

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

фізико-математичний факультет

кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

«На правах рукопису»

УДК _____

До захисту допущено:

Завідувач кафедри

_____ Олег КЛЕСОВ

« 14 » травня 2021 р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

за освітньо-науковою програмою «Страхова та фінансова
математика»

зі спеціальності 111 «Математика»

на тему: «Кевелетне перетворення як узагальнення вейвлетного»

Виконала:

студентка II курсу магістратури, групи ОМ-91мн

Глушак Катерина Юріївна _____

Керівник:

д. ф.-м. н., проф.,

Рушицький Ярема Ярославови _____

Рецензент:

к. ф.-м. н., доцент,

Юрчук Василь Миколайович _____

Засвідчую, що у цій магістерській
дисертації немає запозичень з праць
інших авторів без відповідних посилань.

Студентка _____

Київ 2021

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
фізико-математичний факультет
кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Спеціальність – 111 «Математика»

Освітньо-наукова програма «Страхова та фінансова математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ Олег КЛЕСОВ

«04» _____ лютого 2021 р.

ЗАВДАННЯ

на магістерську дисертацію студенту

Глушак Катерині Юріївні

1. **Тема дисертації** «Кевелетне перетворення як узагальнення вейвлетного», науковий керівник дисертації Рушицький Ярема Ярославович, доктор фізико-математичних наук, професор, затверджені наказом по університету від «26» березня 2021 р. № 901-с
2. **Термін подання** студентом дисертації 13 травня 2021 р.
3. **Об'єкт дослідження** кевелетне перетворення.
4. **Предмет дослідження** порівняння класичних вейвлетів з кевелетами.
5. **Перелік завдань, які потрібно розробити**
 - 1) ознайомитись з вейвлетним перетворенням;

- 2) ознайомитись з кевелетним перетворенням;
- 3) показати зв'язок кевелетів з іншими спрямованими вейвлетами;
- 4) порівняти класичні вейвлети з новим сімейством вейвлетів-кевелетами.

6. Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного) матеріалу 20 слайдів.

7. Орієнтовний перелік публікацій

- 1) К.Ю.Глушак Кевелетне перетворення як узагальнення вейвлетного.
// X Всеукраїнська наукова конференція молодих математиків. Нац. техн. ун-т України «КПІ ім. І. Сікорського». – 16-17 квітня, 2021. – Київ, 19 ст.

8. Дата видачі завдання 04 лютого 2021 р.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1.	Отримання та узгодження запропонованої теми	04.02.21 – 07.02.21	виконано
2.	Отримання та опрацювання статей та літератури	08.02.21 – 28.02.21	виконано

3.	Ознайомлення з вейвлетним аналізом	1.03.21 – 14.03.21	виконано
4.	Дослідження кевелетного перетворення	15.03.21 – 28.03.21	виконано
5.	Дослідження зв'язку кевелетного перетворення з іншими вейвлетами	29.03.21 – 11.04.21	виконано
6.	Дослідження застосування кевелетного перетворення, порівняння кевелетів із вейвлетами	12.04.21 – 18.04.21	виконано
7.	Аналіз проведених роботи, оформлення висновків	19.04.21 – 10.05.21	виконано
8.	Оформлення дисертації	10.05.21 – 13.05.21	виконано

Студент

Катерина ГЛУШАК

Науковий керівник

Ярема РУЩИЦЬКИЙ

Реферат

Магістерська дисертація: 54 сторінки, 53 першоджерел.

Актуальність теми : використання кевелетного перетворення як альтернативу вейвлет-перетворенням є доцільним у деяких випадках.

Мета і завдання роботи: порівняння класичного дискретного вейвлета з новим типом вейвлета - кевелета.

Об'єкт дослідження: сімейство вейвлетів, що має назву «кевелети».

Предмет дослідження: аналіз кевелетного перетворення, порівняння застосування вейвлетів та кевелетів у різних технічних сферах.

Методи дослідження: основні означення та властивості дискретного вейвлета, означення та властивості кевелетів, сучасне застосування кевелетного перетворення, та порівняння результатів вейвлетного та кевелетного перетворень.

В данній магістерській дисертації порівнюється вейвлетне перетворення з сучасним типом перетворення – кевелетним. Для цього розглядаються їх побудова, основні властивості, та практика застосувань. В кінцевому результаті було зроблено висновок, що кевелети є більш актуальним, та можуть бути використані, як альтернатива вейвлетам, оскільки вони не лише узагальнюють вейвлети, а і дають більш точні результати.

Ключові слова: вейвлетне перетворення, дискретне вейвлетне перетворення, кевелетне перетворення, спрямовані вейвлети,

Abstract

Master degree thesis contains 54 pages, 53 primary sources.

Relevance of the topic: the use of a curvelet transform as an alternative to the wavelet transform is appropriate in some cases.

Purpose and objectives of the work: a comparison of the classic discrete wavelet with a new type of wavelet - curvelet.

Object of study: modern family of wavelets, called "curvelet".

Subject of research: analysis of the curvelet transform, comparison of the use of the wavelets and the curvelet in different technical directions.

Methods of research: the basic definitions and properties of the discrete wavelet, the definition and properties of curvelet, the modern application of the curvelet transform, and comparison of results of wavelet and curvelet transforms.

This master's thesis compares the wavelet transform with the modern type of transform – the curvelet. For this purpose, their construction, basic properties, and practice of applications are considered. It was concluded finally that the curvelets are more relevant and can be used as an alternative to the wavelets, because they not only generalize the wavelets , but also give more accurate results.

Keywords: wavelet transform, discrete wavelet transform, curvelet transform, directional wavelets.

Зміст

Вступ.....	8
Дискретні вейвлети.....	9
1.1. Базиси.....	9
1.2. Батьківський та материнський вейвлет.....	10
1.3. Дискретне вейвлет-перетворення.....	11
1.4. Фрейми.....	12
1.5. Формула Парсеваля.....	14
1.6 Двовимірне вейвлетне перетворення.....	15
1.7. Дискретне двовимірне вейвлетне перетворення.....	17
Кевелетне перетворення.....	19
2.1. Побудова базису кевелетів.....	20
2.2. Віконні функції.....	24
2.3. Основні властивості кевелетного перетворення.....	27
Зв'язок кевелетів з іншими спрямованими вейвлетами.....	29
3.1. Керовані вейвлети та вейвлети Габора.....	29
3.2. Контурлети.....	30
3.3. Сефеслети.....	31
3.4. Шерлети.....	31
3.5. Перетворення бандлетів.....	32
Порівняння класичного вейвлета та кевелету. Застосування	
кевелетного перетворення.....	33
4.1. Обробка зображень.....	33
4.1. Сейсмічне дослідження.....	36
4.3. Аналіз турбулентності в гідромеханіці.....	38
4.4. Рішення диференціальних рівнянь з частинними похідними.....	41
4.5. Стиснене зондування.....	44
Висновок.....	49
Список використаної літератури:.....	50

Вступ

Вейвлетне перетворення є одним із актуальних і найбільш перспективних інструментом в різних технологічних сферах, математичному аналізі та обробці сигналів. Проте дискретне вейвлетне перетворення, має недолік у спрямованості, що погіршує його використання у багатьох сферах. За останні роки був значний прогрес у розвитку спрямованих вейвлетів. Складне перетворення вейвлетів є одним із способів поліпшити спрямованість вибіркості. Однак складне перетворення вейвлетів у минулому не застосовувалось широко, оскільки складно розробити складні вейвлети з ідеальними властивостями реконструкції та хорошими характеристиками фільтра.

Тому, однією із сучасних розробок є дослідження спрямованих вейвлетів, зокрема кевелетне перетворення. Щоб показати його актуальність та перевагу над класичним вейвлетним перетворенням, дається його історія, починаючи з вейвлетів, його логічний зв'язок з іншими спрямованими вейвлетами, такими як контурлети та шерлети, його базову теорію та дискретний алгоритм. Також, розглядаються його останні застосування в обробці зображень / відео, сейсмічних дослідженнях, гідромеханіці, рішенні диференціальних рівнянь з частинними похідними та стисненому зондуванні.

Розділ 1

Дискретні вейвлети

1.1. Базиси

Для введення означення вейвлету розглянемо функцію $f(x)$ в гільбертовому просторі $L_2(\mathbb{R})$.

Скалярний добуток і норму, як звично, позначатимемо

$$\langle f(x), g(x) \rangle \text{ і } \|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}.$$

Множина функцій $\{f_k(x)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ утворює лінійну оболонку для простору F або простір F є лінійною оболонкою множини $\{f_k(x)\}_{k \in \mathbb{Z}}$, якщо будь-який елемент простору $g(x) \in F$ може бути виражений як лінійна комбінація функцій з заданої множини.

Множина може бути скінченною чи нескінченною. Отже, простір F , означається як простір $F = \text{span}_k \{f_k\}$, всі елементи якого мають вигляд:

$$g(x) = \sum_k a_k f_k(x), a_k, x \in \mathbb{R}.$$

Множина $\{f_k(x)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ є базисною множиною або базисом для заданого простору F , якщо множина чисел $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ у розкладі є єдиною для кожної окремо взятої функції $g(x) \in F$.

Множина $\{f_k(x)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ є ортогональним базисом, якщо

$$\langle f_k(x), f_j(x) \rangle = 0, k \neq j.$$

Множина $\{f_k(x)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ є ортонормованим базисом, якщо

$\langle f_k(x), f_j(x) \rangle = \delta_{kj}$, тобто вона є ортогональним базисом

і додатково всі елементи множини мають одиничну норму.

1.2. Батьківський та материнський вейвлет

Розглянемо ортонормований базис. Тоді утворення множини вейвлетів за допомогою материнського та батьківського вейвлету виконується наступним чином:

Функція $\varphi(x)$ є материнським вейвлетом, якщо вона задовольняє такі умови:

1. $\varphi(x)$ є функцією дійсної змінної x .
2. $\varphi(x)$ є локалізованою, тобто відмінною від нуля на невеликому проміжку звичайно в околі нуля, а зовні проміжку або точно дорівнює нулеві, або практично дорівнює нулеві, тобто різко прямує до нуля при збільшенні $|x|$.
3. Графік функції в околиці нуля має коливальний характер.
4. Перші s моментів функції дорівнюють нулеві

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \varphi(x) dx = \dots = \int_{-\infty}^{\infty} x^{s-1} \varphi(x) dx = 0.$$

Тепер розглянемо батьківський вейвлет $\psi(x)$:

$$\psi_{k,m}(x) = 2^{\frac{k}{2}} \psi(2^k x - m)$$

Функцію $\psi(x) \in L^2(\mathbb{R})$ називають ортогональним вейвлетом (або вейвлетом), якщо сімейство $\{\psi_{k,m}(x)\}_{k,m \in \mathbb{Z}}$ утворює ортонормований базис в $L^2(\mathbb{R})$ і для всіх $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ справедливе представлення вейвлетним рядом.

Для аналізу чи синтезу функції в вейвлет-аналізі пропонується розклад функції за спеціальним базисом, що будується на основі спеціально вибраного вейвлету. Існує багато відмінних між собою вейвлетів. Тому і базисів теж багато. Вибір вейвлету диктується особливістю задачі, до якої застосовується вейвлет-аналіз. Ідея розкладу функції за заданим базисом складає основу класичної теорії рядів та інтегралів Фур'є. Вейвлет-аналіз застосовує базиси дуже відмінні від базиса Фур'є-аналізу, і тому дає ряд незвичайних можливостей, які дозволяють говорити про створення вейвлет аналізу як про одну з визначних подій в математиці XX століття.

1.3. Дискретне вейвлет-перетворення

Розглянемо дві множини функцій $\{\phi_k(x)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ (масштабні функції, основані на батьківському вейвлеті) і $\{\psi_{j,k}(x)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ (вейвлети, основані на материнському вейвлеті), які є лінійною оболонкою для всіх функцій з $L^2(\mathbb{R})$.

Тому довільна функція $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ може бути представлена у вигляді суми двох розкладів:

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j_0,k} \phi_{j_0,k}(x) + \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k}(x),$$

де коефіцієнти j, k є цілими числами, індекс j_0 має довільне значення, а функції $\phi_{j,k}(x), \psi_{j,k}(x)$ – вейвлети, і можуть утворювати різного виду базиси (у тому числі і ортогональні).

Перша сума з точки зору математичного формалізму є проекцією функції на простір V_{j_0} . Вона дає грубу апроксимацію функції або, іншими словами, дає представлення функції, основане на низькій здатності розрізнення.

Друга сума починається з вибраного в першій сумі значення першого індексу j , і чим більше членів суми з другої суми буде взято, тим більше функцій більш високого рівня розрізнення буде враховано.

Коефіцієнти вейвлет-ряду $\{c_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}, \{d_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ трактуються як система чисел, яка певним чином ставиться у відповідність сигналу $f(x)$ і яку називають дискретним вейвлет перетворенням.

Вони при певних умовах повністю характеризують сигнал і подібно коефіцієнтам ряду Фур'є (дискретному перетворенню Фур'є сигналу) можуть використовуватися для аналізу, описання та фільтрування сигналу.

І. Дюбеші показала, що вейвлет-системи утворюють безумовний базис для великого класу сигналів. Це зокрема означає, що коефіцієнти у вейвлетних розкладах стають дуже малими при зростанні індексів і для доброго наближення сигналу досить малої кількості коефіцієнтів. Тому дискретне вейвлет перетворення є ефективним для стиску сигналів та зображень.

Подібність дискретних вейвлет та Фур'є перетворень є великою, однак вейвлет є більш гнучким та більш інформативним і до того ж здатним на локалізацію особливостей сигналу.

1.4. Фрейми

Розглянемо тепер розклади за системами функцій, кількість яких або є надлишковою, тобто їх більше, ніж треба для утворення базису, або з них взагалі не можна утворити базис.

Сімейство функцій гільбертового простору $\{x_k\} \subset H$ називають фреймом (frame), якщо існують такі дві сталі $0 < A \leq B < \infty$, що виконується умова

$$A\|f\|_H^2 \leq \sum_k |\langle x_k, f \rangle_H|^2 \leq B\|f\|_H^2.$$

Цю умову називають умовою фрейму, числа A, B – межами фрейму, x_k – елементами фрейму, числа $\tilde{f}_k = \langle f, x_k \rangle$ – перетворенням функції $f(x)$ щодо фрейму. Оператор фрейму вводиться за формулою :

$$Sf(x) = \sum_{k \in Z} \langle f(x), x_k(x) \rangle x_k(x).$$

Поняття фрейм було введено в 1952 році математиками Дюффіном (Duffin) і Шефером (Schaeffer) в аналізі негармонічних рядів Фур'є.

Фрейм називають точним (exact frame), якщо з видаленням одного довільного елемента фрейм перестає бути фреймом. Коли $A = 0, B = \infty$, то фрейм називають вільним-нещільним (loose frame); коли A, B рівні, то фрейм називають тісним (tight frame).

Для тісного фрейму попередня нерівність трансформується в рівність:

$$\sum_k |\langle x_k, f \rangle_H|^2 = A\|f\|_H^2$$

і тоді сигнал може бути декомпозований (дискретизований) за допомогою ряду зі зліченною кількістю коефіцієнтів:

$$f = \frac{1}{A} Sf(x) = \frac{1}{A} \sum_k \langle x_k, f \rangle_H x_k.$$

1.5. Формула Парсеваля

Розглянемо основну властивість дискретного вейвлетного перетворення. Якщо масштабні функції (батьківський вейвлет) та вейвлети утворюють ортонормований базис або тісний фрейм, то справедлива формула Парсеваля у такому вигляді:

$$\|f(x)\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_{m_0, n}|^2 + \sum_{m=m_0}^{\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |d_{m, n}|^2$$

Формула дозволяє розділити енергію сигналу: для кожного фіксованого рівня масштабу (тут фіксується індекс m) і для кожного фіксованого проміжку часу чи локального фрагмента зображення (тут фіксується індекс n).

З цього видно, що дискретне вейвлет перетворення зберегло всі особливості віконного перетворення Фур'є - Габора, але використовує змінний масштаб. В віконному перетворенні розрізнення за часом і за частотою пов'язані і збільшення одного призводить до зменшення іншого. У вейвлет-перетворенні цього обмеження вже немає.

Таким чином, вейвлети мають явні переваги перед рядами Фур'є, як в загальному і точному поданні функцій так і їх різноманітних локальних особливостях. Вони представлені набагато більш різноманітним набором типів базових функцій, ніж єдина синусоїдальна функція в рядах Фур'є. Ця різноманітність вейвлетів, з одного боку, різко розширює коло розв'язуваних з їх допомогою завдань, а з іншого боку, робить таке рішення творчим.

1.6 Двовимірне вейвлетне перетворення

Розглядаємо функцію двох змінних $\Psi(x, y) \in L^2(\mathbb{R}^2)$ (тобто, вона належить до інтегрованих за квадратом функцій, заданих на нескінченній площині).

Нехай перетворення Фур'є цієї функції $F[\Psi(x, y)] = \hat{\Psi}(\omega_x, \omega_y)$ існує для всіх значень параметрів перетворення $(\omega_x, \omega_y) \in \mathbb{R}^2$.

Також припускається, що для всіх $(\omega_x, \omega_y) \in \mathbb{R}^2$ виконується умова

$$\int_0^\infty |\hat{\Psi}(s\omega_x, s\omega_y)|^2 \frac{ds}{s} = C_\Psi < +\infty.$$

Отже, припускається, що записаний інтеграл є скінченним і постійним для всіх $(\omega_x, \omega_y) \in \mathbb{R}^2$.

Якщо функція $\Psi(x, y)$ є вейвлетом, що задовольняє три умови:

1. Вона є ізотропною в тому розумінні, що $\Psi(x, y) = P(\sqrt{x^2 + y^2})$, тобто її значення в довільній точці залежить лише від відстані точки від початку координат (від довжини радіуса-вектора точки) і не залежить від напрямку радіуса-вектора точки.
2. Її перетворення Фур'є є нулем в початку координат $\hat{\Psi}(0, 0) = 0$.
3. $\|\hat{\Psi}(\omega_x, \omega_y)\| = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\Psi}(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta = 1$

Така функція $\Psi(x, y)$ може бути потрактована як імпульсна характеристика полосового фільтра, який не має преференційної (такої, якій надається перевага) просторової орієнтації.

Означимо вейвлетне перетворення функції $f(x, y) \in L^2(\mathbb{R}^2)$ для масштабу s і точки з координатами (u, v) за такою формулою:

$$Wf[s, (u, v)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) s \Psi[s(x - u), s(y - v)] dx dy.$$

Позначимо $\Psi_s(x, y) = s \Psi(sx, sy)$ і зафіксуємо таку властивість

$$\Psi_s(x, y) = \Psi_s(-x, -y).$$

Тепер вейвлетне перетворення функції $f(x, y) \in L^2(\mathbb{R}^2)$ для масштабу s і точки з координатами (u, v) може бути записане як згортка

$$Wf[s, (u, v)] = f * \hat{\Psi}_s(u, v)$$

Ця згортка може бути проінтерпретована в термінах теорії сигналів як двовимірний полосовий фільтр без певної вибраної орієнтації.

Зображення звичайно вимірюються (чи аналізуються) при якійсь скінченній здатності розрізнення. Тому в такій ситуації неможливо обчислити вейвлетне перетворення менше граничної множини згаданої здатності. Для моделювання обмеженості здатності розрізнення вводять так звану згладжуючу функцію $\phi(x, y)$. Для її перетворення Фур'є повинна виконуватися рівність:

$$|\phi(\omega_x, \omega_y)|^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(|\hat{\psi}^1(2^k \omega_x, 2^k \omega_y)|^2 + |\hat{\psi}^2(2^k \omega_x, 2^k \omega_y)|^2 \right)$$

Також доцільно ввести згладжуючий оператор:

$$S_{2^k} f(x, y) = f * \phi_{2^k}(x, y).$$

1.7. Дискретне двовимірне вейвлетне перетворення

Перш за все слід ввести згладжуючу дискретну функцію. Насправді запис згладжуючої функції вже використовує дискретність вейвлет-множини.

Отже, у цьому випадку згладжуюча функція $\phi(x, y)$ далі є дійсною функцією і для неї повинна виконуватися рівність:

$$\begin{aligned} |\phi(\omega_x, \omega_y)|^2 &= \sum_{k=1}^{+\infty} [\hat{\psi}^1(2^k \omega_x, 2^k \omega_y) \hat{\chi}^1(2^k \omega_x, 2^k \omega_y) \\ &\quad + \hat{\psi}^2(2^k \omega_x, 2^k \omega_y) \hat{\chi}^2(2^k \omega_x, 2^k \omega_y)]. \end{aligned}$$

Також необхідно ввести згладжуючий оператор:

$$\begin{aligned} S_{2^k} f(x, y) &= f * \phi_{2^k}(x, y), \\ \phi_{2^k}(x, y) &= \frac{1}{2^k} \phi\left(\frac{x}{2^k}, \frac{y}{2^k}\right). \end{aligned}$$

Слід зазначити, що вейвлетне перетворення

$$[W_{2^k}^1 f(x, y), W_{2^k}^2 f(x, y)]_{1 \leq k \leq K}$$

в діапазоні між масштабами від 2 до 2^K дозволяє бачити деталі, які видимі за допомогою згладжуючого оператора $S_2 f(x, y)$ і невидимі при застосуванні згладжуючого оператора $S_{2^K} f(x, y)$.

Якщо розглядати дискретний варіант $f(n, m)$, $(n, m \in \mathbb{Z}^2)$ функції $f(x, y)$, то, діючи на цю функцію, згладжуючий оператор перетворює образ на дискретний двовимірний сигнал $D = (d_{n,m})_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2}$ за таким алгоритмом $S_2^d f(n, m) = d_{n,m}$, $\forall n, m \in \mathbb{Z}^2$

Тому дискретизоване зображення математично може бути представлене так

$$D = (S_2^d f(n, m))_{(n, m) \in \mathbb{Z}^2}.$$

Розділ 2

Кевелетне перетворення

Тепер перейдемо від класичний вейвлетів до кевелетів. Двовимірні складні вейвлети по суті побудовані за допомогою одновимірних вейвлетів тензорного продукту. Спрямована селективність, яку забезпечують складні вейвлети (шість напрямків), набагато краща, ніж та, яку отримують класичні (три напрямки), але все ще обмежена.

У 1999 р. Кандес та Доного запропонували анізотропне геометричне перетворення вейвлетів, яке отримало назву перетворення ріджелетів [8], [3].

Перетворення ріджелетів оптимально для представлення прямолінійних особливостей. На жаль, глобальні прямолінійні особливості рідко спостерігаються в реальних додатках. Для аналізу особливостей локальної лінії або кривої природною ідеєю є розглянути розділ зображення, а потім застосувати перетворення ріджелетів до отриманих цифрових зображень. Цей блок перетворення на основі ріджелетів, який отримав назву кевелетного перетворення, був вперше запропонований Кандесом та Доного у 2000 р. [4].

Окрім блокуючих ефектів, застосування кевелетного перетворення першого покоління обмежене, оскільки сама геометрія ріджелетів незрозуміла, тому що, вони не є справжніми функціями ріджелів на цифрових зображеннях. Нещодавно був запропонований варіант кевелетного перетворення другого покоління для обробки меж зображення за допомогою дзеркального розширення [9].

Показано, що кевелетне перетворення другого покоління є дуже ефективним інструментом для багатьох різних застосувань в обробці зображень, дослідженні сейсмічних даних, гідромеханіці та вирішенні різних диференціальних рівнянь з частковими похідними.

З математичної точки зору, сильна сторона підходу кевелетної форми полягає в їх здатності формувати сильні теореми в наближенні та теорії операторів.

2.1. Побудова базису кевелетів

Дискретне перетворення кевелетів дуже ефективно представляє кривоподібні краї. Але нинішні кевелетні системи все ще мають два основні недоліки:

- 1) вони не є оптимальними для розрідженого наближення характеристик кривої, що перевищує C^2 - сингулярності,
- 2) дискретне перетворення кевелетної системи є надлишковим.

Побудуємо фрейм, згенерований одним основним елементом, базисом кевелету φ , цього разу з використанням трансляції, розширення та обертання φ . Дотримуючись міркувань у одновимірному випадку, елементи сімейства кевелетних панелей тепер повинні забезпечувати покриття двовимірного частотного простору. Тому побудова базису кевелету тепер базується на наступних двох основних ідеях [10].

- 1) Розглянемо полярні координати в частотній області.
- 2) Будуємо елементи базису кевелету, що мають місцевий носій поблизу клинів згідно з рисунком 1.1, де кількість клинів дорівнює $N_j = 4 \cdot 2^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor}$ у масштабі 2^{-j} , тобто, воно подвоюється в кожному другому круговому кільці. (Тут $\lfloor x \rfloor$ позначає найменше ціле число, яке більше або дорівнює x).

Якраз використання клину, обмеженого двома радіусами і двома кривими лініями (частинами кола), є основним новим кроком у розвитку вейвлет-аналізі, у якому класичні вейвлети використовують

прямокутник. Дві криві сторони клину є ймовірно причиною назви кевелет (кривулька).

Нехай тепер $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T$ - змінна в частотній області. Далі нехай $r = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$, $\omega = \arctan \xi_1 / \xi_2$ - полярні координати в частотній області. Для "розширеного базису кевелету" в полярних координатах ми використовуємо анзац

$$\hat{\phi}_{j,0,0}(r, \omega) := 2^{-\frac{3j}{4}} W(2^{-j}r) \tilde{V}_{N_j}(\omega), \quad r \geq 0, \omega \in [0, 2\pi), j \in N_0, \quad (1)$$

де ми використовуємо відповідні віконні функції W та $\tilde{V}_{N_j}$, та де обертання $\hat{\phi}_{j,0,0}$ відповідає перекладу 2π - періодичної віконної функції $\tilde{V}_{N_j}$. Індекс N_j вказує на кількість клинів у кільцевому кільці в масштабі 2^{-j} (див. рис. 1.1). Для побудови (розширеного) базису кевелету з компактним носієм біля «базису клину», дві віконні функції W і $\tilde{V}_{N_j}$ повинні мати компактний носій. Ідея полягає в тому, щоб взяти $W(r)$ так само, як і в одновимірному випадку, охопити інтервал $(0, \infty)$ з розширеними кевелетами, і взяти $\tilde{V}_{N_j}$ такий, що покриття в кожному кільцевому кільці забезпечується трансляціями $\tilde{V}_{N_j}$. Тут ми маємо $r \in [0, \infty)$, тому ми не можемо взяти повний вейвлет Мейєра для визначення W , а лише ту частину, яка підтримується в $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$. Тоді умова допустимості

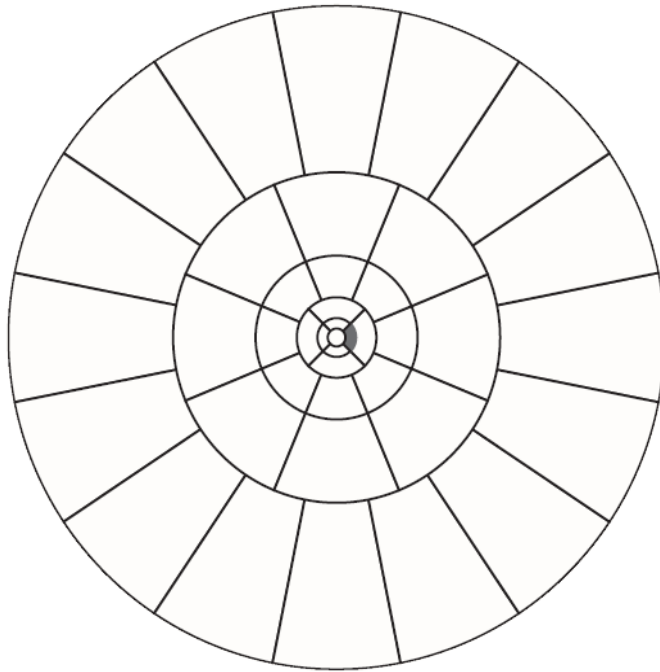
$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(2^{-j}\xi)|^2 = 1, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

де $\hat{\psi}$ —діадичний вейвлет, дає:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |W(2^{-j}r)|^2 = 1$$

(3)

для $r \in (0, \infty)$.



[Рис.1.1] Покриття частотної області клинами для побудови кевелетної конструкції

Далі, для викладання кругового кільця на N клинів, де N - довільне натуральне ціле число, нам потрібна 2π - періодична невід'ємна $\tilde{V}_N$ з носієм всередині $\left[-\frac{2\pi}{N}, \frac{2\pi}{N}\right]$ така, що

$$\sum_{l=0}^{N-1} \tilde{V}_N^2\left(\omega - \frac{2\pi l}{N}\right) = 1$$

для всіх $\omega \in [0, 2\pi)$ відповідно. Тоді переміщується лише дві "сусідські" $\tilde{V}_N^2$ у перекритті суми. Такі функції $\tilde{V}_N$ можна просто

побудувати як 2π періодизацію масштабованого $V\left(\frac{N\omega}{2\pi}\right)$, де V задано у віконних функціях.

Таким чином ми підходимо до мети отримати набір функцій кевелетів з компактним носієм в частотній області на клинах, де в круговому кільці, що відповідає шкалі 2^{-j} , сума квадратних функцій, що повертаються, залежить лише від $W(2^{-j}r)$, тобто з цього випливає, що

$$\sum_{l=0}^{N_j-1} \left| 2^{\frac{3j}{4}} \hat{\phi}_{j,0,0} \left(r, \omega - \frac{2\pi l}{N_j} \right) \right|^2 \sum_{l=0}^{N_j-1} \tilde{V}_{N_j}^2 \left(\omega - \frac{2\pi l}{N_j} \right) = |W(2^{-j}r)|^2. \quad (4)$$

Разом з (3), це означає, що використовуючи обертання розширеного базису кевелету $\hat{\phi}_{j,0,0}$, ми можемо гарантувати умову допустимості, подібну до (2) для одновимірного каркасу вейвлетів. Також, переміщення $\phi_{j,0,0}$ тут не впливає, оскільки переміщення в місцевій області відповідають фазовим зсувам у частотній області, які не змінюють носій перетворених кривих Фур'є. Базис кевелету $\hat{\phi}_{j,0,0}$ проілюстровано на рисунку 1.2.

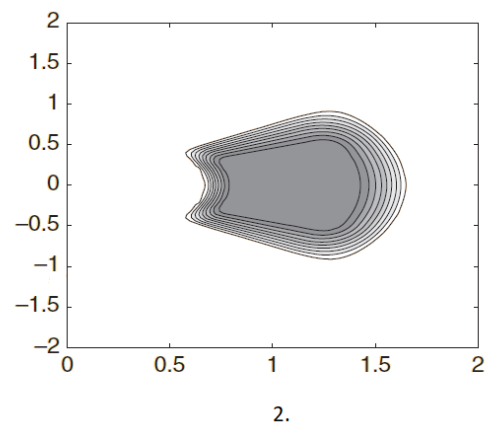
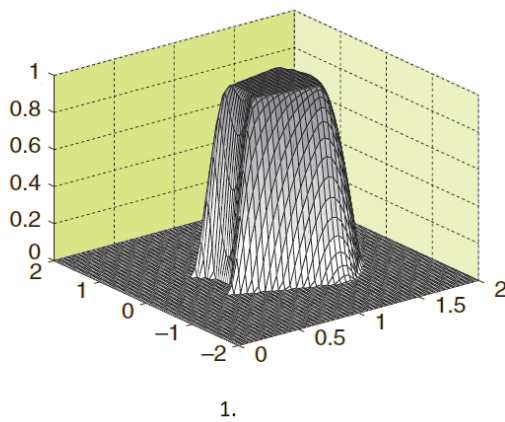
Є останній пункт, на який потрібно звернути увагу, а саме „діра”, яка виникає в частотній площині навколо нуля, оскільки обертання розширеного базису кевелету працює лише в масштабах 2^{-j} для $j = 0, 1, 2, \dots$. Беручи тепер усі масштабовані та обернені елементи кевелетів разом з $N_j := 4 \cdot 2^{\lceil j/2 \rceil}$, знаходимо для шкал 2^{-j} , $j = 0, 1, 2, \dots$ з (3) та (4)

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{N_j-1} \left| 2^{\frac{3j}{4}} \hat{\phi}_{j,0,0} \left(r, \omega - \frac{2\pi l}{N_j} \right) \right|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |W(2^{-j}r)|^2,$$

і ця сума лише для $r > 0$ дорівнює одиниці. Тому для повного покриття частотної площини нам потрібно визначити елемент низьких частот

$$\hat{\phi}_{-1}(\xi) := W_0(|\xi|) \text{ з } W_0^2(r^2) := 1 - \sum_{j=0}^{\infty} W(2^{-j}r)^2, \quad (5)$$

що підтримується на одиничному колі, і де ми не розглядаємо жодного обертання.



[Рис.1.2] Базис кевелету $\hat{\phi}_{0,0,0}$ 1. частотній області та 2. її носій.

2.2. Віконні функції

Для побудови кевелетної функції ми будемо використовувати наступні спеціальні віконні функції. Розглянемо масштабовані вікна Мейєра [16]

$$V(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq 1/3, \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}v(3|\omega| - 1)\right) & 1/3 \leq |\omega| \leq 2/3, \\ 0 & \text{інші,} \end{cases}$$

$$W(r) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2}v(5-6r)\right) & 2/3 \leq r \leq 5/6, \\ 1 & 5/6 \leq r \leq 4/3, \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}v(3r-4)\right) & 4/3 \leq r \leq 5/3, \\ 0 & \text{інші,} \end{cases}$$

де v - гладка функція, що задовольняє

$$v(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ 1 & x \geq 1, \end{cases} \quad v(x) = v(1-x) = 1, x \in \mathbb{R}.$$

Для простого випадку $v(x) = x$ в $[0, 1]$, віконні функції $V(\omega)$ та $W(r)$ наведені на рисунку 2.1. Щоб отримати більш плавні функції W і V , нам потрібно взяти більш плавні функції v . Ми можемо використовувати поліноми $v(x) = 3x^2 - 2x^3$ або $v(x) = 5x^3 - 5x^4 + x^5$ на проміжку $[0, 1]$, такі, що v знаходиться в $C^1(\mathbb{R})$ або в $C^2(\mathbb{R})$.

Приклад довільно гладкого v подано формулою:

$$v(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ \frac{s(x-1)}{s(x-1) + s(x)} & 0 < x < 1, \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

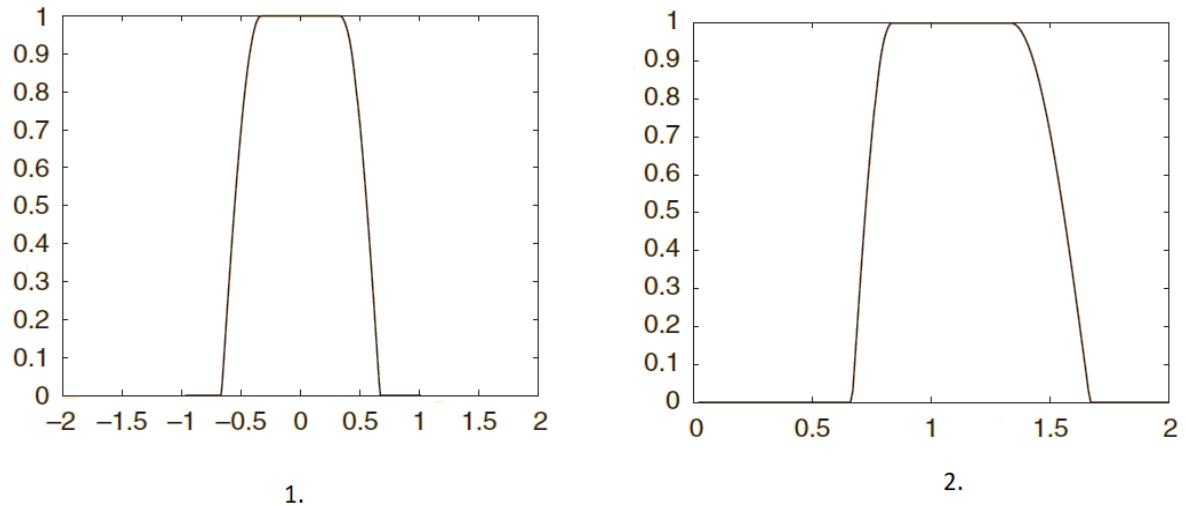
при $s(x) = e^{-\left(\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1-x)^2}\right)}.$

Зазначені дві функції $V(t)$ і $W(r)$ задовольняють умовам:

$$1) \sum_{l=-\infty}^{\infty} V^2(\omega - l) = 1, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$2) \sum_{j=-\infty}^{\infty} W^2(2^j r) = 1, \quad r > 0.$$

Зокрема, 2π – періодичність вікна $\tilde{V}_N(\omega)$, необхідна для побудови кевелету, тепер може бути отримана як 2π - періодизація $V\left(\frac{N\omega}{2\pi}\right)$.



[Рис. 2.1] Ділянка віконних функцій 1. $V(\omega)$ та 2. $W(r)$

Як ми вже бачили, для побудови кевелету є $N_j = 4 \cdot 2^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor}$ кути (або клини), вибрані в круговому кільці (з радіусом $2^{j-1/2} \leq r \leq 2^{j+1/2}$), що відповідає 2^{-j} шкалі, див. [10].

Але, щоб забезпечити умову допустимості тісного фрейму, можна майже вільно вибрати кількість клинів/кутів у кожній шкалі. В основному конструкція працює за всіх співвідношень кутів і масштабів. Насправді це важливий момент, коли кевелети відрізняються від інших конструкцій.

1. Якщо взяти кількість клинів фіксовано, незалежно від масштабу, ми, по суті, отримуємо керовані вейвлети.
2. Якщо кількість клинів збільшується приблизно на $1/\text{масштаб}$ (тобто, як 2^j), то ми отримуємо щільні ріджелет-фрейми.
3. Якщо кількість клинів збільшується, як $\sqrt{1 / \text{масштаб}}$ (тобто, як $2^{j/2}$), отримується кевелетний клин.

Цей спеціальний анізотропний закон масштабування дає типові кевелетні елементи.

Щоб отримати повне сімейство кевелетів, нам потрібно врахувати обертання та переміщення розширеного базису кевелету $\phi_{j,0,0}$.

Ми обираємо:

1. рівновіддалену послідовність кутів обертання $\theta_{j,l}$,

$$\theta_{j,l} := \frac{\pi l 2^{-\lfloor \frac{j}{2} \rfloor}}{2} \text{ з } l = 0, 1, \dots, N_j - 1;$$

2. положення $b_k^{j,l} = b_{k_1,k_1}^{j,l} := R_{\theta_{j,l}}^{-1} \left(\left(\frac{k_1}{2^j} \right) \left(\frac{k_2}{2^{\frac{j}{2}}} \right) \right)^T$ з

$k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, і де R_θ позначає матрицю обертання з кутом θ .

Тоді сімейство кевелетних функцій задається формулою:

$$\phi_{j,k,l}(x) := \phi_{j,0,0} \left(R_{\theta_{j,l}}(x - b_k^{j,l}) \right) \quad (6)$$

з індексами $j \in \mathbb{N}_0$ та $k = (k_1, k_2), l$ як зазначено вище.

2.3. Основні властивості кевелетного перетворення

Система кевелетів:

$$\begin{aligned} & \{ \phi_{-1,k,0} : k \in \mathbb{Z}^2 \} \\ & \cup \left\{ \phi_{j,k,l} : j \in \mathbb{N}_0, l = 0, \dots, 4 \cdot 2^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} - 1, k = (k_1, k_2)^T \in \mathbb{Z}^2 \right\} \end{aligned}$$

задовольняє властивості тісного фрейму. Це означає, що кожна функція $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ може бути представлена у вигляді ряду кевелетів

$$f = \sum_{j,k,l} \langle f, \phi_{j,k,l} \rangle \phi_{j,k,l}, \quad (7)$$

також справедлива тотожність Парсеваля:

$$\sum_{j,k,l} |\langle f, \phi_{j,k,l} \rangle|^2 = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^2).$$

Для доведення ми звертаємось до [10].

Де $c_{j,k,l}(f) := \langle f, \phi_{j,k,l} \rangle$ - коефіцієнти кевелету. Зокрема, за теоремою Планшереля отримуємо для $j \geq 0$:

$$\begin{aligned} c_{j,k,l}(f) &:= \int_{\mathbb{R}^2} f(x) \overline{\phi_{j,k,l}(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{\phi}_{j,k,l}(\xi)} d\xi = \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{\phi}_{j,0,0}(R_{\theta_{j,l}} \xi)} e^{i \langle b_k^{j,l}, \xi \rangle} d\xi. \end{aligned} \quad (8)$$

Розділ 3

Зв'язок кевелетів з іншими спрямованими вейвлетами

За останні роки було здійснено кілька інших розробок спрямованих вейвлет-систем з тією ж метою, а саме кращий аналіз та оптимальне відображення спрямованих особливостей сигналів у більших вимірах. Жоден із цих підходів не набув такої ж популярності, як кевелетне перетворення. Далі наведено деякі з нових вейвлетів, та їх зв'язок з кевелетами.

Керовані вейвлети (steerable wavelets), вейвлети Габора (Gabor wavelets), клиновиди (wedgelets), бімлети (beamlets), бандлети (bandlets), контурлети (contourlets), шерлети (shearlets), хвильові атоми (wave atoms), пластинки (platelets) та сефеслети (surfacelets) були запропоновані самостійно для ідентифікації та відновлення геометричних особливостей. Ці спрямовані вейвлети або геометричні вейвлети однаково називаються X-летами.

3.1. Керовані вейвлети та вейвлети Габора

Керовані вейвлети [20], [43] і вейвлети Габора [30] можна розглядати як ранньо спрямовані вейвлети. Керовані вейвлети були побудовані на основі спрямованих похідних операторів (тобто другої похідної Гауса), тоді як вейвлети Габора вироблялись ядром Габора, що є продуктом еліптичного Гауса та складної плоскої хвилі. У порівнянні з відокремлюваними ортонормованими вейвлетами, керовані вейвлети забезпечують перехідно-інваріантні та обертально-інваріантні зображення положення та орієнтації розглянутих структур зображення. Ця функція забезпечується великою надмірністю. Застосування вейвлетів Габора зосереджено на класифікації

зображень та аналізі текстур. Вейвлети Габора також використовувались для моделювання контурів простих клітин кори. Застосування вейвлетів Габора припускає, що точність роздільної здатності, досягнута через надмірність, може бути актуальною проблемою при моделюванні мозку, і, що орієнтація відіграє ключову роль у первинній зоровій корі. Основні відмінності між керованими вейвлетами / вейвлетами Габора та іншими Х-летами полягає в тому, що ранні методи не допускають різної кількості напрямків у кожному масштабі.

3.2. Контурлети

Контури, як пропонують До і Веттерлі [17], утворюють дискретну структуру фільтруючого набору, яка може ефективно мати справу з кусково гладкими зображеннями з плавними контурами. Це дискретне перетворення можна підключити до кевелетних структур у неперервній області. Отже, контурлети можуть розглядатися як дискретна форма певного кевелетного перетворення. Конвекційні конструкції вимагають операції обертання і відповідають двовимірному розділу площини частоти на основі полярних координат. Ця властивість спрощує ідею кевелетів у неперервному випадку, але викликає питання у реалізації дискретних зображень. Зокрема, наближення до критичного відбору зразків представляється складним у дискретизованих конструкціях кевелетів. Для контурлетів критичну вибірку легко здійснити. Існує ортогональна версія перетворення контурлетів, яка швидша, ніж поточні алгоритми дискретних кевелетів [8]. Набір спрямованих фільтрів, як ключовий компонент контурлетів, має зручну деревоподібну структуру, де допускається вирівнювання. Таким чином, ключова відмінність контурлетів від кевелетів полягає в тому, що контурлети безпосередньо визначаються на дискретних прямокутних сітках. На

жаль, контурлетні функції мають менш чітку спрямовану геометрію/особливості, ніж кевелетні (тобто, більше коливань уздовж голчастих елементів), що призводить до лишків при шумі та стисненні.

3.3. Сефеслети

Сефеслети [31] - це тривимірні розширення двовимірних контурлетів, які отримують за допомогою спрямованого набору фільтрів більшого розміру та багатомасштабної піраміди. Вони можуть бути використані для ефективного поглинення та представлення поверхневих особливостей у багатовимірних об'ємних даних, що включають біомедичні зображення, сейсмічні зображення, обробку відео та комп'ютерної візуалізації. Сефеслети та тривимірні кевелети спрямовані на однаковий розподіл частот, але обидва перетворення досягають цієї мети за допомогою різних підходів. Перетворення сефеслетів менш надлишкове, ніж тривимірне кевелетне перетворення, і ця перевага забезпечується певною втратою спрямованих характеристик.

3.4. Шерлети

На відміну від кевелетів, шерлети [29], [24] утворюють афінну систему з однопороджуючою материнською функцією зсуву, параметризованою масштабуванням, зсувом та параметром переміщення, де параметр зсуву фіксує напрямок особливостей. Було показано, що як кевелетне перетворення, так і шерлети (принаймні теоретично) однаково добре підходять для апроксимації кусково гладких зображень із особливістю вздовж плавних кривих [11], [24]. Дійсно, використовуючи швидке кевелетне перетворення, засноване на переході до декартових масивів, дискретні реалізації двох перетворень дуже схожі [8].

3.5. Перетворення бандлетів

Перетворення бандлетів [39], [41] на відміну від згаданих раніше перетворень базується на адаптивних техніках і має добрі показники для зображень із текстурами, що перевищують C^2 -сингулярності, але за його адаптацію доведеться зробити набагато більше обчислювань.

Розділ 4

Порівняння класичного вейвлета та кевелету.

Застосування кевелетного перетворення

У цьому розділі ми розглянемо застосування кевелетів в обробці зображень, сейсмічному дослідженні, гідромеханіці, вирішенні диференціальних рівнянь з частковими похідними та стисненому зондуванні, щоб показати потенціал кевелетного перетворення як альтернативу вейвлет-перетворенням у деяких випадках.

4.1. Обробка зображень

У 2002 році перше покоління кевелетного перетворення було вперше застосовано до зображення, з пониженим шумом. Застосування кевелетів першого покоління було розширено на підвищення контрастності зображення [46] та астрономічному представленні зображень [45] в 2003 році, а також на супутникових зображеннях [15] у 2005 році. Після того, як в 2004 році було запропоновано ефективне кевелетне перетворення другого покоління [11], застосування кевелетів швидко зросло у багатьох сферах, включаючи презентацію зображень / відео, зняття шуму та класифікацію. Наприклад, Ма та ін. застосували кевелети другого покоління для оцінки руху та відеостеження геофізичних потоків [34] та зняття розмитостей [32]. Ма і Плонка представили дві різні моделі пониження шуму зображень, поєднуючи дискретні кевелетні перетворення з нелінійними схемами дифузії. У першій моделі [38] до шумних даних застосовується усадка кевелету, а результат додатково обробляється прогнозованою сумарною дифузією змін для утримання лишків псевдо-Гіббса. У другій моделі [42] застосовується нелінійне

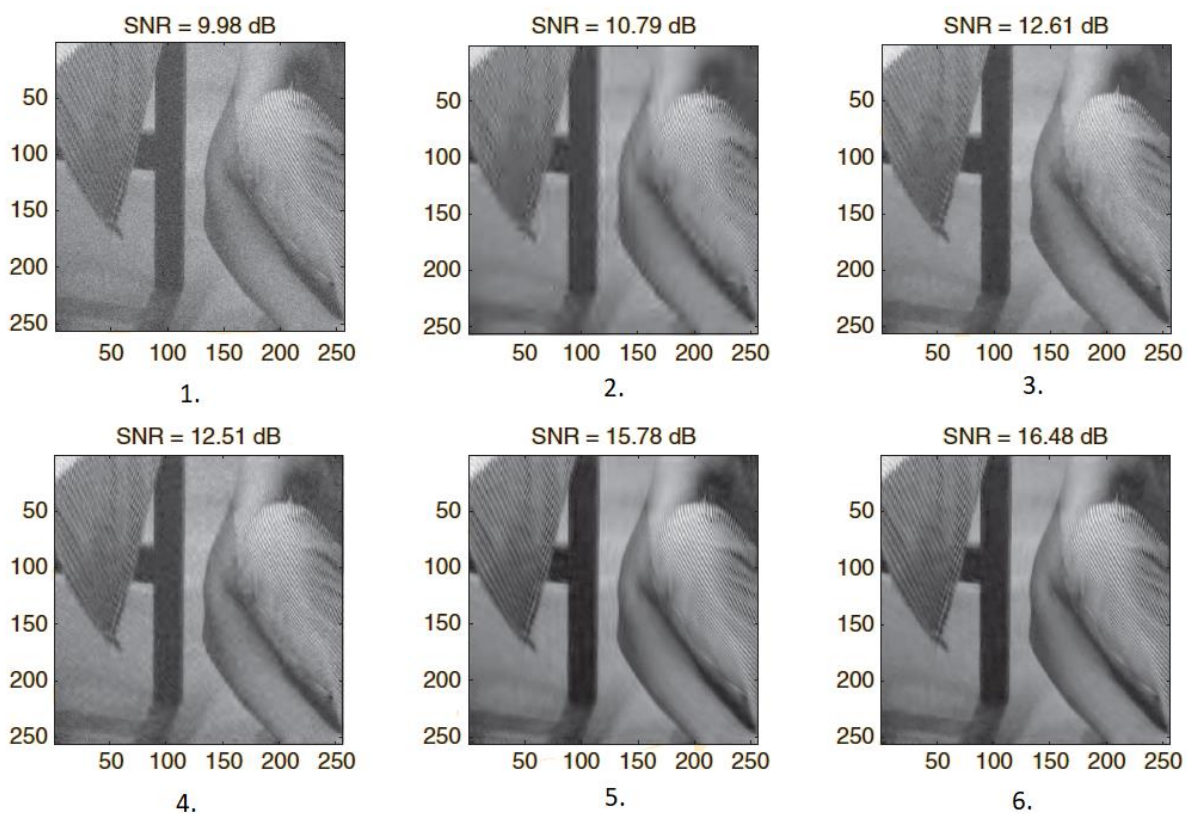
рівняння реакція-дифузія, де для регуляризації дифузійного процесу використовується стиснення кевелетів. Старк та ін. [47], застосовували кевелети для аналізу морфологічних компонентів. Нещодавно Б. Чжан та співавт. [52] використовував кевелети для усунення шуму Пуассона у порівнянні з вейвлетами та риджелями. У роботі [53] С. Zhang та ін. успішно застосував багатомасштабне кевелетне перетворення до багатоцільового водяного знаку для автентифікації вмісту та перевірки авторських прав. Цзян та ін. [28] розглянув структуру та фактурне зображення в живописі за допомогою ітераційного методу порогового вигину. Тессенс та ін. [50] запропонував нове контекстне адаптивне зображення, що зменшує шум шляхом моделювання статистики інтервалів кевелетів. Виконуючи міжпіддіапазонний статистичний аналіз коефіцієнтів кевелетної діаграми, можна розрізнити два класи коефіцієнтів: ті, що представляють корисний вміст зображення, і ті, в яких переважає шум.

Використовуючи попередню модель, засновану на граничній статистиці, був розроблений відповідний місцевий показник просторової активності для кевелетів, який виявився дуже корисним для зменшення шуму зображення, див. [50]. Geback та співавт. [23] застосував кевелети для виявлення країв на мікроскопічних зображеннях.

Цікаво, що чисте дискретне кевелетне перетворення менш придатне для стиснення зображення та зменшення шуму. Причиною може бути надмірність фрейму кевелету. Найбільш вдалим підходами, пов'язаними з дискретним кевелетним перетворенням елементів, є змішані методи, де кевелети поєднуються з іншою технікою обробки зображень. Ці методи, як правило, можуть використовувати здатність кевелетного перетворення представляти

кевелетні особливості.

Наведемо один приклад шумозаглушення зображення [38], де стиснення кевелетів поєднується з нелінійною анізотропною дифузією. На рисунку 4.1 (1) показано частину галасливого зображення Барбери. На рис. 4.1 (2) - (6) представлені результати деномінації, використовуючи тензорні продукти DB4 вейвлетів Daubechies, телевізійну дифузію, контурлети, кевелети та комбіноване телевізійне перетворення [38] відповідно. Методи на основі кевелетів добре зберігають краї та текстури.



[Рис. 4.1] Зменшення зображення: 1. шумне зображення, 2. зашумлення вейвлету, 3. затухання телевізійної дифузії, 4. затухання контуру, 5. зашумлення кевелетної стрічки та 6. шумозаглушення кевелету, поєднане з телевізором.

4.1. Сейсмічне дослідження

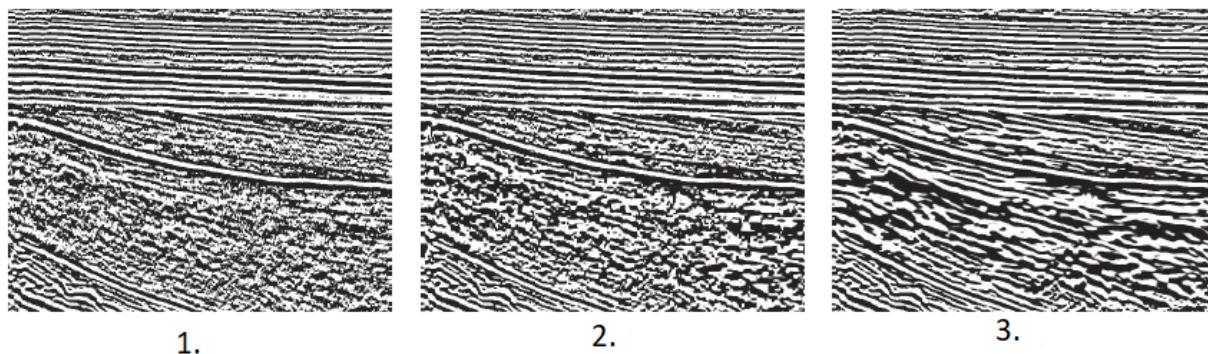
Сейсмічні дані реєструють амплітуди перехідних / відбивних хвиль під час прийому. Амплітудна функція часу називається сейсмічним слідом. Сейсмічні дані або профіль - це збір цих слідів. Всі сліди в сукупності забезпечують просторово-часову вибірку відбитого хвильового поля, що містить різні надходження, які реагують на різні взаємодії поля падаючої хвилі з неоднорідностями в підземній поверхні Землі. Загальними дільниками серед цих надходжень є хвильові фронти (як показано на рисунку 4.2 (1) для реального сейсмічного профілю), які відображають анізотропні лінійноподібні елементи, як краї та текстури на зображеннях. Вони в основному демонструють поведінку C^2 - неперервних кевелетів. Основною характеристикою хвильових фронтів є їх відносна плавність у напрямку вздовж фронтів та їх коливальна поведінка в нормальному напрямку. Найважливішою проблемою в сейсмічній обробці є збереження гладкості уздовж хвильових фронтів, коли потрібно усунути шум. З геофізичної точки зору, кевелети можна розглядати як локальні плоскі хвилі. Вони є оптимальними для незначного представлення місцевих сейсмічних подій і можуть бути ефективно використані для збереження фронту хвилі сейсмічної обробки. Отже, декомпозиція кевелету є відповідним інструментом для обробки сейсмічних даних.

На рис. 4.2 показано зменшення шуму від реальних сейсмічних даних, встановлених за допомогою кевелетів, у порівнянні з вейвлетами. В обох перетвореннях використовується п'ять рівнів розкладання. На рис. 4.3 показано порівняння реконструкції піддіапазону на перших трьох рівнях; від грубої до тонкої шкали. Видно чітко, що кевелетні ефекти діють набагато краще, ніж вейвлети, щоб зберегти фронти / текстури хвиль при

багатомасштабному розкладанні та шумозаглушенні. Ми також спостерігаємо, що кевелетне перетворення дозволяє досягти майже повної реконструкції даних, якщо використовується без будь-якого порогового значення коефіцієнтів.

До цього часу кевелети успішно застосовуються в сейсмічній обробці. Хенненфент та Геррман [25] запропонували нерівномірно відібране вибіркоче перетворення для сейсмічного шуму. Нееламані та ін. [40] запропонували ефективний підхід на основі тривимірних кевелетів для ослаблення випадкових та когерентних шумів у тривимірних даних встановлених з карбонатного середовища. Дума та де Хооп [19] представили сейсмічне зображення провідних порядків за допомогою кевелетів. Вони показують, що використовуючи кевелети, як будівельні блоки сейсмічних даних, дифракційний стек Кірхгофа можна (до першого порядку за кутовою частотою, числом горизонтальних хвиль та перенесеним розташуванням) переписати як перенесення плану координат кевелетів у даних, поєднавши з корекцією амплітуди. Це перенесення плану використовує місцеві схили, що забезпечуються декомпозицією даних за допомогою кевелету. Шауріс і Нгуєн [14] розглядали сейсмічну деміграцію / перенесення в області кевелетів. Перенесення складається з трьох етапів: декомпозиція вхідних сейсмічних даних (наприклад, загальних ділянок зсуву) за допомогою кевелетного перетворення; незалежне перенесення коефіцієнтів кевелетів; та інверсно-кевелетне перетворення для отримання кінцевої глибини перенесеного зображення. В даний час вони концентруються на променевому типі попереднього перенесення глибини (тобто загальнозміщеному перенесенні глибини Кірхгофа) щодо неоднорідних моделей швидкості. Виявляється, кевелети майже не змінюються під час операцій перенесення. Кінцевою метою є можливість отримати

формулювання та побудувати ефективний алгоритм повної інверсії форми хвилі в кевелетній області.



[Рис.4.2] Порівняння сейсмічного шуму: 1. вихідні дані, 2. вейвлет-шум і 3. кевелетний шум.

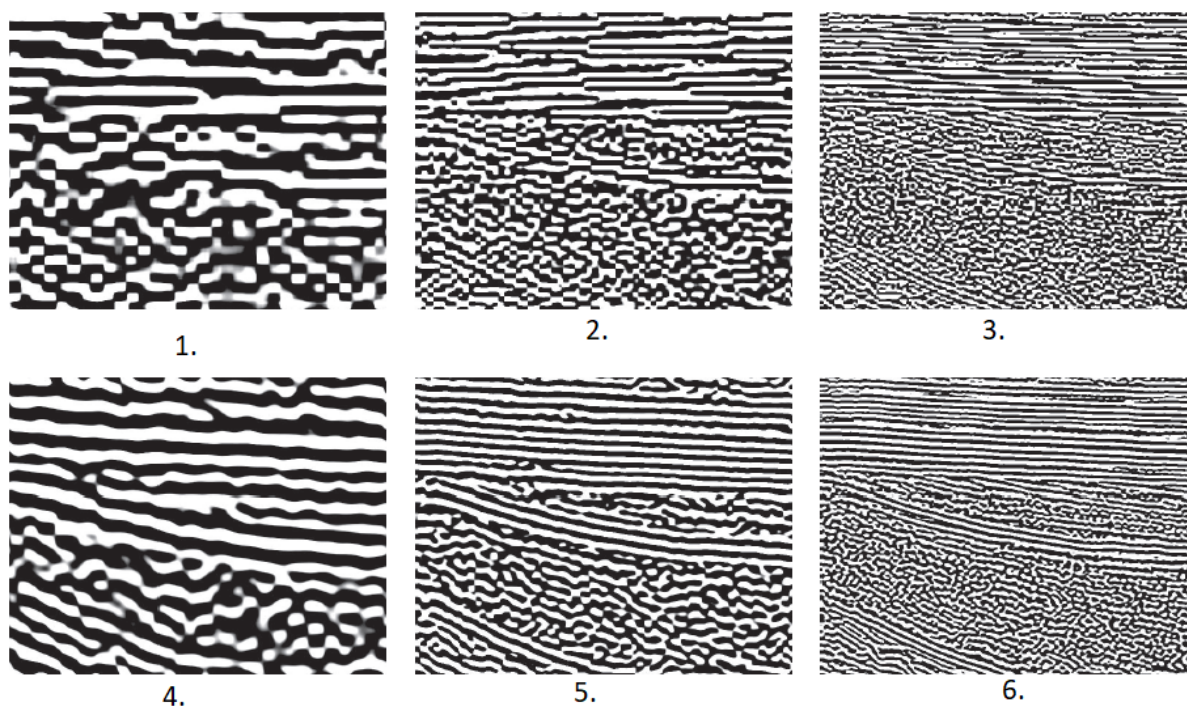
4.3. Аналіз турбулентності в гідромеханіці

Турбулентність була джерелом захоплення протягом століть, оскільки більшість потоків рідини, що відбуваються в природі, як і в технічних цілях, турбулентні. Турбулентність рідини - приклад багатомасштабних явищ, де когерентні структури еволюціонують на некогерентному випадковому тлі. Турбулентність важко наблизити та проаналізувати математично або обчислити чисельно через її діапазон просторових та часових шкал. Геометричне представлення потокових структур може здатися обмеженим чітко визначеним набором кевелетів, уздовж яких дані є особливими. Як наслідок, ефективне стиснення поля потоку з мінімальними втратами геометричних структур потоку є критичним питанням при моделюванні турбулентності. Розробка відповідних інструментів для вивчення вихорового пробою, відновлення вихорів та турбулентного захоплення на ламінарно-турбулентних інтерфейсах є надзвичайно важливими для покращення нашого розуміння турбулентності. Такі інструменти

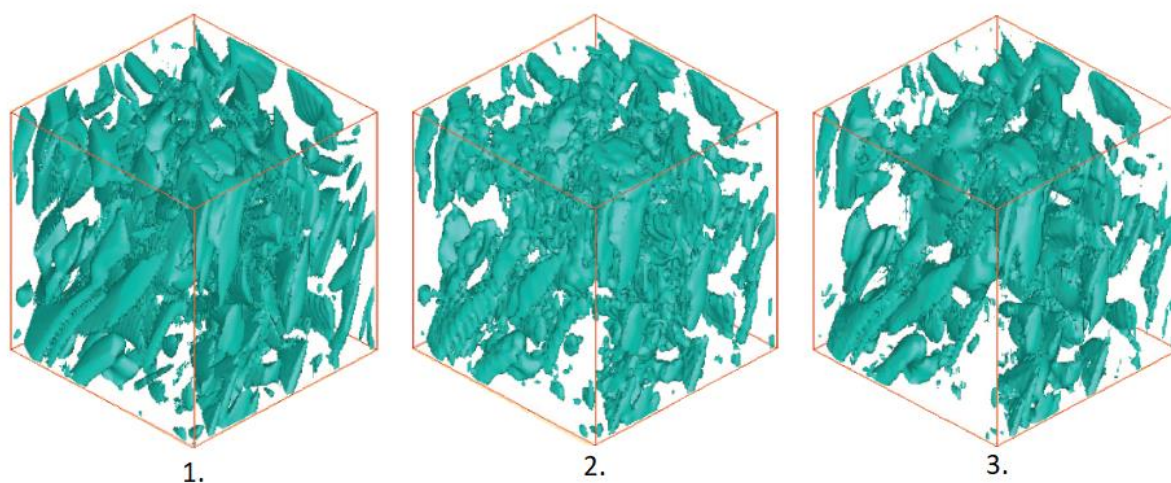
повинні точно фіксувати вихрову структуру та динаміку, щоб розкрити фізичні механізми, що лежать в основі цих явищ.

Нещодавно кевелети були застосовані для вивчення нелокальної геометрії вихрових конструкцій та вилучення когерентного вихрового поля в турбулентних потоках [8], [36], [37]. Кевелети починають впливати на поле аналізу турбулентності та мають потенціал випереджати вейвлет-подання турбулентних потоків [21], [22]. Багатомасштабна геометрична властивість, реалізована за допомогою кевелетів, забезпечує основу для вивчення еволюції структур, пов'язаних з основними діапазонами масштабів, визначених у просторі Фур'є, зберігаючи при цьому локалізацію у фізичному просторі, що дозволяє проводити геометричне дослідження таких структур. Така геометрична характеристика може забезпечити краще розуміння механіки каскаду та динаміки діапазону дисипації. Більше того, кевелети можуть сприяти розробці структурних моделей дрібних масштабів турбулентності, моделей підмереж для масштабного вихрового моделювання та методів моделювання, заснованих на попередніх перетвореннях вейвлетів [8].

На рисунку 4.4 наведено приклад вилучення когерентних полів із турбулентних потоків. Метод кевелетного збереження країв і структур краще, ніж вейвлет-метод. Результати багатомасштабного аналізу турбулентності залежать від порогу або усадки. Питання про те, як знайти оптимальний поріг для розділення когерентних полів та некогерентних випадкових полів, все ще залишається відкритим.



[Рис.4.3] Порівняння реконструкції піддіапазону на перших трьох рівнях від грубої шкали до дрібної шкали за допомогою 1-3 вейвлет-перетворення та 4-6 кевелетного перетворення.



[Рис.4.4] Вилучення когерентних полів з турбулентних потоків: 1. вихідний потік, 2. когерентні компоненти за допомогою вейвлетів і 3. кевелетів.

4.4. Рішення диференціальних рівнянь з частинними похідними

Кандес і Демане [8], [6] показали, що кевелети по суті забезпечують оптимально розріджене подання інтегральних операторів Фур'є. Хоча вейвлет-перетворення є оптимальним для розв'язання еліптичних диференціальних рівнянь з частинними похідними, мотивація використання кевелетного перетворення полягає в тому, що для широкого класу лінійних гіперболічних диференціальних рівнянь подання кевелетного оператора є рішенням як і оптимально розрідженим, так і добре організованим. Розрідженість означає, що записи в матриці розпадаються майже експоненціально швидко, і вони добре організовані в тому сенсі, що дуже мало незначних записів відбувається поблизу кількох зсунутих діагоналей. Хвильові фронти розчинів також можуть бути слабо представлені в кевелетній області [6]. Ключовою ідеєю існуючих методів є спочатку розкласти початкові поля за допомогою кевелетного перетворення, а потім обчислити жорсткі рухи значущих кевелетних коефіцієнтів вздовж потоків гамільтонових променів у кожному масштабі. Нарешті, потрібно реконструювати коефіцієнти розгортання на всіх масштабах за допомогою зворотного кевелетного перетворення і отримати приблизне хвильове поле $u(x, t)$ за заданий час t . Теорія досить ясна, але все ще далека від практичного застосування. Цитовані вище роботи показують потенціал кевелетів для вирішення диференціальних рівнянь з частинними похідними з точки зору математичного аналізу та викликають надію на досягнення швидких алгоритмів для вирішення гіперболічних диференціальних рівнянь з частинними похідними з використанням кевелетів.

Розглянемо хвильове рівняння із пов'язаною з ним задачею Коші про початкового значення:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = v^2 \Delta u(x, t) \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x). \quad (9)$$

Для простоти припустимо, що v - постійна швидкість хвилі, а $\Delta u(x, t) = \frac{\partial^2}{x_1^2} u(x, t) + \frac{(\partial^2)}{(x_2^2)} u(x, t)$ позначає звичайний оператор Лапласа. Його рішення може бути записано як, $u(x, t) = F(x, t)u_0(x) + G(x, t)u_1(x)$ з відповідними операторами рішення $F(x, t)$ і $G(x, t)$ (за участю функцій Гріна), які можуть бути скупом представлені в області інтервалів.

Скінченні кевелетні схеми для рівнянь сейсмічних хвиль на основі кевелетів вивчалися у [48]. Метою є побудова швидкої адаптивної схеми для чисельного моделювання поширення хвилі. Подібно до попередніх схем скінченних різниць на основі вейвлетів, однією з найважливіших проблем є дослідження того, як диференціальний оператор Δ (або ∂_{x_i}) може бути ефективно обчислений за допомогою кевелетного перетворення. Двовимірне хвильове поле u може бути перетворено в область кевелетних значень за допомогою $u(x_1, x_1, t) = \sum_{\mu} c_{\mu}(t) \phi_{\mu}(x_1, x_1)$.

Тут ми використовували властивість тісного фрейму (7) з коротким позначенням $\mu = (j, k, l)$, а $c_{\mu}(t)$ позначає коефіцієнт μ -го кевелету u в момент часу t . Можливим способом обчислення коефіцієнтів кевелету Δu :

$$c_{\mu}^{\Delta} := c_{\mu}(\Delta u) := \int \Delta u(x, t) \overline{\phi_{\mu}(x)} dx = \int \widehat{\Delta u}(\xi, t) \overline{\widehat{\phi_{\mu}}(\xi)} d\xi =$$

$$\int (-\xi_1^2 - \xi_2^2) \widehat{u}(\xi, t) \overline{\widehat{\phi_{\mu}}(\xi)} d\xi.$$

Використовуючи визначення коефіцієнтів кевелету, отримаємо

$$S_{\theta_{j,l}} \xi = (\xi_1, -\xi_1 \tan \theta_{j,l} + \xi_2)^T$$

$$\begin{aligned} c_{\mu}^{\Delta} &= \int [-(1 + \tan^2 \theta_{j,l}) \xi_1^2 - \xi_2^2 + 2(\tan \theta_{j,l}) \xi_1 \xi_2] \\ &\quad \times \widehat{u}(S_{\theta_{j,l}} \xi) \widehat{\phi}_{j,0,0}(\xi) e^{i\langle k_j, \xi \rangle} d\xi \\ &= 4^j (1 + \tan^2 \theta_{j,l}) \frac{\partial^2 c_{\mu}}{\partial k_1^2} + 4^{\lfloor j/2 \rfloor} \frac{\partial^2 c_{\mu}}{\partial k_2^2} - 2^{j+1} 2^{\lfloor j/2 \rfloor} \tan \theta_{j,l} \frac{\partial^2 c_{\mu}}{\partial k_1 \partial k_2}. \end{aligned}$$

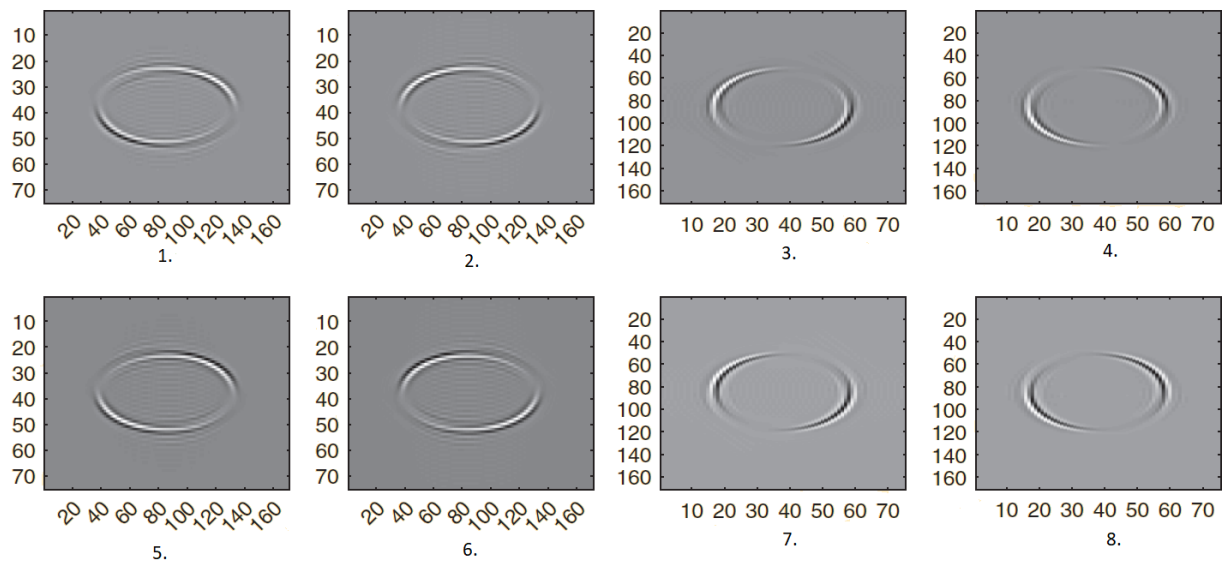
Тут ми нагадуємо, що $k = (k_1, k_2)^T \in \mathbb{Z}^2$ та $k_j = \left(\frac{k_1}{2^j}, \frac{k_2}{2^{\lfloor j/2 \rfloor}} \right)^T$. Це

означає, що ми можемо отримати коефіцієнти кевелету Δu , використовуючи коефіцієнти миттєвого хвильового поля u . Таким чином, ми можемо переписати хвильове рівняння в область коефіцієнтів

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 c_{\mu}}{\partial t^2} &= v^2 \left(4^j (1 + \tan^2 \theta_{j,l}) \frac{\partial^2 c_{\mu}}{\partial k_1^2} + 4^{\lfloor j/2 \rfloor} \frac{\partial^2 c_{\mu}}{\partial k_2^2} \right. \\ &\quad \left. - 2^{j+1} 2^{\lfloor j/2 \rfloor} \tan \theta_{j,l} \frac{\partial^2 c_{\mu}}{\partial k_1 \partial k_2} \right). \end{aligned} \tag{10}$$

На рисунку 4.5 наведено приклад кевелетних коефіцієнтів поля миттєвої хвилі в найгрубішій шкалі деталей кевелетного простору шляхом реалізації обчислень в області кевелетних зон, як зазначено в (10) [48]. Використовуючи відповідне порогове значення, можна

здійснити швидке адаптивне обчислення для поширення хвилі. На жаль, через надмірність поточного алгоритму дискретних кевелетів, кевелети не виконали роботу на тому рівні, який ми очікували. Матриці не такі розріджені, як обіцяють оцінки. Ефективна чисельна обробка диференціальних рівнянь з частинними похідними з використанням кевелетних систем все ще залишається проблемою.



[Рис. 4.5] Коефіцієнти кевелетного поля миттєвої хвилі в найгрубшій шкалі деталей кевелету. 1-8 позначає вісім різних спрямованих піддіапазонів у цій кевелетній шкалі.

4.5. Стиснене зондування

Нарешті, ми згадуємо новий напрямок застосувань кевелетного перетворення до так званого стисненого зондування або стискаючої вибірки, оберненої задачі при дуже неповних вимірах. Стиснене зондування - новий приклад вибірки, яка одночасно виконує зображення та стиснення [12], [13], [18]. Теорія стисненого зондування говорить, що стислий невідомий сигнал можна відновити за допомогою невеликої кількості випадкових вимірювань за допомогою нелінійних алгоритмів відновлення, що сприяють розрідженості. Кількість необхідних вимірювань значно менше, ніж

кількість необхідних традиційних вимірювань, які задовольняють теорему вибірки Шеннона / Найквіста, де частота дискретизації повинна бути принаймні вдвічі більшою за максимальну частоту сигналу. Збір даних на базі стисненого зондування залежить не від пропускної здатності, а від її розрідженості. Стиснене зондування може мати важливий вплив на проектування вимірювальних приладів у різних областях техніки, таких як візуалізація медичного магнітно-резонансного (МРТ) та дистанційного зондування, особливо для випадків, що включають неповні та неточні вимірювання, обмежені фізичними обмеженнями, або дуже дороге отримання даних.

Математично ми вирішуємо фундаментальну проблему відновлення сигналу $x \in \mathbb{R}^N$ з невеликого набору вимірювань $y \in \mathbb{R}^K$. Нехай $A \in \mathbb{R}^{K \times N}$ - це так звана матриця вимірювання стисненого зондування, де $K \ll N$, тобто в матриці набагато менше рядків, ніж стовпців. Вимірювання можна описати як

$$y = Ax + \epsilon. \quad (11)$$

Тут ϵ позначає можливі похибки вимірювання або шум. Здається, безперспективно вирішувати цю неправильно поставлену невизначену лінійну систему, оскільки число рівнянь набагато менше, ніж число невідомих змінних. Однак, якщо x стискається перетворенням, як, наприклад, $x = T^{-1}c$, де T позначає дискретне кевелетне перетворення, а послідовність дискретних кевелетних коефіцієнтів $c = (c_\mu)$ розріджена, то ми маємо $y = AT^{-1}c + \epsilon$. Якщо матриця вимірювання A не співвідноситься з T , розріджена послідовність коефіцієнтів кевелетів c може бути відновлена обмеженням розрідженості l_1 -мінімізацією:

$$\min_c \|y - \tilde{A}c\|_{l_2} + \lambda \|c\|_{l_1}.$$

Другий вираз - це вираз регуляризації, який представляє апіорну інформацію розрідженості. Для вирішення мінімізації можна використовувати ітераційне порогове значення кевелету на основі методу спуску Ландвебера [26]

$$c_{p+1} = S_{\tau} \left(c_p + \tilde{A}^T (y - \tilde{A}c_p) \right),$$

до $\|c_{p+1} - c_p\| < \varepsilon$ для даної похибки ε . Тут (м'яка) порогова функція S_{τ} , задана

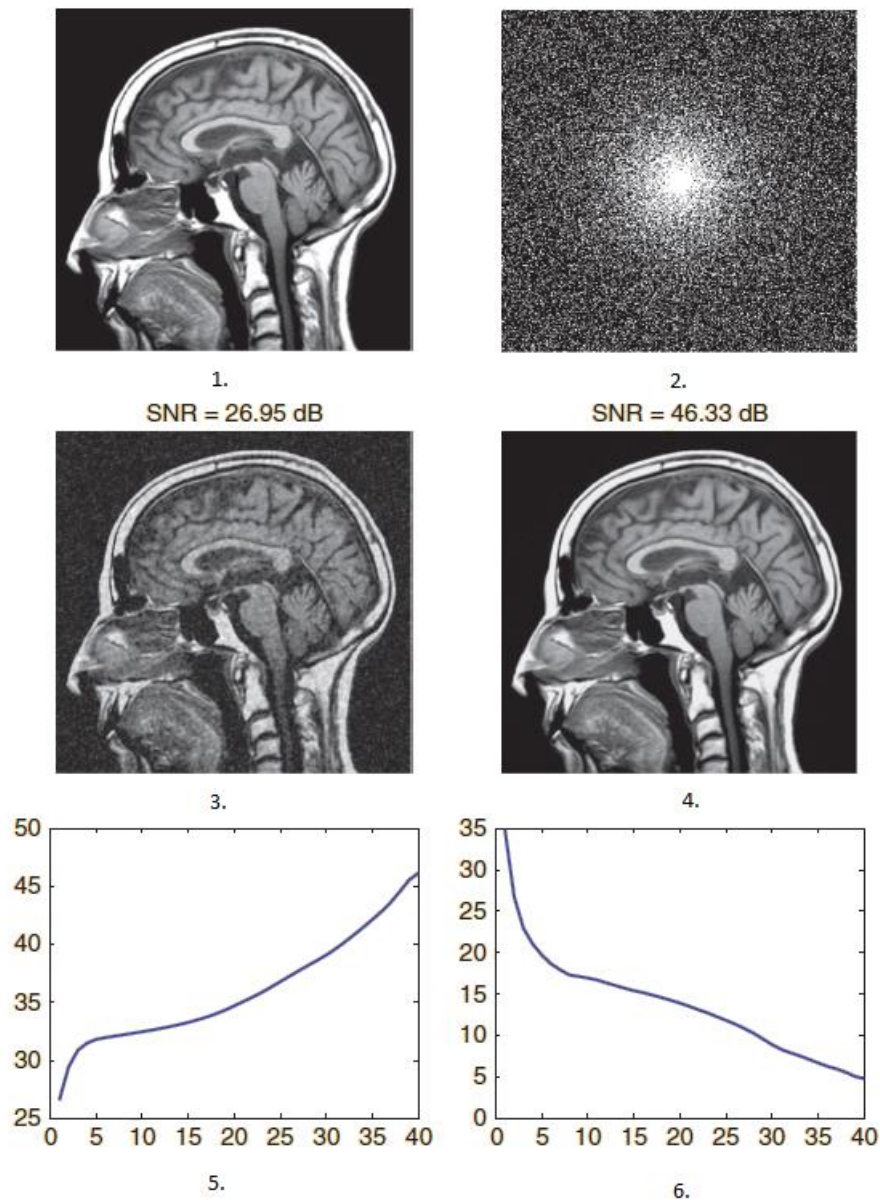
$$S_{\tau}(x) = \begin{cases} x - \tau, & x \geq \tau, \\ x + \tau, & x \leq -\tau, \\ 0, & |x| < \tau, \end{cases}$$

сприймається компонентом розумно, тобто для послідовності $a = (a_{\mu})$ маємо $S_{\tau}(a) = (S_{\tau}a_{\mu})$.

На рисунку 1.6 наведено приклад стисненого зондування з 25-процентним вимірюванням Фур'є. Тут оператор A отримується випадковим підвибірком матриці Фур'є. На рисунку 1.6 (2) показано 25% зразків у інтервалі Фур'є, на рисунку 1.6 (3) - результат відновлення при реконструкції з нульовим заповненням, а на рисунку 1.6 (4) - результат, отриманий за допомогою кевелетів. На рисунках 1.6 (5) та (6) позначені зміни SNR та похибки відновлених зображень із збільшенням кількості ітерацій. Невідоме зображення МРТ можна отримати, використовуючи вкрай неповні вимірювання, що може зменшити час онлайн-вимірювання і, таким чином, зменшити біль пацієнта.

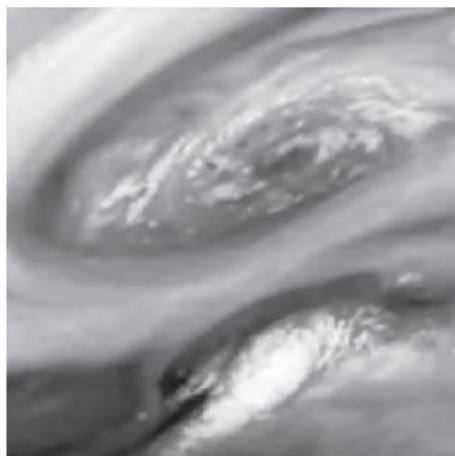
Мотивація застосування методу кевелетного обмеження полягає в тому, що більшість природних зображень стискаються кевелетним перетворенням. В даний час кілька дослідників застосовують метод кевелетів для стисненого зондування при відновленні сейсмічних даних [26], [27], [49] та дистанційному зондуванні [33], [35]. Варіанти

методів кевелету [44] також були запропоновані для стисненого зондування.



[Рис.1.6] Стиснене зондування в області Фур'є для медичної візуалізації: 1. оригінальне зображення МРТ, 2. псевдовипадкове відбір проб Фур'є, 3. відновлення за допомогою реконструкції з нульовим заповненням, 4. відновлення за допомогою ІКТ, 5. SNR (в дБ) відновленого зображення в порівнянні з кількістю ітерацій для кевелетів та 6. похибка відновлення в порівнянні з кількістю ітерацій для кевелетів.

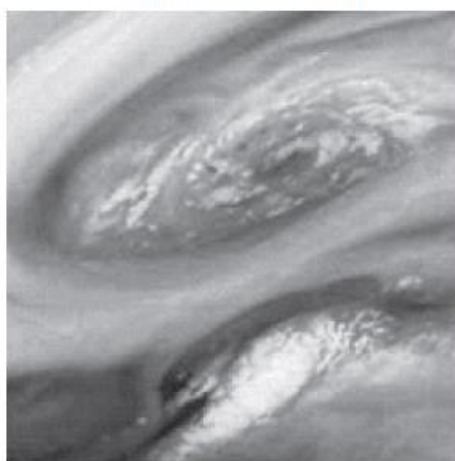
SNR = 42.48 dB



1.

2.

SNR = 53.13 dB



3.

4.

[Рис. 1.7] Стиснене зондування при дистанційному зондуванні: 1. відновлення шляхом ітеративного порогового значення вейвлету, 2. похибка відновлення методом вейвлету, 3. відновлення за допомогою кевелетів та 4. похибка відновлення методом кевелетного вимірювання.

На рисунку 1.7 наведено приклад стисненого зондування на основі кевелету у дистанційному зондуванні [33], [35]. Видно, що метод кевелетного перевершує вейвлет-метод відновлення країв.

Висновок

На основі всіх вищезгаданих досліджень, можна зробити висновок, що кевелети – наступне покоління вейвлетів, котре узагальнює поняття класичного вейвлету. Базовий елемент кевелету (чотирикутник із двома кривими сторонами) відрізняється від базового елемента вейвлету (прямокутник), і ця відмінність проявляється у багатьох моментах: як і у базових властивостях, теоремах, так і на практичних застосуваннях.

Також було продемонстровано застосування кевелету в різних сучасних технологіях (обробка зображень, сейсмічне дослідження, гідромеханіка та ін.), де новий вид вейвлету- кевелети, показали більш точні та кращі представлення рисунків, що надає кевелетам перевагу над звичайними вейвлетами.

Тому можна стверджувати, що кевелети на сучасному рівні кращі, ніж класичні вейвлети, оскільки вони не лише узагальнюють звичайні вейвлети, а і є набагато актуальнішими та точнішими на практиці застосувань.

Список використаної літератури:

- [1] Cattani C., Rushchitsky J.J. "Wavelet and wave analysis as applied to materials with micro or nanostructures." Singapore-London: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2007, 466 p.
- [2] E. Candès, "Harmonic analysis of neural networks," *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, vol. 6, no. 2, pp. 197–218, 1999.
- [3] E. Candès and D. Donoho, "Ridgelets: A key to higher-dimensional intermittency?" *Philos. Trans. R. Soc. London A, Math. Phys. Eng. Sci.*, vol. 357, no. 1760, pp. 2495–2509, 1999.
- [4] E. Candès and D. Donoho, "Curvelets—A surprisingly effective nonadaptive representation for objects with edges," in *Curves and Surface Fitting: Saint-Malo 1999*, A. Cohen, C. Rabut, and L. Schumaker, Eds. Nashville: Vanderbilt Univ. Press, 2000, pp. 105–120.
- [5] I. Bermejo-Moreno and D. Pullin, "On the non-local geometry of turbulence," *J. Fluid Mech.*, vol. 603, pp. 101–135, 2008.
- [6] E. Candès and L. Demanet, "The curvelet representation of wave propagators is optimally sparse," *Commun. Pure Appl. Math.*, vol. 58, no. 11, pp. 1472–1528, 2005.
- [7] E. Candès and L. Demanet, "Curvelets and Fourier integral operators," *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, vol. 336, no. 5, pp. 395–398, 2003.
- [8] E. Candès, L. Demanet, D. Donoho, and L. Ying, "Fast discrete curvelet transforms," *Multiscale Model. Simul.*, vol. 5, no. 3, pp. 861–899, 2006.
- [9] L. Demanet and L. Ying, "Curvelets and wave atoms for mirror-extended images," in *Proc. SPIE Wavelets XII*, San Diego, Aug. 2007, vol. 6701, p. 67010J.
- [10] E. Candès and D. Donoho, "Continuous curvelet transform. II. Discretization and frames," *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, vol. 19, no. 2, pp. 198–222, 2005.
- [11] E. Candès and D. Donoho, "New tight frames of curvelets and optimal representations of objects with piecewise singularities," *Commun. Pure Appl. Math.*, vol. 57, no. 2, pp. 219–266, 2004.

- [12] E. Candès, J. Romberg, and T. Tao, “Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements,” *Commun. Pure Appl. Math.*, vol. 59, no. 8, pp. 1207–1233, 2006.
- [13] E. Candès and T. Tao, “Decoding by linear programming,” *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 51, no. 12, pp. 4203–4215, 2005.
- [14] H. Chauris and T. Nguyen, “Seismic demigration/migration in the curvelet domain,” *Geophysics*, vol. 73, no. 2, pp. S35–S46, 2008.
- [15] M. Choi, R. Kim, M. Nam, and H. Kim, “Fusion of multispectral and panchromatic satellite images using the curvelet transform,” *IEEE Geosci. Remote Sens. Lett.*, vol. 2, no. 2, pp. 136–140, 2005.
- [16] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*. Philadelphia, PA: SIAM, 1992.
- [17] M. Do and M. Vetterli, “The contourlet transform: An efficient directional multiresolution image representation,” *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 14, no. 12, pp. 2091–2106, 2005.
- [18] D. Donoho, “Compressed sensing,” *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 52, no. 4, pp. 1289–1306, 2006.
- [19] H. Douma and M. de Hoop, “Leading-order seismic imaging using curvelets,” *Geophysics*, vol. 72, no. 6, pp. S231–S248, 2007.
- [20] W. Freeman and E. Adelson, “The design and use of steerable filters,” *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, vol. 13, no. 9, pp. 891–906, 1991.
- [21] M. Farge, N. Kevlahan, V. Perrier, and E. Goirand, “Wavelets and turbulence,” *Proc. IEEE*, vol. 84, no. 4, pp. 639–669, 1996.
- [22] M. Farge, G. Pellegrino, and K. Schneider, “Coherent vortex extraction in 3D turbulent flows using orthogonal wavelets,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 87, no. 5, pp. 45011–45014, 2001.
- [23] T. Geback and P. Koumoutsakos, “Edge detection in microscopy images using curvelets,” *BMC Bioinformatics*, vol. 10, no. 75, 2009.
- [24] K. Guo and D. Labate, “Optimally sparse multidimensional representation using shearlets,” *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 39, no. 1, pp. 298–318, 2007.
- [25] G. Hennenfent and F. Herrmann, “Seismic denoising with nonuniformly

- sampled curvelets,” *Comput. Sci. Eng.*, vol. 8, no. 3, pp. 16–25, 2006.
- [26] F. Herrmann and G. Hennenfent, “Non-parametric seismic data recovery with curvelet frames,” *Geophys. J. Int.*, vol. 173, no. 1, pp. 233–248, 2008.
- [27] F. Herrmann, P. Moghaddam, and C. Stolk, “Sparsity- and continuity-promoting seismic image recovery with curvelet frames,” *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, vol. 24, no. 2, pp. 150–173, 2008.
- [28] L. Jiang, X. Feng, and H. Yin, “Structure and texture image inpainting using sparse representations and an iterative curvelet thresholding approach,” *Int. J. Wavelets Multiresolut. Inform. Process.*, vol. 6, no. 5, pp. 691–705, 2008.
- [29] D. Labate, W.-Q. Lim, G. Kutyniok, and G. Weiss, “Sparse multidimensional representation using shearlets,” in *Proc. SPIE Wavelets XI*, San Diego, CA, 2005, vol. 5914, pp. 254–262.
- [30] T. Lee, “Image representation using 2D Gabor wavelets,” *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, vol. 18, no. 10, pp. 1–13, 2008.
- [31] Y. Lu and M. N. Do, “Multidimensional directional filter banks and surfacelets,” *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 16, no. 4, pp. 918–931, 2007.
- [32] J. Ma, “Deblurring using singular integrals and curvelet shrinkage,” *Phys. Lett. A*, vol. 368, pp. 245–250, 2007.
- [33] J. Ma, “Single-pixel remote sensing,” *IEEE Geosci. Remote Sens. Lett.*, vol. 6, no. 2, pp. 199–203, 2009.
- [34] J. Ma, A. Antoniadis, and F.-X. Le Dimet, “Curvelet-based multiscale detection and tracking for geophysical fluids,” *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, vol. 44, no. 12, pp. 3626–3637, 2006.
- [35] J. Ma and F.-X. Le Dimet, “Deblurring from highly incomplete measurements for remote sensing,” *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, vol. 47, no. 3, pp. 792–802, 2009.
- [36] J. Ma and M. Hussaini, “Three-dimensional curvelets for coherent vortex analysis of turbulence,” *Appl. Phys. Lett.*, vol. 91, no. 18, p. 184101, 2007.
- [37] J. Ma, M. Hussaini, O. Vasilyev, and F.-X. Le Dimet, “Multiscale geometric analysis of turbulence by curvelets,” *Phys. Fluids*, vol. 21, p. 075104, 2009.

- [38] J. Ma and G. Plonka, “Combined curvelet shrinkage and nonlinear anisotropic diffusion,” *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 16, no. 9, pp. 2198–2206, 2007.
- [39] S. Mallat and G. Peyré, “A review of bandlet methods for geometrical image representation,” *Numer. Algorithms*, vol. 44, no. 3, pp. 205–234, 2007.
- [40] R. Neelamani, A. Baumstein, D. Gillard, M. Hadidi, and W. Soroka, “Coherent and random noise attenuation using the curvelet transform,” *The Leading Edge*, vol. 27, no. 2, pp. 240–248, 2008.
- [41] E. Le Pennec and S. Mallat, “Sparse geometrical image approximation with bandlets,” *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 14, no. 4, pp. 423–438, 2005.
- [42] G. Plonka and J. Ma, “Nonlinear regularized reaction-diffusion filters for denoising of images with textures,” *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 17, no. 8, pp. 1283–1294, 2008.
- [43] E. Simoncelli, W. Freeman, E. Adelson, and D. Heeger, “Shiftable multiscale transforms,” *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 38, no. 2, pp. 587–607, 1992.
- [44] G. Plonka and J. Ma, “Curvelet-wavelet regularized split Bregman method for compressed sensing,” *Int. J. Wavelets Multiscale Inform. Processing*, to be published.
- [45] J. Starck, E. Candès, and D. Donoho, “Astronomical image representation by the curvelet transform,” *Astron. Astrophys.*, vol. 398, pp. 785–800, 2003.
- [46] J. Starck, F. Murtagh, E. Candès, F. Murtagh, and D. Donoho, “Gray and color image contrast enhancement by the curvelet transform,” *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 12, no. 6, pp. 706–717, 2003.
- [47] J. Starck, M. Elad, and D. Donoho, “Image decomposition via the combination of sparse representation and a variational approach,” *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 14, no. 10, pp. 1570–1582, 2005.
- [48] B. Sun, J. Ma, H. Chauris, and H. Yang, “Solving the wave equation in the curvelet domain: A multiscale and multidirectional approach,” *J. Seismic Exploration*, vol. 18, no. 4, pp. 385–399, 2009.

- [49] G. Tang, R. Shahidi, J. Ma, and F. Herrmann, “Two dimensional stochastic sampling schemes for curvelet based seismic data recovery,” submitted for publication.
- [50] L. Tessens, A. Pizurica, A. Alecu, A. Munteanu, and W. Philips, “Context adaptive image denoising through modeling of curvelet domain statistics,” *J. Electron. Imaging*, vol. 17, no. 3, pp. 03021:1–03021:17, 2008.
- [51] R. Willett and K. Nowak, “Platelets: A multiscale approach for recovering edges and surfaces in photon-limited medical imaging,” *IEEE Trans. Med. Imaging*, vol. 22, no. 3, pp. 332–350, 2003.
- [52] B. Zhang, J. Fadili, and J. Starck, “Wavelets, ridgelets, and curvelets for Poisson noise removal,” *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 17, no. 7, pp. 1093–1108, 2008.
- [53] C. Zhang, L. Cheng, Z. Qiu, and L. Cheng, “Multipurpose watermarking based on multiscale curvelet transform,” *IEEE Trans. Inform. Forensics Security*, vol. 3, no. 4, pp. 611–619, 2008.