НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
фізико-математичний факультет
кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

«На правах рукопису»
УДК ____________

До захисту допущено
Завідувач кафедри
__________ Олег КЛЕСОВ
«14» травня 2021р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра
за освітньо-науковою програмою
«Страхова та фінансова математика»
зі спеціальності 111 «Математика»
на тему: «Моделювання узагальненого дробового броунівського руху»

Виконала:
студентка II курсу магістратури, групи ОМ-91мн
Ловицька Ірина Іванівна ____________

Керівник:
доктор фізико-математичних наук, доцент
Василик Ольга Іванівна ____________

Рецензент:
доктор фізико-математичних наук, доцент
кафедри прикладної статистики Київського національного університету імені Тараса Шевченка
Розора Ірина Василівна ____________

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студентка ____________

Київ – 2021 року

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
фізико-математичний факультет
кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)
Спеціальність – 111 «Математика»
Освітньо-наукова програма «Страхова та фінансова математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри
____________ Олег КЛЕСОВ
«04» лютого 2021р.

ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію студенту
Ловицькій Ірині Іванівні

1. **Тема дисертації** «Моделювання узагальненого дробового броунівського руху», науковий керівник дисертації Василик Ольга Іванівна, доктор фізико-математичних наук, доцент, затверджені наказом по університету від «26» березня 2021 р. №901-с.

2. **Термін подання** студентом дисертації «13» травня 2021 року.

3. **Об'єкт дослідження** узагальнений дробовий броунівський рух.

4. **Предмет дослідження** моделювання узагальненого дробового броунівського руху із заданими надійністю та точністю.

5. **Перелік завдань, які потрібно розробити**

   (а) Ознайомитись з літературою про φ-субгауссові випадкові процеси.

   (б) Отримати умови, за яких відповідна модель наближає процес строго φ-субгауссового узагальненого броунівського руху із заданими надійністю та точністю у просторі $C([0;1])$ у випадках, коли $\varphi(x) = \frac{|x|^p}{p}$, $|x| \geq 1$, $p > 1$, та $\varphi(x) = \exp\{|x|\} - |x| - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

   (в) Визначити параметри моделей для заданих значень індекса Хюрста H, точності та надійності.

(г) Побудувати моделі траєкторій таких процесів у програмному середовищі R.

(д) Зробити висновки з отриманих результатів.

6. **Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного) матеріалу** 25 слайдів.

7. **Орієнтовний перелік публікацій**

   (а) І. І. Ловицька. Моделювання узагальненого дробового броунівського руху. // Тези доповідей X Всеукраїнської наукової конференції молодих математиків. Національний технічний університет України «КПІ ім. І. Сікорського». – Київ. – 2021. – с. 27–28.

8. **Дата видачі завдання** «04» лютого 2021 р.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1.	Ознайомлення з темою магістерської роботи та літературою	01.02.2021 – 07.02.2021	Виконано
2.	Опрацювання першого та другого розділу монографії «φ-субгауссові випадкові процеси» О.І. Василик, Ю.В. Козаченко, Р.Є. Ямненко.	08.02.2021 – 21.02.2021	Виконано
3.	Вивчення необхідних означень та теорем для моделювання φ-субгауссового узагальненого дробового броунівського руху.	22.02.2021 – 07.03.2021	Виконано

4.	Виведення умов, за яких відповідна модель наближає процес строго φ-субгауссового узагальненого дробового броунівського руху із заданими надійністю та точністю у просторі $C([0;1])$ для деяких N-функцій Орліча φ	08.03.2021 – 28.03.2021	Виконано
5.	Визначення параметрів моделей для заданих значень індекса Хюрста H, точності та надійності для деяких N-функцій Орліча φ	29.03.2021 - 04.04.2021	Виконано
6.	Побудова моделі траєкторій таких процесів у програмному середовищі R для N-функції Орліча $\varphi(x) = \frac{\lvert x\rvert^p}{p}$, $\lvert x\rvert \geq 1$, $p > 1$.	05.04.2021 - 11.04.2021	Виконано
7.	Побудова моделі траєкторій таких процесів у програмному середовищі R для N-функції Орліча $\varphi(x) = \exp\{\lvert x\rvert\} - \lvert x\rvert - 1$, $x \in \mathbb{R}$	12.04.2021 - 25.04.2021	Виконано
8.	Оформлення дипломної роботи	26.04.2021 – 10.05.2021	Виконано

Студент Ірина ЛОВИЦЬКА

Науковий керівник Ольга ВАСИЛИК

РЕФЕРАТ

Магістерська дисертація: 53 сторінки, 25 слайдів для проектора, 7 першоджерел.

Актуальність теми дисертації полягає у тому, що стохастичне моделювання випадкових процесів та полів використовується в багатьох областях природничих та соціальних наук, зокрема, у економіці, прикладній математиці, фізиці, інженерії, метеорології, біології, соціології, в яких воно забезпечує основу для ґрунтовного аналізу та прийняття рішень. Особливе місце займають методи моделювання вінерівського процесу та дробового броунівського руху, оскільки ці процеси мають широке застосування у фінансовій та актуарній математиці, теорії масового обслуговування.

Мета і завдання роботи: отримати умови, за яких відповідна модель наближає процес строго φ-субгауссового узагальненого дробового броунівського руху із заданими надійністю та точністю у просторі $C([0;1])$ у випадках, коли $\varphi(x) = \frac{|x|^p}{p}$, $|x| \geq 1$, $p > 1$, та $\varphi(x) = \exp\{|x|\} - |x| - 1$, $x \in \mathbb{R}$; розробити алгоритми моделювання таких процесів та реалізувати їх у програмному середовищі R.

Об'єкт дослідження: узагальнений дробовий броунівський рух.

Предмет дослідження: моделювання узагальненого дробового броунівського руху із заданими надійністю та точністю.

Для отримання вказаних результатів використано основні поняття та деякі результати з теорії φ-субгауссових процесів.

В магістерській дисертації отримані умови, за яких відповідна модель наближає процес строго φ-субгауссового узагальненого дробового броунівського руху із заданими надійністю та точністю у просторі $C([0;1])$ у випадках, коли $\varphi(x) = \frac{|x|^p}{p}$, $|x| \geq 1$, $p > 1$, та $\varphi(x) = \exp\{|x|\} - |x| - 1$, $x \in \mathbb{R}$, визначені параметри моделей для заданих значень індекса Хюрста H, точності та надійності та побудовані моделі траєкторій таких процесів у програмному середовищі R.

Ключові слова: N-функції Орліча, простір φ-субгауссових випадкових величин, φ-субгауссові випадкові процеси, строго φ-субгауссові випадкові процеси, узагальнений дробовий броунівський рух, точність та надійність моделювання.

ABSTRACT

Master's dissertation: 53 pages, 25 slides for a projector, 7 primary sources.

The relevance of the thesis topic is that stochastic simulation of random processes and fields is used in many areas of natural and social sciences, including economics, applied mathematics, physics, engineering, meteorology, biology, sociology, in which it provides a basis for thorough analysis and decision making. A special place is occupied by methods of simulation the Wiener process and fractional Brownian motion, as these processes are widely used in financial and actuarial mathematics, queueing theory.

Purpose and objectives of the work: to obtain the conditions under which the corresponding model approximates strictly φ-sub-Gaussian generalized fractional Brownian motion with given accuracy and reliability in space $C([0;1])$ in the cases when $\varphi(x) = \frac{|x|^p}{p}$, $|x| \geq 1$, $p > 1$ or $\varphi(x) = \exp\{|x|\} - |x| - 1$, $x \in \mathbb{R}$; to develop algorithms for simulation such processes and implement them in the R Programming Environment.

Research object: generalized fractional Brownian motion.

Subject: simulation of generalized fractional Brownian motion with given accuracy and reliability.

To obtain these results, we use the basic concepts and some results of the theory of φ-sub-Gaussian random processes.

In Master's dissertation, there are obtained conditions under which the corresponding model approximates strictly φ-sub-Gaussian generalized fractional Brownian motion with given accuracy and reliability in the space $C([0;1])$

in the cases when $\varphi(x) = \frac{|x|^p}{p}$, $|x| \geq 1$, $p > 1$ or $\varphi(x) = \exp\{|x|\} - |x| - 1$, $x \in \mathbb{R}$, determined parameters of the models for the given values of the Hurst index H, accuracy and reliability and constructed models of trajectories of such processes in the software environment R.

Keywords: Orlicz N-functions, space of φ-sub-Gaussian random variables, φ-sub-Gaussian random processes, generalized fractional Brownian motion, accuracy and reliability of simulation.

ЗМІСТ

ВСТУП

Методи моделювання випадкових процесів та полів використовуються в багатьох областях природничих та соціальних наук. Стохастичне моделювання активно розвивається, починаючи з другої половини 20-го століття. Особливе місце займають методи і алгоритми моделювання вінерівського процесу та процесів дробового броунівського руху. Численні дослідження показують, що дані спостережень у теорії масового обслуговування, дослідженнях телекомунікаційних мереж, фінансовій математиці ефективно описуються процесами, які мають властивості самоподібності та сильної залежності від минулого. Якраз одним із таких процесів є процес дробового броунівського руху. Але для моделювання реальних випадкових процесів є сенс розглядати не тільки класичний гауссовий дробовий броунівський рух, а і його узагальнення, зокрема, процеси φ-субгауссового узагальненого дробового броунівського руху.

У 1985 році Ю. Козаченко та Є. Островський [6] розглянули простори $\mathbf{Sub}_\varphi(\Omega)$ випадкових величин, де φ є N-функцією Орліча. Простори $\mathbf{Sub}_\varphi(\Omega)$, або простори φ-субгауссових випадкових величин, – це простори центрованих випадкових величин з певними експоненціальними моментами. Клас φ-субгауссових випадкових процесів є більш широким, ніж клас субгауссових процесів, тому дає можливість краще моделювати реальні випадкові процеси.

В. Булдигін та Ю. Козаченко досліджували деякі властивості сум випадкових величин і процесів з просторів $\mathbf{Sub}_\varphi(\Omega)$ [1]. Подальший розвиток теорія φ-субгауссових випадкових процесів отримала у роботах Ю. Козаченка та його учнів, наприклад, у монографії [5]. До класу φ-субгауссових випадкових процесів належать, зокрема, процеси дробового броунівського руху, а це означає, що до них можна застосувати отримані для φ-субгауссових процесів теоретичні результати.

Результати щодо застосування дробового броунівського руху в таких прикладних галузях, як теорія телекомунікаційних мереж та фінансова математика, можна знайти у працях І. Норроса, А. Ширяєва, Ю. Мішури, А. Свіщука, Т. Соттінена та ін.

Магістерська дисертація складається з трьох розділів.

В першому розділі наведено необхідні означення і властивості з теорії φ-субгауссових випадкових величин і процесів. Другий розділ присвячено моделюванню процесів узагальненого дробового броунівського руху. В ньому наведено означення моделі, загальну теорему про моделювання строго φ-субгауссового узагальненого дробового броунівського руху, доведену в роботі [3], та основні теореми цієї роботи, доведені автором на основі вищезгаданої загальної теореми. Отримані нові теореми містять умови, за яких модель буде наближати процес строго φ-субгауссового узагальненого дробового броунівського руху із заданими надійністю та точністю у просторі $C([0;1])$ у випадках, коли $\varphi(x) = \frac{|x|^p}{p}$, $|x| \geq 1$, $p > 1$, та $\varphi(x) = \exp\{|x|\} - |x| - 1$, $x \in \mathbb{R}$. У третьому розділі на основі отриманих теоретичних результатів визначено параметри моделей для заданих значень індекса Хюрста H, точності $\delta > 0$ та надійності $1 - \nu$, $\nu \in (0;1)$, побудовано відповідні моделі траєкторій таких процесів і представлено їх реалізації в програмному середовищі R. Основні теореми другого розділу і всі результати третього розділу отримані автором самостійно. Результати магістерської дисертації були представлені на X-й Всеукраїнській науковій конференції молодих математиків, Національний технічний університет України «КПІ ім. І. Сікорського», 16-17 квітня 2021р. Київ, Україна [7].

Розділ 1

Необхідні відомості з теорії φ-субгауссових випадкових процесів

У цьому розділі наведені необхідні в подальшому означення та твердження з теорії φ-субгауссових випадкових процесів.

1.1 N-функції Орліча

Означення 1.1. [5] *Неперервна парна опукла функція* $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$ *називається* N*-функцією Орліча, якщо* $\varphi(0) = 0$ *та* $\varphi(x) > 0$, *коли* $x \neq 0$ *та мають місце такі умови*

$$(A_0) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x} = 0, \qquad (A_\infty) \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \infty.$$

Приклад 1.1. [5] Наведені нижче функції є N-функціями Орліча:

$$\varphi(x) = C|x|^\alpha,\ C > 0,\ \alpha > 1;$$

$$\varphi(x) = \exp\{|x|\} - |x| - 1;$$

$$\varphi(x) = \exp\{a|x|^\alpha\} - 1,\ a > 0,\ \alpha > 1;$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} \left(\frac{e\alpha}{2}\right)^{\frac{2}{\alpha}} x^2, & \text{коли } |x| \le \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}; \\ \exp\{|x|^\alpha\}, & \text{коли } |x| > \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}},\ 0 < \alpha < 1. \end{cases}$$

Лема 1.1. [5] Для будь-якої N-функції φ мають місце такі твердження:

а) $\varphi(\alpha x) \le \alpha\varphi(x)$, *коли* $x \in \mathbb{R}$, $0 \le \alpha \le 1$;

b) $\varphi(\alpha x) \geq \alpha\varphi(x)$, *коли* $x \in \mathbb{R}$, $\alpha > 1$;

c) $\varphi(|x| + |y|) \geq \varphi(x) + \varphi(y)$, *коли* $x, y \in \mathbb{R}$;

d) існує така стала $c > 0$, що $\varphi(x) > c|x|$, коли $|x| > 1$;

e) функція $\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{x}$ є монотонно неспадною при $x > 0$;

g) $\varphi(x) = \int_0^{|x|} p(t)\,dt$, де щільність $p = \{p(t), t \geq 0\}$ неспадна неперервна справа функція така, що $p(0) = 0$ та $p(t) \to \infty$, коли $t \to \infty$.

Означення 1.2. [5] Нехай $\varphi = \{\varphi(x), x \in \mathbb{R}\}$ – деяка N-функція. Функція φ^* така, що

$$\varphi^*(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} (xy - \varphi(y)),$$

називається перетворенням Юнга-Фенхеля функції φ.

Зауваження 1.1. [5] Якщо $x > 0$, то

$$\varphi^*(x) = \sup_{y > 0} (xy - \varphi(y)), \quad \varphi^*(-x) = \varphi^*(x).$$

Умова Q. [5] Для N-функції φ виконується умова Q, якщо

$$\liminf_{x \to 0} \frac{\varphi(x)}{x^2} = c > 0.$$

Зауваження 1.2. [5] Можливо, що $c = +\infty$.

Приклад 1.2. [5] Для N-функції $\varphi(x) = c|x|^\alpha$, коли $c > 0$, $1 < \alpha \leq 2$, виконується умова Q. Для N-функції $c|x|^\alpha$, $c > 0$, $\alpha > 2$ умова Q не виконується, але для функції

$$\varphi(x) = \begin{cases} |x|^2, & |x| \leq 1, \\ |x|^\alpha, & |x| > 1, \end{cases} \qquad \text{коли } \alpha > 2,$$

умова Q виконується.

1.2 Простір $\mathbf{Sub}_{\varphi}(\Omega)$. Означення та загальні властивості

Нехай $\{\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P}\}$ – стандартний імовірнісний простір.

Означення 1.3. [5] Нехай φ – N-функція, для якої виконується умова Q. Випадкова величина ξ належить простору $\mathbf{Sub}_{\varphi}(\Omega)$, якщо $\mathbf{E}\xi = 0$, $\mathbf{E}\exp\{\lambda\xi\}$ існує для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ та існує така стала $a > 0$, що для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ виконується така нерівність

$$\mathbf{E}\exp\{\lambda\xi\} \leq \exp\{\varphi(\lambda a)\}. \tag{1}$$

Розглянемо такий функціонал на просторі $\mathbf{Sub}_{\varphi}(\Omega)$

$$\tau_{\varphi}(\xi) = \inf(a \geq 0\colon\ \mathbf{E}\exp\{\lambda\xi\} \leq \exp\{\varphi(a\lambda)\}, \lambda \in \mathbb{R}). \tag{2}$$

Для всіх $\lambda \in \mathbb{R}$ має місце наступна нерівність

$$\mathbf{E}\exp\{\lambda\xi\} \leq \exp\{\varphi(\lambda\tau_{\varphi}(\xi))\} \tag{3}$$

та

$$\tau_{\varphi}(\xi) = \sup_{\lambda \neq 0} \frac{\varphi^{(-1)}(\ln(\mathbf{E}\exp\{\lambda\xi\}))}{|\lambda|}. \tag{4}$$

Лема 1.2. [5] Нехай $\xi \in \mathbf{Sub}_{\varphi}(\Omega)$, $\tau_{\varphi}(\xi) > 0$, $\varepsilon > 0$. Тоді виконуються такі нерівності:

$$\mathbf{P}\{\xi > \varepsilon\} \le \exp\left\{-\varphi^*\left(\frac{\varepsilon}{\tau_\varphi(\xi)}\right)\right\},$$
$$\mathbf{P}\{\xi < -\varepsilon\} \le \exp\left\{-\varphi^*\left(\frac{\varepsilon}{\tau_\varphi(\xi)}\right)\right\},$$
$$\mathbf{P}\{|\xi| > \varepsilon\} \le 2\exp\left\{-\varphi^*\left(\frac{\varepsilon}{\tau_\varphi(\xi)}\right)\right\}.$$

Теорема 1.1. [1] Простір $\mathbf{Sub}_\varphi(\Omega)$ є простором Банаха відносно норми $\tau_\varphi(\cdot)$.

1.3 φ-субгауссові випадкові процеси

Нехай T – деякий параметричний простір.

Означення 1.4. [5, 1] Випадковий процес $X = \{X(t), t \in T\}$ називається φ-субгауссовим, якщо випадкові величини $X(t)$, $t \in T$, є φ-субгауссовими ($X(t) \in \mathbf{Sub}_\varphi(\Omega)$).

Якщо при цьому $\varphi(x) = \frac{x^2}{2}$, то такі процеси називаються субгауссовими.

Приклад 1.3. [5] Центрований гауссовий випадковий процес є субгауссовим процесом.

Приклад 1.4. [5] Нехай $X(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k \varphi_k(t)$, $t \in T$, де ξ_k – випадкові величини такі, що $\xi_k \in \mathbf{Sub}_\varphi(\Omega)$ та

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tau_\varphi(\xi_k)|\varphi_k(t)| < \infty, \quad t \in T.$$

Тоді $X(t)$ – φ-субгауссовий процес.

1.4 Строго φ-субгауссові випадкові процеси

Означення 1.5. [5] Сім'я Δ випадкових величин з простору $\mathbf{Sub}_\varphi(\Omega)$ називається строго φ-субгауссовою, якщо існує стала $C_\Delta > 0$ така, що для будь-якої скінченої множини I, $\xi_i \in \Delta$, $i \in I$ та для будь-яких $\lambda_i \in \mathbb{R}^1$ має місце нерівність

$$\tau_\varphi\left(\sum_{i\in I}\lambda_i\xi_i\right) \le C_\Delta\left(\mathbf{E}\left(\sum_{i\in I}\lambda_i\xi_i\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5}$$

Сталу C_Δ будемо називати визначальною сталою сім'ї Δ.

Означення 1.6. [5] Випадковий процес $X = \{X(t), t \in T\}$ називається строго φ-субгауссовим, якщо сім'я випадкових величин $\{X(t),\ t \in T\}$ є строго φ-субгауссовою. Визначальна стала цієї сім'ї називається визначальною сталою процесу та позначається C_X.

Приклад 1.5. [5] Нехай $X(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_k\varphi_k(t)$, $t \in T$, де сім'я випадкових величин $\{\xi_k, k = \overline{1,\infty}\}$ є строго φ-субгауссовою з визначальною сталою C_ξ та ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_k\varphi_k(t)$ збігається в середньому квадратичному.

Тоді випадковий процес $X(t)$ є строго φ-субгауссовим випадковим процесом з визначальною сталою $C_X = C_\xi$.

Розділ 2

Моделювання φ-субгауссового узагальненого дробового броунівського руху

2.1 Узагальнений дробовий броунівський рух

Нехай $\{B_H(t), t \in [0,1]\}$ – це дробовий броунівський рух з індексом Хюрста $H \in (0,1)$. Це означає, що $B_H(t)$ є центрованим гауссовим випадковим процесом зі стаціонарними приростами і коваріаційною функцією

$$\mathbf{E}B_H(s)B_H(t) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |s-t|^{2H}).$$

Нехай $T = [a,b], 0 \leq a < b < \infty$, або $T = \mathbb{R}^+$.

Означення 2.1. [3, 5] Будемо називати випадковий процес $Z_H = \{Z_H(t), t \in T\}$ узагальненим дробовим броунівським рухом (УДБР) з індексом Хюрста $H \in (0,1)$, якщо $\mathbf{E}Z_H(t) = 0$ та

$$R_H(t,s) = \mathbf{E}Z_H(s)Z_H(t) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |s-t|^{2H}).$$

Означення 2.2. [3, 5] Будемо називати випадковий процес $Z_H = \{Z_H(t), t \in T\}$ строго φ-субгауссовим узагальненим дробовим броунівським рухом (φ-УДБР) з індексом Хюрста $H \in (0,1)$, якщо Z_H з означення 2.1 є строго φ-субгауссовим.

У роботі [2] доведено, що дробовий броунівський рух $B_H(t)$ можна подати в наступному вигляді:

$$B_H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x_n t}{x_n} X_n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos y_n t}{y_n} Y_n, \tag{6}$$

де ряди в (6) збігаються в середньому квадратичному, $\{X_n, n = 1, 2, \ldots\}$ та $\{Y_n, n = 1, 2, \ldots\}$ – незалежні гауссові випадкові величини такі, що $\mathbf{E}X_n = \mathbf{E}Y_n = 0$,

$$\begin{aligned} \mathbf{Var}\, X_n &= 2C_H^2 x_n^{-2H} J_{1-H}^{-2}(x_n), \\ \mathbf{Var}\, Y_n &= 2C_H^2 y_n^{-2H} J_{-H}^{-2}(y_n), \\ C_H^2 &= \pi^{-1}\Gamma(1+2H)\sin(\pi H), \end{aligned}$$

$x_1 < x_2 < \ldots,$ – додатні дійсні нулі функції Бесселя першого роду J_{-H}, а $y_1 < y_2 < \ldots,$ – додатні дійсні нулі функції J_{1-H}.

У роботах [3, 5] показано, що зображення (6) можна переписати в такому вигляді:

$$B_H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{X}_n c_n^H \sin x_n t + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{Y}_n d_n^H (1-\cos y_n t),$$

де $\{\tilde{X}_n, n = 1, 2, \ldots\}$ та $\{\tilde{Y}_n, n = 1, 2, \ldots\}$ – незалежні гауссові центровані випадкові величини, такі що $\mathbf{E}\tilde{X}_n^2 = \mathbf{E}\tilde{Y}_n^2 = 1$,

$$c_n^H = \sqrt{2} C_H x_n^{-(H+1)} J_{1-H}^{-1}(x_n), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{7}$$

$$d_n^H = \sqrt{2} C_H y_n^{-(H+1)} J_{-H}^{-1}(y_n), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

$$C_H^2 = \pi^{-1}\Gamma(1+2H)\sin(\pi H).$$

Ю.В. Козаченко, О.І. Василик та Т. Соттінен [3, 5] запропонували узагальнити даний розклад на випадок негауссових випадкових процесів, а саме розглянули такий ряд:

$$\tilde{Z}_H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n c_n^H \sin x_n t + \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n d_n^H (1 - \cos y_n t), \tag{9}$$

де $t \in [0,1]$, ξ_n, η_n – незалежні центровані випадкові величини такі, що $\mathbf{E}\xi_n^2 = \mathbf{E}\eta_n^2 = 1, n = 1, 2, \dots$.

Вони довели наступні твердження.

Твердження 2.1. [3, 5] Ряди в (9) збігаються в середньому квадратичному, та коваріаційна функція процесу $\tilde{Z}_H$ має вигляд:

$$\mathbf{E}\tilde{Z}_H(s)\tilde{Z}_H(t) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |s-t|^{2H}).$$

Твердження 2.2. [3] Ряди в (9) рівномірно збігаються з ймовірністю одиниця до процесу $\tilde{Z}_H(t)$ та процес $\tilde{Z}_H(t)$ є вибірково неперервним на $[0,1]$ з ймовірністю одиниця.

2.2 Моделювання узагальненого дробового броунівського руху

У роботах Ю.В.Козаченка, О.І.Василик та Т. Соттінена [3]–[5] запропоновано алгоритм моделювання процесів строго φ-субгауссового узагальненого дробового броунівського руху із заданими надійністю та точністю у просторі $C([0;1])$ на основі розкладу в ряд:

$$Z_t = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(x_n t)\, \xi_n \;+\; \sum_{n=1}^{\infty} d_n \big(1 - \cos(y_n t)\big)\, \eta_n, \quad t \in [0;1], \tag{10}$$

де

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{\pi^H \sqrt{2c}}{x_n^{H+1} J_{1-H}(x_n)}, \qquad n = 1, 2, \ldots, \\ d_n &= \frac{\pi^H \sqrt{2c}}{y_n^{H+1} J_{-H}(y_n)}, \qquad n = 1, 2, \ldots, \\ c &= \frac{\Gamma(2H+1)\sin(\pi H)}{\pi^{2H+1}}. \end{aligned}$$

ξ_n, η_n, $n = 1, 2, \ldots,$ – незалежні однаково розподілені випадкові величини з простору $\mathbf{Sub}_\varphi(\Omega)$, $\mathbf{E}\xi_n^2 = \mathbf{E}\eta_n^2 = 1$, $n = 1, 2, \ldots$.
Тут і далі припускається, що функція $\varphi(\sqrt{\cdot})$ опукла.

З Твердження 2.1 та Прикладу 1.5 випливає, що випадковий процес Z виду (10) є строго φ-субгауссовим узагальненим дробовим броунівським рухом.

Означення 2.3. [5] Модель $\tilde{Z}$ наближає процес Z із заданими надійністю $1 - \nu$, $0 < \nu < 1$, та точністю $\delta > 0$ в $C([0,1])$, якщо

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t \in [0,1]} |Z_t - \tilde{Z}_t| > \delta \right) \le \nu.$$

Природною моделлю для процесу Z, є така сума

$$\sum_{n=1}^{N} \left(c_n \sin(x_n t)\, \xi_n \;+\; d_n \big(1 - \cos(y_n t)\big)\, \eta_n \right).$$

Але більш реальним є припущення про те, що сталі c_n та d_n, а також нулі x_n,

y_n обчислюються тільки приблизно. Зауважимо, що сталі c_n та d_n залежать від значень нулів відповідних функцій Бесселя [3, 5].

Позначимо через $\tilde{c}_n$ та $\tilde{d}_n$ наближені значення c_n та d_n, відповідно. Нехай

$$|\tilde{c}_n - c_n| \le \gamma_n^c,$$

$$|\tilde{d}_n - d_n| \le \gamma_n^d,$$

$n = 1, \dots, N$. Похибки γ_n^c та γ_n^d вважаються відомими. Нехай $\tilde{x}_n$ та $\tilde{y}_n$ – наближені значення відповідних нулів x_n та y_n з похибками

$$|\tilde{x}_n - x_n| \le \gamma_n^x,$$

$$|\tilde{y}_n - y_n| \le \gamma_n^y.$$

Похибки γ_n^x та γ_n^y теж вважаються відомими.

Тоді модель процесу Z матиме вигляд

$$\tilde{Z}_t = \sum_{n=1}^{N} \Big(\tilde{c}_n \sin(\tilde{x}_n t)\, \xi_n \;+\; \tilde{d}_n \big(1 - \cos(\tilde{y}_n t)\big)\, \eta_n \Big)\,. \tag{11}$$

А похибка моделювання дорівнює

$$\begin{aligned}
\Delta_t &:= Z_t - \tilde{Z}_t \\
&= \sum_{n=1}^{N} \Big\{ \Big(c_n \sin(x_n t) - \tilde{c}_n \sin(\tilde{x}_n t) \Big)\, \xi_n \\
&\quad + \Big(d_n \big(1 - \cos(y_n t)\big) - \tilde{d}_n \big(1 - \cos(\tilde{y}_n t)\big) \Big)\, \eta_n \Big\} \\
&\quad + \sum_{n=N+1}^{\infty} \Big\{ c_n \sin(x_n t)\, \xi_n \;+\; d_n \big(1 - \cos(y_n t)\big) \eta_n \Big\}.
\end{aligned}$$

Для того, щоб оцінити Δ в $C([0,1])$, потрібно було знайти оцінки для $\tau_\varphi(\Delta_t)$ та $\tau_\varphi(\Delta_t - \Delta_s)$ для всіх $s,t \in [0,1]$. [5]

На основі отриманих оцінок для похибки моделювання та з використанням відповідних оцінок розподілів супремумів φ-субгауссових випадкових процесів було сформульовано загальну теорему про моделювання φ-субгауссового узагальненого дробового броунівського руху із заданими надійністю та точністю у просторі $C([0;1])$ (див. [3, 5]).

Теорема 2.1. [3]–[5]

Нехай b та α такі числа, що $0 < b < \alpha < H$.

Модель $\tilde{Z}$, визначена в (11), наближає випадковий процес Z, визначений за допомогою 10, із заданими надійністю $1-\nu$, $0<\nu<1$, та точністю $\delta > 0$ в $C([0,1])$, якщо виконуються такі три нерівності:

$$\begin{aligned}
&\gamma_0 < \delta,\\
&\frac{\beta\gamma_0}{\gamma_\alpha} < \frac{\delta}{2^\alpha(\exp\{\varphi(1)\}-1)^\alpha},\\
&\nu \geq 2\exp\left\{-\varphi^*\left(\frac{\delta}{\gamma_0}-1\right)\right\}\\
&\qquad \times\left(\frac{1}{2^b(1-\frac{b}{\alpha})}\left(\frac{\gamma_\alpha\delta}{\beta\gamma_0}\right)^{\frac{b}{\alpha}} l^{(-1)}\left(\frac{\delta}{\gamma_0}-1\right)+1\right)^{\frac{2}{b}},
\end{aligned}$$

де параметри $\gamma_0 = \gamma_0(N)$, $\gamma_\alpha = \gamma_\alpha(N)$ і $\beta = \min\{\gamma_0, \frac{\gamma_\alpha}{2^\alpha}\}$ грунтуються на оцінках, отриманих для похибки моделювання, та $l^{(-1)}$ – узагальнена обернена функція до щільності l функції φ.

Припустимо, що сталі c_n та d_n, а також нулі x_n та y_n обчислені точно.

Наслідок 2.1. [3]–[5] Нехай похибка наближення відсутня, тобто $\gamma_n^c =$

$\gamma_n^d = \gamma_n^x = \gamma_n^y = 0$. Тоді умови теореми 2.1 виконуються, якщо

$$N \geq \max\left\{\left(\frac{A_0}{\delta}\right)^{1/H} + 1;\ \left(\frac{A_0(\exp\{\varphi(1)\} - 1)^{\alpha}}{\delta}\right)^{1/H} + 1;\ 2\left(\frac{A_0}{A_\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right\}$$

та

$$\nu \geq 2\exp\left\{-\varphi^*\left(\frac{\delta N^H}{A_0} - 1\right)\right\}$$
$$\times\left(\frac{(\delta A_\alpha)^{\frac{b}{\alpha}}(N+1)^{2Hb/\alpha}}{2^b\left(1-\frac{b}{\alpha}\right)A_0^{\frac{2b}{\alpha}}N^{\frac{(H-\alpha)b}{\alpha}}}l^{-1}\left(\frac{\delta(N+1)^H}{A_0} - 1\right) + 1\right)^{\frac{2}{b}},$$

де

$$A_0 = a_\varphi\sqrt{\frac{5c}{2H}} \qquad \text{та} \qquad A_\alpha = 2^{1-\alpha}a_\varphi\pi^\alpha\sqrt{\frac{c}{H-\alpha}}.$$

На основі наведених вище результатів виведемо умови, за яких модель виду (11) наближатиме процес строго φ-субгауссового узагальненого дробового броунівського руху із заданими надійністю та точністю у просторі $C([0;1])$ у випадках, коли

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{|x|^p}{p},\ |x| \geq 1 \\ \frac{|x|^2}{p},\ |x| < 1 \end{cases}, \quad p > 1,$$

та

$$\varphi(x) = \exp\{|x|\} - |x| - 1,\ x \in \mathbb{R}.$$

У наступних теоремах припускається, що похибка наближення відсутня, тобто $\gamma_n^c = \gamma_n^d = \gamma_n^x = \gamma_n^y = 0$.

Для зручності обчислень вибрано $\alpha = \frac{H}{2}$ і $b = \frac{H}{4}$.

Теорема 2.2. Нехай $\varphi(x) = \frac{|x|^p}{p}$, $|x| \geq 1$, $p > 1$, та $\varphi(x) = \frac{|x|^2}{p}$, $|x| < 1$.

У цьому випадку модель $\tilde{Z}$, визначена в (11), наближає процес узагальненого дробового броунівського руху Z, визначений за допомогою (10), із заданими надійністю $1-\nu$, $0<\nu<1$, та точністю $\delta>0$ в $C([0,1])$, якщо виконуються такі умови:

$$N \geq \max\left\{\left(\frac{a_\varphi}{\delta}\sqrt{\frac{5c}{2H}}\right)^{1/H}+1; \quad \frac{2^{2-\frac{4}{H}}5^{\frac{1}{H}}}{\pi}\right\} \tag{12}$$

та

$$2\mu\exp\left\{-\frac{1}{q}\left(\frac{\delta N^H}{a_\varphi\sqrt{\frac{5c}{2H}}}-1\right)^q\right\}N^{\frac{2(3p+1)}{p-1}} \leq \nu, \tag{13}$$

де $\mu = \mu(H) = \pi^2 \cdot 2^{\frac{18}{H}+\frac{4}{H(p-1)}-4} \cdot 5^{-\frac{4}{H}-\frac{4}{H(p-1)}} \left(\frac{H}{c}\right)^{\frac{2}{H}+\frac{4}{H(p-1)}} \left(\frac{\delta}{a_\varphi}\right)^{\frac{4(p+1)}{H(p-1)}}$, $a_\varphi = \tau_\varphi(\xi_n) = \tau_\varphi(\eta_n)$.

Доведення. Оскільки ми припускаємо, що похибка наближення відсутня, то можемо скористатись наслідком 2.1.

Згідно з цим наслідком умови теореми 2.1 виконуються, якщо

$$N \geq \max\left\{\left(\frac{A_0}{\delta}\right)^{1/H}+1;\ \left(\frac{A_0(\exp\{\varphi(1)\}-1)^\alpha}{\delta}\right)^{1/H}+1;\ 2\left(\frac{A_0}{A_\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right\} \tag{14}$$

та

$$\nu \geq 2\exp\left\{-\varphi^*\left(\frac{\delta N^H}{A_0}-1\right)\right\}$$
$$\times\left(\frac{(\delta A_\alpha)^{\frac{b}{\alpha}}(N+1)^{2Hb/\alpha}}{2^b\left(1-\frac{b}{\alpha}\right)A_0^{\frac{2b}{\alpha}}N^{\frac{(H-\alpha)b}{\alpha}}}l^{-1}\left(\frac{\delta(N+1)^H}{A_0}-1\right)+1\right)^{\frac{2}{b}}, \qquad (15)$$

де

$$A_0 = a_\varphi\sqrt{\frac{5c}{2H}} \qquad \text{та} \qquad A_\alpha = 2^{1-\alpha}a_\varphi\pi^\alpha\sqrt{\frac{c}{H-\alpha}}.$$

У нашому випадку $\varphi^*(x) = \frac{x^q}{q}$, $x \geq 1$, де q таке число, що $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$; $l(x) = \varphi'(x) = x^{p-1}$, $x \geq 1$; $l^{(-1)}(x) = x^{\frac{1}{p-1}}$, $x \geq 1$.

За припущенням $\alpha = \frac{H}{2}$, $b = \frac{H}{4}$ матимемо: $A_\alpha = A_{\frac{H}{2}} = 2^{1-\frac{H}{2}}a_\varphi\pi^{\frac{H}{2}}\sqrt{\frac{2c}{H}}$.

Спочатку розглянемо умову (14).

Для заданої функції φ отримаємо

$$\left(\frac{A_0(\exp\{\varphi(1)\}-1)^\alpha}{\delta}\right)^{1/H}+1 = \left(\frac{A_0(e^{\frac{1}{p}}-1)^\alpha}{\delta}\right)^{\frac{1}{H}}+1 \leq \left(\frac{A_0}{\delta}\right)^{\frac{1}{H}}+1,$$

де $p > 1, \alpha \in (0,1)$.

Далі,

$$2\left(\frac{A_0}{A_\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = 2\left(\frac{a_\varphi\sqrt{\frac{5c}{2H}}}{2^{1-\frac{H}{2}}a_\varphi\pi^{\frac{H}{2}}\sqrt{\frac{5c}{H}}}\right)^{\frac{2}{H}} = 2\left(\frac{1}{2^{1-\frac{H}{2}}\pi^{\frac{H}{2}}}\sqrt{\frac{5c}{2H}\cdot\frac{H}{2c}}\right)^{\frac{2}{H}} =$$

$$= \frac{2\cdot 5^{\frac{1}{H}}}{2^{\frac{2}{H}-1}\pi\ 2^{\frac{2}{H}}} = \frac{2^{2-\frac{4}{H}}5^{\frac{1}{H}}}{\pi}.$$

Отже, умова (14) набуває вигляду

$$N \geq \max\left\{ \left(\frac{a_\varphi}{\delta}\sqrt{\frac{5c}{H}}\right)^{\frac{1}{H}} + 1; \frac{2^{2-\frac{4}{H}}5^{\frac{1}{H}}}{\pi} \right\}.$$

В умові (15) матимемо:

$$\varphi^*\left(\frac{\delta N^H}{A_0} - 1\right) = \frac{1}{q}\left(\frac{\delta N^H}{a_\varphi\sqrt{\frac{5c}{2H}}} - 1\right)^q,$$

$$\left(\frac{(\delta A_\alpha)^{\frac{b}{\alpha}}(N+1)^{\frac{2Hb}{\alpha}}}{2^b(1-\frac{b}{\alpha})A_0^{\frac{2b}{\alpha}}N^{\frac{(H-\alpha)b}{\alpha}}} l^{(-1)}\left(\frac{\delta(N+1)^H}{A_0} - 1\right) + 1\right)^{\frac{2}{b}} = \left|\frac{b}{\alpha} = \frac{\frac{H}{4}}{\frac{H}{2}} = \frac{1}{2}\right| =$$

$$= \left(\frac{\left(\delta a_\varphi \pi^{\frac{H}{2}} 2^{1-\frac{H}{2}}\sqrt{\frac{2c}{H}}\right)^{\frac{1}{2}}(N+1)^{2H\cdot\frac{1}{2}}}{2^{\frac{H}{4}}(1-\frac{1}{2})\left(a_\varphi\sqrt{\frac{5c}{2H}}\right)^{2\cdot\frac{1}{2}} N^{(H-\frac{H}{2})\cdot\frac{1}{2}}} \left(\frac{\delta(N+1)^H}{a_\varphi\sqrt{\frac{5c}{2H}}} - 1\right)^{\frac{1}{p-1}} + 1\right)^{\frac{8}{H}} = (*).$$

Оскільки N - велике число, то

$$(*) \approx \left(\frac{\delta^{\frac{1}{2}} a_\varphi^{\frac{1}{2}} \pi^{\frac{H}{4}} 2^{\frac{1}{2}-\frac{H}{4}} \cdot (\frac{2c}{H})^{\frac{1}{4}} N^H}{2^{\frac{H}{4}-1} a_\varphi (\frac{5c}{2H})^{\frac{1}{2}} N^{\frac{H}{4}}} \cdot \frac{\delta^{\frac{1}{p-1}} N^{\frac{H}{p-1}}}{a_\varphi^{\frac{1}{p-1}} (\frac{5c}{2H})^{\frac{1}{2(p-1)}}}\right)^{\frac{8}{H}} =$$

$$= \pi^2\left(\frac{\delta}{a_\varphi}\right)^{\frac{4(p+1)}{H(p-1)}} \cdot 2^{\frac{18}{H}+\frac{4}{H(p-1)}-4} \cdot 5^{-\frac{4}{H}-\frac{4}{H(p-1)}} \cdot \left(\frac{H}{c}\right)^{\frac{2}{H}+\frac{4}{H(p-1)}} \cdot N^{\frac{2(3p+1)}{p-1}} =$$

$$= \mu \cdot N^{\frac{2(3p+1)}{p-1}},$$

де

$$\mu = \pi^2 \cdot 2^{\frac{18}{H}+\frac{4}{H(p-1)}-4} \cdot 5^{-\frac{4}{H}-\frac{4}{H(p-1)}} \left(\frac{H}{c}\right)^{\frac{2}{H}+\frac{4}{H(p-1)}} \left(\frac{\delta}{a_\varphi}\right)^{\frac{4(p+1)}{H(p-1)}}.$$

Отже, умова (15) набуває вигляду:

$$2\mu \cdot exp\left\{-\frac{1}{q}\left(\frac{\delta N^H}{a_\varphi\sqrt{\frac{5c}{2H}}}-1\right)^q\right\} N^{\frac{2(3p+1)}{p-1}} \le \nu.$$

Таким чином, теорема доведена. □

Теорема 2.3. Нехай $\varphi(x) = \exp\{|x|\} - |x| - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

У цьому випадку модель $\tilde{Z}$, визначена в (11), наближає процес узагальненого дробового броунівського руху Z, визначений за допомогою (10), із заданими надійністю $1-\nu$, $0<\nu<1$, та точністю $\delta>0$ в $C([0,1])$, якщо виконуються такі умови:

$$N \ge \max\left\{1.025\left(\frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{5c}{2H}}\right)^{1/H}+1; \quad \frac{2^{2-\frac{4}{H}}5^{\frac{1}{H}}}{\pi}\right\} \tag{16}$$

та

$$2\mu\exp\left\{-\frac{\delta N^H}{\sqrt{\frac{5c}{2H}}}\ln\left(\frac{\delta N^H}{\sqrt{\frac{5c}{2H}}}\right)+\frac{\delta N^H}{\sqrt{\frac{5c}{2H}}}-1\right\} N^6 \left(ln\left(\frac{\delta(N+1)^H)}{\sqrt{\frac{5c}{2H}}}\right)\right)^{\frac{8}{H}} \le \nu, \tag{17}$$

де $\mu = \mu(H) = \pi^2\delta^{\frac{4}{H}} \cdot 2^{\frac{18}{H}-4} \cdot 5^{-\frac{4}{H}}\left(\frac{H}{c}\right)^{\frac{2}{H}}$.

Доведення. Знову скористаємось наслідком 2.1 та припущенням, що $\alpha = \frac{H}{2}$, $b = \frac{H}{4}$.

Перетворення Юнга-Фенхеля такої функції φ має вигляд:

$\varphi^*(x) = (|x|+1)ln(|x|+1) - |x|, x \in \mathbb{R}$.

При $x \geq 0$ маємо:

$\varphi'(x) = e^x - 1 = l(x) \Rightarrow l^{(-1)}(x) = ln(x+1), x \geq 0.$

В умові (14) маємо:

$$\left(\frac{A_0(\exp\{\varphi(1)\}-1)^\alpha}{\delta}\right)^{1/H} + 1 = \left(\frac{A_0}{\delta}\left(e^{e-2}-1\right)^{\frac{H}{2}}\right)^{\frac{1}{H}} + 1 =$$

$$\left(\frac{a_\varphi}{\delta}\sqrt{\frac{5c}{2H}}\right)^{\frac{1}{H}}\left(e^{e-2}-1\right)^{\frac{1}{2}} + 1 = 1.025 \cdot \left(\frac{a_\varphi}{\delta}\sqrt{\frac{5c}{2H}}\right)^{\frac{1}{H}} + 1 > \left(\frac{A_0}{H}\right)^{\frac{1}{H}} + 1.$$

$\Rightarrow$ Умова (14) має вигляд:

$$N \geq \max\left\{1.025\left(\frac{a_\varphi}{\delta}\sqrt{\frac{5c}{2H}}\right)^{1/H} + 1; \quad \frac{2^{2-\frac{4}{H}}5^{\frac{1}{H}}}{\pi}\right\}$$

В умові (15) будемо мати:

$$\varphi^*\left(\frac{\delta N^H}{A_0} - 1\right) = \left(\frac{\delta N^H}{A_0} - 1 + 1\right) ln\left(\frac{\delta N^H}{A_0} - 1 + 1\right) - \left(\frac{\delta N^H}{A_0} - 1\right) =$$

$$= \frac{\delta N^H}{a_\varphi\sqrt{\frac{5c}{2H}}} ln\left(\frac{\delta N^H}{a_\varphi\sqrt{\frac{5c}{2H}}}\right) - \frac{\delta N^H}{a_\varphi\sqrt{\frac{5c}{2H}}} + 1,$$

$$\left(\frac{(\delta A_\alpha)^{\frac{b}{\alpha}}(N+1)^{\frac{2Hb}{\alpha}}}{2^b(1-\frac{b}{\alpha})A_0^{\frac{2b}{\alpha}}N^{\frac{(H-\alpha)b}{\alpha}}} l^{(-1)}\left(\frac{\delta(N+1)^H}{A_0} - 1\right) + 1\right)^{\frac{2}{b}} =$$

$$= \left(\frac{\delta^{\frac{1}{2}} a_\varphi^{\frac{1}{2}} \pi^{\frac{H}{4}} 2^{\frac{1}{2}-\frac{H}{4}} \cdot (\frac{2c}{H})^{\frac{1}{4}}(N+1)^H}{2^{\frac{H}{4}-1} a_\varphi (\frac{5c}{2H})^{\frac{1}{2}} N^{\frac{H}{4}}} \cdot ln\left(\frac{\delta(N+1)^H}{a_\varphi\sqrt{\frac{5c}{2H}}}\right) + 1\right)^{\frac{8}{H}} \approx (**)$$

При великих N

$$(**) \approx \left(\frac{\delta}{a_\varphi}\right)^{\frac{4}{H}} \pi^2 2^{\frac{18}{H}-4} 5^{-\frac{4}{H}} \left(\frac{H}{c}\right)^{\frac{2}{H}} N^6 \left(ln\left(\frac{\delta(N+1)^H)}{a_\varphi\sqrt{\frac{5c}{2H}}}\right)\right)^{\frac{8}{H}} \Rightarrow$$

Умова (15) набуде такого вигляду:

$$2\mu\exp\left\{-\frac{\delta N^H}{a_\varphi\sqrt{\frac{5c}{2H}}}\ln\left(\frac{\delta N^H}{a_\varphi\sqrt{\frac{5c}{2H}}}\right)+\frac{\delta N^H}{a_\varphi\sqrt{\frac{5c}{2H}}}-1\right\}N^6\times$$

$$\times\left(ln\left(\frac{\delta(N+1)^H)}{a_\varphi\sqrt{\frac{5c}{2H}}}\right)\right)^{\frac{8}{H}} \le \nu,$$

де $\mu = \pi^2 \cdot 2^{\frac{18}{H}-4} \cdot 5^{-\frac{4}{H}} \left(\frac{H}{c}\right)^{\frac{2}{H}} \left(\frac{\delta}{a_\varphi}\right)^{\frac{4}{H}}$.

У випадку заданої в умові теореми функції φ параметр $a_\varphi = 1$. Звідси випливає твердження теореми 2.3, де $\mu = \pi^2\delta^{\frac{4}{H}} \cdot 2^{\frac{18}{H}-4} \cdot 5^{-\frac{4}{H}} \left(\frac{H}{c}\right)^{\frac{2}{H}}$. $\square$

Розділ 3

Визначення числових параметрів моделей і комп'ютерне моделювання узагальненого дробового броунівського руху

3.1 Визначення числових параметрів моделей і комп'ютерне моделювання узагальненого дробового броунівського руху

У теоремах 2.2 та 2.3 умови (12), (16) для знаходження N представлені у явному вигляді, тому їх можна легко застосувати. Умови (13) та (17) досить складні, але їх можна розв'язати чисельними методами.

Далі на основі теорем 2.2 та 2.3 знайдемо числові параметри моделей узагальненого броунівського руху.

Нехай $\varphi(x) = \frac{|x|^p}{p}$, $|x| \geq 1$, $p > 1$. Ми хочемо знайти числові параметри та побудувати модель $\tilde{Z}$, визначену в (11), що наближає процес узагальненого дробового броунівського руху Z, визначениий за допомогою (10), із заданими надійністю $1 - \nu = 0.99$, та точністю $\delta = 0.01$ в $C([0,1])$ для чотирьох значень індекса Хюрста H.

1. $H_1 = \frac{7}{8}, p = 3$. Тоді матимемо, що $c = 0.02642778$;

   З теореми 2.2 випливає:

   - $\mu = 3.4717 * 10^{-10}$,
   - З умови (12) маємо, що $N \geq max\left\{45.1, 0.337\right\}$,

- З умови (13) випливає, що $N \geq 1362$.

Отже, достатньо взяти $N = 1362$, щоб наступна модель наближала узагальнений дробовий броунівський рух з параметром $H_1 = \frac{7}{8}$ з надійністю 0.99 та точністю 0.01 в $C([0,1])$ (див. Рис. 1).

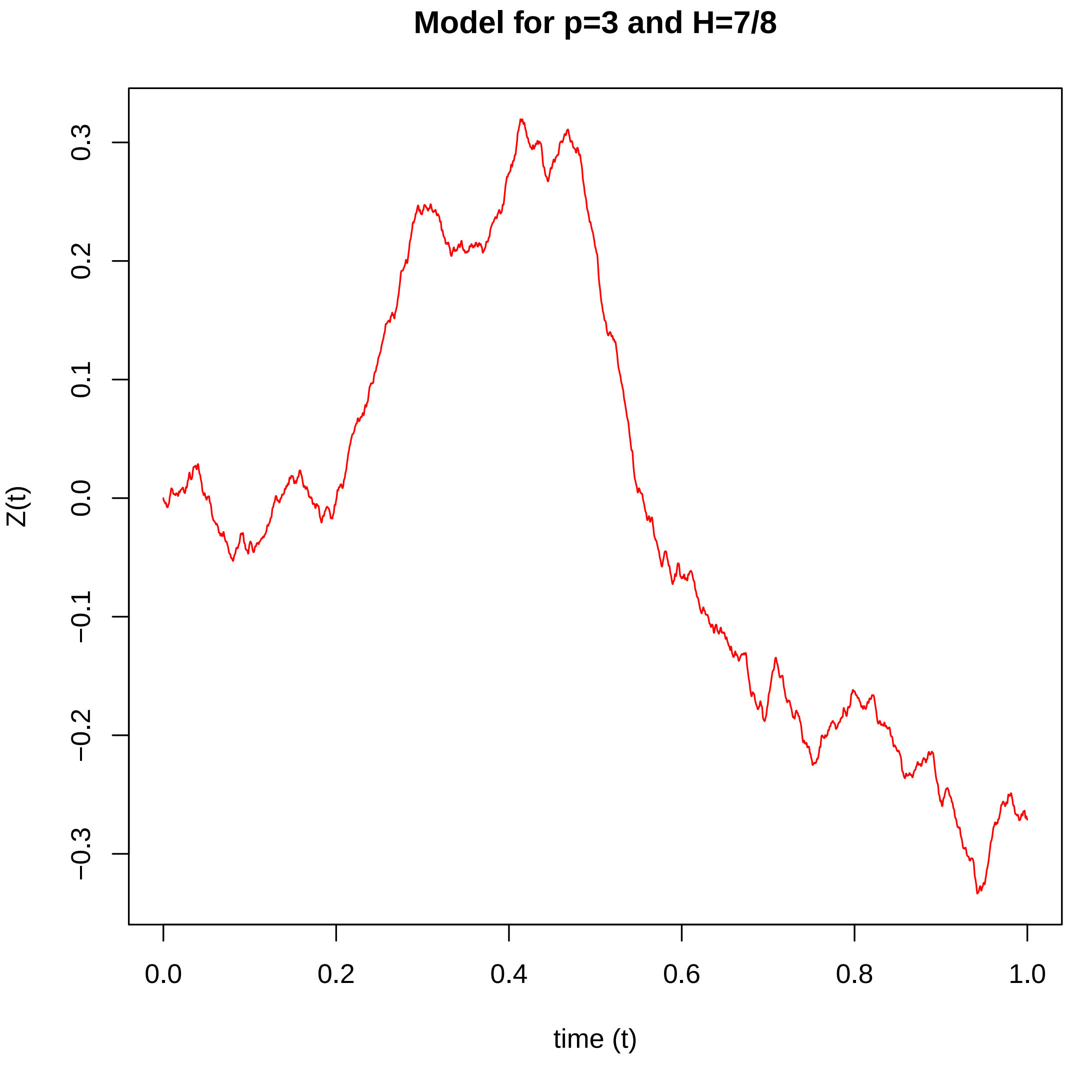

Рис. 1: Модель узагальненого дробового броунівського руху з параметром $H = \frac{7}{8}$

2. $H_2 = \frac{8}{9}, p = 3$. Тоді матимемо, що $c = 0.02341$;

З теореми 2.2 випливає:

- $\mu = 8.969 * 10^{-10}$,
- З умови (12) маємо, що $N \geq max\{39.496, 0.344\}$,
- З умови (13) випливає, що $N \geq 1111$.

Отже, достатньо покласти $N = 1111$ (див. Рис. 2).

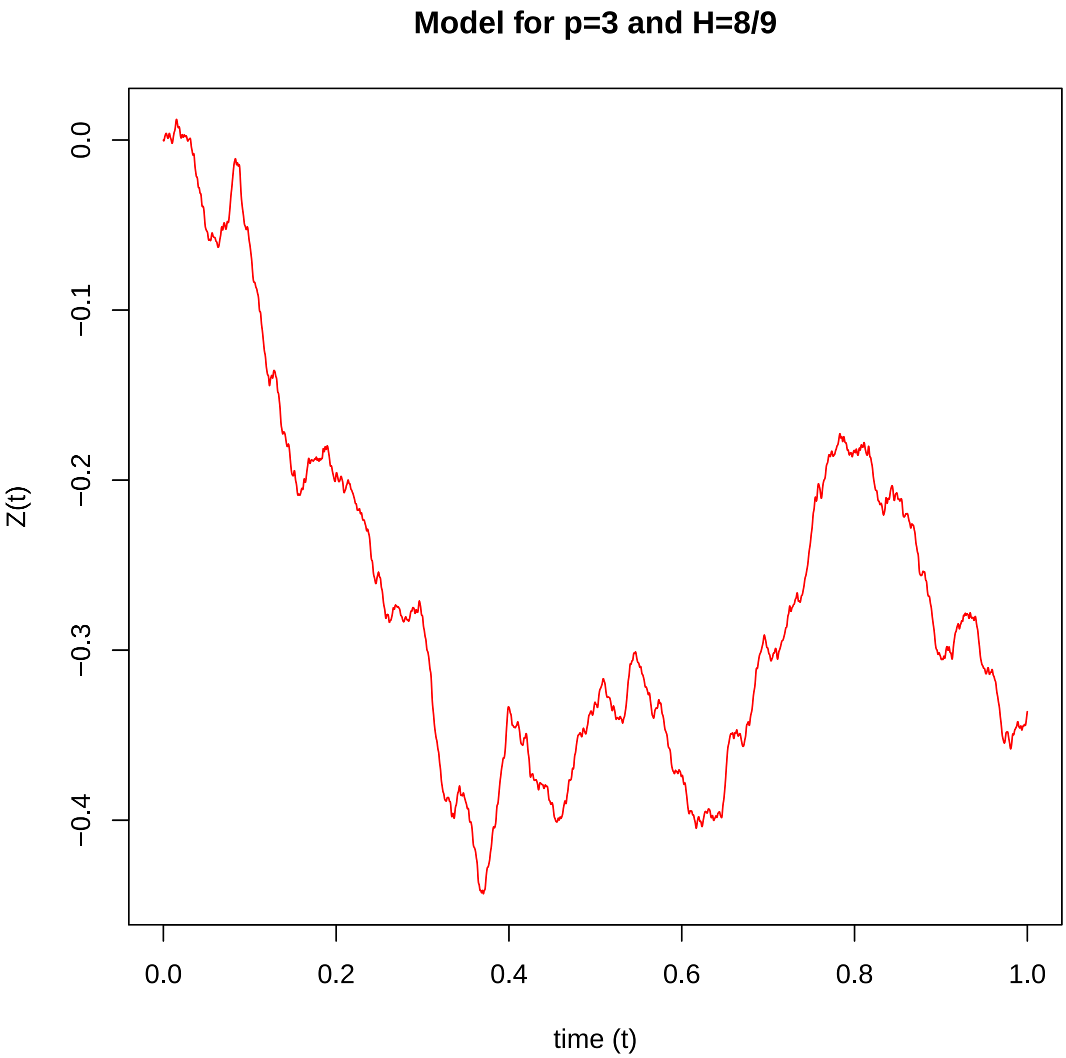

Рис. 2: Модель узагальненого дробового броунівського руху з параметром $H = \frac{8}{9}$

3. $H_3 = \frac{9}{10}, p = 3$. Тоді матимемо, що $c = 0.021007$;

З теореми 2.2 випливає:

- $\mu = 1.9722 * 10^{-9}$,
- З умови (12) маємо, що $N \geq max\{35.4, 0.3497\}$,
- З умови (13) випливає, що $N \geq 942$.

Отже, достатньо покласти $N = 942$ (див. Рис. 3).

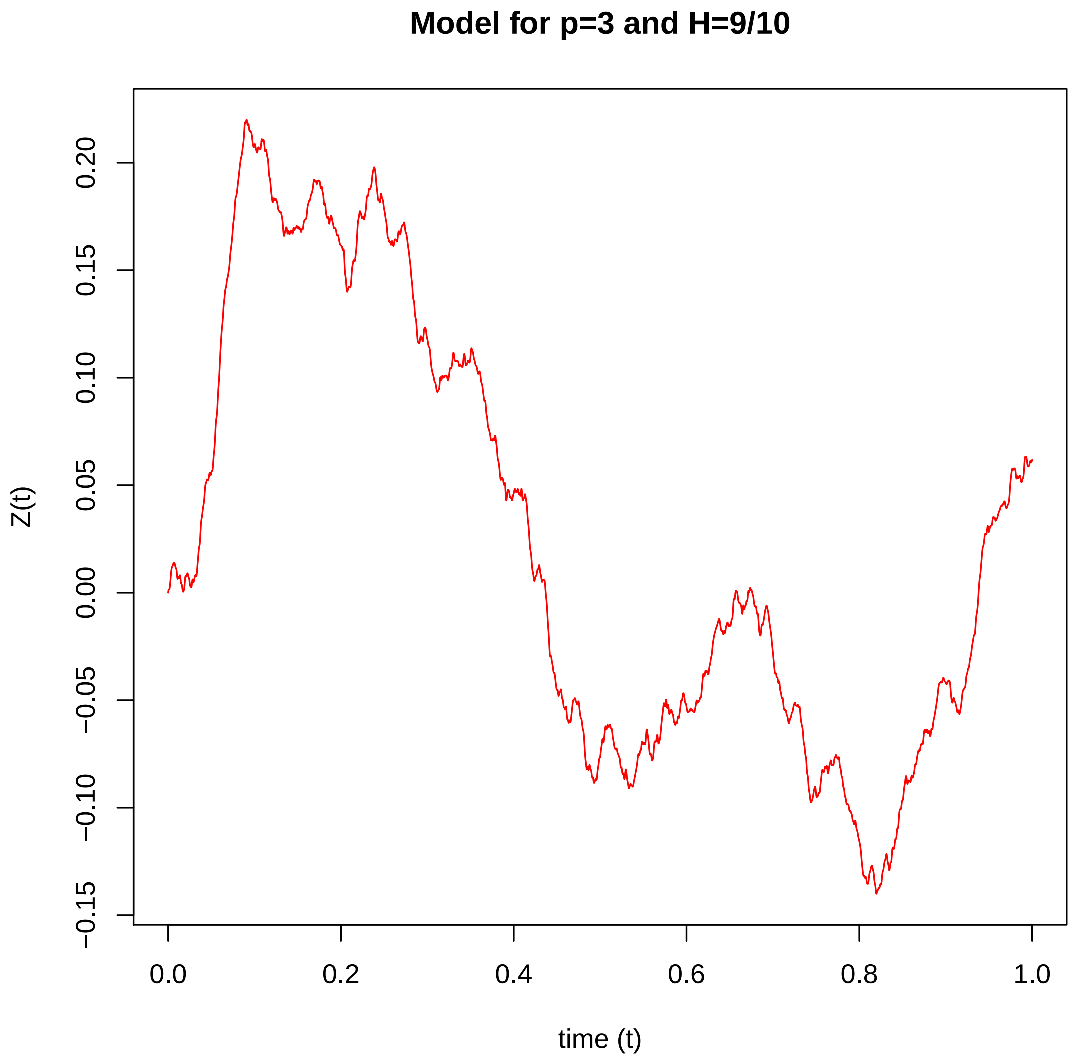

Рис. 3: Модель узагальненого дробового броунівського руху з параметром $H = \frac{9}{10}$

4. $H_4 = \frac{15}{16}, p = 3$. Тоді матимемо, що $c = 0.012979$;

З теореми 2.2 випливає:

- $\mu = 4.006 * 10^{-8}$,
- З умови (12) маємо, що $N \geq max\{23.6, 0.368\}$,
- З умови (13) випливає, що $N \geq 523$.

Отже, достатньо покласти $N = 523$ (див. Рис. 4).

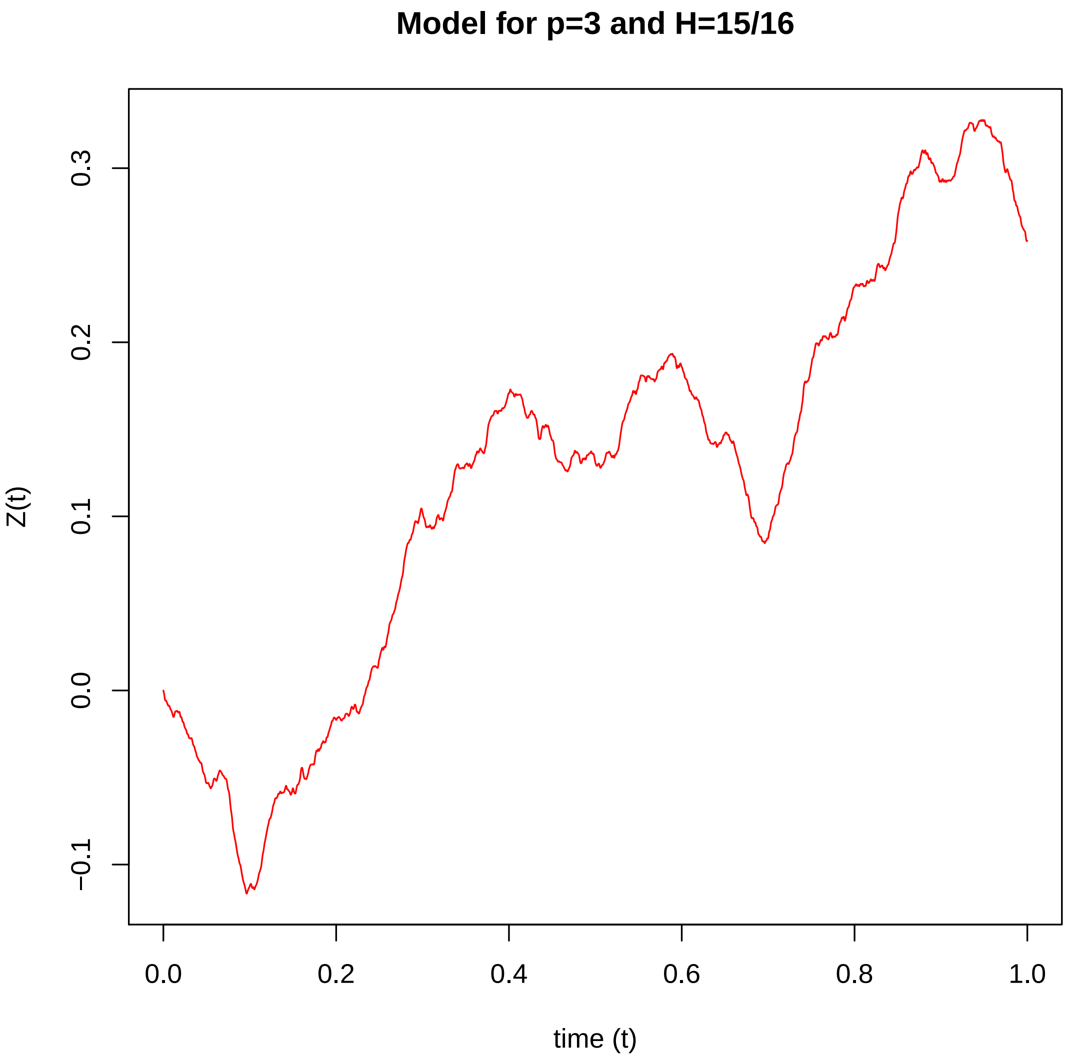

Рис. 4: Модель узагальненого дробового броунівського руху з параметром $H = \frac{15}{16}$

5. $H_5 = \frac{8}{9}, p = 5$. Тоді матимемо, що $c = 0.02341$;

З теореми 2.2 випливає:

- $\mu = 1.329 * 10^{-6}$,
- З умови (12) маємо, що $N \geq max\{39.5, 0.344\}$,
- З умови (13) випливає, що $N \geq 1693$.

Отже, достатньо покласти $N = 1693$ (див. Рис. 5).

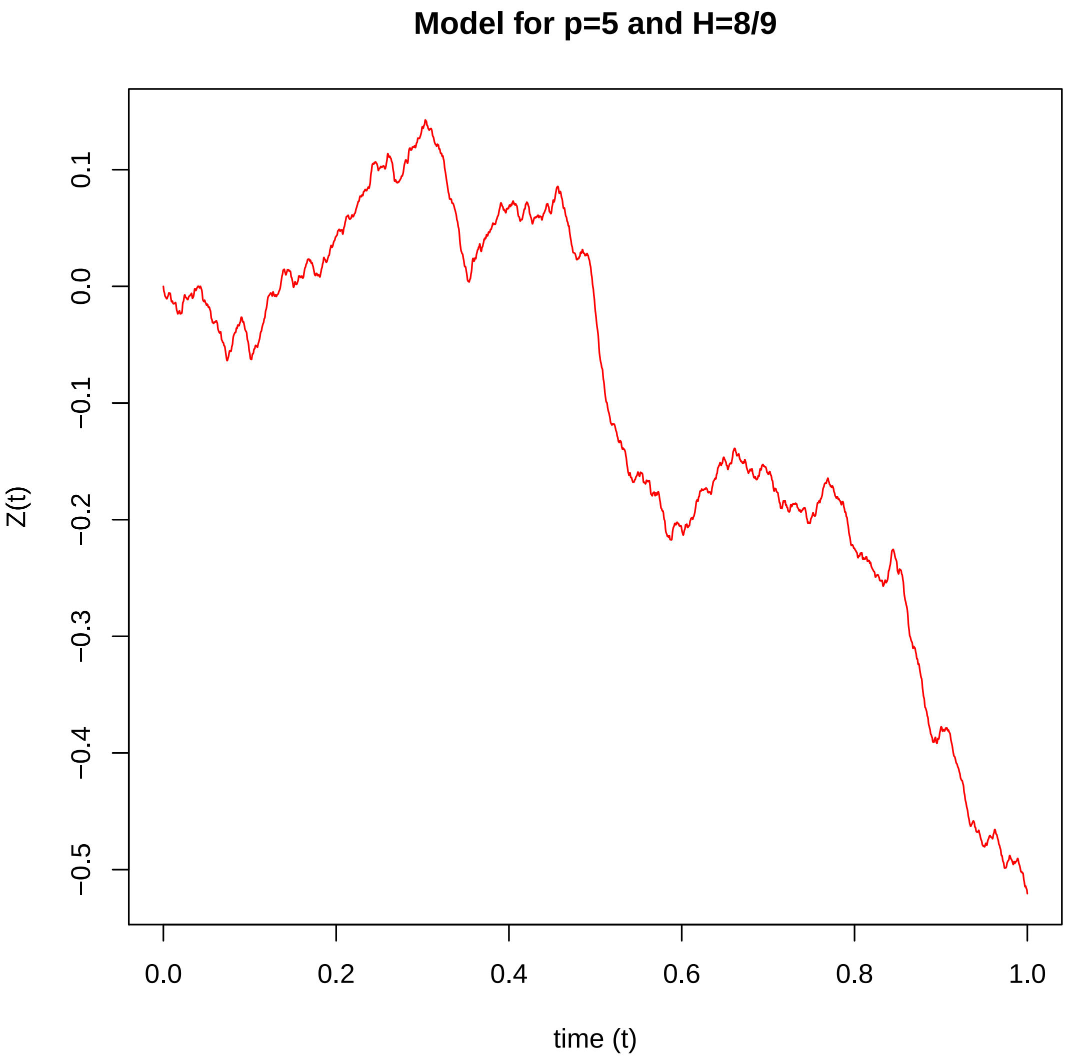

Рис. 5: Модель узагальненого дробового броунівського руху з параметром $H = \frac{8}{9}$ та $p = 5$

Тепер візьмемо надійність $1 - \nu = 0.95$ та точністю $\delta = 0.05$.

6. $H_6 = \frac{3}{4}, p = 3$. Тоді матимемо, що $c = 0.05373$;

   З теореми 2.2 випливає:

   - $\mu = 2.844 * 10^{-6}$,
   - З умови (12) маємо, що $N \geq max\{18.25, 0.27\}$,
   - З умови (13) випливає, що $N \geq 1006$.

   Отже, достатньо покласти $N = 1006$ (див. Рис. 6).

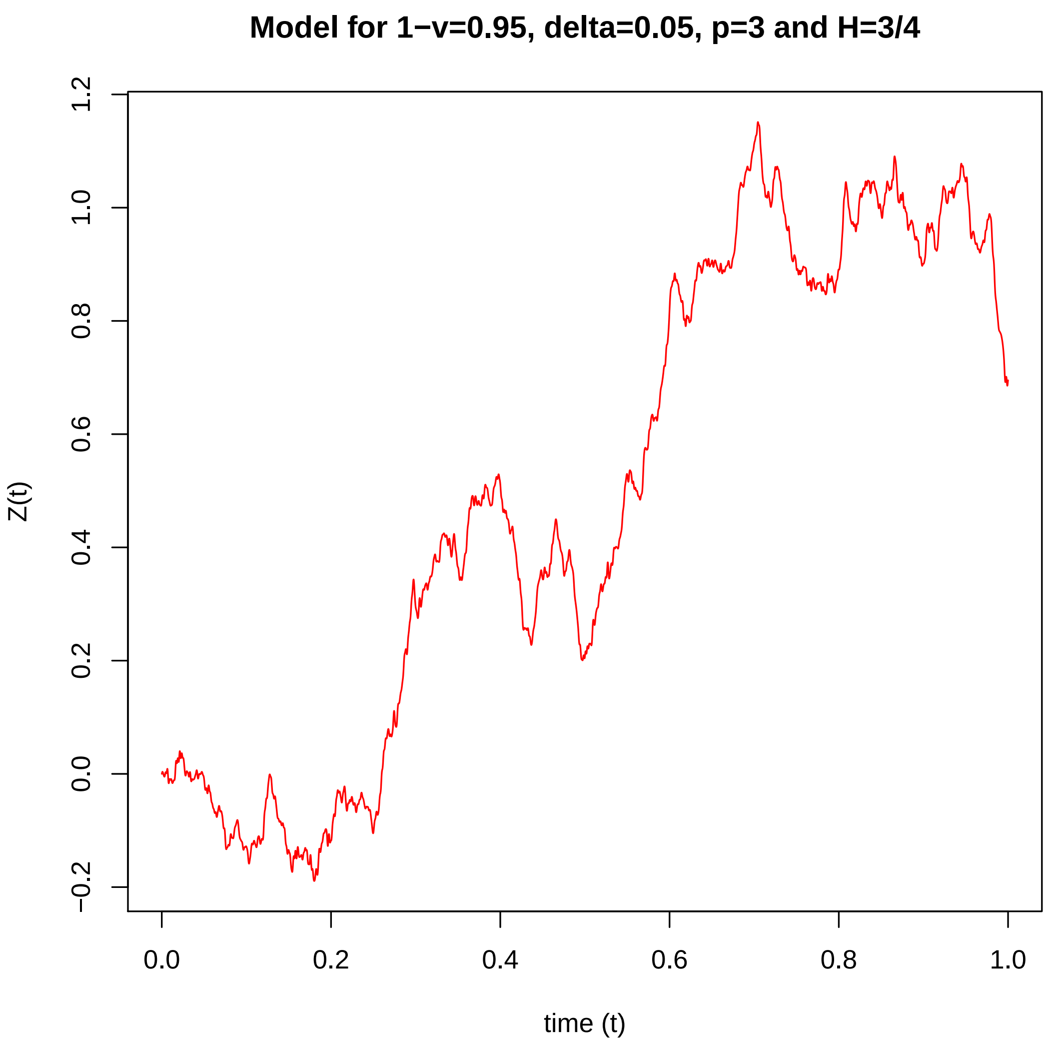

Рис. 6: Модель узагальненого дробового броунівського руху з параметром $H = \frac{3}{4}$ та $p = 3$

Знайдемо ті ж самі параметри, але для фунції $\varphi(x) = \exp\{|x|\} - |x| - 1$, $x \in \mathbb{R}$, надійності $1 - \nu = 0.95$ та точності $\delta = 0.05$.

1. $H_1 = \frac{3}{4}$. Тоді матимемо, що $c = 0.05373$;

   З теореми 2.3 випливає:

   - $\mu = 0.2518$,
   - З умови (16) маємо, що $N \geq max\,\{18.68, 0.27\}$,
   - З умови (17) випливає, що $N \geq 1289$.

   Отже, достатньо покласти $N = 1289$ (див. Рис. 7).

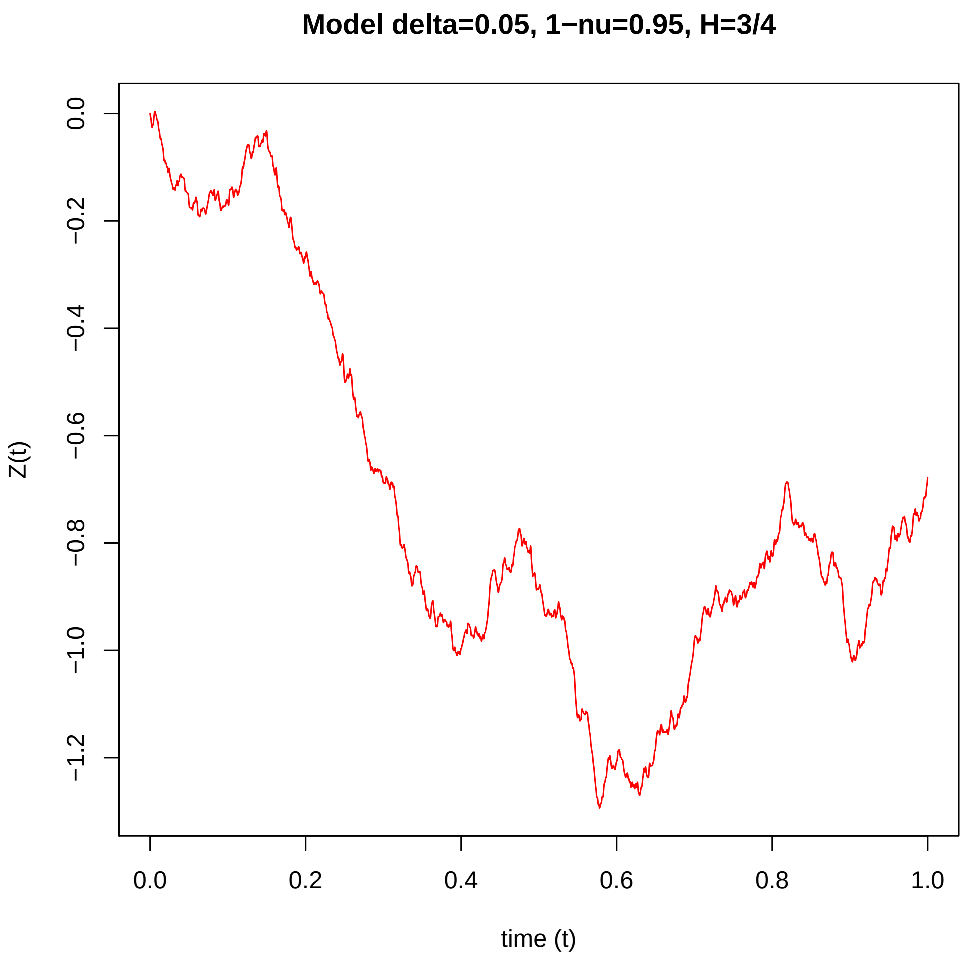

Рис. 7: Модель узагальненого дробового броунівського руху з параметром $H = \frac{3}{4}$

2. $H_2 = \frac{7}{8}$. Тоді матимемо, що $c = 0.02643$;

   З теореми 2.3 випливає:

   - $\mu = 2.0611$,
   - З умови (16) маємо, що $N \geq max\{8.188, 0.337\}$,
   - З умови (17) випливає, що $N \geq 243$.

   Отже, достатньо покласти $N = 243$ (див. Рис. 8).

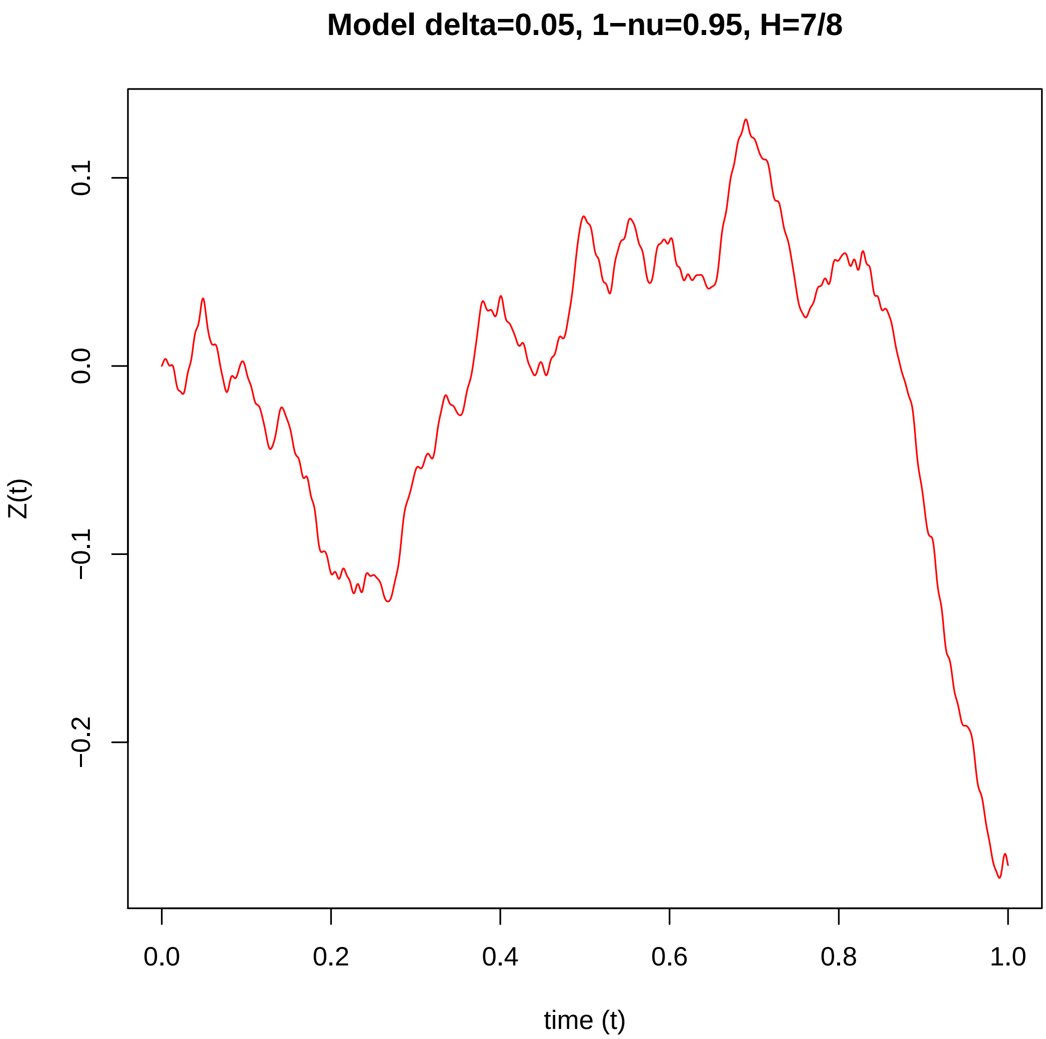

Рис. 8: Модель узагальненого дробового броунівського руху з параметром $H = \frac{7}{8}$

3. $H_3 = \frac{8}{9}$. Тоді матимемо, що $c = 0.02341$;

З теореми 2.3 випливає:

- $\mu = 2.7527$,
- З умови (16) маємо, що $N \geq max\{7.45, 0.344\}$,
- З умови (17) випливає, що $N \geq 203$.

Отже, достатньо покласти $N = 203$ (див. Рис. 9).

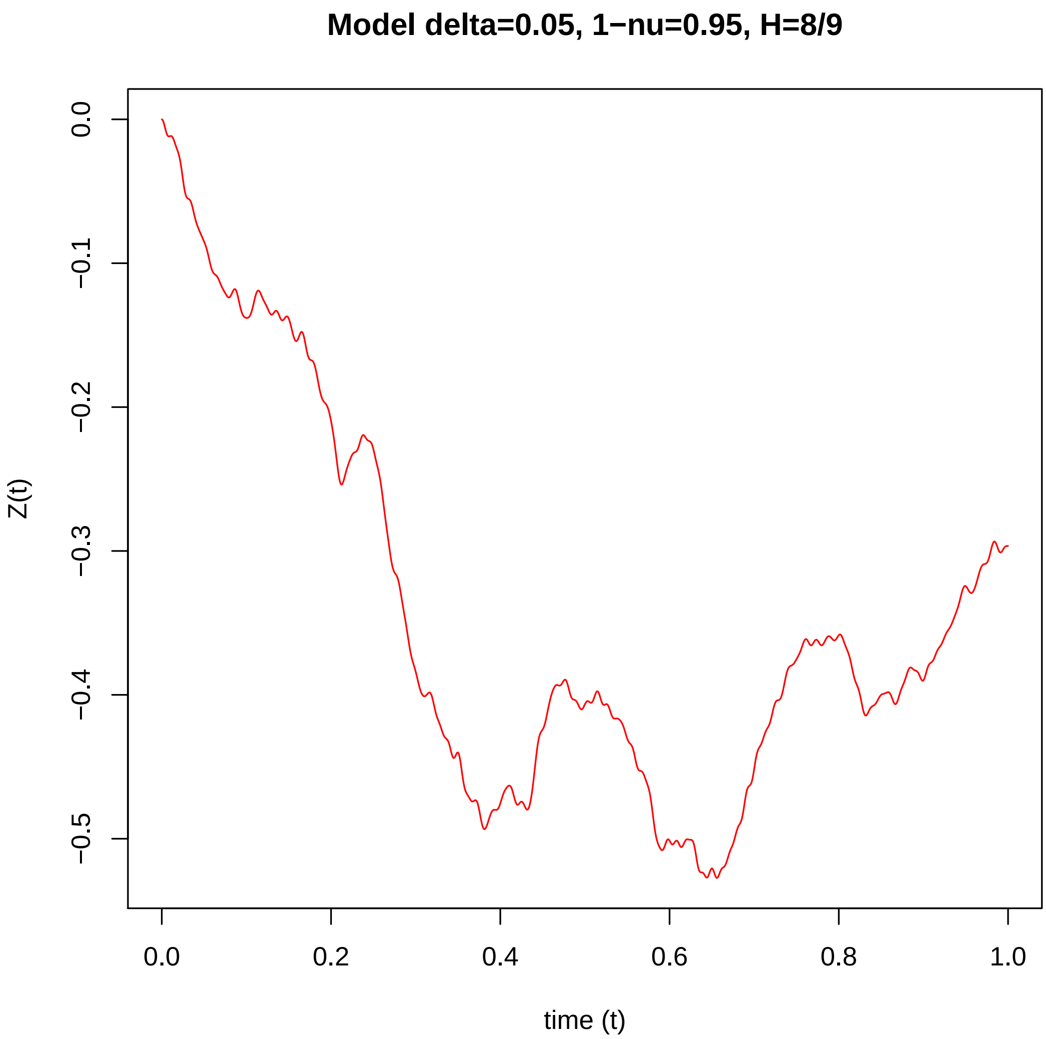

Рис. 9: Модель узагальненого дробового броунівського руху з параметром $H = \frac{8}{9}$

4. $H_4 = \frac{15}{16}$. Тоді матимемо, що $c = 0.012979$;

З теореми 2.3 випливає:

- $\mu = 10.045$,
- З умови (16) маємо, що $N \geq max\{5.163, 0.3682\}$,
- З умови (17) випливає, що $N \geq 104$.

Отже, достатньо покласти $N = 104$ (див. Рис. 10).

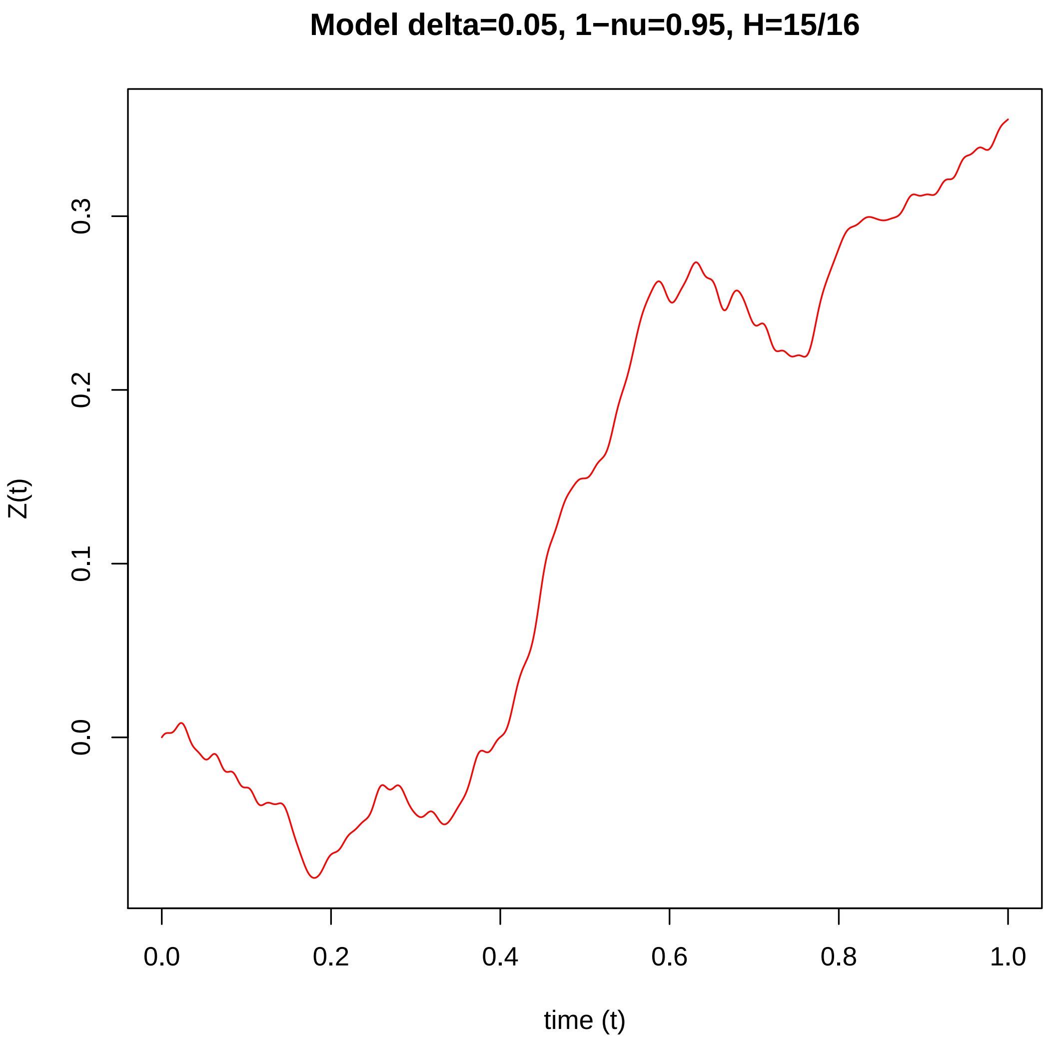

Рис. 10: Модель узагальненого дробового броунівського руху з параметром $H = \frac{15}{16}$

Висновки: З рисунків можна зробити висновок, що вигляд траєкторій повністю узгоджується з класичним виглядом траєкторій процесів субгаусового дробового броунівського руху, а саме поведінка процесу приблизно однакова - більш або менш часті флуктуації в околі нуля. Також бачимо, що чим більше значення індекса Хюрста H, тим гладшою є крива.

3.2 Скрипт для моделювання узагальненого дробового броунівського руху в програмному середовищі R

Реалізація моделі φ-субгауссового дробового броунівського руху для $\varphi(x) = \frac{|x|^p}{p}$, $|x| \geq 1$, $p > 1$ в програмному середовищі R.

```
\# Встановлення необхідних пакетів
install.packages("Bessel")
library(Bessel)
install.packages("CircularDDM")
library( CircularDDM)


> # Simulation of fBm in R
>
> # Надійність
> nu=0.01
>
> # Точність
> delta=0.01
>
```

```
> # Hurst parameter
> H=15/16
>
> # Норма
> a_phi=1
>
> # параметр функції
> p=3
>
> # параметр функції - перетворення Юнга-Фенхеля
> q=p/(p-1)
>
> # параметр c
> c=gamma(2*H+1)*sin(pi*H)/pi^(2*H+1)
>
> # Обчислення \mu
> mu=(pi^2)*2^(18/H+4/(H*(p-1))-4)*5^(-4/H-4/(H*(p-1)))*
(H/c)^(2/H+4/(H*(p-1)))*(delta/a_phi)^(4*(p+1)/(H*(p-1)))
>
> # Умова (12) теореми 2.2.
> N1=((a_phi/delta)*sqrt(5*c/(2*H)))^(1/H)+1
> N2=2^(2-(4/H))*5^(1/H)/pi
>
> # Умова (13) теореми 2.2.
```

```
> f23<-function(n){2*mu*exp(-(1/q)*(delta*n^H/
(a_phi*sqrt(5*c/(2*H)))-1)^q)*n^(2*(3*p+1)/(p-1))-nu}
> N3<-uniroot(f23,c(100,50000))$root
>
> # Шукане значення N
> N<-ceiling(max(N1,N2,N3))
>
> # Нулі x функції Бесселя J_{-H}
> x<-besselzero(H,N,1)
>
> # Нулі y функції Бесселя J_{1-H}
> y<-besselzero(1-H,N,1)
>
> # Коефіцієнти c_n
> CC<-0
> for(n in 1:N) {CC[n]<-(pi^H)*sqrt(2*c)/(((x[n])^(H+1))*
BesselJ(x[n],1-H))}
>
>
> # Коефіцієнти d_n
> DD<-0
> for(n in 1:N) {DD[n]<-(pi^H)*sqrt(2*c)/(((y[n])^(H+1))*
BesselJ(y[n],H))}
>
```

```
> # Послідовність випадкових величин xi_n
> seq1<-runif(N)
> xi<-0
> for(n in 1:N) {xi[n]<-sign(runif(1,min=-1,max=1))*
(q*log(1/(1-seq1[n])))^(1/q)}
>
> # Послідовність випадкових величин eta_n
> seq2<-runif(N)
> eta<-0
> for(n in 1:N) {eta[n]<-sign(runif(1,min=-1,max=1))*
(q*log(1/(1-seq2[n])))^(1/q)}
>
> # Задаємо модель як функцію від часу t
> model<-function(t){sum(CC*sin(x*t)*xi)+sum(DD*(1-cos(y*t))*eta)}
>
>
> # Задаємо послідовність моментів часу в межах від 0 до 1 включно
 з кроком 0.0001
> t<-seq(0,1,by=0.0001)
>
> # Обчислюємо значення моделі у відповідні моменти часу
(згенеровані вище)
> result<-0
> for (i in 1:length(t)){result[i]<-model(t[i])}
```

```
>
> # Будуємо графік змодельованої  траєкторії процесу
>
> plot(t,result,type='l',col='red',xlab="time (t)",ylab="Z(t)",
main="Модель УДБР при H=15/16")
>
>
> # Зберігаємо графік змодельованої  траєкторії процесу
 в pdf-файл (зберігається в поточну робочу директорію)
>
> pdf("rplot_H1516.pdf")
> plot(t,result,type='l',col='red',xlab="time (t)",ylab="Z(t)",
main="Model for p=3 and H=15/16")
> dev.off()
```

Реалізація моделі φ-субгауссового дробового броунівського руху для функції $\varphi(x) = \exp\{|x|\} - |x| - 1$, $x \in \mathbb{R}$ в програмному середовищі R.

```
> # Simulation of fBm in R
>
> # Надійність
> nu=0.05
>
> # Точність
> delta=0.05
>
```

```
> # Hurst parameter
> H=3/4
>
> # параметр c
> c=gamma(2*H+1)*sin(pi*H)/pi^(2*H+1)
>
> # Обчислення \mu
> mu=(pi^2)*((delta)^(4/H))*(2^(18/H-4))*(5^(-4/H))*((H/c)^(2/H))
>
> # Умова (16) теореми 2.3.
> N1=1.025*((1/delta)*sqrt(5*c/(2*H)))^(1/H)+1
> N2=2^(2-(4/H))*5^(1/H)/pi
>
> # Умова (17) теореми 2.3.
> f17<-function(n){2*mu*exp(-(delta*n^H/(sqrt(5*c/(2*H)))))*
log(delta*n^H/(sqrt(5*c/(2*H))))+delta*n^H/(sqrt(5*c/(2*H))-1)*
(n^6)*(log(delta*(n+1)^H/(sqrt(5*c/(2*H)))))^(8/H)-nu}
> N3<-uniroot(f17,lower = 100, upper = 10000)$root
>
> # Шукане значення N
> N<-ceiling(max(N1,N2,N3))
>
> # Нулі x функції Бесселя J_{-H}
> x<-besselzero(H,N,1)
```

```
>
> # Нулі у функції Бесселя J_{1-H}
> y<-besselzero(1-H,N,1)
>
> # Коефіцієнти c_n
> CC<-0
> for(n in 1:N) {CC[n]<-(pi^H)*sqrt(2*c)/
(((x[n])^(H+1))*BesselJ(x[n],1-H))}
>
>
> # Коефіцієнти d_n
> DD<-0
> for(n in 1:N) {DD[n]<-(pi^H)*sqrt(2*c)/
(((y[n])^(H+1))*BesselJ(y[n],H))}
>
> # Послідовність випадкових величин xi_n
> xi<-rpois(N,1)-1
>
> # Послідовність випадкових величин eta_n
> eta<-rpois(N,1)-1
>
> # Задаємо модель як функцію від часу t
> model<-function(t){sum(CC*sin(x*t)*xi)+sum(DD*(1-cos(y*t))*eta)}
>
```

```
>
> # Задаємо послідовність моментів часу в межах від 0 до 1
включно з кроком 0.0001
> t<-seq(0,1,by=0.0001)
>
> # Обчислюємо значення моделі у відповідні моменти часу
 (згенеровані вище)
> result<-0
> for (i in 1:length(t)){result[i]<-model(t[i])}
>
> # Будуємо графік змодельованої  траєкторії процесу
>
> plot(t,result,type='l',col='red',xlab="time (t)",ylab="Z(t)",
main="Модель УДБР при H=3/4")
>
>
> # Зберігаємо графік змодельованої  траєкторії процесу в pdf-файл
(зберігається в поточну робочу директорію)
>
> pdf("rplot34_other_phi.pdf")
> plot(t,result,type='l',col='red',xlab="time (t)",ylab="Z(t)",
main="Model delta=0.05, 1-nu=0.95, H=3/4")
> dev.off()
```

ВИСНОВКИ

В даній роботі вдалося сформулювати та довести дві теореми, що містять умови, за яких модель виду (11) наближає процес строго φ-субгауссового узагальненого дробового броунівського руху із заданими надійністю та точністю у просторі $C([0;1])$ у випадках, коли $\varphi(x) = \frac{|x|^p}{p}$, $|x| \geq 1$, $p > 1$, та $\varphi(x) = \exp\{|x|\} - |x| - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Також визначено параметри моделей та побудовано траєкторії таких процесів для різних індексів Хюрста H і заданих значень точності та надійності у програмному середовищі R.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] Buldygin V. V. and Kozachenko Yu. V., Metric characterization of random variables and random processes. American Mathematical Society, Providence RI, 2000.

[2] Dzhaparidze K.O. and Zanten J. H. A series expansion of fractional Brownian motion // CWI. Probability, Networks and Algorithms [PNA], R 0216.

[3] Kozachenko Yu. Simulation of Weakly Self-Similar Stationary Increment $\mathbf{Sub}_{\varphi}(\Omega)$-Processes: A Series Expansion Approach / Yu. Kozachenko, T. Sottinen, O. Vasylyk // Methodology and Computing in Applied Probability. – 2005. – Vol. 7 (3) – P. 379–400.

[4] Kozachenko Yu. Simulation of fractional Brownian motion with given reliability and accuracy in $C([0,1])$ / Yu. Kozachenko, O. Vasylyk // Theory of Stochastic Processes. – 2006. – Vol.12 (28), no.3-4. – P. 59–66

[5] Василик О.І. φ-субгауссові випадкові процеси / О.І. Василик, Ю.В. Козаченко, Р.Є. Ямненко // К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет". – 2008. – 231 с.

[6] Козаченко Ю.В., Островский Е.И. Банаховы пространства случайных величин типа субгауссовских. // Теория вероятн. и матем. статист. – 1985. – № 32 – С.42-53.

[7] І. І. Ловицька. Моделювання узагальненого дробового броунівського руху. // Тези доповідей X Всеукраїнської наукової конференції молодих математиків. Нац. техн. ун-т України «КПІ ім. І. Сікорського». – Київ. – 2021. – с. 27–28.