НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
Фізико-математичний факультет
Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

«На правах рукопису»
УДК ______________

До захисту допущено:
Завідувач кафедри
________ О.І. Клесов
«14» травня 2021 р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

за освітньо-науковою програмою «Страхова та фінансова математика»

зі спеціальності 111 «Математика»

на тему: «Збіжність в середньому послідовності поліномів Джексона до суми тригонометричного ряду»

Виконала:
студентка ІІ курсу магістратури, групи ОМ-91мн
Котенджі Інна Олександрівна ___________

Науковий керівник:
доктор фізико-математичних наук, професор
Задерей Петро Васильович
____

Рецензент:
Доктор фіз.-мат. наук, снс,
Провідний науковий співробітник відділу теорії функцій
Інституту математики НАН України,
А.С. Сердюк ___________

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студентка ______________

Київ – 2021 року

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Фізико-математичний факультет

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Спеціальність – 111 Математика

Освітньо-наукова програма «Страхова та фінансова математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

__________ О.І. Клесов

«04» лютого 2021 р.

ЗАВДАННЯ

на магістерську дисертацію студенту

Котенджі Інни Олександрівни

1.Тема дисертації «Збіжність в середньому послідовності поліномів Джексона до суми тригонометричного ряду», науковий керівник дисертації доктор фізико-математичних наук, професор Задерей Петро Васильович, затверджені наказом по університету від «26» березня 2021 р. № 901-с.

2. Термін подання студентом дисертації 13 травня 2021р.

3. Об'єктом дослідження є тригонометричні ряди та ряди Фур'є.

4.Предметом дослідження є накладання умов на коефіцієнти тригонометричного ряду, щоб даний ряд був рядом Фур'є.

5. Перелік завдань, які потрібно виконати:

1) Ознайомитися літературою та навести означення тригонометричного ряду та ряду Фур'є.

2) навести важливі теореми, що забезпечують збіжність тригонометричних рядів, необхідні та достатні умови інтегровності тригонометричних рядів;

3) довести теорему про умови на коефіцієнти дійсних тригонометричних рядів при виконанні яких даний тригонометричний ряд буде рядом Фур'є.

6. Орієнтовний перелік ілюстративного матеріалу: 15 слайдів.

7. Орієнтовний перелік публікацій

Задерей П.В., Задерей Н.М., Нефьодова Г.Д., Котенджі І.О. Вивчення умов інтегровності тригонометричних рядів в курсі математичного аналізу // Редакція Міжнародного електронного науково-практичного журналу «WayScience»// Інтеграція освіти, науки та бізнесу в сучасному середовищі: зимові диспути: тези доп. І Міжнародної науково-практичної інтернетконференції, 6-7 лютого 2020 р. – Дніпро, 2020. – Т.1. – 561 с.

8. Дата видачі завдання 4 лютого 2021р.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1	Огляд літератури	04.02.21-07.02.21	виконано
2	Огляд та написання основних означень, тверджень	08.02.21-22.02.21	виконано

3	Написання відомих теорем, в яких зазначені необхідні та достатні умови інтегровності дійсних тригонометричних рядів	23.02.21-07.03.21	виконано
4	Означення та наведення властивостей ядер Діріхле, Фейєра, Джексона.	09.03.21-16.03.21	виконано
5	Лінійні методи сумування рядів Фур'є та Λ - метод	17.03.21-23.03.21	виконано
6	Формулювання та доведення теореми про умови на коефіцієнти комплексних тригонометричних рядів	24.03.21-18.04.21	виконано
7	Висновки	19.04.21-24.04.21	виконано
8	Оформлення результатів	25.04.21-11.05.21	виконано

Студент І. О. Котенджі

Науковий керівник П. В. Задерей

РЕФЕРАТ

Магістерська дисертація: 41 сторінка, 15 слайдів презентації, 15 першоджерел.

В магістерській дисертаційній роботі знайдені необхідні та достатні умови на коефіцієнти тригонометричного ряду, пов'язані з поліномами Джексона при виконанні яких даний ряд є рядом Фур'є.

Актуальність роботи. Однією з найважливіших задач теорії тригонометричних рядів є встановлення необхідних та достатніх умов на коефіцієнти тригонометричного ряду при виконанні яких даний ряд є рядом Фур'є сумовної функції. Ці умови забезпечують скінченність інтегралів від модулів функцій, що зображаються своїми рядами Фур'є. Їх називають умовами інтегровності тригонометричних рядів

Метою даної роботи є встановлення умов на коефіцієнти даного тригонометричного ряду при яких суми Джексона цього ряду збігаються в середньому до даного тригонометричного ряду.

Об'єктом дослідження є послідовність поліномів Джексона побудована за даним тригонометричним рядом.

Предметом дослідження є умови на коефіцієнти тригонометричного ряду, при яких даний ряд буде рядом Фур'є.

Дисертація носить теоретичне значення, а її результати можуть використовуватись при наближенні класів узагальнено диференційовних функцій сумами Джексона.

Ключові слова: тригонометричний ряд, ряди Фур'є, коефіцієнти ряду Фур'є, поліноми Джексона, умови інтегровності.

ABSRACT

Master's thesis: 41 pages, 15 slides of presentation, 15 primary sources.

Master's dissertation is devoted to the necessary and sufficient conditions for the coefficients of the trigonometric series associated with Jackson's polynomials under the preceding conditions this series are a Fourier series.

Relevance of work. One of the most important tasks of the theory of trigonometric series is to establish the necessary and sufficient conditions for the coefficients of a trigonometric series under which this series is a Fourier series of sum sum function. These conditions provide the finiteness of the integrals from the modules of the functions represented by their Fourier series. They are called conditions for the integration of trigonometric series.

The purpose of current work is to establish conditions for the coefficients of a given trigonometric series in which the Jackson sum of this series coincide on average to a given trigonometric series.

The object of the study is a sequence of Jackson polynomials constructed on this trigonometric series.

The subject of the study is the conditions for the coefficients of the trigonometric series, at which this series will be a Fourier series.

The dissertation has theoretical significance, and its results can be used in the approximation of classes of generalized differential functions by Jackson sums.

Keywords: trigonometric series, Fourier series, coefficients of Fourier series, Jackson polynomials, integrability conditions.

ЗМІСТ

ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

$\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел;

$\exists$ - квантор існування, «існує»;

$\forall$ – квантор загальності, «для будь-якого»;

L_p – простір 2π-періодичних сумовних в p-тому степені функцій;

$\|f\|_p$ – норма функцій f у просторі L_p;

Вступ

Магістерська дисертаційна робота присвячена встановленню необхідних та достатніх умов на коефіцієнти тригонометричного комплекснозначного ряду, пов'язані з поліномами Джексона при виконанні яких, даний ряд буде рядом Фур'є.

Актуальність роботи. Однією з найважливіших задач теорії тригонометричних рядів є встановлення на коефіцієнти тригонометричного ряду необхідних та достатніх умов при виконанні яких, даний ряд буде рядом Фур'є сумовної функції. Такі умови гарантують скінченність інтегралів від модулів функцій, що зображаються своїми рядами Фур'є. Їх називають умовами інтегровності тригонометричних рядів.

Магістерська дисертація складається з трьох розділів.

У першому розділі магістерської дисертації, наведені основні означення, допоміжні твердження, теореми та властивості з приводу дійсних та комплексних тригонометричних рядів.

Другий розділ магістерської дисертації присвячений лінійним методам сумуванням, означені ядра Діріхле, Фейєра, Джексона та наведені їх властивості.

В третьому розділі магістерської дисертації наведені класичні теореми, що гарантують збіжність тригонометричних рядів та умови інтегровності дійсних тригонометричних рядів.

Одним із перших та найважливіших результатів є теорема Рісса-Фішера[4], яка дозволяє встановити, чи належить функція, що є сумою тригонометричного ряду, до простору $L_2(0,2\pi)$. Також однією з перших робіт, в якій були знайдені умови на коефіцієнти дійсного тригонометричного ряду, та при виконанні яких даний ряд збігається скрізь, можливо, за виключенням, однієї точки, до інтегровної функції, належить В. Юнгу [5]. Він довів, що одновимірний тригонометричний ряд з косинусів буде рядом Фур'є сумовної функції, якщо його коефіцієнти утворюють випуклу послідовність.

Пізніше з’явилися публікації, в одновимірному випадку: А.М. Колмогорова [8], С.О. Теляковського [9, 15], Ч. Мура [10, 11], Л. Чезарі [12], Г.Штейнгауза [3] та інших.

РОЗДІЛ 1. ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ, ОЗНАЧЕННЯ І ДОПОМІЖНІ ТВЕРДЖЕННЯ

1.2. Основні поняття

Позначимо через $L_p, 1 \leq p < \infty$, множину $2\pi -$ періодичних сумовних в p-тому степені функцій f із скінченною нормою

$$\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

L_∞- множина суттєво обмежених функцій, із скінченною нормою

$$\|f\|_\infty = vraisup|f(t)|$$

Іншими словами існує стала M така, що:

$$|f(x)| \leq M$$

майже скрізь, тобто скрізь за виключенням множини з мірою Лебега рівною 0. На множині з мірою Лебега рівною 0 функція $f \epsilon L_\infty$ може бути необмеженою.

Теорема 1. Припустимо, що $f \in L_p(a;b), 1 \leq p < \infty$. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує неперервна функція $\varphi(x)$, така що $\|f - \varphi\|_{L_p} < \varepsilon$.

Теорема 2. Припустимо, що послідовність функцій $f_n(x)$ збігається майже всюди на інтервалі (a;b) до границі $f(x)$ і що $\|f_n\|_{L_p} \leq M < +\infty$ при фіксованому $p > 0$ і будь-яких n. Тоді $\|f_n - f\|_{L_s} \to 0$ при $n \to \infty$ для $0 < s < p$.

Означення: Тригонометричним рядом називається ряд вигляду

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{1.1}$$

де x- дійсна змінна, а коефіцієнти $a_0, a_1, b_1, \ldots$ не залежать від x, довільні дійсні числа.

Оскільки всі члени ряду (1.1) мають період 2π, достатньо розглянути тригонометричні ряди на відрізку довжини 2π, наприклад, на $[0,2\pi]$ або $[-\pi, \pi]$.

Під сумою ряду (1.1) розуміють, як загально прийнято, деяку функцію $\varphi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$, де $S_n(x)$ – частинні суми, а $\varphi(x)$ – може бути несумовною.

Скінчена тригонометрична сума

$$T_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k} (a_n\, cos\, nx + b_n\, sin\, nx)$$

називається тригонометричним поліномом порядку k. Якщо $|a_k| + +|b_k| \neq 0$, то кажуть, що поліном $T_k(x)$ має точний порядок k. Кожний поліном $T_k(x)$ є дійсною частиною звичайного (степеневого) многочлена $P(z)$ степеня k, де $z = e^{it}$.

Зазначимо, що часто будемо вживати термін поліном замість тригонометричний поліном.

Частинною сумою порядку n ряду (1.1) будемо називати вираз виду

$$S_n(x) = S_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k\, cos\, k\, x + b_k\, sin\, k_x) = \sum_{k=0}^{n} A_k(f, x) \qquad (1.2)$$

В подальшому замість ряду (1.1) будемо окремо розглядати два ряди

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \qquad (1.3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx, \qquad (1.4)$$

де $a_0, a_n, b_n, n = 1,2, \dots -$ деякі дійсні числа, які досліджуються окремо, оскільки умови інтегровності рядів (1.3) і (1.4) різні. Крім того, відрізняються не тільки умови інтегровності рядів (1.3) і (1.4), а і методи їх досліджень.

Означення. Нехай $f \in L_1$. Тригонометричний ряд виду (1.1), коефіцієнти якого можна обчислити за формулами

$$a_k = a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) cos\, kt\, dt,$$

$$b_k = b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt\, dt\,, \quad k = 0,1,2, \dots\,, \tag{1.5}$$

тоді такий ряд називається рядом Фур'є функції $f(x)$.

В деяких випадках формули

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx,\ a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, cos\, kx\, dx,\ b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, sin\, kx\, dx$$

для обчислення коефіцієнтів Фур'є можуть бути спрощені. Це має місце для парних та непарних функцій.

Наведемо декілька очевидних властивостей парних та непарних функцій

1. Добуток парної функції на парну або непарної на непарну – функція парна.

◄Нехай, наприклад, $y = f(x)$ та $y = \varphi(x)$ - парні функції. Доведемо, що фунція $\omega(x) = f(x) \cdot \varphi(x)$ також парна.

Оскільки $f(x)$ та $\varphi(x)$ - функції парні, то

$f(-x) = f(x)$ та $\varphi(-x) = \varphi(x)$

Звідси

$$\omega(-x) = f(-x) \cdot \varphi(-x) = f(x) \cdot \varphi(x) = \omega(x)$$

Тобто $\omega(x)$ - функція парна. Аналогічно можна довести другу частину твердження.►

2. *Добуток парної функції на непарну - функція непарна.*

3. *Якщо* $y = f(x) -$ *парна функція, то*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

◀На основі властивості адитивності визначеного інтегралу можемо записати

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

В першому інтегралі зробимо заміну змінної. Нехай $x = -z$, тоді $dx =$ $= -\,dz$; при $x = 0\ z = 0$, $x = -a, z = a$. Тому

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(-z)\,dz = \int_{0}^{a} f(-\dot{z})\,dz = \int_{0}^{a} f(z)\,dz$$

Випливає, що

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

Оскільки визначений інтеграл не залежить від позначення змінної інтегрування.▶

4. *Якщо* $y = f(x)$ *- непарна функція, то*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

◀Доведення будується аналогічно доведенню 3-ї властивості.▶

Припустимо тепер, що треба розкласти у ряд Фур'є парну функцію $f(x)$. Оскільки $cos\,x$ - функція парна, а $sin\,x$ - непарана функція, то добуток $f(x)\,cos\,x$ буде функцією парною, а $f(x)\,sin\,x$ - функцією непарною. На основі властивостей 3 та 4 отримаємо

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos kx dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = 0.$$

Відповідно цьому ряд Фур'є для парної функції $f(x)$ буде мати вигляд

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

Знак $\sim$ вказує на те, що ми побудували цей ряд чисто формальним чином, виходячи від $f(x)$ та використовуючи формули Фур'є, але ми нічого не знаємо про збіжність цього ряду.

Якщо потрібно буде розкласти в ряд Фур'є непарну функцію, тоді внаслідок властивостей 1 та 2 добуток $f(x)\cos kx$ буде функцією непарною, а $f(x)\sin kx$ - функцією парною. Тому

$$a_0 = a_k = 0,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} g(x)\sin kx\,dx.$$

Ряд Фур'є для непарної функції g буде мати вигляд

$$g(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

Таким чином, парна функція розкладається в ряд тільки за косинусами, а непарна функція – тільки за синусами.

Нехай маємо ряд Фур'є для періодичної функції $f(x)$ з періодом 2π

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{1.6}$$

Виразимо $cos\,nx$ та $sin\,nx$ через показникову функцію. Для цього використаємо відомі фомули

$$cos\,y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$$

Тоді

$$cos\,nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \quad \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} = -i\frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2}$$

Підставимо ці значення в формулу (1.6) та зробимо відповідні перетворення:

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cdot \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} - ib_n \cdot \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2}\right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n - ib_n}{2}e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2}e^{-inx}\right) \qquad (1.7)$$

Введемо позначення

$$\frac{a_0}{2} = c_0, \quad \frac{a_n - ib_n}{2} = c_n, \qquad \frac{a_n + ib_n}{2} = c_{-n}$$

З цими позначеннями формула (1.7) буде мати такий вигляд

$$S[f] = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n e^{inx} + C_{-n}e^{-inx}\right)$$

Останню рівність можна записати більш компактно:

$$S[f] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

це і є представлення ряду Фур’є у комплексній формі.

Розглянемо

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n) z^n \quad (1.8)$$

на одиничному колі $z = e^{it}$, то $z^n = e^{int}$, але $e^{int} = cos\, nt + i\, sin\, nt$ (згідно з формулою Ейлера). Ряд (1.1) являє собою дійсну частину ряду (1.8). Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n\, sin\, nx - b_n\, cos\, nx)$$

(з нульовим вільним членом) являє собою уявну частину ряду (1.8) та називається рядом, спряженим з рядом (1.1). Якщо S −ряд, то спряженим з ним ряд ми будемо позначати через $\tilde{S}$. Рядом спряженим з $\tilde{S}$, буде ряд $-S$ без вільного члена.

РОЗДІЛ 2. ЛІНІЙНІ МЕТОДИ СУМУВАННЯ РЯДІВ ФУР'Є. ЯДРА ДІРІХЛЕ, ФЕЙЄРА, ДЖЕКСОНА.

2.1 Ядро Діріхле

Нехай на проміжку $[-\pi;\pi]$ задана інтегровна функція $f(x)$. Запишемо її коефіцієнти Фур'є

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, n = 0,1,2,\dots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx, n = 0,1,2,\dots,$$

та складемо з їх допомогою ряд Фур'є для нашої функції:

$$S[f] = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx).$$

Розглянемо питання про збіжність цього ряду в точці x. Покладемо

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{n}(a_m\cos mx + b_m\sin mx)$$

Ми можемо переформулювати наше питання таким чином: чи вірно що для даного $x\epsilon[-\pi;\pi]$, $S_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$, тобто що для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер n_0, що для всіх $n > n_0$ буде виконуватись нерівність

$$|S_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Перетворимо $S_n(x)$, підставив замість коефіцієнтів a_m, b_m їх вираз з формул Ейлера-Фур'є:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n}(\cos mt\cos mx + \sin mt\sin mx)\right\}dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n} \cos m(t-x) \right\} dt.$$

Зараз скористаємось формулою

$$\frac{1}{2} + cos\,\alpha + cos\,2\alpha + \cdots + cos\,n\,\alpha = \frac{sin\frac{2n+1}{2}\alpha}{2\,sin\frac{\alpha}{2}}$$

Отримати яку можна просумувавши рівність

$$sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2\,sin\frac{\alpha}{2}$$

$$sin\frac{3\alpha}{2} - sin\frac{\alpha}{2} = cos\,\alpha \cdot 2\,sin\frac{\alpha}{2}$$

$$sin\frac{2n+1}{2}\alpha - sin\frac{2n-1}{2}\alpha = cos\,n\,\alpha \cdot 2\,sin\frac{\alpha}{2}$$

Кожна з яких в свою чергу випливає з відомої тригонометричної тотожності

$$sin\,\alpha - sin\,\beta = 2 \cdot cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

В результаті отримуємо для $S_n(x)$ вираз

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{sin\frac{2n+1}{2}(x-t)}{2\,sin\frac{x-t}{2}} dt$$

права частина якого називається інтегралом Діріхле.

Перетворимо інтеграл Діріхле, зробивши в ньому заміну змінної $t = u - -x$. Продовживши функцію $f(x)$ з проміжка $[-\pi;\pi]$ на всю числову вісь так щоб вона стала $2\pi-$ періодичною, ми отримаємо, що інтеграл Діріхле береться від $2\pi -$ періодичної функції та відповідно не залежить від того по якому саме проміжку довжини 2π він обчислюється. Тому при інтегруванні по u ми можемо зберегти попередні межі інтегрування, з чого випливає наступний вираз

$$S_n(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u-x)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}}du$$

Функція

$$D_n(u) = \frac{1}{2\pi}\frac{sin\frac{2n+1}{2}u}{2\,sin\frac{u}{2}}$$

називається ядром Діріхле. З рівності безпосередньо випливає, що при будь-якому n ядро Діріхле $D_n(x)$ є парною функцією та

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u)\,du = 1.$$

Використавши останню властивість, запишемо різність $S_n(f;x) - f(x)$ у вигляді

$$S_n(f;x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x+u) - f(x)]\frac{sin\frac{2n+1}{2}u}{sin\frac{u}{2}}du.$$

Таким чином ми звели питання про збіжність $S_n(f;x)$ до $f(x)$ до питання прямування до 0 інтеграла.

2.2 Метод середніх арифметичних та Λ −метод

Нехай $f(x)$– неперервна, $2\pi-$ періодична функція. Розглянемо послідовність $S_n(f;x)$ частинних сум ряду Фур'є функції $f(x)$. Покладемо суми Фейєра як середнє арифметичне сум $S_0(x), S_1(x), \dots, S_n(x)$:

$$\sigma_n(f;x) = \frac{S_0(x) + \cdots + S_n(x)}{n+1}. \tag{2.1}$$

Скористуємось виразом для частинних сум ряду Фур'є через ядро Діріхле:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t)\, dt, \tag{2.2}$$

де

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + cos\, t + \cdots + cos\, nt = \frac{sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\, sin\frac{t}{2}}.$$

Підставивши (3.2) в (3.1) для сум Фейєра, отримаємо, що

$$\sigma_n(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) F_n(t)\, dt\,,$$

де

$$F_n(t) = \frac{D_0(t) + \cdots + D_n(t)}{n+1}.$$

Функція $F_n(t)$ називається ядром Фейєра. Вкажемо деякі його властивості.

Властивість 1: $F_n(t)$- парна 2π -періодична та неперервна функція.

Властивість2:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)\,dt = 1.$$

Властивість 3: $F_n(t) \geq 0$.

Властивість 4: $\lim_{n\to\infty} \max_{\delta\leq t\leq\pi} F_n(t) = 0$ при будь − якому $\delta \in (0,\pi)$.

Теорема Фейєра. Послідовність $\{\sigma_n(f;x)\}$ сум Фейєра $2\pi-$ періодичної неперервної функції $f(x)$ рівномірно збігається до функції $f(x)$.

Λ −метод [1]

Якщо обмежитися розгляданням тільки лінійного випадку, то широкий клас методів побудови послідовностей, що наближаються до лінійних операторів $U_n(f)$ дає так назване сумування рядів Фур'є та, вчасності, матричне сумування, що використовує ідеї сумування розбіжних числових рядів. Зміст цього полягає в наступному.

Нехай $\Lambda = \left\|\lambda_k^{(n)}\right\|, n = 0,1,\dots, k = 0,1,\dots, n,-$ довільна нескінченна трикутна матриця чисел. Кожній функції $f \in L(0,2\pi)$ на основі її розкладу в ряд Фур'є поставимо у відповідність поліном $U_n(f;x;\Lambda)$ вигляду

$$U_n(f;x;\Lambda) = \frac{a_0}{2}\lambda_0^n + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{2.3}$$

де $a_k = a_k(f)$ та $b_k = b_k(f) = 0,1,\dots,$ — коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$. Таким чином, будь-яка трикутна матриця Λ задає метод побудови поліномів $U_n(f;x;\Lambda)$, або, іншими словами, конкретну послідовність поліноміальних операторів $U_n(f;\Lambda)$, що визначені на множині $L(0,2\pi)$. В цьому випадку також говорять, що матриця Λ визначають конкретний метод (Λ -метод) сумування рядів Фур'є. Зрозуміло, що при кожному фіксованому n оператори $U_n(f;\Lambda)$ є лінійними. Тому Λ -методи називають лінійними методами (процесами) сумування рядів Фур'є.

Підставивши в (2.3) вирази a_k та b_k з (1.5), отримаємо

$$U_n(f;x;\Lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left(\frac{\lambda_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{(n)} cos\, kt\right)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)U_n(t;\Lambda)\,dt \qquad (2.4)$$

Тригонометричний поліном

$$U_n(x;\Lambda) = \frac{\lambda_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{(n)} cos\, kt \qquad (2.5)$$

називають ядром оператора (метода) $U_n(f;\Lambda)$.

Наведемо декілька прикладів Λ - методів

1. Якщо матриця така, що $\lambda_k^{(n)} = 1$, то поліноми $U_n(f,x,\Lambda)$, очевидно, співпадають з частинними сумами $S_n(f;x)$ порядку n ряда Фур'є функції $f(x)$. Такий метод називають методом частинних сум Фур'є. Зрозуміло, що ядром такого методу буде ядро Діріхле: $U_n(x;1) = D_n(x)$.

2. Якщо в матриці Λ покласти

$$\lambda_k^{(n)} = \begin{cases} 1, \text{при } k = 0,1,\dots,n-p \\ 1 - \frac{k-n+p}{p+1}, \text{при } k = n-p+1,\dots,n, 0 \le p < n \end{cases} \qquad (2.6)$$

То

$$U_n(f,x,\Lambda) = \frac{1}{p+1}\sum_{k=n-p}^{n} S_k\left(f;x = V_{n-p}^{n}(f;x)\right) \qquad (2.7)$$

Такий метод називається методом Валле-Пуссена, а поліноми $V_{n-p}^{n}(f;x)$ - сумами Валле-Пуссена. Якщо $p = 0$, то $V_{n-p}^{n}(f;x) = S_n(f;x)$ якщо $p = n$, то $V_{n-p}^{n}(f;x) = V_0^{n}(f;x) = \sigma_{n+1}(f;x)$

2.3 Ядро Джексона

Ядром Джексона порядку n називається функція

$$J_n(t) = \frac{3}{2n(2n^2+1)}\left(\frac{sin\frac{nt}{2}}{sin\frac{t}{2}}\right)^4, \qquad n = 1,2,\dots .$$

Ядро такого типу має наступні властивості:

а) при будь-якому n ядро $J_n(t)$ є парним невід'ємним тригонометричним поліномом порядку $2n-2$ вигляду

$$J_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{2n-2} j_k \cos kt = \frac{1}{2}\sum_{-(2n-2)}^{2n-2} j_k e^{ikt}$$

де

$$j_k = j_k(n) - \text{деякі числа},$$

$$j_0 \stackrel{\text{def}}{=} 1 \text{ та } j_{-k} \stackrel{\text{def}}{=} j_k \text{ при } k > 0;$$

б)

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} J_n(t)\,dt = 1;$$

в)

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} tJ_n(t)\,dt \le \frac{2{,}5}{n};$$

г)

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 J_n(t)\,dt \le \frac{\pi^2}{n^2}.$$

д)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3C_\nu^{(n)}\pi^2}{2n(2n^2+1)} = 1, \forall\nu$$

Лема 1. Для будь-якого натурального n справедлива тотожність

$$\left(\frac{sin\frac{nt}{2}}{sin\frac{t}{2}}\right)^2 = n + 2[(n-1)\,cos\,t + (n-2)\,cos\,2t + \cdots + cos(n-1)t]. \quad (3.1)$$

Доведення.

◀Використаємо представлення різності косинусів через добуток синусів, знаходимо

$$\left(sin\frac{nt}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}(1 - cos\,nt) = \frac{1}{2}\{(1 - cos\,t) + (cos\,t - cos\,2t) + \cdots +$$

$$[cos(n-1)t - cos\,nt]\} = \left[sin\frac{t}{2} + sin\frac{3t}{2} + \cdots + sin\frac{(2n-1)t}{2}\right] sin\frac{t}{2}. \quad (3.2)$$

Для доданків в квадратних дужках в силу формули для різниці синусів маємо представлення

$$sin\frac{3t}{2} = sin\frac{t}{2} + \left(sin\frac{3t}{2} \quad - sin\frac{t}{2}\right) = sin\frac{t}{2}(1 + 2\,cos\,t),$$

$$\sin\frac{5t}{2} = \sin\frac{t}{2} + \left(\sin\frac{3t}{2} - \sin\frac{t}{2}\right) + \left(\sin\frac{5t}{2} - \sin\frac{3t}{2}\right) =$$

$$= \sin\frac{t}{2}(1 + 2\cos t + 2\cos 2t)$$

…

$$sin\frac{(2n-1)t}{2} = sin\frac{t}{2} + \left(sin\frac{3t}{2} - sin\frac{t}{2}\right) + \cdots$$

$$\ldots + \left[sin\frac{(2n-1)t}{2} - sin\frac{(2n-3)t}{2}\right] =$$

$$= sin\frac{t}{2}[1 + 2\,cos\,t + 2\,cos\,2t + \cdots + 2\,cos(n-1)t]$$

Підставивши ці значення в праву частину рівності 2 отримаємо тотожність 1.►

Лема 2. Для будь-якого натурального n має місце тотожність

$$\left(\frac{sin\frac{nt}{2}}{sin\frac{t}{2}}\right)^4 = \sum_{k=0}^{2n-2} C_k^{(n)}\,cos\,kt, \tag{3.3}$$

де -$\{C_k^{(n)}\}$ деякі коефіцієнти, що залежить від k та n .

◄Справді, права частина тотожність і (1) є парним тригонометричним поліномом порядку $n-1$, та після піднесення його до квадрату знову отримаємо парний тригонометричний поліном, але вже порядку $2n-2$.►

Лема 3. Для будь-якого натурального n справедлива рівність

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{sin\,nt}{sin\,t}\right)^4 dt = \frac{1}{6}n\pi(2n^2+1) \tag{3.4}$$

Доведення.

◄Використаємо тотожність (2.1), знаходимо

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{sin\frac{nt}{2}}{sin\frac{t}{2}}\right)^4 dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left[n + 2\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\,cos\,k\,t\right]^2 dt =$$

$$= \pi\left[2n^2 + 4\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^2\right] = \pi\left[2n^2 + \frac{2}{3}(n-1)n(2n-1)\right]. \tag{3.5}$$

Оскільки має місце рівність

$1^2+2^2+3^2+\dots+(n-1)^2=\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$, то $\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^2=$ $=\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$.

З іншої сторони, в інтегралі (3.5) зробимо заміну змінної інтегрування за формулою $t=2u$. В результаті, обчисливши ще суму в останніх квадратних дужках (3.5), отримаємо

$$2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin nu}{\sin u}\right)^4 du=4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin n\,t}{\sin t}\right)^4 dt=\frac{2}{3}n\pi(2n^2+1)$$

Таким чином рівність (3.4) доведена►

Нехай тепер задана функція $\varphi(x)\in C(2\pi)$. Тоді можна ввести інтеграл

$$Dj_n(x;\varphi)=\frac{3}{2n\pi(2n^2+1)}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\left[\frac{\sin\frac{n(t-x)}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}\right]^4 dt. \qquad (3.6)$$

Цей інтеграл називається сингулярним інтегралом Джексона функції $\varphi(x)$. Дріб перед інтегралом для скорочення позначимо через A_n.

Лема 4. Сингулярний інтеграл Джексона (3.6) є тригонометричними поліномом порядку не вище $2n-2$. Тобто

$$J_n(x;\varphi)=a_0^{(n)}+\sum_{k=1}^{2n-2}\left(a_k^{(n)}\quad \cos k\quad x\quad +b_k^{(n)}\quad \sin k\quad x\right), \qquad (3.7)$$

де $a_k^{(n)}=\lambda_k^{(n)}\cdot a_k$, $b_k^{(n)}=\lambda_k^{(n)}\cdot b_k$

◄Дійсно, використавши формулу (3.3), знаходимо

$$J_n(x;\varphi) = A_n \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\left[\sum_{k=0}^{2n-2} C_k^{(n)} \, cos\, k(t-x)\right] dt =$$

$$= A_n \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\left[\sum_{k=0}^{2n-2} C_k^{(n)} (\cos kt \cos k\, x + \sin kt \sin kx)\right] dx \tag{3.8}$$

Таким чином лема 6 доведена.▶

Розглянемо детальніше формулу (3.8). Вводячи коефіцієнти Фур'є функції $\varphi(x)$, з рівності (3.8) отримуємо

$$J_n(x;\varphi) = A_n \pi \sum_{k=0}^{2n-2} C_k^{(n)} [a_k(\varphi)\, cos\, kx + b_k(\varphi)\, sin\, kx] \tag{3.9}$$

Далі ведемо позначення

$$\lambda_k^{(n)} = \frac{3C_k^{(n)}}{2n(2n^2+1)}, k = 0,1,2, \dots ,2n-2 \tag{3.10}$$

Тоді рівність (2.9) можна представити у вигляді

$$J_n(x;\varphi) = \sum_{k=0}^{2n-2} \lambda_k^{(n)} [a_k(\varphi)\, cos\, kx + b_k(\varphi)\, sin\, kx] \tag{3.11}$$

Отримана сума називається сумою Джексона для функції $\varphi(x)$. Ця сума отримається з частиної суми ряду Фур'є функції $\varphi(x)$ за допомогою коефіцієнтів сумування Джексона (3.10), які не залежать від функції $\varphi(x)$, бо коефіцієнти $\left\{C_k^{(n)}\right\}$ в формулі (3.3) не залежать від цієї функції.

Лема 5. Для будь-якого натурального $n \geq 1$справедлива нерівність

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\left(\frac{sin\, nt}{sin\, t}\right)^4 dt < \frac{n^2\pi^2}{4}. \tag{3.12}$$

◄Дійсно, на сегменті $\left[0, \frac{\pi}{2n}\right]$ застосуємо оцінку $|\sin nt| \leq n|\sin t|$, а на сегменті $\left[\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2}\right]$ використаємо нерівність $\sin t \geq \frac{2}{\pi} t$. В результаті отримаємо

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2n}} t\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt + \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}} t\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt \leq$$

$$\leq n^4 \int_0^{\frac{\pi}{2n}} t\,dt + \frac{\pi^4}{16} \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{t^3} < \frac{n^u \pi^2}{8n^2} + \frac{4n^2 \pi^u}{16 \cdot 2\pi^2} = \frac{\pi^2 n^2}{4}. ►$$

РОЗДІЛ 3. ДОСТАТНІ УМОВИ ІНТЕГРОВНОСТІ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РЯДІВ

3.1. Відомі достатні умови інтегровності тригонометричних рядів

Одним із перших та найважливіших результатів є Теорема Рісса-Фішера, яка дозволяє встановити, чи належить функція, що є сумою тригонометричного ряду, до простору $L^2(0,2\pi)$.

Теорема Рісса-Фішера[4]: для того, щоб числа $a_k, b_k, k = 1,2, \ldots$ були коефіцієнтами Фур'є для функції $f \in L^2(0,2\pi)$, тобто необхідно і достатньо, щоб

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a^2{}_k + b^2{}_k) < \infty.$$

Крім того має місце рівність

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}({a_k}^2 + {b_k}^2).$$

Саме це робить теорему Рісса-Фішера найважливішим фактом теорії тригонометричних рядів. Природньо запитати: чи не можна довести що-небудь таке ж просте і для класів L_p, з $p \neq 2$.

Наведемо огляд відомих результатів, які стосуються інтегровності одновимірних тригонометричних рядів (1.3) і (1.4).

Перша робота, в якій знайдені умови на коефіцієнти тригонометричного ряду, при виконанні яких даний ряд збігається скрізь, за виключенням, можливо, однієї точки, до інтегровної функції, належить В. Юнгу [5].

Він довів, що:

1) у випадку, коли $\{a_k\} -$ випукла нуль послідовність, ряд (1.3) збігається до деякої невід'ємної інтегровної функції c(x) скрізь, за виключенням, можливо, точки x=0, і є рядом Фур'є своєї суми;

2) для ряду з синусів (1.4), коефіцієнти якого монотонно прямують до нуля, умова

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} < \infty \tag{3.1.1}$$

є необхідною і достатньою для інтегровності ряду (1.4).

Відзначимо, що для ряду з косинусів (1.3), коефіцієнти якого монотонно прямують до нуля, умова (2.1.1) є достатньою, але не є необхідною для інтегровності ряду [2, гл. X, § 2]. Отже, з того, що ряд (1.3) з $a_k \downarrow 0$ є рядом Фур'є випливає, що і ряд (1.3) теж є рядом Фур'є.

В. Юнг довів, що ряд (1.3) буде рядом Фур'є, якщо числа $\{a_n\}$ утворюють випуклу послідовність, тобто якщо

$$\Delta^2 a_n \geq 0, n = 0,1,2, \dots, \tag{3.1.2}$$

де $\Delta^2 a_n = a_n - 2a_{n-1} + a_{+2n}$. Також В. Юнг встановив, що у випадку, коли числа a_n монотонно спадають, умова

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} < \infty \tag{3.1.3}$$

необхідна і достатня для того, щоб ряд (1.3) був рядом Фур' є.

А.М. Колмогоров узагальнив результат В. Юнга для ряду з косинусів, замінивши умову випуклості послідовності $\{a_n\}$ умовою квазівипуклості, тобто якщо $\{a_n\}$ є квазівипуклою нуль-послідовністю, то ряд (1.4) є рядом Фур'є деякої функції c $\in L_1$, причому справедлива нерівність

$$\int_0^{2\pi} |c(x)|dx \le \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)|\Delta^2 a_n|.$$

Набагато пізніше С.О. Теляковський [9] одержав твердження для ряду з синусів (1.3), коефіцієнти якого утворюють квазівипуклу нуль-послідовність: нехай $\{a_k\} \in K \cap C_0$, тоді для того, щоб ряд (1.3) був рядом Фур'є деякої функції $s \in L_1$, необхідно і достатньо, щоб

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{k} < \infty. \tag{3.1.4}$$

Якщо ряд (2.1.4) збігається, то справедлива оцінка

$$\left|\int_0^{2\pi} |s(x)|dx - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{|a_k|}{k}\right| \le C\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)|\Delta^2 a_k|.$$

В [9] доведено, що умову (3.1.4) неможна замінити умовою (3.1.3).

Теорема 1.1.2 (С.О. Теляковський [15]). Нехай послідовність коефіцієнтів $a = \{a_k\}$ ряду (1.4) належить множині $BV \cap C_0$ і

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left|\sum_{l=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\frac{\Delta a_{k-l} - \Delta a_{k+l}}{l}\right| < \infty. \tag{3.1.5}$$

Тоді ряд (1.2) є рядом Фур'є функції с $\in L_1$і справедлива оцінка

$$\int_0^{\pi} |c(x)|dx \le CT(a),$$

де

$$T(a) \coloneqq \sum_{k=0}^{\infty}|\Delta a_k| + \sum_{k=2}^{\infty}\left|\sum_{l=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\frac{\Delta a_{k-l} - \Delta a_{k+l}}{l}\right|.$$

Теорема 1.1.3 (С.О. Теляковський [15]). Нехай послідовність коефіцієнтів $a = \{a_k\}$ ряду з косинусів (1.4) належить множині $BV \cap C_0$ і задовольняє умову (3.1.5). Тоді ряд (1.4) є рядом Фур'є функції $s \in L_1$ тоді і тільки тоді, коли має місце (3.1.4). Якщо ряд (3.1.4) збігається, то справедлива оцінка

$$\int_0^{\pi} |s(x)| dx \le C \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|}{k} + T(a) \right).$$

Умови (1.5) і (3.1.5)

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\Delta a_k| < \infty, \ \sum_{k=2}^{\infty} \left| \sum_{l=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{\Delta a_{k-l} - \Delta a_{k+l}}{l} \right| < \infty.$$

Називають умовами Боаса-Теляковського інтегровності одновимірних тригонометричних рядів (1.3), (1.4). Множини послідовностей, для яких $T(a) < \infty$, будемо позначати через $B - T$.

Таким чином, С.О. Теляковський одержав досить загальні умови на коефіцієнти рядів (1.3) і (1.4), при виконанні яких ряди (1.3) і (1.4) будуть рядами Фур'є сумовних функцій. Теорема 1.1.2 узагальнює результат Р. Боаса для рядів з косинусів, а також всі попередні результати, які стосуються інтегровності рядів (1.3). Всі твердження про умови інтегровності рядів з синусів є наслідками теореми 1.1.3 [15].

Підсумовуючи, можна сказати, що умови інтегровності рядів (1.3), (1.4) послаблювались, однак ставали більш громіздкими. В застосуваннях, як правило, потрібні умови на коефіцієнти зручні для перевірки. Тому після роботи С.О. Теляковського [15] з'явились роботи з менш загальними умовами на коефіцієнти, але разом з тим більш простими.

Результат А.М. Колмогорова [8] узагальнили Ч.Н. Мур [10,11] і Л. Чезарі [12]. Теорема, доведена Ч.Н. Муром і Л. Чезарі, стверджує, що ряд (1.3) буде рядом Фур'є інтегровної функції, якщо $\{a_k\} \in C_0$ і для деякого $r > 0$, збігається ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^r \left|\Delta^{k+1} a_k\right| < \infty, \tag{3.1.6}$$

де

$$\Delta^r a_k = \sum_{l}^{\infty} \binom{l-r-1}{l} a_{k+l}\,,$$

а

$$\binom{l-r-1}{l} = \frac{\big(1-(r-1)\big)\big(2-(r-1)\big)\ldots\big(l-(r-1)\big)}{l!}.$$

Множину послідовностей, які задовольняють умову (3.1.6), будемо позначати через M. Можна показати, що у випадку, коли послідовність коефіцієнтів $\{a_k\} \in M \cap C_0$ при деякому $r > 0$, то для $0 < l \le r$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^l \left|\Delta^{l+1} a_k\right| < \infty.$$

Чим менше параметр r в означенні класу M, тим ширший клас послідовностей охоплює сформульована теорема. При $r = 1$ з твердження Ч. Мура і Л. Чезарі випливає теорема А.М. Колмогорова [8].

Теорема Г. Штейнгауза [3]**:**

(I) Для того щоб ряд $\sum \mathrm{A}_n(x)$ належав класу $\mathcal{L}$, необхідно і достатньо, щоб $\|\sigma_m - \sigma_n\| \to 0$ при $n, m \to \infty$.

(II) Якщо $\sum \mathrm{A}_n(x)$ є $S\,[f]$, то $\|\sigma_n - f\| \to 0$.

◀Припустимо, що $\sum \mathrm{A}_n(x)$ є $S\,[f]$. Інтегруючи нерівність

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)| K_n(t)\, dt \qquad (3.1.7)$$

по $0 \leq$ x $\leq 2\pi$, отримуємо

$$\|\sigma_n - f\| \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \eta(t) K_n(t)\, dt, \text{де}\, \eta(t) = \int_{0}^{2\pi} |f(x+t) - f(x)|\, dx$$

Оскільки $\eta(t)$ неперервна та обертається в нуль при $t = 0$ [гл. I, (11.8)] і оскільки права частина останньої нерівності збігається з $(\mathrm{C}, 1)$ - середніми для $S\ [\eta]$ при $t = 0$, то $\|\sigma_n - f\| \to 0$. Це доводить (II), також і необхідність в (I), бо

$$\|\sigma_m - \sigma_n\| \leq \|\sigma_m - f\| + \|\sigma_n - f\| \to 0, \text{при}\, m, n \to \infty$$

Навпаки, якщо $\|\sigma_n - \sigma_m\| \to 0$, то існує функція $f \in \mathcal{L}$, така, що $\|\sigma_n - f\| \to 0$ [гл. I, (11.1)]. для $n > |k|$

$$2\pi\left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right) C_k = \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_n e^{-ikt}\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} f e^{-ikt}\, dt + \int_{-\pi}^{\pi} (\sigma_n - f) e^{-ikt}\, dt$$

При $n \to \infty$, помітимо, що модуль останнього члена не перевищує $\|\sigma_n - f\|$ ми бачимо, що C_k є k –й коефіцієнт для f. Отже, теорема доведена. ►

Виникає питання: чи єдині многочлени Фейєра в теоремі Штейнгауза, які дають необхідні та достатні умови того, що тригонометричний ряд (1.1) був рядом Фур'є. Виявляється, що поліноми Джексона також задовольняє цим умовам.

Мною будуть встановлені необхідні та достатні умови на коефіцієнти тригонометричного ряду, щоб такий ряд був рядом Фур'є через середні суми Джексона в наступній теоремі.

Теорема. Для того, щоб ряд (1.1) був рядом Фур'є та $f(x) \in L_1$, необхідно та достатньо, щоб

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - Dj_n(x)|\, dx \to 0, \text{при } n \to 0.$$

Доведення

◀Необхідність. Нехай ряд (1.1) є рядом Фур'є функції $f(x)$. Позначимо $\eta(t) = \int_0^{2\pi} |f(x) - f(x-t)|\, dx$. Ця функція є неперервною і обертається в 0 при $t = 0$. Факт неперервності функції $\eta(t)$ слідує з твердження [3]: для $f(x) \in L_1$ і $\forall \varepsilon > 0$ існує неперервна функція $\varphi(x)$, така що $\int_0^{2\pi} |f(x) - \varphi(x)|\, dx < \varepsilon$ Крім того, згідно формули

$$Dj_n(x;\varphi) = \frac{3}{2n(2n^2+1)} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) J_n(t)\, dt.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - Dj_n(f;x)|\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - \frac{3}{2n(2n^2+1)} \int_0^{2\pi} f(x-t) \left(\frac{sin\,\frac{nt}{2}}{sin\,\frac{t}{2}} \right)^4 dt \right| dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{0}^{2\pi} f(x) \frac{3}{2n(2n^2+1)} \left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \right)^4 dt - \right.$$

$$\left. - \frac{3}{2n(2n^2+1)} \int_{0}^{2\pi} f(x-t) \left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \right)^4 dt \right| dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{0}^{2\pi} |f(x) - f(x-t)|\, dx \right) \frac{3}{2n(2n^2+1)} \left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \right)^4 dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \eta(t) J_n(t)\, dt = Dj_n(\eta; t)$$

Останній вираз співпадає з середніми Джексона для ряду Фур'є функції $\eta(\cdot)$ при $t = 0$.

Тепер нехай $\eta(t) = \int_0^{2\pi} |f(x-t) - f(x)|\, dx$. Ця функція є неперервною і обертається в 0 при $t = 0$. Цей факт доведено в [3]. Крім того

$$\int_{-\pi}^{\pi} |Dj_n(f; x) - f(x)|\, dx \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \eta(t) J_n(t)\, dt$$

Оскільки права частина останньої нерівності співпадає з сумами Джексона для ряду Фур'є функції $\eta(t)$ при $t = 0$, то,

$$\int_{0}^{2\pi} |Dj_n(f; x) - f(x)|\, dx \to 0,$$

що й доводить необхідність.

Достатність. Нехай $\int_0^{2\pi} |Dj_n(f;x) - f(x)|\, dx \to 0$. Оскільки для $n > \nu$, $DJ_n(x;\varphi) = \sum_{k=0}^{2n-2} \lambda_k^{(n)} [a_k(\varphi) \cos kx + b_k(\varphi) \sin kx]$- суми Джексона порядку k ряду (1.1), де $\lambda_k^{(n)} = \frac{3C_k^{(n)}}{2n(2n^2+1)}, k = 0,1,2,\ldots,2n-2$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} Dj_n(f;x) \cos \nu\, x\, dx = \frac{3C_\nu^{(n)}\pi^2}{2n(2n^2+1)} a_\nu(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos \nu x\, dx +$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} Dj_n(f;x) \cos \nu x\, dx - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos \nu x\, dx =$$

$$= a_\nu(f) + \int_{-\pi}^{\pi} [Dj_n(f;x) - f(x)] \cos \nu x\, dx.$$

Спрямовуючи $n \to \infty$ і відмічаючи, що останній інтеграл не перевищує $\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - Dj_n(f;x)]\, dx$, бачимо, що $a_\nu(f)$ є коефіцієнтом Фур'є для f.

Теорема доведена. ►

ВИСНОВОК

1) Наведені деякі означення тригонометричного ряду та рядів Фур'є. Розглянуто теорему Рісса-Фішера, Штейнгауза.

2) Також наведенні класичні теореми, що забезпечують збіжність тригонометричних рядів, необхідні і достатні умови інтегровності дійсних тригонометричних рядів.

3) Доведено теорему про достатні та необхідні умови на коефіцієнти дійсних тригонометричних рядів через суми Джексона, при виконанні яких розглянутий тригонометричний ряд буде рядом Фур'є.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Степанец А.И. Классификация и приближение периодических функций – Киев : Наук. думка, 1987. – 268 с.

2. Бари Н. К. Тригонометрические ряды.-М.: Физматгиз, 1961.-936с.

3. Зигмунд А. Тригонометрические ряды: В 2-х т. Т.1.-М.: Мир, 1965.-615с.

4. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.—481с.

5. Young W.H. On the Fourier series of bounded functions // Proc. London Math. Soc.-1913.-12, №1.-P.41-70.

6. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1977. – 512 с.

7. Kenneth Hoffman. Banach spaces of analytic functions, department of Mathematics Massachusetts Institute of Technology. PRENTICE-HALL, INC. Englewood Cliffs, N. J. 1962

8. Колмогоров А.Н. Sur l’ordre be grandeur des coefficients de la serie be Fourier-Lebesgue // Bull.Acad.pol.sci.(A).-1923.-P.83-86.

9. Теляковский С. А. Некоторые оценки для тригонометрических рядов с квазивыпуклыми коэффициентами // Мат. сб.-1964.-63, №3.-С.426-444.

10. Moore C. N. On criteria for Fourier constants of L integrable functions // Proc. National Academy of Sciences USA.-1933.-19, №9.-P.846-848.

11. Moore C. N. On the use of Cesaro means in determing criteria for Fourier constans // Bull. Amer. Math. Soc.-1933.-39, №12.-P.907-913.

12. Cesari L. Sulle condizioni sufficenti per le successioni di Fourier // Annali della Scuola Normale Sup. Di Pisa (2).-1934.-3.-P.105-134.

13. Фомин Г.А. Об одном классе тригонометрических рядов // Мат.заметки.-1978.-23, №2.-С.213-222.

14. Суетин П. К. Ряды по многочленам Фабера. — М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1984.-336 с.

15. Теляковский С.А. Условия интегрируемости тригонометрических рядов и их приложение к изучению линейных методов суммирования рядов Фурье // Изв. АН. СССР, серия матем.-1964.-28.-С.1209-1236.