НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ЗАТВЕРДЖЕНО
на засіданні Вченої ради
фізико-математичного факультету,
протокол № 5 від « 26 » 05 2021 р.
Декан ФМФ Володимир ВАНІН

ПРОГРАМА ДЕРЖАВНОГО ЕКЗАМЕНУ

навчальної дисципліни: математика
спеціальності 111 Математика
освітньо-професійної програми
«Страхова та фінансова математика»

ПРОГРАМУ РЕКОМЕНДОВАНО
Методичною комісією
фізико-математичного факультету
Протокол № 12 від «25» 05 2021 р.
Голова комісії Надія РЕВА

2021

I. ВСТУП

В сучасній науці і техніці математичні методи дослідження, моделювання і проектування відіграють важливу роль. Важливим завданням курсу вищої математики є розвиток логічного і алгоритмічного мислення студентів, вміння проводити математичний аналіз прикладних задач. Метою вищої школи, в тому числі, є вміння навчити студентів використовувати необхідний математичний апарат, який дозволить їм аналізувати, моделювати, розв'язувати прикладні інженерні задачі із застосуванням комп'ютерних технологій; здатність самостійно розширювати свої математичні знання, формулювати і вирішувати нові математичні задачі.

Ця програма з вищої математики відображає нові вимоги, які ставить XXI століття до математичної освіти. Її характеризує прикладна направленість та орієнтація на використання математичних методів, особлива увага до ймовірнісно-статистичних методів, методів теорії диференціальних рівнянь та рівнянь математичної фізики в зв'язку з їх практичною значимістю. Загальний курс математики становить фундамент математичної підготовки.

Спеціальні курси математики: теорія функцій комплексної змінної, рівняння математичної фізики, теорія випадкових процесів, теорія міри та інтегралу, – базуються на сучасних методах аналізу і потребують розуміння фундаментальних тверджень математики, їх використання і будуть запорукою успішного подальшого навчання, наукового зростання і творчих успіхів.

II. ОСНОВНИЙ ЗМІСТ

Програма вступного випробування складена на основі програм таких дисциплін: «Дискретна математика», «Аналітична геометрія», «Лінійна алгебра», «Математичний аналіз», «Диференціальні рівняння», «Комплексний аналіз», «Теорія ймовірностей та математична статистика», «Алгебра та теорія чисел», «Рівняння математичної фізики», «Теорія міри та інтегралу», «Функціональний аналіз та інтегральні рівняння» – і містить такі розділи:

Розділ 1. Дискретна математика

1. Основне правило комбінаторики. Комбінаторні сполуки (розміщення, перестановки та сполучення). Приклади.
2. Загальна формула включень та виключень.
3. Основні властивості комбінацій (без повторень). Трикутник Паскаля та його використання. Формула бінома Ньютона.

4. Задача про розбиття скінченної множини на підмножини, кожна з яких містить наперед задане число елементів. Перестановки з повтореннями. Поліноміальна формула.

5. Сполучення з повтореннями та їх властивості. Підрахунок числа сполучень з повтореннями за допомогою сполучень без повторень (різні способи доведення формул).

6. Твірні функції та методи їх використання. Числа Фібоначчі та формула Біне для них.

7. Звичайні графи. Формула Ейлера. Гамільтонові цикли.

Розділ 2. Аналітична геометрія

1. Скалярний добуток векторів, його властивості, геометричний зміст, вираз через координати в довільному базисі.

2. Векторний добуток векторів і його властивості, геометричний зміст, вираз через координати в довільному базисі.

3. Змішаний добуток векторів і його властивості, геометричний зміст, вираз через координати в довільному базисі.

4. Рівняння прямої у площині та просторі (векторно-параметричне; параметричне; канонічне; загальне; через дві задані точки). Умова паралельності та перпендикулярності прямих у просторі. Відстань від точки до прямої у просторі.

5. Рівняння площини у просторі (загальне рівняння; через три задані точки, що не належать одній прямій; у відрізках на осях; нормальне рівняння). Відстань від точки до площини.

6. Криві другого порядку (еліпс, гіпербола, парабола), їх означення, канонічні рівняння та оптичні властивості.

7. Поверхні другого порядку (еліпсоїд; однопорожнинний та двопорожнинний гіперболоїди; еліптичний та гіперболічний параболоїди; циліндри; конус), їх канонічні рівняння та вигляд.

Розділ 3. Лінійна алгебра

1. Визначник n-го порядку. Основні властивості.

2. Матриці розмірності $m \times n$. Основні поняття, операції над матрицями, застосування.

3. Лінійні алгебраїчні системи. Сумісні, несумісні системи. Загальний розв'язок.

4. Лінійний векторний простір. Основні властивості. Приклади: простір R^n, простір многочленів тощо.

5. Лінійні оператори. Основні поняття. Простір $L(X,Y)$. Власні числа та вектори.

6. Лінійні, білінійні форми, канонічне зображення, знакосталість, закон інерції квадратичних форм.

7. Жорданова нормальна форма лінійного оператора (матриці).

8. Функції від матриць та операторів.

Розділ 4. Математичний аналіз

1. Числові послідовності та їх границі. Верхні та нижні границі послідовності та їх властивості.

2. Неперервність функції в точці і на відрізку. Основні теореми.

3. Похідна та диференціал. Похідні та диференціали вищих порядків. Повне дослідження функції за допомогою похідних. Формула Тейлора.

4. Означення первісної і невизначеного інтеграла, їх властивості та основні методи інтегрування.

5. Інтеграл Рімана. Необхідні та достатні умови існування. Формула Ньютона-Лейбніца.

6. Класи інтегровних за Ріманом функцій однієї змінної. Основні властивості інтегралів.

7. Застосування визначеного інтеграла в геометричних задачах.

8. Векторні функції скалярного аргумента та їх локальні властивості.

9. Невласні інтеграли I та II роду, абсолютна та умовна збіжність. Теореми Діріхле і Абеля про умовну збіжність невласних інтегралів I роду.

10. Бета та гамма-функції Ейлера, їх властивості.

11. Функції обмеженої варіації. Теорема Жордана.

12. Інтеграл Рімана-Стілтьєса.

13. Означення і збіжність числового ряду. Ознаки збіжності числових рядів з невід'ємними членами.

14. Абсолютно та умовно збіжні числові ряди, їх властивості.

15. Функціональні ряди: поточкова та рівномірна збіжності. Властивості рівномірно збіжних функціональних рядів.

16. Степеневі ряди. Область збіжності, радіус збіжності. Теореми Абеля та Коші-Адамара.

17. Ряди Тейлора і Маклорена.

18. Формула Тейлора для функції однієї змінної. Формули Тейлора для основних елементарних функцій.

19. Тригонометричні ряди Фур'є. Інтегральне зображення часткової суми ряду Фур'є. Збіжність ряду Фур'є в точці. Ознаки Діні та Ліпшиця.

20. Рівномірна збіжність тригонометричного ряду Фур'є.

21. Інтеграл Фур'є та інтегральна формула Фур'є.

22. Дійсні функції багатьох змінних. Неперервні функції на компактах і їх властивості.

23. Похідна функції за напрямком, частинні похідні, градієнт функції.

24. Диференційовність функції багатьох змінних: означення, необхідна та достатня умови диференційовності. Диференціал функції.

25. Частинні похідні та диференціали вищих порядків. Дотична площина та нормаль до поверхні.

26. Означення локального екстремуму функцій багатьох змінних. Необхідна та достатня умови існування локального екстремуму функції багатьох змінних.

27. Міра Жордана в R^n та її властивості.

28. Кратні інтеграли Рімана, їх властивості та обчислення.

29. Геометричні та фізичні застосування кратних інтегралів.

30. Криволінійні інтеграли I та II роду: означення, обчислення, властивості.

31. Формули Гріна, Остроградського-Гауса та Стокса.

32. Векторні та скалярні поля. Потенціальне векторне поле, умови потенціальності.

Розділ 5. Диференціальні рівняння

1. Звичайні диференціальні рівняння 1-го порядку: основні поняття. Теорема Пікара про існування та єдиність розв'язку задачі Коші.

2. Рівняння в повних диференціалах. Інтегруючий множник. Способи його знаходження.

3. Автономні системи диференціальних рівнянь на площині. Особливі точки, їх класифікація.

4. Диференціальні рівняння, не розв'язані відносно похідної. Рівняння Клеро та Лагранжа. Особливі розв'язки.

5. Рівняння Клеро та Лагранжа. Особливі розв'язки, методи їх знаходження. Особливі розв'язки рівняння Клеро.

6. Метод варіації довільних сталих (Лагранжа) для лінійних неоднорідних рівнянь.

7. Диференціальні рівняння вищих порядків, що допускають зниження порядку.

8. Однорідні та неоднорідні лінійні диференціальні рівняння n-го порядку. Структура загального розв'язку.

9. Експонента матриці та її властивості.

10. Матрицант лінійної системи. Його властивості. Формула Коші.

11. Спектр лінійної системи. Умова асимптотичної стійкості системи.

12. Функція Ляпунова. Теореми Ляпунова (I та II) про стійкість та асимптотичну стійкість тривіального розв'язку нелінійної системи.

13. Стійкість та асимптотична стійкість за Ляпуновим тривіального розв'язку системи.

Розділ 6. Комплексний аналіз

1. Інтеграл від функції комплексної змінної: означення і основні властивості. Інтегральна теорема Коші.

2. Поняття невизначеного інтеграла в комплексній області. Незалежність інтеграла Рімана функції комплексної змінної від шляху інтегрування. Формула Ньютона-Лейбніца.

3. Поняття моногенної та аналітичної функції. Необхідні та достатні умови моногенності (Коші-Рімана).

4. Означення основних елементарних функцій комплексної змінної (e^z, $\sin z$, $\cos z$, Lnz). Їх основні властивості та обчислення значень.

5. Дробово-лінійна функція комплексної змінної та її основні властивості.

6. Інтегральна формула Коші для однозв'язної та багатозв'язної областей.

7. Нескінченна диференційовність аналітичної функції.

8. Розклад аналітичної функції в ряд Тейлора. Поняття гармонічної функції та його зв'язок з поняттям аналітичної функції.

9. Принцип максимуму модуля аналітичної функції.

10. Властивість єдиності аналітичної функції.

11. Поняття ізольованої особливої точки. Класифікація ізольованих особливих точок. Розклад аналітичної функції в ряд Лорана.

12. Поняття лишку аналітичної функції в ізольованій особливій точці. Основна теорема про лишки.

13. Перетворення Лапласа: основні поняття. Теорема про диференціювання оригіналу та зображення.

14. Перетворення Лапласа: основні поняття. Лінійність та подібність перетворення Лапласа.

15. Перетворення Лапласа: основні поняття. Інтегрування оригіналу та зображення.

Розділ 7. Теорія ймовірностей

1. Випадкові події та операції над ними.
2. Аксіоми ймовірності та властивості ймовірності.
3. Формули множення ймовірностей. Умовні ймовірності та незалежні події.
4. Формули повної ймовірності та Байєса.
5. Схема Бернуллі. Біноміальний розподіл.
6. Функція розподілу випадкової величини: означення та властивості. Приклади.
7. Дисперсія випадкової величини: означення, обчислення та властивості.
8. Математичне сподівання і дисперсія. Їх властивості.
9. Нерівність Чебишова і закон великих чисел.
10. Коефіцієнт кореляції: означення та властивості.
11. Інтегральна теорема Муавра-Лапласа. Поняття про центральну граничну теорему.

Розділ 8. Алгебра і теорія чисел

1. Основна теорема про гомоморфізми груп.
2. Основна теорема про скінченні абелеві групи.
3. Мультиплікативна група кільця Z_n (кільця лишків за модулем n).
4. Поле алгебраїчних чисел.
5. Скінченні поля, будова скінченних полів.

Розділ 9. Рівняння з частинними похідними

1. Рівняння 1-го порядку. Поняття загального розв'язку, його повний та особливий інтеграл. Геометрична теорія розв'язування.
2. Рівняння 2-го порядку з частинними похідними. Класифікація, зведення до канонічного вигляду.
3. Класичні (гіперболічні, параболічні та еліптичні) рівняння та постановка основних задач для них.
4. Метод відокремлювання змінних Фур'є розв'язування мішаних задач для рівняння теплопровідності.
5. Метод характеристик розв'язування задачі Коші для рівняння вільних коливань однорідної струни.

Розділ 10. Теорія міри та інтегралу

1. Міри та їх властивості.
2. Означення міри на півкільці інтервалів в R за допомогою функцій розподілу.
3. Міри Лебега на прямій, площині та на R^n. Властивості міри Лебега. Інваріантність міри Лебега відносно зсуву.
4. Міра Лебега-Стілтьєса на прямій. Міри на прямій, скінченні на кільці обмежених множин, та їх функції розподілу. Властивості функцій розподілу міри. Характеризація мір на прямій їх функціями розподілу.
5. Заряди та їх властивості. Розклад заряду за Ганом. Розклад заряду за Жорданом. Функції обмеженої варіації та їх зв'язок із зарядами. Теорема Жордана про зображення функції обмеженої варіації.
6. Вимірні відображення та функції. Критерії вимірності. Борельові функції. Суперпозиція вимірних відображень. Властивості вимірних функцій.

7. Прості функції та їх властивості. Критерій вимірності простих функцій. Теорема про наближення невід'ємної вимірної функції монотонною послідовністю невід'ємних простих функцій.

8. Властивості, які є правильними майже скрізь відносно міри. Еквівалентність функцій. Збіжність майже скрізь та її властивості. Теорема Єгорова.

9. Збіжність за мірою та її властивості. Теореми Лебега та Ріса про взаємозв'язок збіжності майже скрізь та збіжності за мірою.

10. Інтеграл Лебега: означення та його властивості.

11. Граничний перехід під знаком інтеграла Лебега (теорема Бепо Леві, лема Фату, теорема Лебега про мажоровну збіжність).

12. Інтеграли Лебега за мірою Лебега. Порівняння інтегралів Рімана та Лебега на відрізку прямої. Критерій інтегровності функції за Ріманом на відрізку прямої. Порівняння невласних інтегралів та інтеграла Лебега на прямій.

13. Абсолютно неперервні міри та заряди. Теорема Радона-Никодима.

14. Кратні інтеграли за добутком мір. Повторні інтеграли. Теорема Фубіні-Тонеллі.

Розділ 11. Функціональний аналіз

1. Поняття метричного простору. Нерівності Гельдера та Мінковського для скінченних та нескінченних сум.

2. Інтегральні метрики.

3. Повні метричні простори. Приклади. Теорема про вкладені кулі. Теорема Бера.

4. Принцип стискаючих відображень та його застосування.

5. Компактні множини та їх властивості. Критерій компактності (теорема Гаусдорфа).

6. Компактні множини в просторі неперервних функцій (теорема Асколі-Арцела).

7. Неперервні функції на компактних множинах та їх властивості. Теорема Стоуна-Вейєрштрасса.

8. Гільбертові простори. Скалярний добуток та евклідові простори. Ортогональні системи та базиси. Процес ортогоналізації.

9. Нерівність Бесселя. Замкнені та повні ортогональні системи. Рівність Парсеваля.

10. Теорема Ріса-Фішера. Теорема про ізоморфність сепарабельних гільбертових просторів.

11. Теорема про перпендикуляр у гільбертовому просторі та її застосування. Ортогональні системи функцій в просторі L_2.

12. Нормовані та банахові простори. Приклади.

13. Теорема Гана-Банаха для нормованих просторів та її наслідки.

14. Сильна топологія у спряженому просторі. Рефлексивні простори.

15. Слабка топологія та слабка збіжність у нормованих та спряжених просторах. Обмежені множини в спряжених просторах. Теорема Банаха-Штейнгауза.

16. Лінійні оператори та дії над ними. Операторні норми.

17. Обернені оператори, спряжені оператори та їх властивості.

18. Лінійні оператори в гільбертових просторах. Оператори Гільберта-Шмідта.

19. Спектр та резольвента лінійного неперервного оператора. Компактні оператори та їх властивості.

3. ПРИКІНЦЕВІ ПОЛОЖЕННЯ

1. ***Допоміжні матеріали.***

На екзамені не допускається користування додатковою літературою.

2. ***Критерії оцінювання.***

Екзаменаційний білет складається з двох теоретичних питань з математики та одного практичного завдання (задачі) з математики.

Система оцінювання оцінює здатність студента:

- узагальнювати отримані знання для вирішення конкретних завдань, проблем;
- застосовувати правила, методи, принципи, закони у конкретних ситуаціях;
- аналізувати і оцінювати факти, події та робити обґрунтовані висновки;
- інтерпретувати схеми, графіки, діаграми;
- викладати матеріал логічно, послідовно, з дотриманням вимог стандартів.

Система критеріїв оцінювання передбачає наступне:

- відповідь студента оцінюється за 100-бальною шкалою;
- оцінювання результатів кожного завдання (запитання, етапу) здійснюється у чотирирівневій системі балів:
- кількість балів ($q_{i\ \max}$), яка нараховується за виконання 1 та 2 завдань складає 33 бали,

Оцінка відповіді на завдання	Розподіл балів відносно значення «ваги» запитання $q_{\max}$	Бали оцінки відповіді (q_{max} = 33)
«відмінно»	$q \geq 0,9\ q_{\max}$	30….33
«добре»	$0,75\ q_{\max} \leq q < 0,9\ q_{\max}$	25….29
«задовільно»	$0,6\ q_{\max} \leq q < 0,75\ q_{\max}$	20…24
«незадовільно»	$q < 0,6\ q_{\max}$	0…19

- кількість балів ($q_{i\ \max}$), яка нараховується за виконання 3 завдання складає 34 бали,

$\sum q_{i\ \max} = 100$;

Оцінка відповіді на завдання	Розподіл балів відносно значення «ваги» запитання $q_{\max}$	Бали оцінки відповіді (q_{max} = 34)
«відмінно»	$q \geq 0,9\ q_{\max}$	31….34
«добре»	$0,75\ q_{\max} \leq q < 0,9\ q_{\max}$	26….30
«задовільно»	$0,6\ q_{\max} \leq q < 0,75\ q_{\max}$	21…25
«незадовільно»	$q < 0,6\ q_{\max}$	0…20

Загальна кількість балів за відповідь визначається шляхом підсумовування балів (q_i) за виконання окремих його частин.

$$Q = \sum q_i$$

Залежно від загальної кількості суми отриманих балів, згідно критеріїв ECTS, виставляється оцінка:

Сума набраних балів	Оцінка
95...100	***Відмінно***
85...94	***Дуже добре***
75...84	***Добре***
65...74	***Задовільно***
60...64	***Достатньо***
Менше 60	***Незадовільно***

Приклад екзаменаційного білету

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Рівень вищої освіти – перший (бакалаврський)
Спеціальність 111 Математика
(код і назва напряму підготовки)

Навчальна дисципліна математика
(назва)

Екзаменаційний білет № 0

1. Інтеграл від функції комплексної змінної: означення та основні властивості.
2. Метод варіації довільних сталих Лагранжа для лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь.
3. Випадкова величина ξ задана щільністю розподілу $P_{\xi}(x)=\begin{cases} A|x-1|, x\in(0,2) \\ 0, x\notin(0,2). \end{cases}$ Знайти *A*, функцію розподілу і математичне сподівання ξ.

Затверджено на засіданні кафедри
математичного аналізу та теорії ймовірностей
Протокол № від « » ________ 202 р.
Зав.кафедри ________
(підпис) (прізвище, ініціали)

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз, Ч. 1, 2. К., Либідь, 1994.
2. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, Т.1, 2, 3 М., Наука, 1969.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. М., Наука, 1971.
4. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра: Учеб.: Для вузов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
5. Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння. Київ, Либідь, 1994.
6. Араманович И.Г., Лунц Г.Ц., Эльсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. М., Наука, 1968.
7. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. М., Наука, 1981.
8. Чинаев П.И. Высшая математика (спецглавы). Киев, Вища школа, 1977.

9. И.И. Гихман, А.В. Скороход, М.И. Ядренко Теория вероятностей и математическая статистика. Киев, Высшая школа, 1988.
10. А.Н. Ширяев Вероятность. М., Наука, 1989.
11. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1971.
12. Вандер дер Варден Б.Л. Алгебра. М.: Наука, 1976.
13. Фадеев Д.К. Лекции по алгебре. М.: Наука, 1984.
14. Калужнин Л.А. Введение в общую алгебру. М.: Наука, 1973.
15. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
16. Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г. Функциональный анализ. Киев, Выща школа, 1990.
17. Конторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. Москва, Наука.
18. Рудин У. Функциональный анализ. Москва, Мир, 1975.
19. Дороговцев А.Я. Элементы общей теории меры и интеграла, Киев, " Выща школа", 1989.

Розробник програми:
зав. каф. математичного аналізу
та теорії ймовірностей д.ф.-м.н., проф. Клесов О.І.