, Л. А. Репета, В. В. Дрозд, старший викладач Г. Д. Нефьодова, асистент В. В. Бовсуновська.

Учасниками конференції підготовлені матеріали для доповідей, що опубліковані в тезах Міжнародної наукової конференції «Теорія наближень і її застосування». З науковими доповідями на конференції виступили професори кафедри П. В. Задерей та В. А. Михайлець.

Організатором та натхненником конференції була доктор фізико-математичних наук Наталія Вікторівна Парфінович, завідувачка кафедри математичного аналізу і теорії функцій Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара.

Незважаючи на те, що вперше така конференція відбулася в дистанційному режимі, це не завадило їй бути цікавою, успішною, корисною та конструктивною. Конференція проходила протягом трьох днів, з урахуванням часових поясів кожної країни, науковці з різних країн яскраво виступали з доповідями, приймали участь у обговоренні, і ще протягом довгого часу дружньо спілкувалися поза офіційним часом проведення конференції.

Учні школи Миколи Павловича Корнейчука активно і плідно продовжують дослідження в багатьох напрямках теорії наближень. Нині вони працюють як в Україні так і за її межами — у багатьох країнах Європи, Азії та Америки. Ім'я українського вченого-математика академіка Миколи Павловича Корнейчука золотими літерами вписане в скарбницю світової математичної науки.

Список літератури

- Корнейчук, Н. П. (1976). Экстремальные задачи теории приближения. Москва: Наука.
- Самойленко, А. М., Романюк, А. С., & Сердюк, А. С. (2020). Видатна постать у теорії наближення ХХ століття. До 100-річчя від дня народження академіка НАН України М. П. Корнейчука. *Вісник НАН України*, (1), 67–72.

Рекордсмен — число Грема

С. О. Зінюк

КПШ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

sophiazinuk@gmail.com

У статті систематизовано деякі великі числа, наведено їх фізичні зображення. Описано метод стрілкової нотації Кнута та спосіб побудови числа Грема.

Ключові слова: число Грема, теорія Рамсея, стрілкова нотація Кнута, рекорд Гіннеса.

Ще здавна людство навчилося рахувати, хто за допомогою пальців рук, хто за допомогою глиняних фігурок. Навіть дитина розуміє, що є один, два й багато, не замислюючись над змістом останнього. Виникає питання, наскільки великим є «багато»?

Справжня історія математики починається з винайдення ефективного способу запису чисел. Звична для нас десяткова нотація винайдена порівняно нещодавно, усього близько 1500 років назад. Протягом століть людина винаходить все нові й нові поняття, що можна описати числами. Спочатку це була чисельність населення міста, а пізніше люди дійшли до більших значень, таких як 7 мільярдів – приблизна кількість людей, що проживають на планеті, та квантильон (10^{18}) — кількість всіх можливих конфігурацій при збиранні кубика Рубика і так далі.

Зупинімося на 10^{185} , або одиниця та 185 нулів. Уявити складно, але стільки планківських об'ємів необхідно, щоб заповнити весь доступний для огляду всесвіт. Але що ж далі? Можна сказати, що 10^{185} — найбільше число, що хоча б щось може значити для людства в сучасній науці, адже всі наступні числа будуть просто послідовністю цифр, що простягаються на всесвіти. Розглянути хоча б гуголплекс, число, яке можна утворити з більш відомого гугла, або 10^{100} . Гуголплекс – це щось надзвичайно велике — 10 в степені гугол.

Усі ці числа не можна порівняти з тим, що буде розглянуто далі. Перед тим, як назвати число-рекордсмена, сформулюємо задачу, з якої воно походить.

Уявімо куб, усі вершини якого з'єднані відрізками, що розфарбовані в один з кольорів — синій або червоний. Питання задачі таке: чи зможемо ми так розфарбувати ребра, щоб в одній площині не утворювалися відрізки одного кольору, що сполучають чотири вершини? Так, звичайно, це не складно навіть уявити, так як ми розглядали всім зрозумілий тривимірний простір, але що ж отримаємо, якщо перенесімося у простори більшого виміру?

Доведено, що й у подальших вимірах на це питання є відповідь. Але, починаючи з 13 виміру, з'явилися проблеми. Дана задача носить комбінаторний характер, а її постановка належить до класу задач теорії Френка Рамсея. Точне формулювання є наступним: «Розглянемо n -мірний гіперкуб. При якому най-

меншому n кожен наступний розфарбований граф буде містити підграф з чотирма вершинами, які лежать в одній площині й розфарбовані в один колір».

Пошуком відповіді займався відомий американський математик Рональд Грем, на честь якого й було названо пізніше число-гігант, що фігурує в розв'язку задачі. У 1971 році він разом з Брюсом Лі Ротшильдом довели, що розв'язок — число n , яке знаходиться у проміжку від 13 й до числа Грема.

Який же вигляд має число Грема? Для запису великих чисел Дональдом Кнотом було запропоновано спеціальний метод, що носить назву «стрілкова нотація Кнута». Записується ця операція певним чином, а саме:

$$a \uparrow b, a \uparrow\uparrow b, \text{ і так далі};$$

кількість стрілок може бути будь-яка. Розглянемо на конкретному прикладі:

$$3 \uparrow 3 = 3^3 = 27,$$

тобто одна стрілка — це звичайне піднесення до степеню. Назвімо «баштою» вираз, що записаний у вигляді потрібної кількості степенів; висотою «башти» назвімо кількість степенів, починаючи з основи. Операція з двома такими стрілками буде складнішою, а саме:

$$3 \uparrow\uparrow 3 = 3 \uparrow 3 \uparrow 3 = 3^{3^3} = 3^{27} \approx 7.6 \text{ млрд}$$

Тобто перша цифра в записі $3 \uparrow\uparrow 3$ є основою, з якої буде складатися кожен «поверх» дробу, а друга — показує висоту цієї «башти» зі степенів:

$$3 \uparrow\uparrow\uparrow 3 = 3 \uparrow\uparrow 3 \uparrow\uparrow 3 = 3 \uparrow\uparrow (3 \uparrow 3 \uparrow 3) = 3 \uparrow\uparrow 3^{27}$$

Останнє показує, що «башта» зі степенів трійок буде висотою більше, ніж 7 млрд.

Відмітимо, як швидко зростає «функція-стрілка»: спочатку було 27, потім понад 7 млрд, а три стрілки — уже позначають число, яке вже навіть неможливо записати у степеневому вигляді, а не те що обрахувати. Перейдімо до чотирьох стрілок:

$$3 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 3 = 3 \uparrow\uparrow\uparrow (3 \uparrow\uparrow\uparrow 3) = 3 \uparrow\uparrow\uparrow (3 \uparrow\uparrow 3^{27}).$$

Розглянемо перший член великого числа Грема:

$$g_1 = 3 \uparrow\uparrow\uparrow 3,$$

позначення якого походить від першої букви прізвища великого математика, а індекс — від його порядкового номеру в послідовності. Масштаб g_1 є настільки великим, що його просто неможливо усвідомити, хоча запис його у стрілковій нотації Кнута є відносно зрозумілим.

Які ж інші члени послідовності? Другий член числа Грема g_2 можна записати через стрілкову нотацію Кнута, причому кількість стрілок між першою та другою трійками буде складати g_1 :

$$g_2 = \underbrace{3 \uparrow\uparrow \dots \uparrow\uparrow 3}_{g_1 = 3 \uparrow\uparrow\uparrow 3}$$

Перейдемо до третього члена g_3 . Як можна зрозуміти, це число буде мати між трійками вже g_2 стрілок. І так далі... продовжимо до g_{63} , що буде мати g_{62} стрілок.

Останнім, шістдесят четвертим членом у цій послідовності, буде G_{64} — анонсоване велике число Грема. Згідно з правилом, G_{64} має g_{63} стрілок між трійками. У 1980 році число Грема було занесено в Книгу рекордів Гіннеса, як найбільше число, що використовується в математичному доведенні. Звичайно, на сьогодні вже існує багато більших чисел, що використовуються в математиці, проте саме число Грема було першим надзвичайно великим.

Який порядок числа Грема в ряді натуральних чисел? Чи можна долічити до G_{64} ? Відповіддю на це питання є той факт, що до мільярду дорахувати можна за 32 роки, тому що 32 оберти Землі навколо Сонця займають приблизно 1 мільярд секунд. Розглянемо число, що навіть не наближається до першого члену g_1 , а є всього лиш операцією двох стрілок:

$$3 \uparrow\uparrow 3 = 3 \uparrow 3 \uparrow 3 = 3^{3^3} = 3^{27} \approx 7.6 \text{ млрд.}$$

Потрібно більше, ніж 240 років лічби без упину! З повною ймовірністю можна сказати, що до числа G_{64} дійти неможливо як з практичної точки зору, так і з теоретичної.

Не дарма кажуть, що все, що людина може усвідомити, до чого може додуматися — рано чи пізно з'явиться в реальному житті. Не новими є випадки, коли задачі та гіпотези випереджають час, а їх строге математичне обґрунтування дає поштовх розвитку нових систем числення та теорій, які в майбутньому слугують людству в практичних цілях. У статті розглянуто число Грема, яке з'явилося як розв'язок комбінаторної задачі, але завдяки масштабності потрапило на сторінки книги рекордів Гіннеса. Запис великих чисел за допомогою стрілкової нотації Кнута, хоч і допоміг при записі G_{64} , не є універсальним для інших гігантів, зокрема, для числа Райо (https://en.wikipedia.org/wiki/Rayo%27s_number). Майбутнє вимагає відповідей на питання, які в порівнянні з попередніми виглядають недосяжними, тому необхідно апелювати до нових категорій та гнучко вводити до розгляду наявні абстракції.

Список літератури

- Gardner, M. (1977). Mathematical games. *Scientific American*, 237(5), 18–28
- Graham, R. L., & Rothschild, B. L. (1971). Ramsey's theorem for n -parameter sets. *Transactions of the American Mathematical Society*, 159, 257–292.
- Стюарт, Й. (2019). *Укрощение бесконечности. История математики от первых чисел до теории хаоса*. Москва: Манн, Иванов и Фербер.

Семья Джеймса Стирлинга

Т. В. Маловичко

КПИ им. Игоря Сикорского, Киев, Украина

tatianamtv@rambler.ru

Рассмотрены биография Джеймса Стирлинга и его генеалогическое древо.

Ключевые слова: Джеймс Стирлинг, генеалогическое древо.

Джеймс Стирлинг (1692–1770) — выдающийся шотландский математик, основные работы которого относятся к математическому анализу и геометрии, член Лондонского королевского общества. Его именем названы формула Стирлинга (асимптотическое представление для факториала) и числа Стирлинга, используемые в комбинаторике.

Джеймс Стирлинг родился 11 мая 1692 года в семейном имении Гарден, что примерно в 20 км к западу от шотландского городка Стерлинг.

Он происходил из младшей ветви рода Стирлингов, которую часто называли Стирлинги из Гардена, из клана Стерлинг — одного из кланов равнинной части Шотландии. Происхождение название клана территориальное. В Шотландии есть местность Стерлинг, город Стерлинг, замок Стерлинг. Местность лежит на перекрестке дорог, есть версия, что название означает «место борьбы». Основателем этого клана считается Торальдус (Thoraldus de Strivelyn). Он упоминается в грамотах короля Шотландии Давида I, которые датируются 1147 годом (Stirling History) Известно 64 различных способов написания имени Стирлинг.

Поместьем Каддер (Cadder, Cawder, Calder) Стирлинги владели с XII века. В 1448 году Стирлинги приобрели поместье Кейр в Пертшире. В 1534 или 1535 году две ветви, владеющие этими поместьями, были объединены крайне неудачным браком Джеймса Стирлинга из Кейра (James Stirling, 4th of Keir and 1st of Cadder) с Джанет Стирлинг, наследницей Коудера. Элизабет — дочь этого Джеймса Стирлинга от второй жены, Джин Чисхолм, — вышла замуж в 1572 году за Джона Непера из Мерчистона, знаменитого изобретателя логарифмов.

В начале семнадцатого века сэр Арчибальд Стирлинг из Кейра (Sir Archibald Stirling, 5th of Keir, 2nd of Cadder) купил поместье Гарден рядом со Стерлингом, а в 1613 году он передал его своему сыну Джону Стирлингу (Sir John Stirling, 1st of Garden). Сын Джона, сэр Арчибальд Стирлинг, был ярым роялистом во время Гражданской войны и был вынужден заплатить существенный штраф при Кромвеле, но его верность была вознаграждена при реставрации, и он был назначен на должность судьи Верховного суда Шотландии под именем лорд Гарден. Его сын Джон унаследовал Кейр и Каддер, а младший сын Арчибальд (Archibald Stirling, 3rd of Garden) унаследовал Гарден.

Богатая событиями карьера Арчибальда — это одна длинная вереница несчастий. Как и все остальные Стирлинги, он был предан делу Стюартов. В 1708 году он принял участие в восстании, когда Яков III надеялся захватить с помо-

щью Людовика XIV утраченный его отцом, Яковом II, престол. Тогда французский флот из 32 больших кораблей покинул Дюнкеркскую гавань, увозя претендента и войска к шотландским берегам, но вынужден был возвратиться назад, не достигнув цели. Арчибальда привезли пленным в Лондон, а затем вернули в Эдинбург, где судили за государственную измену, но оправдали. Он умер в 1715 году, и таким образом его имущество не было конфисковано.

Он был дважды женат. Первой женой была Маргарет Бэйли, вдова Джона Колкахуна. 20 июля 1679 года она родила Арчибальду сына, которого также назвали Арчибальдом (Archibald Stirling, 4th of Garden) и который стал его приемником, но сама скончалась при родах. От второго брака с Анной, старшей дочерью сэра Александра Гамильтона из Хэггса, близ Линлитгоу, у него было четыре сына и пять дочерей. Сыновья были Джеймс, умерший в младенчестве; Джон, который приобрел поместье Гарден у своего брата Арчибальда в 1717 году; Джеймс, тот самый выдающийся математик; и Чарльз (Tweedie, 1922).

Ни о детстве Джеймса Стирлинга, ни о его студенческих годах в Шотландии достоверной информации не сохранилось. Принято считать, что Стирлинг учился в Университете Глазго. Однако это не совсем точно, так как его имя не фигурирует в списке студентов. Известно, что он поехал в Оксфорд осенью 1710 года с намерением поступить туда. Действительно, в 1711 году он поступил в Оксфордский колледж Баллиол.

Стирлинг должен был при поступлении принести присягу английской королеве, но поскольку он, как и его семья, поддерживал якобитов, он категорически отказался от присяги. Сначала его освободили от присяги, но, когда в 1715 году произошло первое восстание якобитов, эта уступка была отменена. Стирлинга лишили стипендии. Затем его обвинили в переписке с якобитами. Он даже предстал перед судом по обвинению в «проклятии короля Георга», но был оправдан. Диплом Стирлинг не получил, но до 1717 года он оставался в Оксфорде.

В 1717 году Стирлинг опубликовал в Оксфорде свою первую работу «Lineae Tertii Ordinis Neutonianaе» («Ньютоновские кривые третьего порядка»), где изучает алгебраические кривые 3-й степени, уже исследованные Ньютоном. Стирлинг обнаружил 4 новых типа этих кривых, помимо уже известных Ньютону 72 типов. В этой же работе доказан ряд теорем, высказанных Ньютоном без доказательства, изучаются кривая скорейшего спуска и цепная линия, решается лейбницевская задача об ортогональных траекториях. Стирлинг выяснил, что алгебраическая кривая n -го порядка определяется своими

$\frac{n(n+3)}{2}$ точками.

В 1717 году Стирлинг отправился в Венецию. В Италии он продолжал заниматься математикой. В 1719 году он представил статью «Methodus Differenceis Newtoniana illustrata». В 1721 г. он учился в Падуанском университете.

В 1722 году Стирлинг вернулся в Глазго. В 1724 году Стирлинг отправился в Лондон, где пробыл 10 лет, в течение которых преподавал и активно занимался

ся математикой. 3 ноября 1726 года Стирлинг по рекомендации Ньютона был избран членом Лондонского королевского общества.

В 1730 году был опубликован главный труд Стирлинга, «Methodus Differentialis» («Дифференциальные методы»). Это один из первых содержательных учебников по математическому анализу, излагающий помимо основ анализа немало личных открытий Стирлинга. Одна из основных целей книги — рассмотрение способов ускорения сходимости рядов. Также в книге рассмотрены теория интегрирования, свойства гамма-функции, асимптотические представления. Также там рассмотрено асимптотическое представление для факториала, которое теперь известно, как формула Стирлинга, хотя автором этой формулы справедливо считать Абрахама де Муавра, а Стирлинг только нашёл в ней арифметическую константу $\sqrt{2\pi}$.

Также Стирлинг исследовал гравитацию и форму Земли.

В 1735 году Стирлинг вернулся в Шотландию, где был назначен менеджером «Шотландской горнодобывающей компании в Лидхилсе» в Ланаркшире с зарплатой 120 фунтов стерлингов в год. Административная работа хорошо ему давалась, но практически не оставляла свободного времени. Единственная опубликованная его работа (1745 г.) за этот период касается проблем вентиляции шахт. На этой должности он оставался до конца жизни.

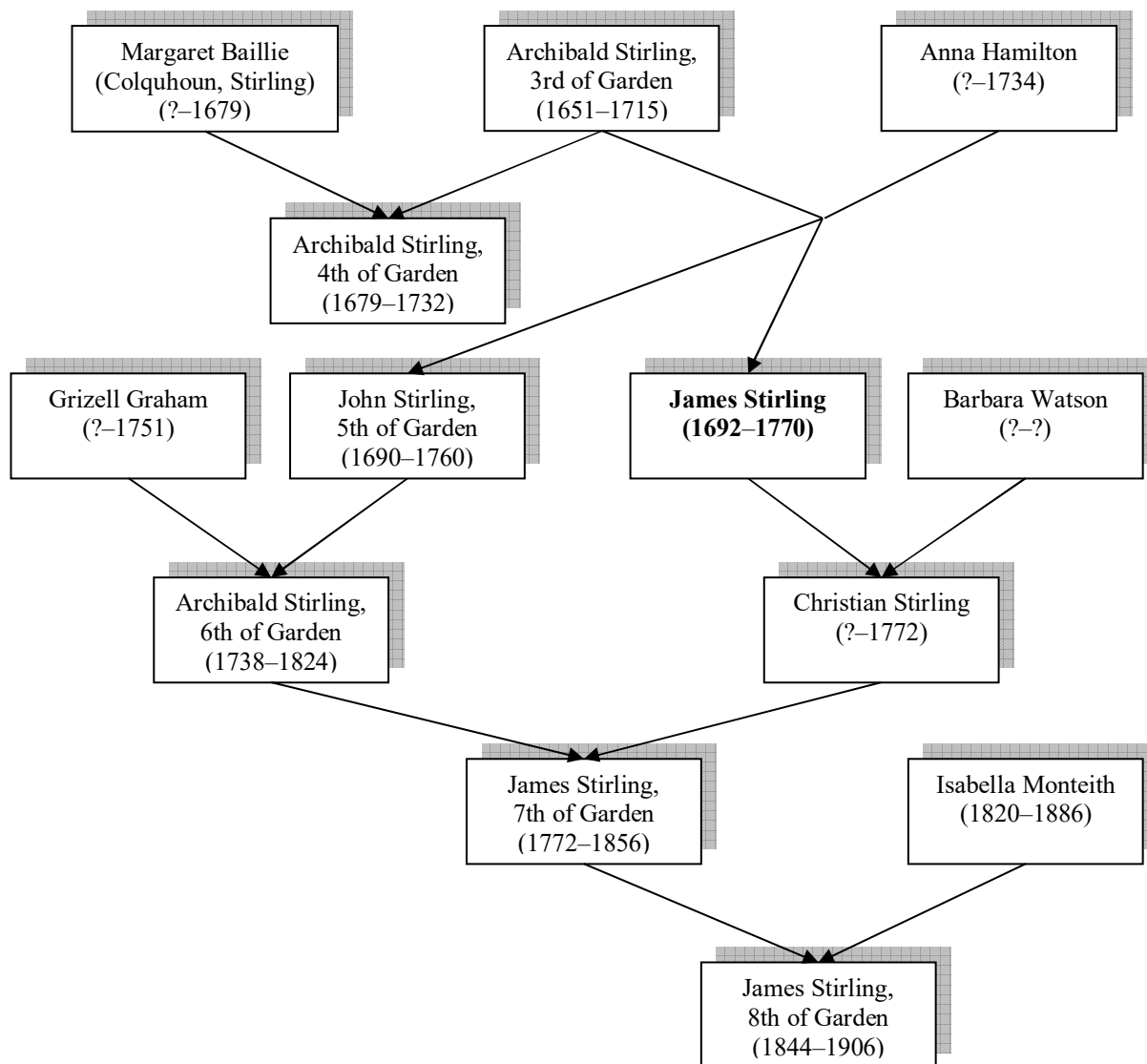
В 1745 году произошёл очередной неудачный мятеж якобитов. Когда из-за военных невзгод в 1746 году скончался Маклорен, Стирлинга пригласили занять его кафедру в Эдинбурге, но поддержка Стирлингом якобитов сделала это назначение невозможным.

В 1746 году Стирлинг был избран членом Берлинской Академии. В 1753 году он ушел из Королевского общества, поскольку не мог выплачивать ежегодные взносы.

Известно также, что Стирлинг исследовал реку Клайд, на которой стоит Глазго, с целью сделать её судоходной с помощью системы шлюзов, тем самым сделав первый шаг к превращению Глазго в торговую столицу Шотландии. Горожане в знак благодарности в 1752 году подарили ему серебряный чайник (O'Connor & Robertson, 1998).

Умер Стирлинг 5 декабря 1770 года в Эдинбурге.

Джеймс Стирлинг был женат на Барбаре Уотсон. Их единственная дочь Кристиан вышла замуж за своего двоюродного брата, Арчибальда (Archibald Stirling, 6th of Garden). Она скончалась 3 сентября 1772 года при родах единственного сына, Джеймса Стирлинга (James Stirling, 7th of Garden), который впоследствии унаследовал имение Гарден от отца и продолжил род Стирлингов (James Stirling).



Список литературы

Stirling History: ScotClans: Scottish Clans. (n. d.). <https://www.scotclans.com/scottish-clans/clan-stirling/stirling-history/>

Tweedie, C. (1922). *James Stirling: a Sketch of his Life and Works along with his Scientific Correspondence*. Oxford University Press.

O'Connor, J. J., & Robertson, E. F. (1998). *James Stirling*. <https://mathhistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Stirling/>

James Stirling. (n.d.). <https://www.clanmacfarlanegenealogy.info/genealogy/TNGWebsite/getperson.php?personID=I10573&tree=CC>

СИМОН СТЕВИН

Т. В. Маловичко

КПИ им. Игоря Сикорского, Киев, Украина

tatianamtv@rambler.ru

Рассмотрены биография Симона Стевина и его генеалогическое древо.

Ключевые слова: Симон Стевин, генеалогическое древо.

Симон Стевин (1548 (по др. сведениям 1549), Брюгге – 1620, Гаага или Лейден) — фламандский математик, механик и инженер, который ввёл использование десятичных дробей в Европе.

Симон Стевин был сыном Антона Стевина (Anthuenis (Anton) Stevin), который, предположительно, был младшим сыном мэра Вёрне, и Кателины ван дер Поорт (Cathelijne (or Catelyne) van der Poort) из Ипра. Его родители не состояли в браке, однако позже его мать вышла замуж за торговца коврами и шелком Йоста Сайона (Joost Sayon), чья семья придерживалась кальвинизма. О ранних годах и образовании Симона достоверной информации не сохранилось.



Стевин стал бухгалтером и кассиром фирмы в Антверпене. Известно, что некоторое время между 1571 и 1577 годами путешествовал по Польше, Пруссии и Норвегии. Затем в 1577 году он устроился клерком в налоговой инспекции Брюгге. В 1581 году он переехал в Лейден, где сначала посещал латинскую школу, а затем в 1583 году (в возрасте 35 лет) поступил в Лейденский университет (O'Connor & Robertson, 2004).

Во время учебы в Лейденском университете он познакомился с Морицом Оранским, сыном Вильгельма I Оранского, первого штатгальтера Голландии и Зеландии. Они подружились, и Стевин стал как учителем математики принца, так и его близким советником.

Вильгельм Оранский был убит 10 июля 1584 г. фанатиком-католиком и поклонником политики испанского короля Филиппа II Бальтазаром Жераром. Филипп-Вильгельм унаследовал его титул принца Оранского, но место следующего штатгальтера Нидерландов занял Мориц Оранский, а сестра Мария управляла их общим наследством. В 1590 году Мориц Оранский стал единоличным главнокомандующим вооруженными силами республики. Он начал проводить ряд военных реформ. Первым шагом стал отход от традиции содержать иностранных наёмников и переход к рекрутской повинности внутри страны. Офицерский состав отправляется для обучения в университеты. Для этой цели Мориц Оранский открыл первую в мире военную академию в 1590 году. В 1600 году он поручил Стевину основать инженерную школу в рамках Лейденского университета. Преподавание велось на голландском языке. В Государ-

ственном архиве Гааги находится журнал, где записана зарплата Стевина в размере 600 голландских гульденов в 1604 году, что подтверждает его высокое положение.

Считается, что с 1604 года Стевин был генерал-квартирмейстером армии Генеральных Штатов. Он изобрел способ затопления низменностей на пути вторгшейся армии при помощи открытия шлюзов в дамбах. Он был выдающимся инженером, консультировал по вопросам строительства ветряных мельниц, шлюзов и портов. Он консультировал Морица Оранского по вопросам строительства укреплений для войны против Испании и написал подробные описания военных новшеств, принятых в армии. Позднее эти нововведения были скопированы многими другими странами.

Армия Генеральных Штатов территорию, которая сегодня является Нидерландами, и Генеральные Штаты были официально признаны Англией и Францией в качестве независимого государства. Мориц хотел продолжить войну против Испании, но после фактического признания Испанией независимости Генеральных Штатов, он не получил большой поддержки. В 1609 году началось двенадцатилетнее перемирие.

В 1612 году Стевин купил дом в Гааге за 3800 голландских гульденов. Он женился по разным источникам в 1610 или 1614 году на Катерине Край. У них было четверо детей: Фредерик, Хендрик, Сусанна и Левина. Хендрик, их второй ребенок, окончил Лейденский университет и, став самостоятельным известным ученым, был редактором собрания сочинений своего отца [1].

Первой книгой Стевина была «*Tafelen van Interest*» (1582), посвящённая простым и сложным процентам. В ней помимо таблиц для периодов до 30 лет Стевин привел правила вычисления процентов, а также много примеров их использования. Такие таблицы ранее держались в секрете крупными банкирскими домами, поскольку было мало квалифицированных вычислителей, но после публикации Стевина они стали обычным явлением.

В «*Problemata geometrica*» (1583) Стевин рассмотрел конструкции, связанные с многоугольниками и многогранниками, используя понятие подобия, а также изучил правильные и полуправильные многогранники.

В работе «*La Thiende*» (1585), которая занимала всего 29 страниц, Стевин представил элементарное и подробное описание десятичных дробей и активно ратовал за их использование. Он показал, что операции могут выполняться с такими дробями так же легко, как и с целыми числами. Хотя он не изобретал десятичные дроби (они использовались арабами и китайцами задолго до него), он ввел их использование в Европе. Десятичную запятую ещё не придумали, и Стевин для ясности указывал над каждой цифрой (или после неё) заключённый в кружок её номер разряда, положительный для целой части, отрицательный для мантиссы. В конце трактата Стевин предложил использовать десятичную систему для мер и весов, чеканки монет и деления градуса дуги (Stevin, Simon).

В том же году были опубликованы его работы «*La pratique d'arithmétique*» и «*L'arithmétique*». В последней Стевин ввел новые обозначения для многочле-

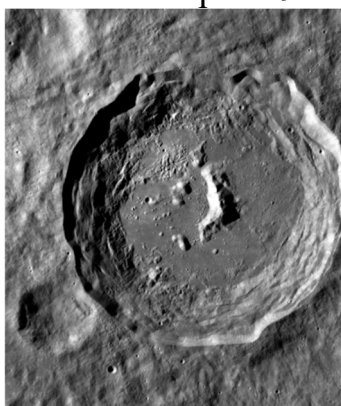
нов и дал упрощенные и унифицированные решения для уравнений второй, третьей и четвертой степеней. В приложении, опубликованном позднее, он показал, как аппроксимировать действительный корень для уравнения любой степени. Он также призывал рассматривать иррациональные и отрицательные числа как числа, а не как объекты различной природы.

Он высказал мысль о невозможности вечного движения и положил её в основу решения практических задач статики. В «*De Begginselen der Weeghconst*» (1586) Стевин рассматривает равновесие замкнутой цепочки типа бус, брошенной на предмет с сечением в виде прямоугольного треугольника с горизонтальной гипотенузой. Если бы сила, действующая на этот предмет, лежащий на наклонной плоскости, равнялась бы весу, то более тяжёлая часть цепи на длинном катете скатывалась бы вниз, перетягивая остальные звенья. Цепь двигалась бы вечно, но этого не происходит. Стало быть, сила, заставляющая тело скатываться с наклонной плоскости, не равна весу, а во столько раз его меньше, во сколько высота плоскости меньше ее длины (Алексеев, 1978). В трактате «*De Begginselen des Waterwichts*» (1586) Стевин показал, что давление, оказываемое жидкостью на данную поверхность, зависит от высоты жидкости и площади поверхности. Также в 1586 году (за 3 года до Галилея) он исследовал, что тела разного веса при свободном падении преодолевают расстояние за равное время. Его эксперименты проводились с использованием двух свинцовых шариков, один из которых в десять раз больше другого, которые он сбросил в тридцати футах от церковной башни в Делфте.

В 1590 году составил таблицы, в которых было указано время наступления приливов в любом месте в зависимости от положения Луны.

Также Стевин внёс вклад в теорию музыки, обосновав первую правильную теорию деления октавы на 12 равных интервалов.

В честь Стевина названы кратер Стевина (большой ударный кратер в южном полушарии видимой стороны Луны), площадь в Брюгге, где установлен памятник учёному, и судно для засыпки труб на морском дне, принадлежащее бельгийской компании Jan de Nul. Также его портрет размещён на бельгийской почтовой марке 1942 года.



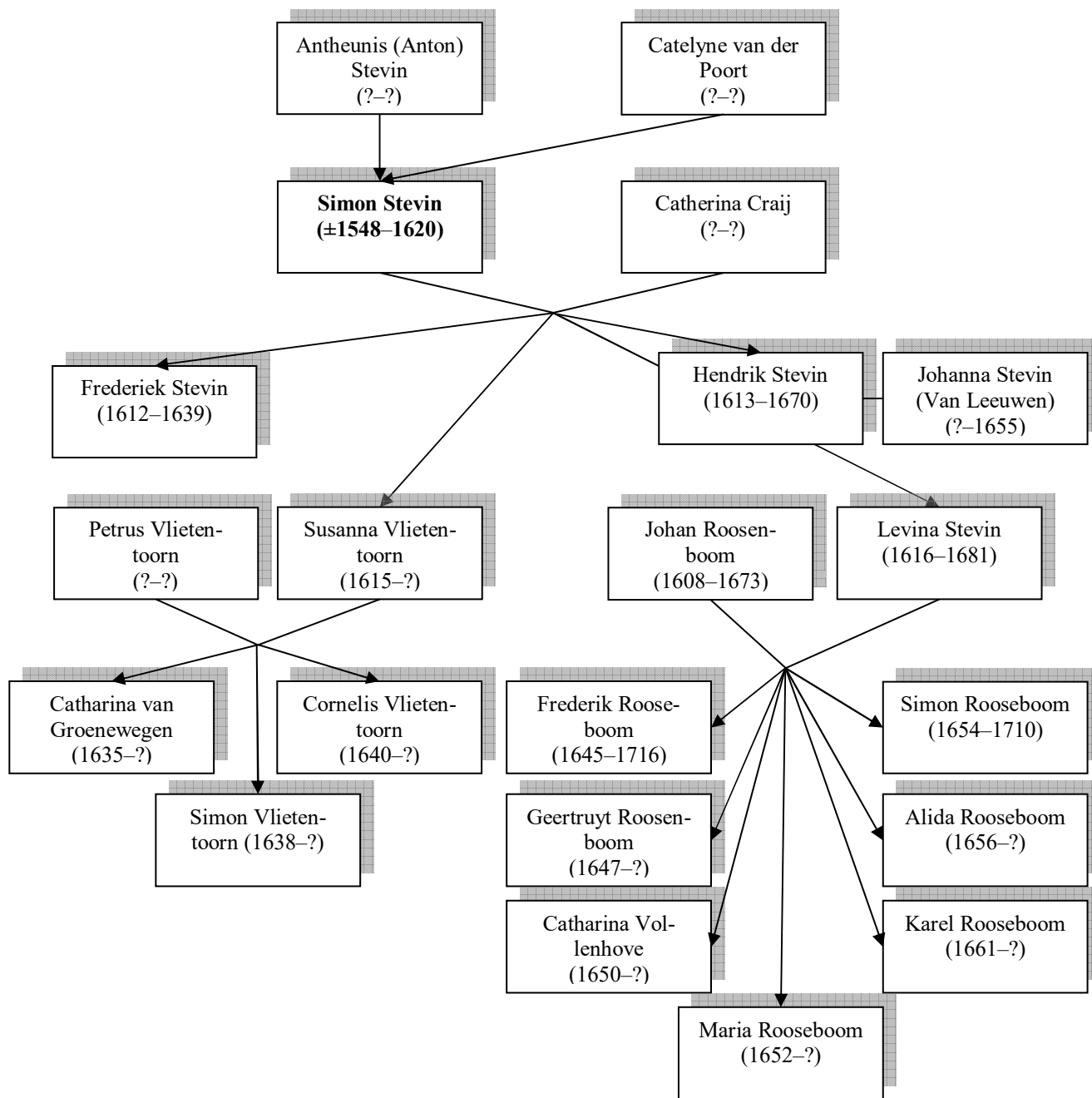
Кратер Стевин



Памятник в Брюгге (деталь)



Судно Simon Stevin



Генеалогическое древо Стевина

Список литературы

- O'Connor, J. J., & Robertson, E. F. (2004). *Simon Stevin*. <https://mathhistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Stevin/>
- Simon Stevin. (2018, May 25). <https://www.geni.com/people/Simon-Stevin/6000000013086621053>
- Stevin, Simon. *Dictionary of Scientific Biography* (Vol. 13). New York: Charles Scribner's Sons. <https://www.encyclopedia.com/people/science-and-technology/mathematics-biographies/simon-stevin>
- Алексеев, Г. Н. (1978). *Энергия и энтропия*. Москва: Знание.

Бернуллі — творці математики: історія роду та досягнень

В. М. Онищенко

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

onvera22@gmail.com

Робота містить життєві шляхи та наукові досягнення декількох поколінь сім'ї Бернуллі.

Ключові слова: сім'я Бернуллі, Якоб I Бернуллі, Йоганн I Бернуллі, Даніель Бернуллі, біографія, наукові інтереси, аналіз, теорія ймовірностей, математична фізика, диференціальні рівняння, інтегральне числення.

Цікавим феноменом у науці вважаються династії вчених, де старші покоління працюють у певних сферах, згодом залучаючи до спільної роботи своїх нащадків. Останні, у свою чергу не тільки вивчають нові області, а й удосконалюють численні ідеї батьків та розширюють попередні горизонти. Звернувшись до першоджерел, я переслідувала мету — довідатися більше про одне з яскравих сузір'їв на математичному небосхилі — родину математиків Бернуллі.

Видатна сім'я Бернуллі подарувала світові кілька поколінь блискучих різнопрофільних спеціалістів. Наступний рисунок зображає представників перших поколінь, досягнення яких описуються в тексті.

Сімейне дерево Бернуллі



Бурхлива історія протестантської родини Бернуллі починається 1583 року втечею з міста Антверпен через переслідування католиків у Базель, до Швейцарії. Батько, Николаус Бернуллі, одружився на представниці одного з найстаріших родів Базеля та зайнявся торгівлею. Подружжя мало 11 дітей і це стало початком видатної династії математиків.

I покоління:

Якоб I (1654–1705) самостійно оволодів формою аналізу Ляйбница. Повернувшись до Базеля після навчання закордоном, він присвятив себе астрономії та математиці, опублікувавши в 1681 році роботу про походження комет. У той час вони вважалися атмосферними явищами, але Якоб I довів, що це небесні тіла, які рухаються по замкнених орбітах. З 1687 року та до самої смерті він працював професором математики в Базелі.

Якоб I є одним із тих, хто розвинув аналіз, відштовхуючись від праць Ньютона та Ляйбница, застосував його до нових складних і важливих задач. Надзвичайно цінним був вклад Якоба I у розвиток аналітичної геометрії, теорії ймовірності та варіаційного числення. Зокрема відкриття, що брахістохрона (крива найшвидшого спуску) є циклоїдою, було зроблено разом із братом Якоба I — Йоганном I.

Після смерті Якоба I, у 1713 році було видано трактат з теорії ймовірності, що містить праці, які й на даний момент є актуальними в питаннях страхування, статистики та вивчення спадковості. Якоб I далеко просунув диференціальне та інтегральне числення. Грунтуючись на працях Ляйбница, він провів детальне вивчення кривої, по якій провисає важкий однорідний ланцюг, підвішений у двох точках. Сьогодні, розв'язок цієї задачі — ланцюгова лінія використовується до підвісних мостів і високовольтних ліній електропередачі. У численних його публікаціях досліджено нескінченні ряди, запроваджено опис полярної системи координат і детально вивчено низку функцій, зокрема, лемніскату Бернуллі та логарифмічну спіраль.

Йоганн I (1667–1748) розпочав свою діяльність як медик. У 18 років отримав ступінь магістра, але згодом змінив медицину на математику. У 1695 році він став професором математики в місті Гронінген, а після смерті старшого брата в 1705 році — його наступником як професор у Базелі. Йоганн I працював у сфері інтегральних і диференціальних числень, досліджував нескінченно малі та невизначеності, що згодом стали основою для праць його учня — Гійома Лопіталя. Йоганн I відкрив унікальну властивість геодезичних ліній; теорія удару та вчення про живу силу зробили його не тільки відомим математиком, а й талановитим фізиком. Інтереси Йоганна I охоплювали також астрономію та хімію, він багато займався оптикою, теорією вітрильних суден, принципом можливих переміщень у механіці. Він продовжив праці Ляйбница щодо диференціального числення і став фактично автором першої опублікованої книги про інтегральне числення.

Ніколаус (1662–1716), брат Якоба I та Йоганна I, також займався математикою, але про його наукову спадщину нічого невідомо порівняно з братами. Ніколаус у 16 років отримав ступінь доктора філософії в Базельському університеті, а через 4 роки отримав найвищий ступінь із правознавства.

II покоління:

Даніель (1700–1782), син Йоганна I, з 11 років почав брати уроки математики та робити шалені успіхи. Він 10 разів удостоювався премії Французької академії наук. На ряду з д'Аламбером та Ойлером вважається засновником математичної фізики в області моделювання пружних коливань. Найбільшу славу отримали праці Даніеля в області гідродинаміки та диференціальних рівнянь, він вивів рівняння постійної течії нестискуваної рідини, він сформулював закон збереження енергії. У 1725 році Даніель став професором математики в Санкт-Петербурзі, а через 8 років у Базелі отримав звання професора анатомії, ботаніки та фізики. У сфері математики опублікував ряд досліджень з теорії ймовір-

ностей, теорії рядів, чисельних методів і диференціальних рівнянь. Першим застосував математичний аналіз до завдань з теорії ймовірностей, на відміну від актуального на той час комбінаторного підходу. Даніель надав поштовх розвитку математичної статистики, застосувавши ймовірнісні методи до низки важливих задач.

Ніколаус I (1687–1759) був сином Ніколауса Бернуллі, олдермена Базеля. Під кураторством Якоба I Бернуллі, у 1704 році закінчив Базельський університет, а 5 років потому отримав ступінь доктора філософії завдяки своїй роботі з теорії ймовірностей у праві. Він був обраний членом Королівського товариства в Лондоні в 1714 році. Найбільш важливий внесок Ніколауса I — «Санкт-Петербурзький парадокс», що в значній мірі пояснював положення та методи теорії ймовірностей. Ніколаус I Бернуллі також працював над теоремою про незалежність значень часткових похідних від порядку диференціювання та досліджував рівняння Ріккати.

III покоління:

Йоганн III (1744–1807), син Йоганна II (1710–1790), у 16-річному віці отримав ступінь доктора філософії, а в 19 років знайшов своє справжнє покликання та був призначений королівським астрономом у Берліні. Він проявляв інтереси та працював у таких сферах, як астрономія, географія та математика.

Якоб II (1759–1789), син Йоханна II (1710–1790), у 21 рік почав займатися експериментальною фізикою та математикою. Був обраний членом Петербурзької академії наук, де працював у відділенні математики й фізики. Останні роки свого життя присвятив роботі над чисельними методами.

Покоління (з середини XVIII ст.):

З часом, нащадки роду Бернуллі все більше відходили від вивчення математики та фізики, досягаючи не менш значущих успіхів в інших сферах науки та культури. Ці покоління роду Бернуллі стали яскравими представниками своєї династії в хімії, фізиці, астрономії, юриспруденції, мистецтві, а також теології.

Об'єкти, що в назві містять кодове слово «Бернуллі». З метою систематизації знань, нижче наведено мапу, яка зіставляє конкретного представника I–III поколінь сім'ї Бернуллі з його науковими результатами.

Спадщина Якоба I:

• Диференціальне рівняння Бернуллі:
 $y' + P(x)y = Q(x)y^\alpha$, ($\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$), де $P(x)$ та $Q(x)$ — неперервно-диференційовані функції в області існування розв'язку $y = y(x)$;

• Лемніската Бернуллі — геометричне місце точок, добуток відстаней від яких до двох заданих фокусів постійний і дорівнює квадрату половини відстані між фокусами;

• Розподіл Бернуллі — обчислення ймовірності успіху в серії незалежних випробувань Бернуллі. Якщо ймовірність p настання події A у кожному з ви-

пробувань стала, то ймовірність $P_n(k)$ того, що подія A настане k разів у n незалежних випробуваннях: $P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 0, 1, \dots, n$;

- Закон великих чисел — емпірична ймовірність успішної події для серії незалежних випробувань Бернуллі збігається до теоретичної ймовірності;
- Многочлени Бернуллі — фігурують у записі багатьох спеціальних функцій, зокрема, ζ -функції Рімана та ζ -функції Гурвіца;
- Числа Бернуллі — послідовність раціональних чисел B_0, B_1, B_2, \dots , що фігурують в зображенні суми послідовних натуральних чисел, піднесених до од-

накового степеню:
$$\sum_{n=0}^{N-1} n^k = \frac{1}{k+1} \sum_{s=0}^k \binom{k+1}{s} B_s N^{k+1-s}.$$

Спадщина Йоганна І:

- Нерівність Бернуллі: $(1+x)^n \geq 1+nx$, $x \geq -1$, ($n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$);
- Тотожності Бернуллі («мрія другокурсника») — пара тотожностей вигляду:

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n} \quad \text{та} \quad \int_0^1 x^x dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{-n} = -\sum_{n=1}^{\infty} (-n)^{-n};$$

- Правило Бернуллі — Лопіталя — метод знаходження границі частки функцій через границю частки їхніх похідних для невизначеностей $\left[\frac{0}{0} \right]$ та $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

Спадщина Даніеля:

- Критерій існування розв'язку $y = y(x)$ спеціального рівняння Ріккати в елементарних функціях: $y' = ay^2 + bx^\alpha$, ($a, b, \alpha \in \mathbb{R}$);
- Закон Бернуллі або інтеграл Бернуллі — рівняння постійної течії нестискуваної рідини в гідродинаміці.

Дана стаття висвітлює питання не тільки біографічного змісту, а й справедливості щодо наукової спадщини деяких поколінь родини Бернуллі. Її представники зробили величезний внесок у теорію ймовірностей, диференціальні рівняння, аналіз та математичну фізику. Останні дисципліни є профільними для моєї спеціальності, тому, вільно володіючи німецькою, мені було цікаво перечитати першоджерела мовою оригіналу та відновити істину. Слово «Бернуллі» в наукових результатах не ідентифікує однозначно автора, тому робота присвячена коректурі цієї прогалини — і містить іменну збірку досягнень. Безсумнівно, Бернуллі є одними з титанів і фундаторів математики, як сімейства Патонів — у фізиці чи Кассіні — в астрономії, а численна кількість їхніх нащадків і сьогодні не зупиняється на досягнутому та вдосконалює точні та гуманітарні науки.

Список літератури

- Hess, H. J., & Nagel, F. (Eds.). (1989). *Der Ausbau des Calculus durch Leibniz und die Brüder Bernoulli: Symposion der Leibniz-Gesellschaft und der Bernoulli-Edition der Naturforschenden Gesellschaft in Basel, 15. bis 17. Juni 1987* (Vol. 17). Franz Steiner Verlag Wiesbaden GmbH.
- Müller, G. E. (1976). *Philosophy of Literature*. New York: Philosophical Library.
- Thurneysen, P. M. (1860). *Die mathematiker Bernoulli: Jubelschrift zur vierten säcularfeier der Universität Basel, VI. september MDCCCLX, im auftrage der Philosophischen facultät verfasst*. Basel: Schweighauser'sche Universitäts-Buchdruckreei.
- Белл, Е. Т. (1979). *Творцы математики: Предшественники современной математики. Пособие для учителей*. Москва: Просвещение.
- Никифоровский, В. А. (1984). *Великие математики Бернулли*. Москва: Наука.

Застосування математики для вирішення проблеми захищеності

О. С. Петрученко¹, Р. І. Сташків¹, Т. П. Петрученко²

¹Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного,
Львів, Україна

²Національний університет «Львівська політехніка», Львів, Україна
voksanietko@gmail.com

У статті розглянуто принципи застосування математики для вирішення задач щодо розробки структури пакету захисної конструкції для захисту особового складу та військової техніки від куль стрілецької зброї.

Ключові слова: математика, засоби захисту, техніка.

«Що таке математика: модель, опис, метафора реальності — або сама реальність?» Її ділять на абстрактну математику це та частина математики, яка ще не знайшли свого прикладного застосування. Абстрактна математика не намагається отримати знання про світ, а створює свої, за схожими правилами. Її ціллю є скоріше задоволення самого математика від застосування методу, та його краси. Методами математики, звісно, є дедукція та уява. Вона оперує об'єктами в ідейному світі, із власними законами та надає їм довільних властивостей. Історія показує, що області абстрактної математики з часом стають прикладними, і сконструйовані абстрактною математикою об'єкти, можуть знаходити своє застосування в моделях прикладної математики. Презирство до практики виявилось прагматично виправданим. Ніхто не припускав за часів греків, що вивчення конічних перерізів принесе яку-небудь користь: але, нарешті, в XVII столітті Галілей відкрив, що снаряди рухаються по параболі, а Кеплер — що планети рухаються по еліпсах. Несподівано та робота, яку греки виконали з цікавості до теорії, стала ключем до ведення війни і до розвитку астрономії.»

Ейлеру належать чудові і надзвичайно сучасні слова: «Немає науки, яка б не була пов'язана з математикою, науки, яка, якщо вона має бути ґрунтовно розробленою, не вимагала б застосування вищої математики», а він це знав не з чуток. Підтвердженням цих слів є сама творчість Ейлера. Перелік галузей знань, у яких працював Ейлер — фізика, механіка, астрономія, оптика, гідротехніка, картографія, теорія механізмів і машин, аеронавтика, балістика, архітектура, фізіологія і теорія музики.

Прикладна математика ніколи не перестає дивувати своїми відкриттями. Прості формули й розрахунки, можуть змінити світ. Сучасне суспільство, на жаль, здебільшого сприймає математику просто як шкільний предмет, не замислюючись над тим, що це велика серйозна наука, певна особлива мова, інструмент, який дає змогу моделювати різноманітні процеси практично в усіх сферах життя. Математика скрізь. І кожен може знайти «свою» математику. Адже, навіть письменник Льюїс Керолл, який написав «Аліса в країні чудес», був мате-

матиком, Наполеон Бонапарт писав математичні праці.

Основою основ науково-технічного прогресу є дальший розвиток науки, зокрема за математичними та механічними законами, прикладне значення яких є дуже велике. А всебічний розвиток будь-якої науки неможливий без глибокого аналізу її історії. До минулого звертаються з різних причин. Так, наприклад, Лейбніц застерігав, що хто хоче обмежитися сучасним без знання минулого, той ніколи не зрозуміє сучасного. Історія математики має особливу привабливість у військовій сфері. Задачі доведені багато років тому, захоплюють витонченістю логічних міркувань. Перегортаючи сторінки минулого, ми переконуємося, що найбільші поклади математичних ідей, понять, задач, які потім об'єднувались у теорії, містяться у практичній діяльності людини. Водночас пошуки розв'язків багатьох військових задач не раз приводили вчених до застосування математичних та механічних фактів. З ускладненням форми оборонної діяльності, перед науковцями поставали складніші задачі.

Яку ж роль відіграє математика у військовій сфері?

У сучасних умовах розвитку професійної компетентності в підготовці висококваліфікованих спеціалістів в епоху бурхливого розвитку науки й техніки перед випускниками-офіцерами часто постає питання майстерного управління військовими діями. Володіння математичними методами та механічними процесами дає можливість забезпечити глибокий розвиток військової справи і тим самим трактувати сутність процесу збройного протистояння, виявити його кількісні закономірності й відповідно, знайти оптимальне тактичне рішення та стратегію бойових дій.

Якщо проаналізувати ситуацію у світі — спостерігається стрімкий розвиток у галузі озброєння, боєприпасів, стрілецької зброї, що сприяє збільшенню загрози для життя особового складу збройних сил чи інших служб спеціального призначення — від так постає потреба в їхньому захисті. Тобто є потреба у створенні нових надійних технологічних матеріалів для виготовлення захисних конструкцій, які забезпечать підвищений рівень їх бронестійкості та можливість зменшення летальних випадків при пораненні. Для створення таких матеріалів і перевірки їх на міцність головну роль відіграє математика. А саме закони динаміки за якими описуються рівняння руху кулі, снаряду та їхню взаємодію з тим чи іншим елементом захисної конструкції. На основі результатів розв'язання відповідних рівнянь законів можна робити висновки про доцільність використання того чи іншого матеріалу для використання його у ролі захисного елемента. Адже як показав досвід використання інженерної техніки в різних конфліктах, так і на території України, рівень захищеності інженерної техніки, що стоїть на озброєнні ЗСУ на сьогоднішній день не відповідає рівню озброєння, що використовується в конфліктах. На зараз бронекорпуси практично всіх машин легших за танки, не забезпечують необхідного рівня захисту навіть від куль стрілецької зброї. Таким чином, особовий склад який виконує бойові завдання в бойових обставинах і знаходиться в техніці піддається високому ризику. Тому з усього набору тактико-технічних характеристик військової

техніки найбільш актуальними стають вимоги до захищеності особового складу який знаходиться в ній. Питання захисту особового складу та інженерної техніки є актуальним і складним завданням, оскільки це пов'язано зі збереженням життя особового складу під час військових конфліктів, з виведенням з ладу техніки через використання різного роду засобів ураження, які мають тенденцію нарощення пробивної здатності.

Проведений аналіз захисту і статистика втрат серед техніки та особового складу, які залучається у складних військових ситуаціях, говорить про необхідність розробки чи рекомендацій щодо удосконалення чи модернізації захисних конструкцій, які призначені для захисту в складних збройних конфліктах.

На основі механічних законів та математичних описів процесів проводиться удосконалення науково-методичної бази досліджень щодо рівня їх балістичного, протиосколкового захисту, що покращить результат конструкторських рішень в напрямку підвищення ефективності захисту.

Список літератури

- Конфорович, А. (1984). *Математика служить людині*. Київ: Радянська школа.
- Математика, що нас оточує: минуле, сучасне, майбутнє: Зб. наук. праць VII Всеукраїнської конф. курсантів та студентів* (2020). Львів: ЛДУ БЖД
- Сокіл, Б., Андрухів, А., Білаш, О. та ін. (2019). *Збірник військово-прикладних задач з вищої математики*. Львів: НАСВ.
- Сокіл, Б., Білаш, О., & Гузик, Н. (2020). *Теорія ймовірності та математична статистика в задачах військового спрямування: Навчальний посібник*. Львів: НАСВ, 2020.

Вплив військової справи на розвиток точних наук

М. І. Сорокати́й, О. В. Білаш, В. М. Петровський

*Національна академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного,
Львів, Україна*

kinnasv@gmail.com

У статті показано, як військова справа впливала на розвиток точних наук, зокрема на наукові дослідження вітчизняних учених.

Ключові слова: точні науки, військова справа

Початок використання математичних знань у військовій справі відноситься до глибокої давнини. Відомо, що у Стародавньому Вавилоні арифметичні відомості вживалися при підрахунку необхідних запасів для армії, геометрія ж використовувалася при будівництві укріплень і підрахунку обсягу необхідних земельних робіт.

У знаменитому діалозі Платона «Держава» йдеться про те, що арифметика й геометрія необхідна кожному воїну. Ось деякі цитати з тексту цього діалогу: «Значить, вони належать до тих знань, які ми шукали. Воїну їх необхідно засвоїти для військового ладу, а філософу — для осягнення сутності...». «При влаштуванні таборів, занятті місцевостей, стягуванні й розгортанні військ і різних інших військових побудовах, як під час битви, так і в походах, звичайно, позначиться різниця між знавцем геометрії і тим, хто її не знає».

Ми добре знаємо, що створення диференціального та інтегрального числення значною мірою було пов'язано з завданнями, висунутими артилерією, і що пізніше, у свою чергу, розвиток нової математики надавало величезний вплив на прогрес самої артилерії. Для створення армії, на початку ХХ століття, необхідно було поряд з підготовкою командного складу, вирішити ряд наукових та інженерно-технічних проблем. Проблеми артилерії як і раніше залишалися вирішальними. Але поряд з ними з'явилися завдання, пов'язані зі створенням власної авіації, бронетанкових сил, організацією дротового й радіозв'язку. Вони вимагали не тільки залучення відомих і вже добре розроблених математичних методів, а й створення нових методів дослідження.

У той час на першому місці стояли проблеми, пов'язані з польотом літака. Теорія польоту дозволила розраховувати аеродинамічні властивості конструкцій до їх побудови і випробування в повітрі. Цю роботу очолив видатний вчений М. Жуковський (1847–1921). Він та його учні поклали початок чудовій установі, що отримала пізніше найменування ЦАГІ (Центральний аерогідродинамічний інститут). З історичних джерел відомо про ключову роль математики і природничих наук у розвитку військової техніки. Відомо багато прикладів у всі епохи. Згадаємо принагідно про Архипа Люльку, уродженця с. Саварка нині Богуславського району Київської області. Створені ним двигуни стоять на багатьох сучасних військових літаках. У зв'язку з дослідженням механіки польоту при великих швидкостях М. Лаврент'єв розробив нову математичну теорію квазіаналітичних функцій, що дозволяє враховувати стисливість повітря.

Цілком природно, що математична теорія польоту літака була лише однією з проблем, які вимагали серйозної участі математиків. Інші проблеми були пов'язані з новими аспектами теорії стрільби: стрільба з танка, стрільба з літака і по літаку, розсіювання при бомбометанні і так далі. Великого значення набули питання стійкості руху (літака, снаряда, корабля, торпеди та інше). Військова справа зажадала широкого залучення ряду нових методів математики, зокрема теорії стійкості руху, початок якої було покладено ще в ХІХ столітті А. Ляпуновим (1857–1918).

Щоб підняти літак в повітря, потрібно створити легку й одночасно міцну конструкцію корпусу та фюзеляжу. Ось чому велике значення для авіації, а також для морської справи отримала проблема створення міцних і одночасно легких і тонких конструкцій. Для її вирішення необхідні не тільки фізичні експерименти, а й математичні розрахунки, а також створення математичних моделей цікавих для нас реальних явищ.

Методи перевірки якості боєприпасів були запропоновані ще в ХІХ столітті видатним математиком Михайлом Васильовичем Остроградським, але отримали розвиток і широке застосування лише в ХХ столітті, особливо в період Другої світової війни і після її закінчення. У різні роки Остроградський викладав на офіцерських курсах при Морському кадетському корпусі, був професором Інституту корпусу інженерів шляхів сполучення, кращого на той час технічного навчального закладу країни. Він читав курс лекцій на фізико-математичному відділенні Головного педагогічного інституту, в стінах якого навчалися Д. Менделєєв, М. Добролюбов та А. Вишнеградський. З 1841 року викладав в офіцерських класах Головного артилерійського та Головного інженерного училищ. Остроградський до кінця свого життя залишався професором усіх цих навчальних закладів.

На основі складених за участю та під керівництвом Остроградського навчальних планів, програм і конспектів було написано навчальні посібники з математичних наук для військово-навчальних закладів.

Михайло Остроградський написав чимало праць, зокрема в таких галузях.

Балістика. Продовжуючи розпочате Пуассоном, Остроградський вивів рівняння руху ексцентричного снаряда в повітрі.

Теорія ймовірностей. Крім іншого, Остроградський займався і статистичними способами виявлення браку, щоб удосконалити процес ревізії і контролю товарів, що направляються в армійські підрозділи. Це яскравий приклад спрямованості вченого постійно пов'язувати наукові теорії і практику.

Йде жорстка Друга світова війна. Фронт вимагає збільшення ефективності вогню артилерії, підвищення влучності стрільби. Цю важливу проблему успішно вирішує академік А. Колмогоров. За завданням Головного артилерійського управління він, використовуючи свої роботи з математики в області теорії ймовірностей, дав визначення найвірогіднішого розсіювання артилерійських снарядів.

Математика допомогла розрахувати, скільки потрібно зробити одночасних пострілів по літаку противника для того, щоб з найбільшою ймовірністю збити

його.

Війна показала потребу для оборони країни розвиненої науки, здатність вирішувати найскладніші проблеми. У квітні 1942 р. колектив математиків під керівництвом академіка С. Бернштейна розробив і обчислив таблиці для визначення місцезнаходження судна за радіопеленгами. Таблиці прискорювали штурманські розрахунки приблизно в 10 разів. Штаб авіації дальньої дії, даючи високу оцінку роботі математиків, зазначив, що ні в жодній країні світу не були відомі таблиці, рівні цим по своїй простоті і оригінальності.

Видатна роль у військовій науці належить відомому математику академіку А. Н. Крилову, чийі праці з теорії непотоплюваності й хитавиці корабля широко використовуються й досі. Він створив таблиці непотоплюваності, у яких було розраховано, як вплине на корабель затоплення тих чи інших відсіків, які номери відсіків потрібно затопити, щоб ліквідувати крен, і наскільки це затоплення може поліпшити стан корабля. Ці таблиці дали можливість урятувати життя багатьох людей, зберегти великі матеріальні цінності.

Під час Другої світової війни з'явилася і така важлива проблема, як забезпечення купчастості бою і стійкості снарядів при польоті. Цю складну математичну задачу успішно вирішив член-кореспондент Академії наук Н. Четаєв. Він запропонував найвигіднішу крутизну нарізки стволів гармат, що дозволило забезпечити купчастість бою і стійкість снарядів при польоті.

Війна на сході України (АТО, ООС), що ведеться зараз, ставить нові вимоги до науковців, інженерів, конструкторів щодо розробки та виготовлення нового сучасного озброєння. Такі роботи ведуться в Національній академії наук, наукових центрах вищих військових навчальних закладів, конструкторських бюро.

Про роль та застосування поліномів Семпсона

В. В. Хорошун

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, Харків, Україна

khoroshun_vv@ukr.net

Поліноми Семпсона (R. A. Sampson) розглядаються як неополіноми в області неklasичних значень параметрів, на відміну від раніше вживаної для них назви «функції Гегенбауера».

Ключові слова: спеціальні функції, поліноми Лежандра, поліноми Семпсона.

Дана робота є продовження роботи Хорошун (2017), у якій, зокрема, указані джерела застосування поліномів Семпсона (1891) $I_n(x)$ у гідродинаміці (Хаппель, 1976) та електродинаміці періодичних структур (Агранович, 1962). На останній з них слід зупинитися окремо, оскільки коефіцієнти одержаної СЛАР-2 для задачі дифракції хвиль на періодичній ґратці з нескінченно тонких та ідеально провідних стрічок виражаються через поліноми Лежандра $P_n(x)$ та поліноми Семпсона $I_n(x)$. Наведемо явний вираз як для поліномів Лежандра

$$P_n(x) = 2^{-n} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}$$

так і для поліномів Семпсона

$$I_n(x) = 2^{-n} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k}{2n-2k-1} \frac{(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}$$

Слід відзначити такі співвідношення між поліномами Семпсона та поліномами Лежандра (Хорошун, 2018):

$$I_n(x) = \sum_{j=1}^n I_{n-j}(x) P_j(x), \quad (1)$$

$$P_n(x) = \sum_{j=1}^n P_{n-j}(x) I_j(x), \quad (n \geq 1) \quad (2)$$

У Sampson (1891) одержано ще таке співвідношення

$$I_n(x) = \frac{P_{n-2}(x) - P_n(x)}{2n-1}, \quad (n \geq 2)$$

На прикладі поліномів Семпсона можна зробити висновок про те, що класичні поліноми й неокласичні (неополіноми) відокремлені межею, що визначається відомими нерівностями, що накладають на параметри поліномів. Крім того, твірні функції для класичних поліномів і неополіномів є взаємно обернені (взаємні) функції. Зв'язок між класичними поліномами і неополіномами визначається формулами типу згортки, аналогічними формулам (1)–(2).

Відповідно для поліномів Чебишова першого роду $T_n(x)$ такі формули було одержано в Хорошун (2018).

Історична довідка. Ральф Ален Семпсон (*Ralph Allan (or Allen) Sampson*) (1866–1939) — британський математик та астроном.

Зокрема, автор дослідження з гідродинаміки «On Stokes' current-function», пов'язаного з осесиметричним рухом у рідині, причому *потенціал швидкості має вигляд суми зональних гармонік.*



Список літератури

- Khoroshun, V. V. (2018). Polynomials of Sampson as special case of polynomials of Gegenbauer. *American Journal of Mathematical and Computational Sciences*, 3(2), 37–40.
- Sampson, R. A. (1891). On Stokes's current function. *Philos. Trans. Roy. Soc. Ser. A*, 182, 449–518.
- Whittaker, E. T. (1940). Ralph Allen Sampson. *Obituary Notices of Fellows of the Royal Society*, 3(8), 220–226.
- Агранович, З. С., Марченко, В. А., & Шестопапов, В. П. (1962). Дифракция электромагнитных волн на плоских металлических решетках. *Журн. техн. физики*, 32(4), 381–390.
- Хаппель, Дж., & Бреннер, Г. (1976). *Гидродинамика при малых числах Рейнольдса*. Москва: Мир.
- Хорошун, В. В. (2016). О полиномах, обращающихся в нуль на концах интервала $[-1,1]$. У *Матеріалах XVII Міжнародної наукової конференції ім. акад. М. Кравчука, Київ, 19–20 травня* (т. 2, с. 270–272). Київ: КПІ.
- Хорошун, В. В. (2017). З історії відкриття поліномів класу Семпсона. У *Матеріалах VI Міжнародної науково-практичної конференції. Київ, 28–29 грудня* (с. 334–335). Київ: КПІ.

IV

СУЧАСНІ ОСВІТНІ ТЕХНОЛОГІЇ У ВИЩІЙ ШКОЛІ

Особливості дистанційного навчання на прикладі викладання курсу вищої математики студентам технічних спеціальностей

КПІ ім. Ігоря Сікорського

О. О. Дем'яненко, Л. А. Репета

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

o.dem@ukr.net, repetala@bigmir.net

У статті на прикладі викладання курсу вищої математики проведено аналіз впливу дистанційної форми навчання на сучасний навчальний процес у технічному ЗВО. Розглянуто основні проблеми та способи їх вирішення.

Ключові слова: відеолекція, електронний конспект, онлайн-режим, Zoom-конференція, комп'ютерні технології, тести.

На сьогодні вся система освіти України перебуває у стані реформування. Реформа початкової та середньої та школи активно здійснюється на державному рівні. Початок структурним реформам у вищій школі поклав Болонський процес (Згуровський & Якименко, 2006). Наразі, непередбачувані виклики, які спровоковані пандемією COVID-19, змусили освітян ситуативно реагувати на труднощі, що виникли.

Не зважаючи на різноманіття освітніх закладів, їх форм і фахових спеціалізацій, є багато спільних проблем професійного навчання, які з'явилися і притаманні вищій освіті загалом. Цілком очевидно, що методи вирішення виниклих задач також мають спільні ознаки. Зокрема, розвиток інформаційно-комунікаційних технологій, стрімке розповсюдження Інтернету і проникнення його в усі сфери життєдіяльності суспільства змушує вносити корективи в освітній процес, змінювати підходи до навчання, створювати та застосовувати нові його форми. Однією з таких форм навчання, що привертає беззастережну увагу і викладачів, і студентів, є дистанційна форма. У зв'язку з запровадженням карантинних заходів в Україні дистанційна форма навчання отримала потужний поштовх і бурхливий розвиток. Унікальність ситуації, у якій опинились освітяни полягає в тому, що всі змушені були перейти на дистанційне навчання одночасно. Ніяких централізовано розроблених інструкцій чи вказівок на початку дистанційного навчання не існувало. Це, з одного боку, поставило всіх учасників освітнього процесу перед фактом того, що необхідно швидко та ефективно спілкуватись, навчати та навчатись, контролювати та демонструвати результати навчання. З іншого боку, відкрило широке вікно можливостей у сенсі творчих, експериментальних підходів та креативу. У таких екстремальних умовах багато проблем, що існували і раніше, загострились і стали, іноді, надзвичайно чутливими.

Процес навчання у ЗВО є неперервним ланцюжком, що починається з лекцій по курсу і завершується підсумковим контролем рівня знань студентів у вигляді екзамену чи заліку. Традиційна лекція для студентів в аудиторії в умовах

карантину стала неможливою. На зміну їй прийшли електронні конспекти, відеолекції на YouTube-каналах чи в Google-класах, лекції в Zoom-конференціях тощо. Різноманітність підходів до викладання лекційного матеріалу вражає. Кожен з перерахованих варіантів має як недоліки, так і переваги. Виділяти як найкращий якийсь один спосіб передачі теоретичного матеріалу студентам, мабуть, зарано є недоцільно: дуже малий досвід, та результат, загалом, оцінюється знаннями, що набули студенти. Об'єктивна оцінка набутих знань буде можлива тільки після завершення дистанційного навчання. Поки що кожен викладач покладається на свої уподобання, рівень обізнаності в комп'ютерних технологіях та власні технічні можливості.

Зауважмо, що завдяки дистанційній формі роботи більшість викладачів суттєво підняли свій рівень інтернет-користувачів, значно просунулись у застосуванні сучасних програмних комп'ютерних розробок і використанні різноманітних можливостей, які вони надають.

На думку авторів, найбільш ефективною є комбінована форма подачі лекційного матеріалу. Вона включає в себе як безпосереднє спілкування зі студентами, так і надання матеріалів для опанування певних тем у паперовому або електронному варіантах. Таке спілкування може відбуватися у вигляді консультації після перегляду чи вивчення матеріалу студентами або читання лекції в онлайн-режимі в Zoom-конференції з можливістю регулювати темп лекції та відповідати на питання студентів.

Важливим фактором ефективності проведення такої лекції стає вмотивованість до навчання студентів. Робота над лекційним матеріалом у дистанційному режимі — важка праця. Без живого інтересу до предмету вивчення, або без глибокого усвідомлення необхідності вивчення цього матеріалу, позитивний результат практично неможливий. Особливо важко це дається першокурсникам. Мало хто з них уміє самостійно опрацювати теоретичний матеріал. Відповідно, задача викладача не тільки передати у якийсь спосіб лекційний матеріал студентам, а й підказати як саме його опрацювати та вивчити. Зрозуміло, що є якась частина студентів, які не дивляться відео-лекції, або присутні на лекції, яка проходить у режимі Zoom-конференції лише формально. Засобів впливу на таких студентів лектор практично не має. Частина з них змінить своє ставлення до навчання із плином часу, а частина змушена буде покинути навчання у ЗВО. Беззаперечно, ця проблема була й до дистанційної форми навчання, але саме в цій формі вона надзвичайно загострилась.

Суттєвої трансформації зазнали також засоби контролю знань. Подібно до традиційних контрольних та самостійних робіт, які пишуть в аудиторії, у режимі дистанційного навчання такі роботи виконуються також. Їх пропонують писати студентам у Zoom-конференціях у онлайн-режимі або поза конференцією протягом строго обмеженого часу. Після написання студенти надсилають свої роботи викладачу на пошту або в групу, чат чи месенджер. У будь-якому випадку перевірка таких робіт забирає у викладача багато часу та зусиль, що зумовлено як

об'єктивними причинами, так і якістю форми надісланих робіт — форматів файлів, можливості їх прочитання тощо.

Кардинальне полегшення в сенсі перевірки знань дають тести. У першу чергу оцінили це викладачі. Запроваджувати тестування, як вид перевірки рівня засвоєння матеріалу студентами почали вже давно. Але в період дистанційного навчання проведення тестів отримало широке розповсюдження. Студенти також позитивно реагують на подібний різновид роботи (Мороз та ін., 2020). Тестова форма перевірки й контролю знань для них є відомою та звичною, бо всі здавали ЗНО. Комп'ютерні технології, що застосовуються під час тестування легко і з зацікавленням сприймається молодим поколінням. Можливість пройти тести в діапазоні широкого часового вікна також подобається і підтримує демократичний стиль у процесі навчання. Отже, переваги тестів очевидні.

Але є й недоліки. Крім умотивованості студентів постає проблема самостійності виконання тестових завдань. Актуальною, і чи не головною, стає проблема академічної доброчесності. І тут перед студентами виникає дилема: висока оцінка будь-якою ціною чи об'єктивний результат навчання. Хибне уявлення про «допомогу другу» спонукає когось виконувати завдання за іншого, а когось звертатись за такою допомогою. Часто зусилля, які витрачаються на те, щоб обійти правила проходження тесту більші, ніж ті, які потрібні для вивчення матеріалу. Але студенти не завжди усвідомлюють це. На жаль, заручниками такої ситуації стають доброчесні студенти. Вони опиняються в невідповідному становищі. Для усунення таких недоліків і підтвердження об'єктивності оцінки знань студентів викладачі змушені проводити додаткові заходи: захисти, додаткові опитування тощо. Проблема слабого усвідомлення того, що ставлення до навчання має бути відповідальним та доброчесним, насправді є наслідком багатьох загальносуспільних проблем. Залишається сподіватись, що корекція поведінки студентської молоді під час навчання позитивно вплине на формування їх світогляду та продовжить створення демократичних традицій у суспільстві.

Підсумовуючи, можна відмітити, що досвід дистанційного навчання дозволить використати його позитивні сторони, переформатувати процес навчання, суттєво підняти його якість у подальшому та знайти ефективні способи розв'язання багатьох проблем, що накопичувались роками.

Список літератури

- Згуровський, М. З., & Якименко, Ю. І. (2006). Болонський процес і його вплив на вищу технічну освіту. *Наука та інновації*, 2(1), 15–17.
- Мороз, С. А., Романовський, О. Г., Мороз, В. М., Домбровська, С. М., Грень, Л. М., & Помаза-Пономаренко, А. Л. (2020). *Інформаційні технології і засоби навчання*, 79(5), 276–295. <https://journal.iitta.gov.ua/index.php/itlt/article/view/3340>

Світлі та темні сторони діджиталізації процесу викладання математики в закладах вищої освіти

В. В. Довгай

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

valerdov@gmail.com

Розглядається розвиток процесу діджиталізації при викладанні математики за останні кілька десятиліть з точки зору рядового викладача. Робиться спроба проаналізувати як позитивний, так і негативний вплив даного процесу на якість математичної підготовки сучасного студента.

Ключові слова: діджиталізація, традиційний метод, COVID-19, комунікаційні технології.

До початку нової, незнаної досі напасті, що несподівано вразила все людство, викладачі математики не особливо переймалися впровадженням у процес викладання свого предмета новітніх цифрових технологій. Адже для нашої спільноти в основному потрібне відносно хороше здоров'я, якісні дошка та крейда, а все інше зводиться до набутих з роками знань та досвіду викладання своєї навчальної дисципліни. Перше, що порушило таку ідилію, була запроваджена з часів перебудови щорічна необхідність перероблювати, до того ж суттєво, навчальні та робочі програми у відповідності зі все новими та ще новішими вимогами адміністрації, спрямованими, звичайно ж, на поліпшення якості підготовки майбутніх спеціалістів. А ще ж багато хто з нашої братії пам'ятає ті часи, коли на кафедрі була єдина, надрукована на звичайній друкарській машинці універсальна програма з вищої математики для всіх факультетів і спеціальностей. Зміст цього талмуду творчо адаптувався викладачем відповідно до побажань факультету та рівня знань своїх студентів. Пригадується, що таких умовних рівнів було чотири і характеризували вони якість шкільної підготовки, яка враховувалась починаючи із вступних іспитів. Отже перша світла сторона діджиталізації полягає в тому, що оволодівши нею ми можемо невпинно поліпшувати навчальний процес у нашій рідній *alma mater*.

Звичайно, не всі з нас відразу усвідомили переваги, що їх надавала ґрунтовна освіченість у області оволодіння тими цифровими технологіями, що можуть бути корисними при спілкуванні на рівних хоча б із своїми студентами. У цьому не вбачалось великої необхідності, адже з ними можна було спілкуватись скільки завгодно і в аудиторіях, а те, що ми писали на дошці, не складно було робити традиційним методом за допомогою крейди, на відміну, наприклад, від тих з наших колег, які змушені були з року в рік малювати з незначними змінами громіздкі хитромудрі електричні схеми функціонування відповідного обладнання, та котрі ми, готуючись до свого заняття, змушені були витирати зі змішаним почуттям жалю і радості від того, що наші малюнки не потребують таких великих зусиль. Але, помічаючи з плином часу як згадані колеги успішно переходять від традиційних методів до цифрових з використанням сучасної

проекційної техніки, ми підсвідомо визнавали переваги новітніх технологій, та все ж не надто поспішали впроваджувати їх у свою професійну діяльність. Де-хто з нас, ніде правди діти, убачаючи передовсім не суспільну значимість своїх зусиль, а насамперед керуючись природнім потягом до пізнання всього нового, своїми власними шкурними інтересами та усвідомивши ефективність діджиталізації для себе особисто, досяг певних успіхів у систематизації наявної в нього рукописної бази даних та автоматизації процесів складання як контрольних робіт, екзаменаційної документації, так і іншої бюрократичної писанини. Це ще одна маленька світла пляма діджиталізації.

І ось, нарешті, сталося — на рідні терени завітала новітня кара єгипетська у вигляді COVID-19, що змусила нас освоїти таку наступну світлу сторону діджиталізації, як програмне забезпечення в галузі сучасних комунікаційних технологій, одним з найпопулярніших серед представників якого є Zoom. Безоплатність та простота практичного використання сприяла швидкому оволодінню відповідним програмним продуктом, що дозволило нам, хай і не так повноцінно як біля дошки в аудиторії, але все таки реалізувати навчальний процес зі своїми студентами в онлайн-режимі та одержувати зарплатню за свою роботу.

Після всіх дифірамбів світлим сторонам проникненню діджиталізації у процес викладання математики гіркий досвід минулих років підказує, що незабаром з'являться (якщо вже не з'явилися) і темні її сторони. Пригадаймо, як ще в далеких 80-их роках минулого століття тодішні засоби масової інформації повідомляли, що очевидно не без сприяння свого оточення один з ректорів обласного вищого навчального закладу започаткував щось подібне до сучасних «відосиків» при викладанні свого предмету. Суть полягала в тому, що враховуючи надмірне перевантаження ректора адміністративними проблемами його лекції спочатку записувались на відповідні носії, а потім студентів згідно з розкладом зобов'язували приходити на його предмет до аудиторії, як у своєрідний кінозал, де вони при відсутності лектора за допомогою тогочасної техніки та кількох наглядачів змушені були конспектувати зміст підготованого раніше аудіо- та відеоматеріалу. Подібна темна пляма діджиталізації, що дискредитуватиме навчання в онлайн-режимі, легко може з'явитись і в сучасному виконанні.

Наступна темна сторона стосується вже студентської спільноти. Для неї так звані доброзичливці організували справжні «ботоферми» для розв'язування задач з математики типовими методами при використанні недолугої символіки, та до того ж які часто бувають досить громіздкими, без необхідної деталізації і не завжди оптимальними. Досвідчений викладач відразу при перевірці розв'язаної подібним способом задачі встановить істину, але найбільше, чим можна протидіяти такому застосуванню студентами діджиталізації, це можливість хіба що знизити оцінку за неповне обґрунтування відповіді, яка звичайно ж буде правильною. Щоб суттєво зменшити негативний вплив описаного методу на якість навчання, відповідну роботу слід починати ще в середній школі. При вивченні математики за незначним винятком немає необхідності використовувати учнями не те що смартфон, а навіть звичайний калькулятор, тому ви-

кликають подив розлогі інтерв'ю у засобах масової інформації окремих директорів середніх шкіл, де вони пишаються тим, що в підконтрольних їм школах на всіх уроках (у тому числі також і на уроках з математики) учні можуть без обмежень використовувати смартфони.

І, нарешті, остання темна сторона, яка ще не з'явилась, але з великою вірогідністю може незабаром з'явитись. Шалені темпи зростання популярності Zoom серед викладачів здатна звабити багатьох чиновників від освіти можливістю і собі за кошти куцого державного бюджету здобути такі-сякі лаври, започаткувавши розробку відповідного українського аналога. Як свідчить історичний досвід, швидше за все реалізація відповідної розробки буде невдалою, але ж з упертістю, що варта кращого застосування, це чиновницьке творіння за допомогою адміністративних важелів нав'язуватиметься всій викладацькій спільноті. Тож будемо сподіватись, що згадана темна пляма діджиталізації так і не з'явиться.

Активні методи навчання у вивченні ризиків інформаційної безпеки

Ю. Д. Жданова, С. О. Спасітелєва, С. М. Шевченко

Київський університет імені Бориса Грінченка, Київ, Україна

y.zhdanova@kubg.edu.ua, s.spasitielieva@kubg.edu.ua,

s.shevchenko@kubg.edu.ua

У доповіді розглядається проблема використання активних методів навчання студентів спеціальності 125 Кібербезпека на прикладі власного досвіду застосування SWOT-аналізу для оцінювання ризиків у сфері інформаційної безпеки організації.

Ключові слова: ризики інформаційної безпеки; аналіз ризиків; SWOT-аналіз; загрози; активні методи навчання.

В умовах сучасних інформаційних технологій, які постійно розвиваються та змінюються, роботодавці від фахівців інформаційної та кібернетичної безпеки очікують не тільки сучасних теоретичних знань та практичних навичок, а й особистісних професійних якостей таких, як наявність аналітичного та критичного мислення, креативність, ініціативність, та інші, зазначені в (The Future of Jobs Report, 2020).

Як відомо, пріоритетним є формування практичної складової у процесі навчання, зокрема, студентів спеціальності 125 Кібербезпека. Різні шляхи вдосконалення практичних умінь розглянуті, наприклад, у Мельник та ін. (2018), Бурячок та ін. (2018), Жданова та ін. (2019), Бурячок та ін. (2020). Але великого значення сьогодні набувають ті форми, засоби та методи навчальної діяльності, які активізують мислення, стимулюють до творчості, адаптують до професійної діяльності. Одною з таких форм є групова навчальна робота та активні методи (тренінги), реалізацію яких на прикладі дослідження якісного аналізу ризиків інформаційної безпеки наведено нижче.

Відзначимо, що методологія теорії ризиків до середини ХХ ст. застосовувалась, в основному, для економічної системи (проблеми страхування, інвестування, розвитку бізнесу та ін.). Однак, у другій половині ХХ ст. виявилось, що методологія оцінки ризиків може бути впроваджена в аналіз та в забезпечення безпеки практично будь-якої системи (соціальної, технічної, інформаційної, біологічної, екологічної та ін.). Розвиток нових інформаційно-комунікаційних технологій, збільшення обсягів і значимості цифрової інформації в системах несуть у собі ризики, потенційно підвищують уразливість інформації. Це привело до того, що інформаційні ризики посіли одне з центральних місць у ризикології, а як системна методологія захисту інформації став використовуватися підхід оцінювання та управління ризиками інформаційної безпеки (ІБ).

З аналізу нормативних документів (ДСТУ ISO/IEC 27005:2019, 2019) і наукових робіт останніх років (Ахметов та ін., 2017) можна зробити висновки:

– однозначного трактування поняття «ризик ІБ» не існує;

- поняття «ризик інформаційний» та «ризик ІБ» ототожнюються;
- поняття «ризик ІБ» використовують лише тоді, коли існує можливість негативних наслідків;
- «ризик ІБ» розглядають як комбінацію ймовірності події та її наслідку;
- поняття «ризик ІБ» є комбінованим, яке поєднує в собі інші ключові терміни (активи, уразливості, загрози, збиток).

Грунтуючись на зазначених факторах ми вважаємо, що ризик інформаційної безпеки — це числова (словесна) функція, яка описує ймовірність утілення загроз інформаційній безпеці та величини збитку від їх реалізації внаслідок використання цими загрозами вразливостей активів з метою нанесення шкоди організації.

Ефективність обробки ризиків інформаційної безпеки істотно залежить від оцінки цих ризиків. Розрізняють якісний та кількісний підхід до встановлення значень ризиків ІБ. Оскільки дослідження присвячено якісному підходу в оцінці ризику, то зупинимося на інструментарії цього підходу, а саме на SWOT-аналізі — дослідницькій процедурі, ідея якої полягає в комплексному описі сил (Strength), слабкостей (Weakness), можливостей (Opportunities), загроз (Threats) при розробці стратегії організації (Словник системного аналізу в державному управлінні, 2006). Метод SWOT-аналізу є універсальним і одночасно нескладним методом стратегічного дослідження діяльності підприємств, що дозволяє його застосовувати для якісного підходу оцінювання ризиків ІБ (Berkoff, 2020; Baghdasarin, 2019).

У процесі вивчення дисципліни «Теорія ризиків» для поглибленого вивчення оцінювання ризиків ІБ студентам 3 курсу спеціальності 125 Кібербезпека Київського університету імені Бориса Грінченка було запропоновано здійснити SWOT-аналіз ризиків ІБ віртуальної організації «Інтернет-провайдер». Форму навчання обрали групову з розподілом студентів за ролями (аналітики, відповідальні за ІБ в організації, та експерти, які оцінювали фактори з власної точки зору, спираючись на праці науковців, статистичні дані та інше).

За допомогою організації навчального процесу у вигляді тренінгу, коли під час активного обговорення з'являється можливість висловити та обґрунтувати свою точку зору, було визначено активи організації, джерела загроз ІБ, класифікація загроз та вразливостей. За технологією SWOT-аналізу студентами, які грали роль аналітиків, були сформульовані наступні фактори, представлені в таблиці 1.

Таблиця 1

SWOT-аналіз ризиків ІБ організації «Інтернет-провайдер»

Strength	Weakness
S1. Висококваліфікований персонал	W1. Відсутність системи аварійного електропостачання
S2. Сертифіковані засоби захисту інформації	W2. Відсутність системи регулярного резервного копіювання
	W3. Відсутність двофакторної аутентифікації

Opportunities	Threats
O1. Закупка нового обладнання	T1. Витік інформації
O2. Налагодження взаємодії з бізнес-партнерами, інвесторами	T2. Підкуп персоналу
	T3. Зміна нормативної бази в сфері ІБ

Після цього студентами, які грали роль експертів, було проведено дослідження відповідного впливу факторів. За кожним критерієм матриці SWOT-аналізу здійснювалося експертне оцінювання і створювалася таблиця експертних оцінок. Для прикладу результати експертного оцінювання за критерієм Weakness представлені в таблиці 2.

Таблиця 2

Зважені оцінки факторів слабких сторін організації

Weakness	Ступінь важливості	Вагомий коефіцієнт	Експертні оцінки					Середня оцінка	Зважена оцінка
W1. Відсутність системи аварійного електропостачання	2	0,33	5	3	5	3	4	4	$4 \times 0,33 = 1,32$
W2. Відсутність системи регулярного резервного копіювання	3	0,5	3	3	3	3	3	3	$3 \times 0,5 = 1,5$
W3. Відсутність двофакторної аутентифікації	1	0,17	2	4	4	3	3	4	$4 \times 0,17 = 0,68$
Усього	6	1							3,5

Останнім кроком було створення інтерактивних матриць для рангової оцінки між зовнішніми загрозами та внутрішніми слабкими сторонами; між можливостями та внутрішніми сильними сторонами (таблиця 3). Пріоритетною є та загроза, яка має найбільше поєднань із слабкими сторонами організації (у нашому прикладі це T1).

Таблиця 3

Інтерактивна матриця для рангової оцінки між зовнішніми загрозами та внутрішніми слабкими сторонами організації

	W1	W2	W3
T1	+	+	+
T2	+	+	0
T3	0	0	+

Детальніше з аналізом існуючих підходів до використання фрактального аналізу в області захисту інформації можна ознайомитися в Шевченко та ін. (2020).

Розглянутий підхід до застосування активних методів навчання оцінюванню ризиків інформаційної безпеки сприяє формуванню практичних навичок, що дозволяє адаптувати наших студентів до професійної діяльності в майбутньому.

Список літератури

- Baghdasarin, D. (2019). MRO Cybersecurity SWOT. *International Journal of Aviation, Aeronautics, and Aerospace*, 6(1). <https://doi.org/10.15394/ijaaa.2019.1318>
- Berkoff, A. (2020) *Security SWOT Analysis for 2020: Opportunities, 2020*. <https://citysecuritymagazine.com/risk-management/security-sector-leaders-swot-analysis-for-2020-opportunities/>
- The Future of Jobs Report 2020 (2020) <https://www.weforum.org/reports/the-future-of-jobs-report-2020>
- Ахметов, Б. Б., Корченко, А. Г., Архипов, А. Е. & Казмирчук, С. В. (2018) *Построение систем анализа и оценивания рисков информационной безопасности. Теория и практические решения: монография* (в 2-х книгах). Актау: редакционно-издательский отдел КГУТИ им. Ш. Есенова. <https://er.nau.edu.ua/handle/NAU/40479?locale=uk>
- Бурячок, В. Л., Коршун, Н. В., Шевченко, С. М. & Складанний П. М (2020) Застосування середовища NI Multisim при формуванні практичних навичок студентів спеціальності 125 'Кібербезпека'. *Кібербезпека: освіта, наука, техніка*, (9), 159–169.
- Бурячок, В. Л., Шевченко, С. М., & Складанний, П. М. (2018) Віртуальна лабораторія для моделювання процесів в інформаційній та кібербезпеці як засіб формування практичних навичок студентів. *Кібербезпека: освіта, наука, техніка*, (2), 98–104.
- ДСТУ ISO/IEC 27005:2019 (ISO/IEC 27005:2018, IDT) (2019) Інформаційні технології. Методи захисту. Управління ризиками інформаційної безпеки.
- Жданова, Ю. Д., Спасітелева, С. О., & Шевченко, С. М. (2019) Застосування бібліотеки класів Security. Cryptography для практичної підготовки спеціалістів з кібербезпеки. *Кібербезпека: освіта, наука, техніка*, (4), 44–53.
- Мельник, С., Воскобойніков, С., & Ступак, Д. (2018) Організація фахової підготовки майбутніх фахівців з кібербезпеки на основі інноваційної педагогіки та інтегрованого підходу в системі реалізації ключових компетенцій безпеки в інформаційному суспільстві. *Витоки педагогічної майстерності*, (21), 125–129.
- Словник системного аналізу в державному управлінні. (2006) (с. 148). Київ: Видавництво НАДУ. http://academy.gov.ua/NMKD/library_nadu/Encycloped_vydanniy/f4a14404-2b5a-4031-968c-c95c5a50b4c5.pdf
- Шевченко, С. М., Жданова, Ю. Д., Спасітелева, С. О. & Складанний, П. М. (2020). Проведення swot-аналізу оцінювання інформаційних ризиків як засіб формування практичних навичок студентів спеціальності 125 Кібербезпека. *Кібербезпека: освіта, наука, техніка*, (10), 158–168.

Застосування системи комп'ютерної математики Maple для роботи з комплексними числами

Т. М. Крохмаль¹, О. М. Нікітенко²

¹Харківська загально-освітня школа № 63, Харків, Україна

²Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків, Україна
nikonxipe64gmail.com

Розглянуто застосування системи комп'ютерної математики Maple для роботи з комплексними числами на прикладі часткового розрахунку кіл синусоїдного струму.

Ключові слова: Maple, комплексні числа, форма запису комплексного числа, коло синусоїдного струму.

Тему «Комплексні числа» вивчають як в школі, так і в ЗВО. Потім набуті знання використовують під час вивчення інших дисциплін.

Під час досліджень електромагнітних коливань та хвиль велике значення мають електромагнітні поля, що змінюються в часі за синусоїдним законом, тобто які коливаються з певною частотою. Такі поля називають монохроматичними або гармонічними. Під час математичного дослідження монохроматичних процесів, які підпорядковані лінійним рівнянням, доцільно ввести комплексні позначення. Ці позначення, як відомо, використовують і в інших галузях, наприклад, у теорії змінних струмів. Застосовність комплексних позначень тісно пов'язана з лінійністю всіх рівнянь, яким підпорядковані фізичні величини: наприклад, відомо, якщо коло змінного струму містить нелінійний елемент, то використання комплексних позначень призводить до ряду ускладнень (Вайнштейн, (1988)).

Метою цієї роботи є ілюстрація використання системи комп'ютерної математики (СКМ) Maple для роботи з комплексними числами на базі часткового розв'язання задачі з курсу «Теоретичні основи електротехніки та електроніки».

Існують різноманітні форми запису комплексних чисел. Такими, що найчастіше використовують серед них, є:

- показникова $Ae^{j\alpha}$;
- алгебрична $a + jb$;
- тригонометрична $A \cos \alpha + jA \sin \alpha$.

Показникова форма запису комплексного числа найбільш придатна для виконання операцій множення

$$A_1 \cdot A_2 = A_1 e^{j\psi_1} \cdot A_2 e^{j\psi_2} = A_1 A_2 \cdot e^{j(\psi_1 + \psi_2)}$$

та ділення

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_1 A_2^*}{A_2 A_2^*} = \frac{A_1 \cdot A_2 \cdot e^{j\psi_1} \cdot e^{j\psi_2}}{A_2^2} = \frac{A_1}{A_2} \cdot e^{j(\psi_1 - \psi_2)}.$$

Алгебрична форма запису комплексного числа найбільш придатна для

виконання операцій додавання

$$(a + jb) + (c + jd) = (a + c) + j(b + d)$$

та віднімання

$$(a + jb) - (c + jd) = (a - c) + j(b - d).$$

Під час розв'язання задач з розрахунків кіл синусоїдного струму виникає необхідність переходу від однієї форми запису комплексного числа до іншої для виконання потрібних арифметичних дій.

Для цього використовують такі залежності:

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha;$$

$$a = A \cos \alpha; \quad b = A \sin \alpha;$$

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \alpha = \frac{a}{b}.$$

Щоб полегшити роботу з комплексними числами, додатково дослідити їх властивості доцільно використовувати системи комп'ютерної математики. Однією з найбільш розвинених, пристосованих до потреб користувача та найрозповсюдженіших є СКМ Maple.

Перевагами СКМ Maple є можливість здійснювати розрахунки електричних кіл високої складності методом комплексних амплітуд, будувати графіки будь-яких параметрів, а також розв'язувати задачі, у яких доводиться розв'язувати системи лінійних та нелінійних рівнянь, визначати в символьному вигляді похідні, інтеграли тощо (Нікітенко, 2011).

Як ілюстрацію роботи СКМ Maple з комплексними числами розглянемо розрахунок комплексних опорів ланцюгів струму та побудови векторної діаграми струмів схеми кола синусоїдного струму, яку наведено на рис. 2.

Коло, схема якого зображена на рисунку, має такі дані:

$$u = 80 \sin \omega t \text{ В}, \quad R_1 = R_2 = 2 \text{ Ом}, \quad C_1 = 227,4 \text{ мкФ},$$

$$C_2 = 796 \text{ мкФ}, \quad L_3 = 12,75 \text{ мГн}, \quad f = 50 \text{ Гц}.$$

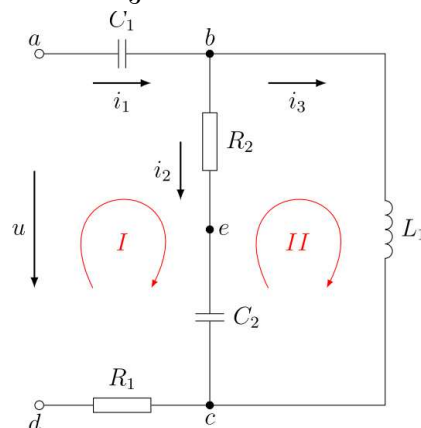


Рис. 1. Коло синусоїдного струму

Опір ланцюгів

$$Z_1 = R_1 - j \frac{1}{\omega C_1} = 2 - j \frac{1 \cdot 10^6}{2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 227,4} = 2 - j14 \text{ Ом};$$

$$Z_2 = R_2 - j \frac{1}{\omega C_2} = 2 - j \frac{1 \cdot 10^6}{2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 796} = 2 - j4 \text{ Ом};$$

$$Z_3 = j\omega L_3 = j \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 12,75 \cdot 10^{-3} = j4 \text{ Ом};$$

$$Z_4 = R_1 = 2 \text{ Ом}.$$

Комплексний опір ділянки кола bc .

$$Z_{bc} = \frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_2 + Z_3} = 8 + j4 = 8,94e^{j26,5^\circ} \text{ Ом}.$$

Комплексний опір всього кола

$$Z = Z_1 + Z_{bc} = 2 - j14 + 8 + j4 = 10 - j10 = 14,14e^{-j45^\circ} \text{ Ом}.$$

Проілюструємо як наведені вище розрахунки можна здійснити за допомогою СКМ Maple.

Якщо визначення опорів R_1, R_2, R_3 в СКМ Maple зрозуміло, то результат визначення опору Z_{bc} не є очевидним.

Обчислимо комплексний опір ділянки ab :

$$> Zab:=Z2*Z3/(Z2+Z3);$$

Результат обчислень буде поданий у алгебраїчній формі

$$Zab := 8 + 4I$$

Але дуже часто потрібно мати комплексні опори у показниковій формі $Ae^{j\alpha}$.

Для цього в СКМ Maple передбачено такі команди: $\text{abs}(Zab)$ для отримання значення модуля і $\text{argument}(Zab)$ для отримання значення аргументу.

$>\text{abs}(Zab);$

$$4\sqrt{5}$$

$>\text{argument}(Zab);$

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$$

СКМ Maple обчислює кути в радіанах. Для перетворення результату у градусну міру (градуси) слід отриманий результат конвертувати в градуси за допомогою команди **convert(% ,degrees);**

$$\frac{180 \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \text{degrees}}{\pi}$$

Щоб отримати результат у звичному вигляді варто застосувати команду **evalf(%);**

26.56505117degrees

те що було отримано з розв'язання без застосування СКМ Maple.

Знаючи комплексні опори та параметри джерела синусоїдної напруги, легко обчислити струми в кожному з ланцюгів.

$$I_1 = \frac{U}{Z} = 2.83 + j2.83;$$

$$I_2 = I_1 \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} = -5.66 + j5.66;$$

$$I_3 = I_1 \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3} = 8.491378 - j2.83$$

Конвертувавши значення струмів з алгебричної форми до показникової, можна побудувати векторну діаграму струмів (рис. 2).

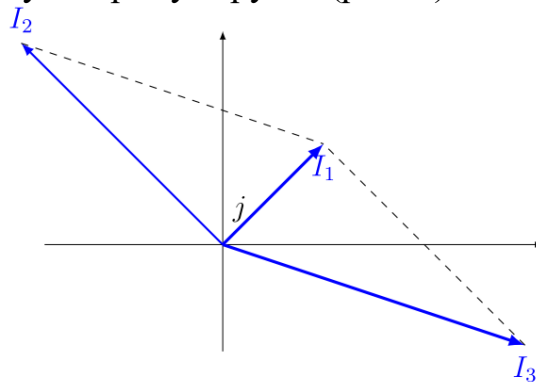


Рис. 2. Векторна діаграма струмів

Список літератури

Вайнштейн, Л. А. (1988). *Електромагнитные волны*. Москва: Радио и связь.

Нікітенко, О. М. (2011). *Maple: розв'язання інженерних та наукових задач. Навч. посібник*. Харків: ХНУРЕ.

Особливості створення короткочасних тестів для контролю рівня знань студентів технічних спеціальностей

Н. В. Круглова, О. О. Дем'яненко

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

natahak@ukr.net, o.dem@ukr.net

У статті розглянуто проблеми контролю рівня знань студентів технічних спеціальностей під час дистанційного навчання. Докладно було проаналізовано особливості створення короткочасних тестів у дистанційному курсі «Вища математика 1» для студентів спеціальності 121 (інженерія програмного забезпечення).

Ключові слова: дистанційне навчання, короткочасні тести, онлайн-режим, множинний вибір, вбудовані відповіді.

У наш час відбувається стрімкий розвиток інформаційно-комунікаційних технологій. Це відображається в усіх сферах життя, зокрема й у сфері вищої освіти. Можливість використовувати нові технології спонукає змінювати методи та підходи до навчання (Закон України «Про вищу освіту», 2015; Національна стратегія розвитку освіти України на 2012–2021 роки). Пандемія COVID-19, та, як наслідок з неї, дистанційний спосіб навчання прискорили ці процеси. Перед викладачами ЗВО постала нагальна потреба швидко та якісно перебудувати навчальний процес відповідно до вимог ситуації, яка виникла. Це стосується кожного етапу навчання, починаючи, з викладення матеріалу і, закінчуючи, контролем якості знань, що отримали студенти.

Зупинимось саме на моменті контролю поточних знань. При навчанні офлайн у викладача досить широкий спектр можливостей: можна викликати студента до дошки; можна провести усне опитування одного студента, усієї групи, чи якоїсь частини групи; можна провести короткочасну контрольну роботу по поточному матеріалу, тощо. У режимі онлайн ці традиційні підходи стають малоефективними, а іноді такими, що їх не можливо зреалізувати. Досвід уже майже двох семестрів дистанційного навчання говорить про те, що тестування є одним з ефективних методів контролю знань студентів. Автори хочуть поділитись власним досвідом створення, так би мовити, «швидких» короткочасних тестів. Ці тести розраховані на перевірку поточних теоретичних знань і набутих навичок у розв'язанні стандартних задач. Вони містять невелику кількість задач (від 3 до 5) і розраховані на час від 15 хв. до 30 хв. Проводитись вони мають регулярно, тобто по кожній темі. Короткочасні тести не перевіряють хід розв'язання задачі, хоча допускають можливість перевірки деяких проміжних кроків. У цьому є ряд позитивних моментів: по-перше, задача сформульована без підказок про хід розв'язання; по-друге, студент може сам обрати спосіб розв'язання. Є і негативна сторона. Розроблено велику кількість програмних засобів, таких як MATLAB, Wolfram Mathematica, онлайн-калькулятори. Вони дозволяють розв'язувати стандартні задачі з курсу вищої математики і студенти

ними широко користуються. Отже, при створенні тестів ці особливості треба враховувати. Щоб унеможливити, або, хоча б, мінімізувати використання додаткових інформаційних ресурсів треба чітко вивіряти час, що виділяється на проходження тесту. Він має бути достатнім для самостійного розв'язання задач середньо-статистичним студентом і замалим для того, щоб можна було використати програмні продукти. Формулювання самої задачі також може примушувати студента самостійно виконувати завдання. Наприклад, у тесті за темою «Множини» була запропонована наступна задача

Задано множини A та B :

$$A = \{x \in R : |x - 1| \leq 2\}, B = D(f),$$

де $f(x) = \sqrt{5x - x^2} - 4$. Знайдіть множини $C = A \cup B$, $L = A \cap B$, $K = A \setminus B$.

У відповідь запишіть

- 1) кількість натуральних членів множини C ;
- 2) суму цілих членів множини L ;
- 3) кількість цілих членів множини K .

Для розв'язання цієї задачі студент повинен розв'язати нерівність, яка задає множину A ; знайти множину B , як область визначення функції $f(x)$ і розв'язати при цьому ще одну нерівність; знайти множини C, L, K , виконавши відповідні дії з множинами A, B . На кожному етапі, безумовно, можна застосовувати якісь додаткові інтернет-ресурси, але на це потрібний час і достатній рівень кваліфікації у програмуванні та бути впевненим користувачем спеціальних програм. Постановка питання в задачі така, що перевіряє знання різних числових множин і потребує додаткових відповідних дій зі знайденими вже множинами C, L, K . Загалом тест містить три задачі і на його проходження було виділено 15 хвилин.

Ще одна особливість цих тестів полягає у прозорості форми запису відповіді, тобто питання має бути сформульовано так, щоб не було потреби писати додаткові вказівки до заповнення відповіді. Зокрема, у цій задачі розробники мають змогу підібрати умови, для яких відповідями будуть натуральні числа, що легко вбиваються з клавіатури комп'ютера, планшета чи телефона. На жаль, цей момент зручної відповіді не завжди вдається зберегти. Так, дробові відповіді можна записувати в різних варіантах. У цій ситуації необхідно виписувати додаткові вимоги до заповнення відповіді. Але, якщо в усій серії тестів дотримуватись одного правила, то це не складає проблеми.

Наступна особливість цих тестів полягає в тому, що правильна відповідь повинна записуватись саме так, як запрограмовано в Moodle. Так при записі рівнянь прямих та площин треба врегулювати питання кратності коефіцієнтів та їх знаки. Якщо виписувати правила заповнення відповіді в таких задачах, то вони виявляються громіздкими і їх правильне сприйняття вимагає часу, який обмежений. Тому розробники можуть вказати один з коефіцієнтів, що зафіксує конкретний запис відповіді. З одного боку це є підказка, з іншого своєрідна маленька математична задача на розуміння студентом того, що правильні рівняння прямих та

площин можна задавати в різних варіантах. Указані прийоми стосуються тестів з вбудованими відповідями. При створенні короткочасних тестів зручно також використовувати тести на множинний вибір.

Математичні тести можна створювати, використовуючи Google-форми, Moodle тощо. Але, на думку авторів, найкраще для математиків підходить платформа Moodle, оскільки містить велику кількість шаблонів питань, дозволяє вводити формули, задавати точність відповіді, тощо.

Розробка тесту припускає не тільки створення самих задач з урахуванням усіх вищезазначених особливостей, а й необхідність розмноження варіантів. Ось тут використання відповідних програмних засобів стає розробникам у нагоді. Зокрема, зручно використовувати тип питання «розрахунковий простий» у Moodle та шаблони розв'язків, що створені в Excel, Mathematica або запрограмовані на вибраній мові програмування.

У першому семестрі 2020/2021 н. р. для студентів спеціальності 121 «Інженерія програмного забезпечення» факультету інформаційно-обчислювальної техніки КПІ ім. Ігоря Сікорського було розроблено 12 тестів з курсу вищої математики. Для спеціальності 121 потоку ІТ проведено модульну контрольну роботу в тестовій формі за темою «Векторна алгебра. Аналітична геометрія». Указані короткочасні тести були розроблені в рамках дистанційного курсу «Вища математика 1» і використовувались під час дистанційного навчання. Автори вважають, що використання цих тестів буде корисним і при закінченні дистанційного навчання, як одна з форм контролю рівня знань студентів. Безумовно, якість тестів потребує окремих досліджень із застосуванням новітніх методик (Диховичний & Дудко, 2015; Круглова та ін., 2020). Загалом тема тестування є і буде залишатись актуальною та буде мати своє продовження в розробці нових тестів.

Список літератури

- Диховичний, О. О., & Дудко, А. Ф. (2015). Комплексна методика аналізу якості тестів з вищої математики. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 2: Комп'ютерноорієнтовані системи навчання*, (15), 139–144.
- Круглова, Н. В., Диховичний, О. О., & Алексєєва, І. В. (2020). Особливості застосування математичних моделей тестів в умовах дистанційного контролю. *Математические машины и системы*, (2), 105–116.

IRT і метод головних компонент як інструменти формування банку завдань дистанційного семестрового контролю

Н. В. Круглова, О. О. Диховичний, Д. Р. Лисенко

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

natahak@ukr.net

У статті розглянуто математичні методи аналізу й формування якісних завдань для комп'ютерного тестування з вищої математики в період дистанційного навчання. Тестові завдання проаналізовано за допомогою моделей IRT. Виявлено завдання, що мають бути замінені у зв'язку з їх надмірною важкістю (легкістю), тобто, розв'язувалися меншістю (більшістю) іспитників; завдання з високою ймовірністю вгадування; завдання, що розв'язуються за допомогою онлайн-сервісів.

Після переформулювання проблемних питань досліджувалася задача виділення таких типів завдань, що повністю охоплюють основні теми курсу, найбільше диференціюють іспитників, являються найбільш інформативними відносно знань респондентів. Методом головних компонент було виділено сукупність тестових питань, що містила 90 % інформації про знання студентів з вивченої дисципліни.

Програмна реалізація задач роботи була здійснена у середовищі програмування R.

Ключові слова: мова R, тестування, метод головних компонент, IRT, пакет mirt, пакет ltm, пакет eRm.

У період пандемії і переходу вищої школи на дистанційне та змішане навчання питання створення і проведення якісного календарного й семестрового контролю є надзвичайно важливим. Адже комп'ютерне тестування має відображати об'єктивну картину знань студентів, що за відсутності належного традиційного контролю є надзвичайно складною задачею.

На кафедрі математичного аналізу та теорії ймовірностей КПІ ім. Ігоря Сікорського неодноразово проводилися тестування з вищої математики ще до пандемії під наглядом викладачів. Було сформовано велику кількість завдань з високою розрізняльною спроможністю, що й було показано в роботах Диховичний та Дудко (2015), Алексеєва та ін. (2010а, 2010b). З переходом до дистанційного навчання цей банк питань потрібно було оновити, оскільки частина завдань з'явилася у відкритому доступі (доступність раніше закритих дистанційних курсів, обмін скріншотами завдань між студентами, викладення іспитниками на форумах тих завдань, що викликали в них труднощі тощо).

Саме тому для аналізу якості нових тестових завдань з вищої математики було використано сучасну теорію тестів IRT. Ефективність цієї методики проілюстрована при аналізі тестів з вищої математики (Диховичний & Дудко, 2015; Алексеєва та ін. 2010а, 2010b), при розробці тестів з фізики (Ким, 2015), для опрацювання результатів ЄДІ (Карданова, 2006).

У роботі аналізуються тести, проведені у 2020 році для студентів технічних факультетів КПІ ім. Ігоря Сікорського. Тестування проводилося по наступним темам: визначені і невизначені інтеграли, кратні інтеграли, диференціальні рівняння, ряди.

Особливістю є те, що період вивчення цих тем збігся з пандемією, тому матеріал опановувався студентами дистанційно, а всі контрольні заходи здійснювалися у вигляді тестів.

Тому, перед усім, питання потрібно було формулювати таким чином, щоб студенти не встигали користуватися сервісами для розв'язання задач, щоб відповідь було складно вгадати, щоб завдання розрізняли належним чином іспитників відповідно до знань предмету.

Тести проводилися на платформі MOODLE. Переважно, були завдання числового типу, множинного вибору, вбудовані відповіді.

У Круглова та ін. (2020) показано, що найкращими моделями для питань числового типу є модель Раша, Бірнбаума, 3-PL (Linden & Hambleton, 1997), для питань множинного вибору із штрафними балами і декількома правильними відповідями було вибрано модель Муракі (Linden & Hambleton, 1997). Для питань типу «вбудовані відповіді» ми використовували також модель Муракі. За допомогою критерію χ^2 було перевірено адекватність вибраних моделей для даних тестувань. Що дозволило обрати для дихотомічних питань тільки модель Раша, а для політомічних — модель Муракі.

Виявлено, що ряд питань по визначеним інтегралам потребує корекцій, оскільки вони мають низьку розрізняльну спроможність і високу ймовірність угадування. Ці завдання було вилучено. Частина завдань по темі «Диференціальні рівняння» була переформульована у зв'язку з високою складністю, три завдання по темі «Ряди» було замінено, оскільки вони допускали використання спеціальних ресурсів для розв'язання.

На рис.1 зображено інформаційні криві дихотомічних питань, які мають дзвіноподібну форму, що свідчить про правильність складеного тесту.

Результати тестувань, що включали тільки якісні питання, було об'єднано у спільну таблицю. Записи, що стосувалися студентів, які пройшли не всі контрольні заходи, було вилучено. До сформованої таким чином матриці первинних балів було застосовано метод головних компонент. У результаті визначено кількість компонент, що містять 90% інформації.

Завдяки цьому виявлено оптимальну кількість типів питань і тем, що будуть включені до семестрового контролю.

Висновок: Застосування для аналізу тестових завдань IRT разом з статистичним аналізом латентних параметрів є ефективною методикою, яка дозволяє не тільки відсіювати некоректно складені завдання, але й виділяти основні теми для семестрового контролю.

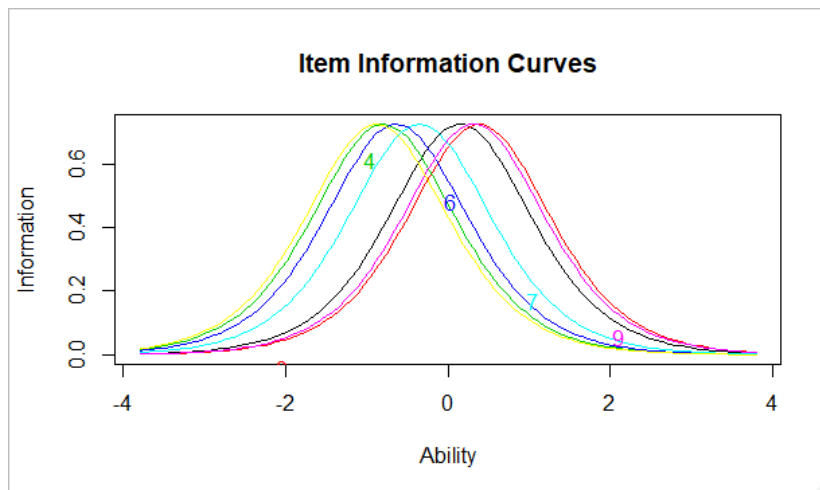


Рис.1. Інформаційні криві

Список літератури

- Linden, W., & Hambleton, R. (Eds.) (1997). *Handbook of modern item response theory*. New York: Springer.
- Алексеева, І. В., Гайдей, В. О., Диховичний, О. О., Коновалова, Н. Р., & Федорова, Л. Б. (2010b). Застосування математичних моделей тестів у комплекті дистанційної освіти «Вища математика». *Математичні машини і системи*, (4), 89–98.
- Алексеева, І. В., Гайдей, В. О., Диховичний, О. О., Коновалова, Н. Р., & Федорова, Л. Б. (2010a). Застосування сучасних математичних моделей педагогічного тестування у формуванні та аналізі тестових завдань комплексу «Вища математика». *Дидактика математики: проблеми і дослідження: міжнародний збірник наукових робіт*, (33), 50–56.
- Диховичний, О. О., & Дудко, А. Ф. (2015). Комплексна методика аналізу якості тестів з вищої математики», *Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 2: Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання*, (15), 139–144.
- Карданова, Е. Ю. (2006). О применимости политомической модели Г. Раша к тестовым заданиям различных форм, оцениваемым политомически. *Вопросы тестирования в образовании*, (4), 44–56.
- Ким, В. С. (2015). *Разработка тестов по физике: учеб. пособ.* Владивосток: Дальневосточный федеральный университет.
- Круглова, Н. В., Диховичний, О. О., & Алексеева, І. В. (2020). Особливості застосування математичних моделей тестів в умовах дистанційного контролю. *Математичні машини і системи*, (2), 105–116.

Слабкі і сильні сторони дистанційного навчання математики у вищих військових навчальних закладах

Х. І. Ліщинська, А. С. Сомик

*Національна академія сухопутних військ імені гетьмана П. Сагайдачного,
Львів, Україна*

k_lishch@meta.ua

Показано сильні сторони дистанційної освіти в системі військової освіти України, які дозволять підняти освітній процес у Збройних Силах України на якісно новий рівень, що відповідатиме загальним потребам сучасних Збройних Сил. Наведено та проаналізовано негативні сторони впровадження дистанційного навчання в навчальний процес вищих військових навчальних закладів (ВВНЗ) на прикладі дисципліни «Вища математика».

Ключові слова: дистанційне навчання, військова освіта, ВВНЗ.

Розвиток нових інформаційних технологій став причиною розвитку інформаційного суспільства і призвів до інформатизації освіти. Завдяки процесу інформатизації стала можливою дистанційна форма навчання. Якщо розглядати військову освіту, то варто зауважити, що специфіка підготовки військових спеціалістів визначає деякі особливості впровадження дистанційної форми навчання в систему військової освіти. Освітній процес за дистанційною формою навчання можна поділити на напрями (Чернявський & Білик, 2018): навчання в межах системи військової освіти слухачів, студентів ВНЗ (підготовка офіцерів запасу), фахівців для інших силових структур та іноземних військовослужбовців; підвищення кваліфікації та курсова підготовка офіцерів Збройних Сил України; надання можливості військовослужбовцям строкової служби за контрактом отримати освіту за дистанційною формою навчання за рахунок Міністерства освіти України; надання можливості військовослужбовцям Збройних Сил України отримати вищу освіту за дистанційною формою навчання за особистий рахунок.

Дистанційне навчання у ВВНЗ, як і у ВНЗ, має свої слабкі і сильні сторони.

Розглянемо деякі слабкі сторони дистанційного навчання у ВВНЗ, які частково перегукуються з такими ж у ВНЗ (Самолюк & Швець, 2013), на прикладі дисципліни «Вища математика». Це:

1) відсутність безпосереднього контакту між викладачем і слухачем (жива зустріч). При такому контакті викладач передає низку навичок, що є, саме для математики, надзвичайно важливим. Викладач роз'яснює для низки поставлених завдань, чому в кожному конкретному завданні виконуються ті чи інші математичні перетворення і дії (наприклад, задачі на знаходження границь з використанням першої чи другої важливих границь, розв'язування диференціальних рівнянь);

2) неоднаковий стартовий рівень освіти. Як відомо, одним з принципів, що властивий системі дистанційного навчання є принцип стартового рівня освіти. Тобто ефективно навчання в системі дистанційної освіти потребує певного рівня знань, умінь, навичок. Якщо ж цей рівень недостатній, то часто підвищити

його за умови дистанційного навчання є складною задачею. Майже завжди рівень знань у слухачів зі шкільної математики, на якій базується дисципліна «Вища математика», може бути кардинально різним. Це залежить від багатьох факторів, наприклад, слухач не розумів і не вчив математику в школі або ж студент-заочник закінчив школу дуже давно. Тому, хто навчається, буває достатньо складно «підтягнути» упущений матеріал дистанційно, навіть маючи при цьому велике бажання це здійснити, що буває теж далеко не завжди.

3) спротив викладачів упровадженню сучасних технологій навчання, які звикли до існуючих класичних лекційних, практичних занять тощо і не бажають «ускладнювати» собі життя; А також необхідність переопрацювання більшої частини методичних і навчальних матеріалів, що теж викликає спротив у викладачів. Адже у них часто відсутні навички роботи з інформаційними технологіями і вони знову ж таки не бажають витратити на набуття таких навичок свій час. Тому виникають труднощі з підготовкою такого навчального матеріалу, який би підходив для використання у дистанційній освіті.

Ще однією проблемою математики в цьому аспекті є те, що система Moodle не дозволяє копіювання формул, набраних, наприклад, в стандартному редакторі формул Microsoft Equation, перетворюючи їх у порожні квадратики. У системі Moodle, звичайно, можна набирати формули, проте викладачі не бажають виконувати двічі одну і ту ж роботу. Тому досить часто матеріал з вищої математики подається в системі Moodle у вигляді картинок;

4) фінансові витрати ВВНЗ на придбання необхідного технічного оснащення, повноцінне розповсюдження мережі Internet. Варто зазначити, що в певних ВВНЗ забезпеченість ПК, що мають доступ до мережі Internet є надто малою. Це пояснюється забезпеченням секретності. Проте якщо на всіх викладачів кафедри є лише один чи декілька ПК, що мають доступ до мережі Internet, то про жодне повноцінне дистанційне навчання говорити не доводиться. Зауважимо, що є проблеми навіть з підключенням ПК до локальної мережі, через яку є можливість дистанційного навчання курсантів самого ВВНЗ, адже нею охоплена також дуже мала кількість ПК кафедри;

5) недосконалість процесу оцінювання знань. У випадку, коли викладач вживу перевіряє виконані завдання з вищої математики, він дивиться не лише на кінцевий результат, але і на хід самого розв'язання. Тож навіть при невірній вказаній відповіді він може поставити достатньо високі бали, якщо помилка є незначною та зробленою наприкінці поставленого завдання: прикладу чи задачі. За дистанційної ж форми навчання викладачеві зручно здійснювати перевірку знань у тестовому режимі, за якого викладач бачить лише відповідь слухача і не бачить хід розв'язання.

Також однією з найбільш значущих проблем при впровадженні дистанційної форми навчання є підсумковий контроль знань слухачів та їх об'єктивної оцінки. Адже слухач необов'язково буде виконувати ті чи інші завдання підсумкового контролю самостійно, навіть у випадку використання контролю в режимі онлайн. Адже можна скористатись онлайн-сервісами, такими як матема-

тичні онлайн-калькулятори, які нескладно знайти в мережі Internet. Оцінка буде реалістичною лише в тому випадку, якщо той, хто навчається, дійсно ставить собі за мету справді отримати належні знання з дисципліни, зокрема з «Вищої математики». Проте і тоді залишається спокуса отримати кращу оцінку скориставшись певними незаконними методами. Як вирішення цієї проблеми дистанційного навчання є використання технологій змішаного навчання, зокрема, було б доцільніше, коли іспит відбувався в аудиторії ВВНЗ (письмово або ж за комп'ютером), але під наглядом викладача.

Сильними сторонами дистанційного навчання (Романовський та ін., 2019) у ВВНЗ є гнучкість (навчання у зручній для себе час та у зручному місці); далекодійність; асинхронність (слухач і викладач можуть реалізувати технології навчання за зручним для кожного розкладом і темпом); паралельність (навчання здійснюється одночасно з службовою діяльністю); економічність; інтернаціональність; індивідуалізація навчання; швидкий зворотний зв'язок про хід і результати навчання; простота обліку роботи слухачів; підвищення творчого та інтелектуального потенціалу військовослужбовця за рахунок самоорганізації, прагнення до знань, використання сучасних інформаційних та телекомунікаційних технологій, вміння самостійно приймати відповідальні рішення.

Ще одною надзвичайно актуальною сильною стороною дистанційного навчання у ВВНЗ і не тільки є сучасний епідеміологічний стан в Україні й у цілому світі. Епідеміологічна ситуація в 2020-му році стала чи не найвагоміший чинником доцільності дистанційного навчання.

Дистанційне навчання має свої недоліки і переваги, зокрема що стосується дисципліни «Вища математика». Проте доконаним є той факт, що дистанційне навчання є невід'ємною складовою сучасної системи освіти.

Список літератури

- Романовський, О. Г., Квасник, О. В., Мороз, В. М., Підбуцька, Н. В., Резнік, С. М., Черкашин, А. І., & Шаполова, В. В. (2019). Фактори розвитку та напрями вдосконалення дистанційної форми навчання в системі вищої освіти України. *Інформаційні технології і засоби навчання*, 74(6), 20–42.
- Самолук, Н., & Швець, М. (2013). Актуальність і проблемність дистанційного навчання. *Нова педагогічна думка*, (1), 193–203.
- Чернявський, І. Ю., & Білик, З. В. (2018). Деякі проблемні питання дистанційного навчання у військовій освіті. У *Матеріалах I Міжнародної науково-практичної конференції «Проблеми впровадження дистанційного навчання в освітньому процесі вищих військових навчальних закладів та можливі шляхи їх вирішення»*, 16 листопада (с. 187). Київ: НУОУ.

Застосування та роль математики в інформатиці

Є. А. Рачковська

Запорізький національний університет, Запоріжжя, Україна

prettyrachkovskaya979@gmail.com

Ключові слова: математика, інформатика.

Розглянемо досить популярне запитання: «Чи потрібно людині, що вивчає інформатику знати математику?».

Щоб відповісти на нього треба спочатку розібратись якою буває математика. Також, які саме її області потрібно знати для розв'язання різних програмістських задач.

На які галузі ділиться ця наука?

Елементарна математика — та, яку вивчають у школі. Це арифметика та алгебра з геометрією.

Вища математика — та, яку вивчають у виші. Зазвичай вона поділена на цілий ряд предметів:

- математичний аналіз, як основна база;
- статистика і теорія ймовірностей;
- дискретна математика та математична логіка;
- лінійна алгебра та аналітична геометрія, та інші.

Для чого потрібна вища математика при вивченні інформатики?

Є багато програм, які можливо написати без поглиблених знань вищої математики, але всі більш високотехнологічні задачі вимагають обізнаності в математиці та володіння великою кількістю навичок пов'язаних з нею (Насколько программисту нужно знание математики в работе?, 2019; Skorkin, 2010).

Такі три основні розділи як дискретна математика, математична логіка та теорія ймовірностей використовують у програмуванні найчастіше. Розуміння роботи алгоритмів, розвиток логічного мислення, удосконалення вміння самостійно тестувати розроблені програми, також, переважно, йде з математики. Без цих навичок було б майже неможливо писати ємкі, ефективні та зрозумілі коди програм (Skorkin, 2010).

Варто пам'ятати, що в кожному типі завдань може бути більш важливою та чи інша галузь математики. Тож не потрібно щоб кожен спеціаліст досконало розбирався в усьому. У таких напрямках незнання основ вищої математики стане зайвою перешкодою та забере багато часу:

- 2d/3d графіка в іграх, а також фізика;
- аналіз даних;
- нейронні мережі;
- криптографія;
- прогнозування;
- аналіз даних та прогнозування;

- штучний інтелект.

Наприклад, навіть для такої простої програми як перевантаження операторів для типу даних матриця потрібно мати знання з лінійної алгебри. Описати клас, що реалізовує тип даних «Матриця». Клас повинен містити конструктор та такі операції: віднімання та множення матриць, порівняння та присвоєння з використанням перевантаження операцій.

Текст програми, написаної на мові програмування C++:

```
#include <iostream>
using namespace std;
const int n=3; //розмір квадратної матриці
//Клас матриць:
class Matrix{
public:
int matr[n][n];
//Перевантаження оператора []:
int *operator[](int k){
return matr[k];}
//Перевантаження оператора -:
Matrix operator-(Matrix obj){
Matrix tmp(0);
for(int i=0; i < n; i++)
for(int j=0; j < n; j++)
tmp[i][j]=matr[i][j]-obj[i][j];
return tmp;}
//Перевантаження оператора *:
Matrix operator*(Matrix obj){
Matrix tmp(0);
for(int i=0; i < n; i++)
for(int j=0; j < n; j++)
for(int k=0; k < n; k++)
tmp[i][j]+=matr[i][k]*obj[k][j];
return tmp;}
//Порівняння матриць
bool operator==(Matrix& m5)
{
for (int i=0; i<n; i++)
for (int j=0; j<n; j++)
if (this->matr[i][j]!=m5.matr[i][j]) return false;
return true;}
//Метод для відображення значень матриці:
void show(){
```

```

    for(int i=0; i < n; i++){
        for(int j=0; j < n; j++){
            printf("%3d",matr[i][j]);}
        cout << endl;
    }
    //Конструктор з аргументом:
    Matrix(){
        for(int i=0; i < n; i++)
            for(int j=0; j < n; j++)
                matr[i][j]=rand()%5-2;
    };
    int main(){
        setlocale(LC_ALL, "Russian");
        //Створення об'єктів:
        Matrix A,B,C(0),D(0);
        cout << "Matrix A:\n";
        A.show();
        cout << "Matrix B:\n";
        B.show();
        cout<<"Результат порівняння матриць: "<<endl;
        cout<<(A==B);
        cout<<""<<endl;
        //Різниця матриць:
        cout << "Matrix C=A-B:\n";
        C=A-B;
        C.show();
        //Множення матриць:
        cout << "Matrix D=A*B:\n";
        D=A*B;
        D.show();
        return 0;}

```

Для розв'язання цієї задачі використовуються декілька формул.

Віднімання матриць $A - B$ — операція обчислення матриці C , елементи якої обчислюють за формулою

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}.$$

Добутком матриць A та B називають матрицю C , елементи якої обчислюють за формулою

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}.$$

Для використання методів сортування у своїх програмах потрібно розуміти їх суть і заздалегідь знати який з них менш ресурсовитратний. Застосуванню

таких базових алгоритмів навчають на структурах даних і алгоритмах. Операції, що вивчає математична логіка трапляються всюди і скрізь. Для багатьох задач є декілька варіантів розв'язання. Деякі з них потребують багато часу, пам'яті комп'ютера та інших важливих ресурсів, а інші набагато менше. Щоб швидко знайти оптимальне рішення потрібно володіти математичними знаннями.

Висновок: для розв'язання складніших та високотехнологічних задач, використання оптимальних рішень та написання найбільш ефективних та не ресурс-затратних програмних кодів треба добре володіти знаннями з вищої математики та користатись навичками, здобутими під час навчання. Програми навчання спеціальностей, пов'язаних з інформатикою, вищих закладів України включають в себе математичні дисципліни, які справді необхідні.

Список літератури

- Насколько программисту нужно знание математики в работе? (2019, 29 апреля). <https://tproger.ru/experts/2/>
- Skorkin, A. (2010, March 23). You don't need math skills to be a good developer but you do need them to be a great one. <https://skorks.com/2010/03/you-dont-need-math-skills-to-be-a-good-developer-but-you-do-need-them-to-be-a-great-one/>

Використання пакету Excel при вивченні дескриптивної статистики

І. М. Савич

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

sim7ka@gmail.com

Розглядаються деякі важливі статистичні функції та надстройки пакету Excel, що використані для розв'язку типового прикладу.

Ключові слова: Excel, аналіз даних.

Дескриптивна (описова) статистика — це розділ математичної статистики, що вивчає методи збору, систематизації та представлення отриманих емпіричних даних у зручному для подальшого аналізу вигляді. Цей розділ викладають як для математичних спеціальностей, так і економічних в курсі теорія ймовірностей та математична статистика.

Кожен дослідник-статистик за результатами такого первинного аналізу може робити певні висновки про досліджувану випадкову ознаку. Задачі про первинний аналіз вибірки в більшості випадків вимагають трудомістких ручних обчислень. Для вирішення цієї незручності можна запропонувати доступний практично всім користувачам комп'ютерів функціональний набір програмного пакету Excel. Далі розглянемо на прикладі використання вбудованих статистичних функцій та корисну надстройку **Аналіз даних**, які вимагають від користувача мінімальних зусиль. Покрокову інструкцію по підключенню пакету **Аналіз даних** можна знайти за посиланням <https://support.microsoft.com/ru-ru/office/загрузка-пакета-анализа-в-excel-6a63e598-cd6d-42e3-9317-6b40ba1a66b4?ns=excel&version=19&ui=ru-ru&rs=ru-ru&ad=ru> (для версії Excel 97 див. Макарова и Трофимец (2002)).

Тепер, коли надстройка підключено, щоб переглянути доступні функції, заходимо на закладку **Данные**, натискаємо кнопку **Анализ данных**. У вікні **Анализ данных** можна побачити перелік інструментів аналізу (рис.1).

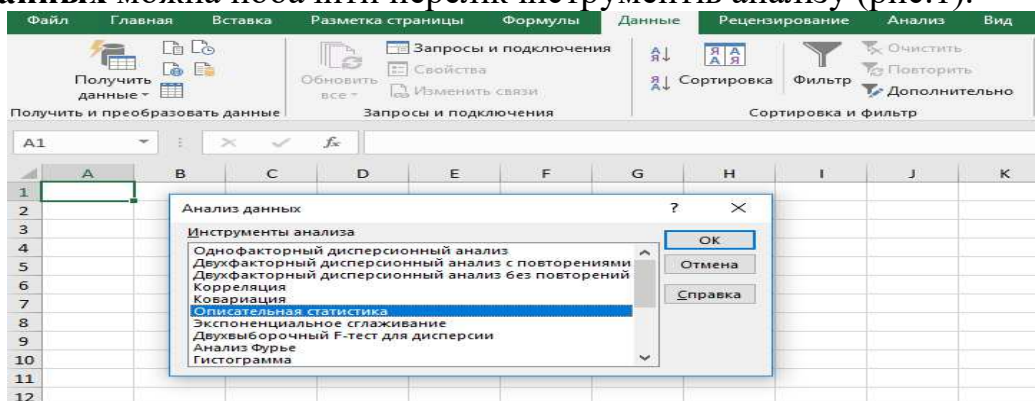


Рис. 1

Приклад. Для прийняття на роботу фірма здійснює перевірку здібностей кандидатів шляхом тестування по певній 100 бальній системі. У таблиці А наведено результати тестування 100 кандидатів.

Таблиця А									
71	77	47	54	62	54	61	47	73	59
69	47	46	71	54	47	58	59	60	46
53	60	69	61	53	53	88	83	87	47
60	51	68	39	87	98	47	90	43	60
95	91	47	43	91	38	72	64	55	42
46	54	39	73	59	60	38	66	43	60
42	43	61	71	80	62	57	47	66	71
86	53	66	66	47	55	66	32	73	61
73	60	61	62	46	64	81	65	55	60
68	79	68	61	66	72	61	54	62	50

Потрібно побудувати:

- варіаційний ряд;
- згрупований розподіл частот;
- гістограму частот та огіву кумулятивних відносних частот;
- знайти всі дескриптивні міри

Розв'язання.

А. 1. Відкриємо вікно Excel, введемо дані таблиці А одним стовпцем, поруч у стовпці В зробимо копію, щоб побачити як працює функція сортування.

2. Виділяємо дані **B2:B101** в стовпці В, закладка **Данные**, кнопка **Сортировка**, у діалоговому вікні вибираємо **По возрастанию**, кнопка **Ок** (рис. 2).

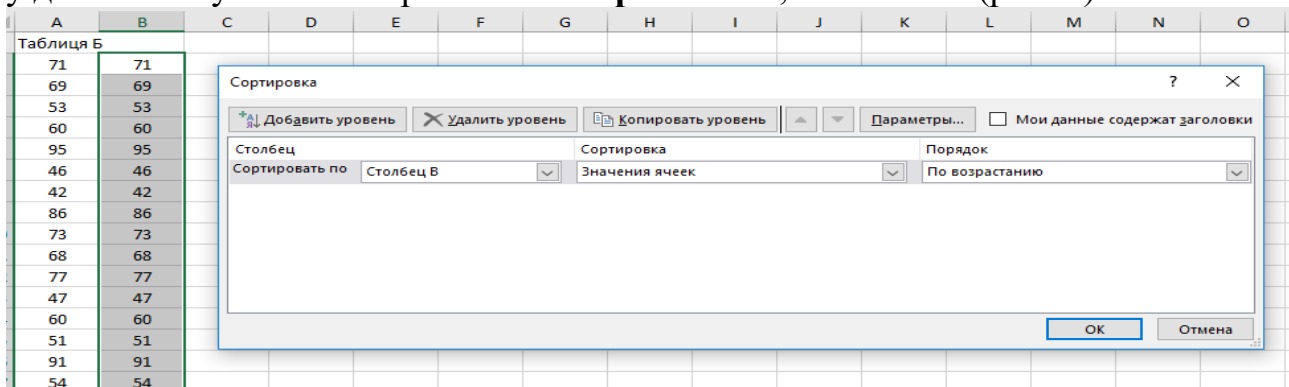


Рис. 2

У результаті у стовпці В побачимо впорядковані дані.

Б. Побудуємо згрупований розподіл частот, оберемо кількість класів та визначимо ширину класів. Для цього використаємо результати отримані в пункті А. Найменший елемент $L = 32$, найбільший елемент $H = 98$, кількість класів $k = 7$, тоді ширина класу $CW = (H - L) / k = 9,4 \approx 10$. Рекомендації щодо обчислення цих даних можна знайти в Kvanli et al. (2003). Введемо ці дані як показано на рис.3 .

	А	В	С
1	L=32	№ класу	Класи
2	H=98	1	[30,39]
3	k=7	2	[40,49]
4	CW=10	3	[50,59]
5		4	[60,69]
6		5	[70,79]
7		6	[80,89]
8		7	[90,99]
9			

Рис. 3

Далі, для визначення частот за заданими інтервалами використаємо функцію **Частота**, що має два аргументи: **Массив_данных** — це посилання на масив даних, для яких обчислюються частоти, **Массив_интервалов** — це посилання на множину даних таких, що частоти варіант вибірки будуть підраховуватися для інтервалів ($x \leq 39$, $40 \leq x \leq 49$, $50 \leq x \leq 59$, $60 \leq x \leq 69$, $70 \leq x \leq 79$, $80 \leq x \leq 89$, $90 \leq x \leq 99$, $x > 100$).

1. Вводимо стовпець «Масив_інтервалів» комірки **S2:S8**. Виділимо комірки **O2:O9** (на одну більше ніж масив_інтервалів), куди будуть виведені частоти.

2. Закладка **Формулы**, кнопка **Вставить функцию**, категория **Статистические**, **Частота**, **Ок** (рис.4)

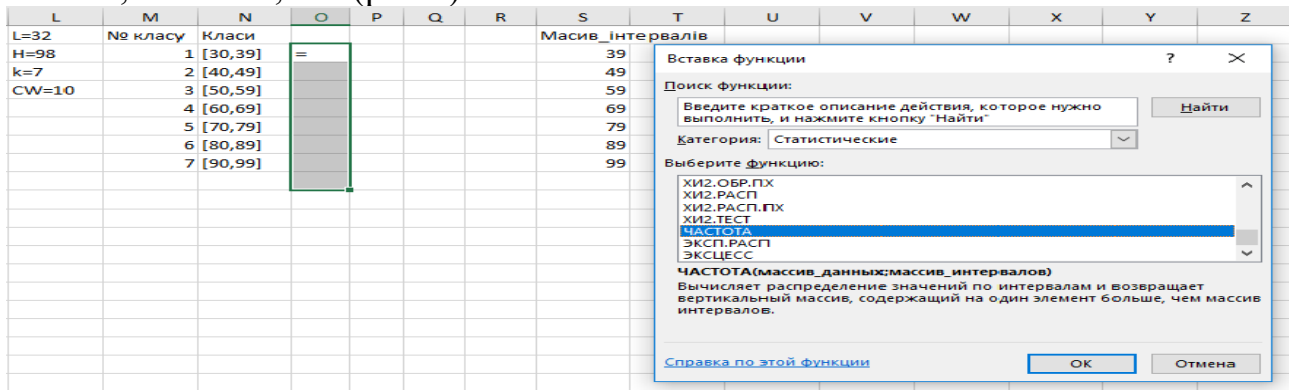


Рис. 4

4. У вікні вводимо аргументи **Массив_данных=A2:J11**, **Массив_интервалов=S2:S8**, комбінація кнопок **<CTRL>+<SHIFT>+<ENTER>**. Як результат отримуємо у стовпці O частоти варіант по виділених інтервалах. У стовпцях P, Q, R обчислимо відносну частоту, кумулятивну частоту, кумулятивну відносну частоту, використовуючи звичний режим уведення відповідних формул в Excel (рис.5)

L	M	N	O	P	Q	R	S	T
L=32	№ класу	Класи	Частота	Відн. част.	Кум. част.	Кум. Відн.част.	Масив_інтервалів	
H=98	1	[30,39]	5	0,05	5	0,05	39	
k=7	2	[40,49]	19	0,19	24	0,24	49	
CW=10	3	[50,59]	19	0,19	43	0,43	59	
	4	[60,69]	33	0,33	76	0,76	69	
	5	[70,79]	12	0,12	88	0,88	79	
	6	[80,89]	7	0,07	95	0,95	89	
	7	[90,99]	5	0,05	100	1	99	
			0					

Рис. 5

В. 1. Закладка **Данные**, кнопка **Анализ данных**, інструменти аналізу **Гистограмма**, кнопка **Ок**.

2. У діалогове вікно вводимо аргументи: **Входной интервал** — це комірки, де розміщені дані вибірки, **Интервал карманов** — це масив інтервалів з пункту Б, **Выходной интервал** — це верхня ліва комірка, де виводитиметься гістограма та огіва. Ставимо прапорці на **Вывод графика**, **Интегральный процент** (рис. 6), кнопка **Ок**. Те, що отримуємо, зображено на рис. 7, а після редагування гістограми рис. 8.

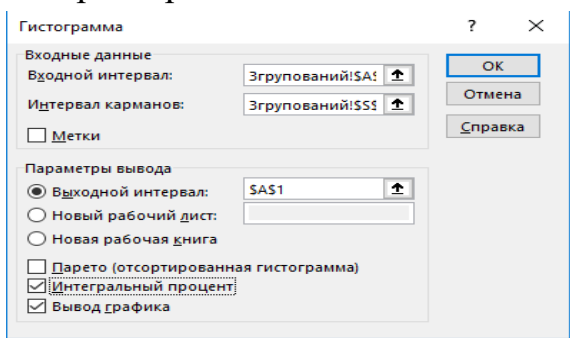


Рис. 6

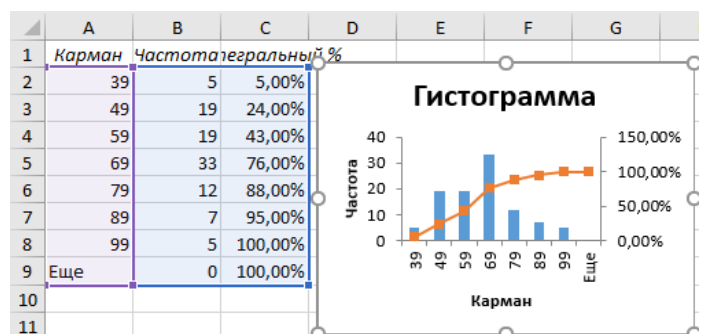


Рис. 7

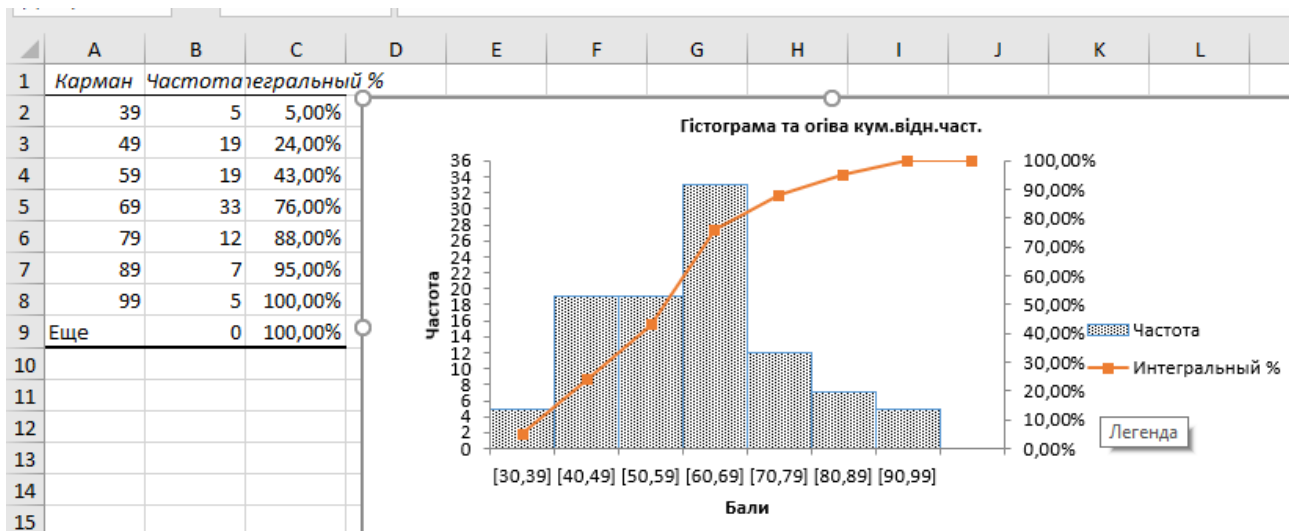


Рис. 8

Г. Повторюємо кроки 1 та 2 з пункту В.

2. У вікно вводимо аргументи: **Входной интервал** — це масив даних вибірки, що введені одним стовпцем, **Выходной интервал** — це верхня ліва комірка, де виводитиметься підсумкові дескриптивні міри, ставимо прапорець **Итоговая статистика**, кнопка **Ок** (рис. 9, рис. 10).

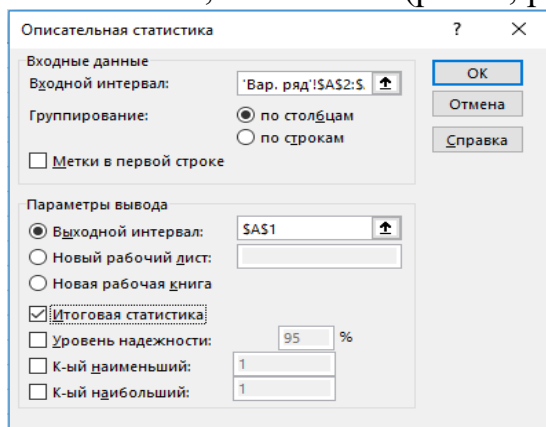


Рис. 9

	A	B
1	<i>Бали</i>	
2		
3	Среднее	61,08
4	Стандартная ошибка	1,41426213
5	Медиана	60
6	Мода	47
7	Стандартное отклонение	14,1426213
8	Дисперсия выборки	200,0137374
9	Экссесс	-0,083493231
10	Асимметричность	0,487758758
11	Интервал	66
12	Минимум	32
13	Максимум	98
14	Сумма	6108
15	Счет	100

Рис. 10

Список літератури

- Макарова, Н. В., & Трофимец, В.Я. (2002). Статистика в Excel. Москва: Финансы и статистика.
- Kvanli, A. H., Pavur, R. J., & Keeling, K. B. (2003). Introduction to business statistics: A Microsoft Excel integrated approach (6th ed.). Thomson Learning.

Аналіз впровадження елементів дистанційності в освітній процес НАСВ

Н. Б. Сокульська, Р. А. Ковальчук, В. Ф. Кмін
НАСВ ім. гетьмана Петра Сагайдачного, Львів, Україна
natalya.sokulska@gmail.com, roma_kov@meta.ua

У статті проаналізовано впровадження елементів дистанційного навчання в сучасну систему вищої військової освіти на прикладах вивчення дисциплін математичного циклу.

Ключові слова: вища військова освіта, дистанційне навчання, платформа дистанційного навчання Moodle.

На сьогодні, під впливом глобального лиха, яке не оминуло практично жодну країну світу, поняття «дистанційне навчання» набуло нового звучання. Тепер воно асоціюється швидше з необхідністю, аніж з новизною. Але ще рік тому можливість здобувати освіту дистанційно трактувалася як сучасна технологія, продиктована світовими освітніми лідерами такими як Масачусетський технологічний, Гарвардський та інші відомі університети.

Задовго, до початку пандемії в 2013 році МОН України розробило Положення про дистанційне навчання, яке стало основою для Концепції дистанційного навчання у Збройних Силах України, що набула чинності у 2015 році. Метою останньої є «наближення військової освіти до сучасних вимог та перспектив розвитку теорії і практики збройної боротьби» (Концепція, 2015, с. 5). Міністерством Оборони для втілення цієї концепції було прийнято рішення впроваджувати дистанційне навчання на основі платформи Moodle.

Пілотний проект з навчання військових фахівців з використанням платформи дистанційного навчання ЗСУ Moodle, що здобувають освіту в Академії заочно, стартував у 2018 році. Слухачам було запропоновано змішану систему навчання, коли певна кількість навчальних годин відводилась на аудиторні заняття в періоди настановчих та підсумкових зборів, інша ж частина — дистанційно. При цьому звіти про навчальні досягнення у формі контрольних робіт слухачі мали можливість здавати як у традиційний спосіб, надсилаючи їх паперові варіанти у відповідні структурні підрозділи, так і за допомогою платформи дистанційного навчання, завантажуючи їх через особисті кабінети в електронному вигляді, при цьому зводячи до мінімуму можливі ризики з фізичних втрат указаних робіт через людський фактор.

При цьому слухачі курсу відзначали, що кількість нової інформації з дисципліни, яку можна одержати на платформі Moodle, є значно більша за обсягом, аніж та що подається очно на настановчих зборах, і, водночас, лаконічніша, ніж у підручниках та посібниках. Крім того, наявність голосарію і швидкий доступ до означень полегшує розуміння та сприйняття нового матеріалу (Сокульська, та ін., 2019).

Водночас, зважаючи на карантинні заходи, спричинені пандемією COVID-19, слухачам другого курсу заочної форми навчання запропоновано підсумкову та настановчу сесію 2020–2021 проходити повністю дистанційно. При цьому можливістю навчатись та складати звітність користувались 30–55% слухачів з вищої математики та 55–75% — з інженерних дисциплін кафедри. У той же час 90% студентів надсилали паперові примірники своїх контрольних робіт з вищої математики та інших дисциплін кафедри на поштову скриньку Академії, 50% слухачів користувались можливістю електронної звітності, дублюючи роботи.

Варто зауважити, що можливістю складати іспити за білетами, інтегрованими в систему, скористалось 55–60%. При цьому 40% завдань були теоретичними, відповіді на які оцінювались викладачем, а 60% — практичні завдання, які слухачам потрібно було розв’язувати та вносити відповіді до них на платформу власноруч, або обирати з переліку запропонованих. Правильність таких відповідей «перевіряла система». Тому можна стверджувати, що даний спосіб адекватно відобразив реальні навички студентів та звів до мінімуму особистісний фактор, можливий при очному складанні іспиту.

Середній час виконання екзаменаційних робіт становив — 1 год та 28 хв. Гістограма отриманих результатів іспитів з дисциплін математичного циклу свідчить про схожість графіка розподілу балів до графіка нормального розподілу. При цьому не спостерігається різкого збільшення крайніх результатів, тобто немає різкого зростання кількостей «відмінників» та «трієчників». У поєднанні дані результати можуть свідчити про те, що слухачі групи виконували роботи, користуючись своїми знаннями та навичками в більшій мірі, аніж «підказками» інтернет-мережі, а також логічністю запропонованих викладачами типів тестових питань.

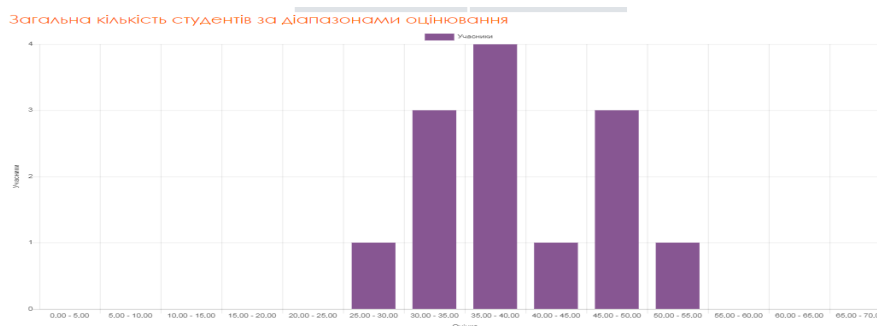


Рис. 1. Гістограма розподілу балів, отриманих при складанні іспиту

Отже, серед суттєвих переваг дистанційної форми навчання, у тому числі на платформі Moodle, можна відзначити наступні:

- можливість навчатися в будь-який час. Слухач, який навчається дистанційно, може самостійно вирішувати, коли і скільки часу впродовж семестру йому приділяти на вивчення матеріалу, будуючи індивідуальний графік навчання;
- можливість навчатися в будь-якому місці. Слухачі можуть вчитися, не виходячи з дому, офісу чи в окопах. Щоб приступити до навчання, необхідний лише комп’ютер або телефон з доступом в Інтернет;

– навчання без відриву від основної діяльності. Для навчання зовсім не обов'язково брати відпустку на основному місці роботи, виїжджати у відрядження;

– можливість навчатися у своєму темпі. Не обов'язково навчатися в тому ж темпі, що й інші. Слухач завжди може повернутися до вивчення складніших питань, кілька разів подивитися відео-лекції, перечитати листування з викладачем, а вже відомі йому теми може пропустити;

– доступність навчальних матеріалів. Доступ до всієї необхідної літератури відкривається студенту після реєстрації в системі дистанційного навчання. Зникає проблема нестачі чи відсутності підручників, навчальних посібників чи методичних вказівок;

– мобільність. Зв'язок з викладачами, здійснюється різними способами: як онлайн, так і офлайн;

— навчання в спокійній обстановці. Контроль знань слухачів дистанційних курсів проходить у формі on-line тестів. Тому в них менше причин для хвилювань. Виключається можливість суб'єктивної оцінки;

— дистанційна освіта дешевша. Якщо порівнювати вартість навчання на заочній і дистанційній формах навчання, то дистанційна скоріш за все буде дешевшою.

Разом з тим, дистанційне навчання не позбавлене й низки недоліків:

– потрібна сильна мотивація. Практично весь навчальний матеріал слухач-дистанційник опановує самостійно. Це вимагає достатньої сили волі, відповідальності й самоконтролю. Підтримувати потрібний темп навчання без контролю з боку вдається не всім;

– нестача практичних умінь та навичок. Досить проблемно якісно організувати дистанційне навчання за напрямами підготовки та спеціальностями, на яких передбачена велика кількість практичних занять. Навіть найсучасніші комп'ютерні тренажери не замінять майбутнім менеджерам «живої» практики;

— проблема ідентифікації слухача. Поки найефективніший спосіб простежити за тим, чи слухач самостійно здає іспити чи заліки — це відеоспостереження, що не завжди можливо.

У цілому, можна стверджувати, що даний спосіб навчання має свої величезні переваги, і найменша з них — розвиток «комп'ютерної грамотності», тобто здатність швидко адаптуватися, орієнтуватися і використовувати у своїх цілях запропоноване електронне середовище.

Список літератури

Концепція дистанційного навчання у Збройних Силах України. № 744 § I–X. (2015).

Сокульська, Н. Б., Сокіл, Б. І., Ковальчук, Р. А. & Кмін, В. Ф. (2019) Дистанційне навчання як один із напрямів вдосконалення підготовки військових фахівців. У *Збірнику тез доповідей XII науково-практичної конференції «Пріоритетні напрямки розвитку телекомунікаційних систем та мереж спеціального призначення. Застосування підрозділів, комплексів, засобів зв'язку та автоматизації в операції Об'єднаних сил»*, Київ, 14–15 листопада (с. 221–222). Київ: ВІТІ.

Щодо сутності концепції практико-орієнтованого навчання по відношенню до курсу загальної фізики для майбутніх вчителів фізики закладів загальної середньої освіти у відповідних педагогічних закладах вищої освіти

О. Л. Чепок, Д. М. Белітченко

Південноукраїнський національний педагогічний університет

імені К. Д. Ушинського, Одеса, Україна

olachepok@ukr.net

Проаналізовано різні аспекти практико-орієнтованої системи навчання при опануванні курсів фізики в закладах загальної середньої освіти й курсу загальної фізики для майбутніх вчителів фізики таких закладів у відповідних педагогічних закладах вищої освіти.

Ключові слова: заклад загальної середньої освіти, заклад вищої освіти, курс фізики, практико-орієнтована система навчання.

Як відомо, на даний час майбутні вчителі фізики закладів загальної середньої освіти є здобувачами вищої освіти у педагогічних закладах вищої освіти за освітньо-професійною програмою «Середня освіта (Фізика)». Згідно з цією програмою, навчальні дисципліни, які опановують студенти, поділені на обов'язкові та вибіркові. І зрозуміло, що окреме місце серед обов'язкових дисциплін займають ті, які забезпечують набуття відповідними здобувачами освіти саме предметних компетентностей.

Уже традиційно, в Україні курс фізики закладів загальної середньої освіти побудовано за принципом «подвоєння». На першому етапі, у курсах фізики 7–9 класів, відбувається певне занурення у контент відповідного навчального матеріалу. І, фактично, той же самий навчальний контент на поглибленому рівні розглядається в курсах фізики 10–11 класів.

Організація процесу навчання у вигляді комплексної системи практико-орієнтованого навчання є однією з найактуальніших вимог сьогодення для всіх рівнів і всіх напрямків освіти. У той же час зрозуміло, що змістове наповнення подібної системи навчання для різних рівнів і напрямків освіти не може бути однако-вим, воно не може бути однако-вим і для різних категорій навчальних дисциплін.

Під первинним аспектом практико-орієнтованого навчання мають на увазі систему формування відповідних знань, умінь та навичок на підставі власного практичного досвіду. Найпростішим видом подібного досвіду є спостереження. При цьому мається на увазі спостереження як за явищами природи, так і за іншими явищами, що не залежать ані від відповідного здобувача освіти, ані від того, хто здійснює процес його навчання, а також спостереження, які безпосередньо залежать від останнього, спостереження, що реалізуються здобувачами освіти під час заздалегідь підготовлених для них демонстраційних експериментів.

Наступним, складнішим видом подібного досвіду є досвід, отриманий здобувачами освіти під час безпосередньої реалізації певного, заздалегідь спланованого експерименту, зокрема, під час виконання певної лабораторної роботи.

Вторинний аспект практико-орієнтованого навчання передбачає широке висвітлення питань про те, де і як відповідні знання застосовуються в різноплановій практичній діяльності людей, усвідомлення умов і розв'язання спеціальних чином підібраних так званих сюжетних задач.

Вищевказані аспекти практико-орієнтованого навчання можна (і, виходячи з теоретичної точки зору, варто) реалізовувати при опануванні будь-якого навчального предмету, на будь-якому рівні освіти, у тому числі і щодо курсу фізики закладів загальної середньої освіти.

Варто також мати на увазі, що, у широкому розумінні, практико-орієнтоване навчання передбачає опанування нових знань, умінь та навичок як результат, як підсумок власної, особистісної діяльності відповідного здобувача освіти. У цьому розумінні, засвоєння представленого теоретичного матеріалу — це також практико-орієнтоване навчання, під час якого відповідні здобувачі освіти відпрацьовують, зокрема, закони тієї буденної логіки, яка формується в людини протягом усього процесу її навчання, протягом усього її життя, практикуються в усвідомленні адекватної картини оточуючого людину середовища.

Виникає природне питання про те, як навчити майбутнього вчителя фізики реалізації практико-орієнтованої системи навчання під час його подальшої професійної діяльності.

Знайти відповідь на це питання допомагає, знову-таки, концепція практико-орієнтованого навчання, але вже на рівні вищої освіти.

Зрозуміло, що на рівні вищої освіти практико-орієнтоване навчання, насамперед, повинне бути спрямованим на використання отриманих знань у подальшій практичній, тобто, професійній діяльності.

Серед обов'язкових начальних дисциплін освітньо-професійної програми «Середня освіта (Фізика)» є дисципліни загальноосвітньої підготовки. Реалії сьогодення є такими, щодо подібних дисциплін реалізація всіх вищевказаних аспектів практико-орієнтованого навчання є можливою лише у випадку наявності достатньої кількості відповідних навчальних годин, у першу чергу, аудиторних. З урахуванням загальної установки на збільшення навчальних годин, відведених на самостійну роботу студентів, здійснення певних спостережень можна запропонувати студентам як відповідну самостійну роботу. Лабораторні роботи, зрозуміло, можуть бути проведеними лише за умови їх наявності у відповідному начальному плані.

У той же час, курс загальної фізики педагогічного закладу вищої освіти, що здійснює підготовку фахівців за освітньо-професійною програмою «Середня освіта(Фізика)» є саме тим курсом, що повинен забезпечити опанування майбутніми вчителями фізики закладів загальної середньої освіти предметних компетентностей, які створюють необхідне підґрунтя для будь-яких професійних компетентностей узагалі. (Жодні знання, уміння та навички з педагогіки не допоможуть, якщо вчитель не володіє необхідними знаннями власного предмету).

Для майбутніх учителів фізики закладів загальної середньої освіти курс загальної фізики педагогічного закладу вищої освіти, фактично, утретє, на більш глибокому рівні занурення, повторює контент курсу фізики закладів загальної

середньої освіти. Звідси випливає, що саме цей курс має всі можливості не лише для впровадження різних прийомів практико-орієнтованого навчання безпосередньо під час оволодіння його контентом, а й для опанування відповідними здобувачами освіти вмінь та навичок організації практико-орієнтованого навчання під час подальшої професійної діяльності. Зрозуміло, що досягнення останньої мети є можливим лише за умови суттєвого перерозподілу навчальних годин між курсами методики навчання фізики в закладах загальної середньої освіти та закладах передвищої освіти і курсом загальної фізики на користь останнього.

Суттєве місце в системі практико-орієнтованого навчання природним чином займає педагогічна практика. Тривалий час відповідні методисти та організатори освіти обговорюють можливу доцільність організації для відповідних здобувачів вищої освіти безперервної педагогічної практики. З теоретичної точки зору, майбутні вчителі фізики закладів загальної середньої освіти, починаючи з першого року навчання, спроможні працювати лаборантами в кабінетах фізики відповідних закладів освіти, принаймні, на певну частину ставки. Подібна постановка питання за умови сьогодення є цілком можливою. Вона представляється логічним елементом цілісної системи впровадження в реальний навчальний процес концепції практико-орієнтованого навчання.

Использование математических пакетов в научно-исследовательской работе студентов по математике

В. И. Юринок

Белорусский национальный технический университет,

Минск, Республика Беларусь

vyurinok@tut.by

Рассмотрены некоторые примеры научно-исследовательской работы студентов с использованием математических пакетов.

Ключевые слова: математическое образование, математические пакеты, компьютерные программы, дифференциальные уравнения.

Не вызывает сомнений тот факт, что курс высшей математики остается основной фундаментальной подготовки инженера. Поэтому традиционное математическое образование, особенно в части практических занятий и самостоятельной работы, необходимо дополнить применением компьютерных математических пакетов

Инструментом приобретения дополнительных знаний по математике, на наш взгляд, может стать научно-исследовательская работа студентов.

На кафедре «Высшая математика» Белорусского национального технического университета все преподаватели руководят реферативной и научно-исследовательской работой студентов младших курсов. Очевидно, что эта работа направлена на то, чтобы показать учащимся прикладной характер математических дисциплин в различных отраслях человеческих знаний, подчеркнуть, что математика в техническом вузе — мощный и удобный инструмент, который может быть полезен в будущей профессиональной деятельности.

Доклады студентов на ежегодных научно-технических конференциях в форме презентаций устных выступлений, стендовых сообщений и открытых дискуссий способствуют активизации познавательной деятельности, расширяют их кругозор и дают возможность профессионально использовать существующие математические пакеты, такие как Mathematica, Maple, Mathcad, Wolfram Alfa и т.д., а также платформу Android.

В докладе рассмотрены некоторые примеры применения разработок студентов в решении актуальных математических проблем с помощью указанных компьютерных программ.

В технологии производства высокоточных оптических деталей важным является определение переменного давления в зоне обработки, что связано с изменением площади контакта верхнего и нижнего звеньев. Для расчета изменяемой площади контактирующих плоских поверхностей использовался двойной интеграл в полярной системе координат с переменными пределами интегрирования в математическом пакете Mathcad 15 Pro. Ниже приведен фрагмент программы расчета при определенных параметрах верхнего и нижнего звеньев.

ORIGIN := 0

$$\text{Rd} := 50 \quad \text{Ru} := 40 \quad \text{ex} := 15 \quad \varphi := \arccos\left[\frac{(\text{Rd})^2 + (\text{ex})^2 - (\text{Ru})^2}{2 \cdot \text{Rd} \cdot \text{ex}}\right] \quad \varphi = 0.723$$

$$a(\varphi) := \frac{2 \cdot \text{ex} \cdot \cos(\varphi) + \sqrt{(2 \cdot \text{ex} \cdot \cos(\varphi))^2 - 4 \cdot [(\text{ex})^2 - (\text{Ru})^2]}}{2} \quad \text{Skont} := \pi \cdot \text{Ru}^2 - 2 \cdot \int_0^\varphi \left(\int_{\text{Rd}}^{a(\varphi)} \rho \, d\rho \right) d\varphi$$

$$\text{Skont} = 4779.882$$

Практическая ценность исследования заключается в том, что предложенный метод расчета давления в зоне контактирующих поверхностей и алгоритм описания движений инструмента при многокоординатной обработке поверхностей, имеющих плоскую форму, позволяет на стадии технологической подготовки производства, а именно при проектировании технологического процесса изготовления линз, сформировать рациональную траекторию движения инструмента при обработке деталей на оптических обрабатывающих станках с программным управлением.

Так же несколько студентов успешно применили пакет Mathcad 15 Pro для решения дифференциальных уравнений и систем с помощью преобразования Лапласа. Фрагмент такой программы для решения дифференциальных уравнений первого порядка представлен ниже.

$$\left[\left(\frac{d}{dt} y(t) \right) - y(t) - e^{7t} \right] \text{laplace}, t \rightarrow s \cdot \text{laplace}(y(t), t, s) - y(0) - \frac{1}{s-7} - \text{laplace}(y(t), t, s)$$

$$s \cdot \text{laplace}(y(t), t, s) - y(0) - \text{laplace}(y(t), t, s) - \frac{1}{(s-7)} = 0$$

$$s \cdot z - y(0) - z - \frac{1}{(s-7)} = 0 \text{ solve } z \rightarrow \frac{y(0) + \frac{1}{s-7}}{s-1} \text{ invlaplace } s \rightarrow \frac{e^t \cdot (e^{6t} + 6 \cdot y(0) - 1)}{6} \text{ substitute } y(0) = 9 \rightarrow \frac{e^t \cdot (e^{6t} + 53)}{6}$$

Некоторым студентам было предложено составить математическую модель движения пробного тела в гравитационном поле двух звезд (научный руководитель — д.ф.-м.н., профессор Рябушко А. П.) при учете светового давления звезд на пробное тело, затем проанализировать свойства этой модели, дать рекомендации для возможного практического использования полученных законов движения тел в космической навигации. Программу численного решения системы дифференциальных уравнений разработали в пакете Maple.

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) = -4x(t) - 2y(t) + \frac{2}{e^t - 1}, \quad \frac{d^2}{dt^2} y(t) = 6x(t) + 3y(t) - \frac{3}{e^t - 1}$$

`dsolve({sys}, {x(t), y(t)});`

$$\left\{ x(t) = \iint \left(\sin(t) _C2 + \cos(t) _C1 + 2 \left(\int \frac{\cos(t) (e^{2t} + e^t)}{(e^t - 1)^3} dt \right) \sin(t) - 2 \left(\int \frac{\sin(t) (e^{2t} + e^t)}{(e^t - 1)^3} dt \right) \cos(t) \right) dt dt + _C3 + _C4, y(t) = - \left(\int \frac{\cos(t) e^t (e^t + 1)}{(e^t - 1)^3} dt \right) \sin(t) + \left(\int \frac{\sin(t) e^t (e^t + 1)}{(e^t - 1)^3} dt \right) \cos(t) - 2 \left(\iint \left(\sin(t) _C2 + \cos(t) _C1 \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \int \frac{\cos(t) e^t (e^t + 1)}{(e^t - 1)^3} dt \right) \sin(t) - 2 \left(\int \frac{\sin(t) e^t (e^t + 1)}{(e^t - 1)^3} dt \right) \cos(t) \right) dt dt \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \frac{e^t \sin(t) _C2 + e^t \cos(t) _C1 - 4 _C3 t - 4 _C4 - \sin(t) _C2 - \cos(t) _C1 - 2 + 4 e^t _C3 t + 4 e^t _C4}{e^t - 1} \right\}$$

`restart; r := 7.78 · 1013; m1 := 2.0 · 1033; m2 := 2.0 · 1030; A := 2.0 · 1032; j := 6.67 · 10-8; w := sqrt($\frac{j \cdot (m1 + m2)}{r^3}$);`

Студентами машиностроительного факультета разработано приложение на платформе Android для качественной и количественной оценки успеваемости студентов 1-го курса. Приложение устанавливается на смартфон и обрабатывает введённую информацию о студентах первого курса в виде данных о среднем балле, оценке по математике в школе, результатов централизованного тестирования по математике, сумме баллов по всем предметам вступительных испытаний и среднего балла в школе. Полученные данные используются для построения графиков по разным критериям. Актуальность разработки данного приложения обусловлена необходимостью наблюдения за поступившими студентами, ведением статистики. Благодаря разработанному приложению, можно как визуально, так и количественно оценить ежегодное изменение результатов успеваемости поступивших студентов.

Разумеется, что здесь дан краткий обзор научно-исследовательской работы студентов под руководством автора доклада и не даёт полного представления о тематике студенческих исследований кафедры «Высшая математика» Белорусского национального технического университета.

ЗМІСТ

Секція 1. Застосування математики в суміжних науках

Borysenko O. V. <i>Non-autonomous stochastic predator-prey model with jumps</i>	4
Boychuk L. M. <i>A force investigation of automatic systems</i>	8
Kolomiets T. Yu., Pogorui A. A. <i>Monogenic functions in Clifford algebras and their applications</i>	13
Kovalchuk V. <i>Differential equations in modeling the bond behaviour between reinforcement and concrete</i>	17
Sakhno L. M., Hopkalo H. M. <i>Sample paths properties of ϕ-sub-Gaussian processes related to the random heat equation</i>	20
Антоненко Н. М., Ткаченко І. Г. <i>Осесиметрична задача термoprужності для двошарової плити з неідеальним тепловим контактом між шарами</i>	23
Антонова А. О., Погребецька Т. О. <i>Про умови існування граничного циклу в моделі економічного циклу Гудвіна з необмеженою “стелею” Хікса</i>	26
Біленко В. І., Боженок К. В. <i>Поліноміальні методи аналізу фрактальних моделей дифузійних процесів</i>	30
Богданов В. Л., Григоренко А. Я., Сороченко Г. В., Тормахов Н. Н. <i>Распределение нагрузки в резьбовом соединении имплантата с костью</i>	33
Богун В. А., Маринич О. В. <i>Асимптотика згорток Лебега — Стілтєсса функцій лінійного росту</i>	37
Буценко Ю. П., Лабжинський В. А. <i>Узагальнення математичної моделі навчання нейромережєвих алгоритмів на базі багатошарового перцептрона</i>	40
Гаєвський М. В., Задерей П. В., Задерей Н. М., Нефьодова Г. Д. <i>Наближення аналітичних функцій сумами Валле Пуссена</i>	42
Гай В. В., Ванельчук Д. І., Гузик Н. М. <i>Застосування диференціальних рівнянь у військово-прикладних задачах</i>	45
Голуб В. П. <i>Об одном методе определения параметров ядер наследственности с использованием весовых функций</i>	49
Горалік Є.Т., Крюков М. М., Лупіна Т. О. <i>Рівняння фази обертання руху тіла, що скочується з похилої плоскої опори, в декартових і узагальнених координатах</i>	53
Горленко С. В. <i>Теорема про точки неперервності похідної та її узагальнення</i>	57
Гречко А. Л. <i>Математична модель сили Коріоліса в метеорології</i>	60
Дудик М. В. <i>Наближений метод розв’язання систем функціональних рівнянь Вінера – Гопфа</i>	62
Зеленська І. О. <i>Задача Коші для системи сингулярно збурених</i>	65
Капусто А. В., Банщикова Д. О. <i>Моделирование английского аукциона</i>	68
Капусто А. В., Костюкова С. Н. <i>Статистические методы анализа данных в оценке эффективности игровых методик обучения</i>	72
Кобзар Ю. М. <i>Моделювання процесу руйнування стрижня внаслідок втоми в умовах багато циклового кручення за допомогою рекурентних співвідношень</i>	76

Коропов О. В., Скороход Р. В. Диференціальні рівняння радіаційно-індукованої сегрегації в N -компонентних концентрованих металевих стопах	80
Круглова Н. В., Диховичний О. О., Лисенко Д. Р. Використання кластерного аналізу і IRT для поділу респондентів психологічного тестування на групи.....	90
Кукуш О. Г., Яковлев М. С. Побудова консистентних оцінок параметрів	92
Лапач С. М. Обчислювальна стійкість у багатовимірних статистичних методах невидимі небезпеки машинного навчання	95
Лещенко Д. Д., Козаченко Т. А. Вращения твердого тела под действием нестационарного восстанавливающего момента.....	100
Лисецький Т. Б., Єлейко Я. І. Деякі властивості гіллястих процесів з еміграцією ...	104
Логвиненко С. С., Ральченко К. В. Консистентне оцінювання параметрів змішаного дробового броунівського руху із трендом	108
Маслов Б. П. Моделирование в'язкопружних властивостей випадково армованих еластомерів	114
Міцюхін А. І. Выявление рухомага аб'єкта у сегментованым участку прасторы ...	118
Онуфрієнко В. М., Засовенко А. В., Антоненко Н. М. Диферінтегральна модель геометрично фрактальних фізичних компактів з ередитарними властивостями ...	121
Онуфрієнко В. М., Слюсарова Т. І., Онуфрієнко Л. М. Математична модель диферінтегрального гістерезису комплексного хвильового опору та провідності фізичних фракталів.....	125
Поліщук О. Д. Пошук «аномалій» в інформаційних моделях складних систем.....	129
Рашитов Б. С. Функціональна центральна гранична теорема для загальних процесів дробового ефекту	133
Резнік В. С. Використання ізохронних діаграм при визначенні параметрів ядер спадковості лінійних вязкопружних матеріалів	138
Рожок Л. С. Про вплив параметрів на напружений стан порожнистих циліндрів із двопараметричним відхиленням форми поперечного перерізу від кругової.....	142
Розанов А. В., Потемкина С. Н., Ткачев С. И. Математическая модель растительного объекта для его цифровой идентификации	145
Ситнікова А. В. Інформаційна система прогнозування поточкових параметрів конвеєра з використанням нейронної мережі	148
Сторожук Є. А. Аналітичне розв'язання задач статички для циліндричної оболонки з урахуванням трансверсального зсуву й геометричної нелінійності.....	151
Тимофієва Н. К. Комбінаторні конфігурації та їх властивості	155
Ткаченко А. В. Розвиток геометричних концепцій Ешера.....	159
Якимчук Н. А., Сокульська Н. Б. Математичні аспекти розрахунку металевих конструкцій на вогнестійкість	166

Секція 2. Методика викладання математики у вищій школі

Іліна К. Е., Lystopadova V. V. Encouraging students study mathematics through liaison of mathematical connections.....	171
Бохонова Т. Ю., Томащук О. П., Гроза В. А., Матвеева І. В., Тихонова В.В., Лещинський О.Л. <i>Поглиблене вивчення елементарної математики у процесі викладання математичних дисциплін у вищій школі</i>	174
Буценко Ю. П., Баліна О. І., Безклубенко І. С. <i>Оптимізація структури математичних курсів в інженерному ЗВО</i>	179
Дрозд В. В. <i>Тестування теоретичних знань студентів у курсі математичного аналізу</i>	183
Іваненко Т. В. <i>Застосування методів лінійної алгебри в економічних моделях</i>	186
Калайда О. Ф. <i>Багатовимірна задача Дідони</i>	190
Калайда О. Ф. <i>Дробово-раціональні колоканти та інтерліаннти для функцій двох змінних</i>	191
Калайда О. Ф. <i>Загальний рекурентний та прямий метод побудови колокант функцій</i>	194
Калайда О. Ф. <i>Матричні алгоритми чисельного диференціювання на основі дробово-раціональних колокант</i>	197
Калайда О. Ф. <i>Про виродженість колокант функцій</i>	199
Калайда О. Ф. <i>Про лінійне диференціальне рівняння першого порядку</i>	201
Калайда О. Ф. <i>Про неусувну похибку апроксимації функцій многочленами-колокантами</i>	202
Калайда О. Ф. <i>Про побудову повних правильних дробово-раціональних колокант функцій з простими вузлами</i>	204
Калайда О. Ф. <i>Про прості методи знаходження нулів скалярної функції</i>	206
Калайда О. Ф. <i>Про рекурсивні диференціальні рівняння</i>	209
Калайда О. Ф. <i>Простіші способи відновлення функції за її повним диференціалом</i> ..	210
Калайда О. Ф. <i>Явний рекурентний автономний метод розв'язування задачі Коші для лінійних нормальних систем</i>	212
Карупу О. В., Олешко Т. А., Пахненко В. В. <i>Про деякі особливості викладання аналітичної геометрії англomовним студентам НАУ</i>	214
Левізов С. В., Курбико І. Ф. <i>Про одну комбінаторну задачу</i>	218
Репета В. К., Репета Л. А. <i>Деякі проблемні аспекти викладання теорії числових рядів у курсі вищої математики для студентів технічних спеціальностей</i>	221
Терещук О. В., Александров І. А. <i>Математика у військовій справі</i>	226
Томащук О. П., Тупко Н. П., Лещинський О. Л. <i>Методичні аспекти використання методів проблемного навчання в процесі викладання математичних дисциплін у закладах вищої освіти</i>	230
Шаповалова Н.В., Панченко Л.Л., Бублик А.С. <i>Опорні конспекти як засіб дистанційного навчання системи аксіом Д. Гільберта Евклідової геометрії</i>	234
Шилинець В. А. <i>О работе кафедры высшей математики по повышению качества образовательного процесса</i>	238

Якимович В. С. <i>О некоторых вопросах усовершенствования процесса обучения высшей математике</i>	242
Якимович В. С., Кленовская И. С. <i>Реализация практико-ориентированного обучения высшей математики студентов технического вуза посредством задачного подхода</i>	245

Секція 3. Історія точних наук

Бовсуновська В. В., Гаєвський М. В., Задерей П. В., Задерей Н. М., Нефьодова Г. Д. <i>Про екстремальні значення деяких лінійних функціоналів</i>	251
Задерей П. В., Нефьодова Г. Д., Задерей Н. М., Ткаченко А. В. <i>Видатний український математик ХХ століття Микола Павлович Корнейчук (до 100-річчя від дня народження)</i>	254
Зінюк С. О. <i>Рекордсмен — число Грема</i>	259
Маловичко Т. В. <i>Семья Джеймса Стирлинга</i>	262
Маловичко Т. В. <i>Симон Стевин</i>	266
Онищенко В. М. <i>Бернуллі — творці математики: історія роду та досягнень</i>	270
Петрученко О. С., Сташків Р. І., Петрученко Т. П. <i>Застосування математики для вирішення проблеми захищеності</i>	275
Сорокатиий М. І., Білаш О. В., Петровський В. М. <i>Вплив військової справи на розвиток точних наук</i>	278
Хорошун В. В. <i>Про роль та застосування поліномів Семпсона</i>	281

Секція 4. Сучасні освітні технології у вищій школі

Дем'яненко О. О., Репета Л. А. <i>Особливості дистанційного навчання на прикладі викладання курсу вищої математики студентам технічних спеціальностей</i>	285
Довгай В. В. <i>Світлі та темні сторони діджиталізації процесу викладання математики в закладах вищої освіти</i>	
Жданова Ю. Д., Спасітелева С. О., Шевченко С. М. <i>Активні методи навчання у вивченні ризиків інформаційної безпеки</i>	291
Крохмаль Т. М., Нікітенко О. М. <i>Застосування системи комп'ютерної математики Maple для роботи з комплексними числами</i>	295
Круглова Н. В., Дем'яненко О. О. <i>Особливості створення короткочасних тестів для контролю рівня знань студентів технічних спеціальностей</i>	299
Круглова Н. В., Диховичний О. О., Лисенко Д. Р. <i>IRT і метод головних компонент як інструменти формування банку завдань дистанційного семестрового контролю</i>	302
Ліщинська Х. І., Сомик А. С. <i>Слабкі і сильні сторони дистанційного навчання математики у вищих військових навчальних закладах</i>	305
Рачковська Є. А. <i>Застосування та роль математики в інформації</i>	308

Савич І. М. <i>Використання пакету Excel при вивченні дескриптивної статистики</i>	312
Сокульська Н. Б., Ковальчук Р. А., Кмін В. Ф. <i>Аналіз впровадження елементів дистанційності в освітній процес НАСВ</i>	316
Чепок О. Л., Белітченко Д. М. <i>Щодо сутності концепції практико-орієнтованого навчання по відношенню до курсу загальної фізики для майбутніх вчителів фізики закладів загальної середньої освіти у відповідних педагогічних закладах вищої освіти</i>	319
Юринок В. И. <i>Использование математических пакетов в научно-исследовательской работе студентов по математике</i>	322

Наукове видання

**МАТЕМАТИКА
В СУЧАСНОМУ
ТЕХНІЧНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ**

Матеріали
ІХ Міжнародної
науково-практичної конференції
28–29 грудня 2020 року

Технічний редактор

Павло Кушнір
канд. істор. наук