

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Фізико-математичний факультет
Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

«На правах рукопису»

УДК _____

До захисту допущено:

Завідувач кафедри

_____ Олег Клесов,

«___» _____ травня 2021 р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

за освітньо-науковою програмою «Страхова та фінансова математика»

зі спеціальності 111 «Математика»

на тему: «Розв’язки лінійних операторних рівнянь в банаховому просторі»

Виконала:

студентка II курсу, групи ОМ-91мн

Матлаш Валентина Юріївна _____

Керівник:

кандидат фізико-математичних наук,

Сиротенко Антон Володимирович _____

Рецензент:

кандидат фізико-математичних наук,

доцент кафедри математичної фізики

фізико-математичного факультету

Рева Надія Віталіївна _____

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.

Студентка _____

Київ – 2021 року

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Фізико-математичний факультет

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Спеціальність – 111 «Математика»

Освітньо-наукова програма «Страхова та фінансова математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ Олег КЛЕСОВ

«04» лютого 2021 р.

ЗАВДАННЯ

на магістерську дисертацію студентці

Матлаш Валентині Юріївні

1. Тема дисертації «Розв’язки лінійних операторних рівнянь в банаховому просторі», науковий керівник дисертації Сиротенко Антон Володимирович, кандидат фізико-математичних наук, затверджені наказом по університету від «26» березня 2021 р. №901-с
2. Термін подання студентом дисертації 13 травня 2021 року
3. Об’єктом дослідження є лінійні операторні рівняння в банаховому просторі.

4. Предметом дослідження є формули єдиного розв'язку для операторного рівняння в банаховому просторі у різних випадках.

5. Перелік завдань, які потрібно розробити:

1). Ознайомитися з літературою та навести основні означення.

2). Навести класичні результати, що забезпечують існування єдиного розв'язку для широкого класу операторних рівнянь.

3). Дослідити частковий випадок операторного рівняння в конкретному просторі та отримати явні формули для розв'язку рівняння у різних випадках щодо операторів.

4). Навести приклади конкретних рівнянь, розв'язати їх, використовуючи отримані формули.

6. Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного) матеріалу: 13 слайдів.

7. Орієнтовний перелік публікацій:

- Тези доповідей X Всеукраїнської конференції молодих математиків, Київ, квітень 2021 р.

8. Дата видачі завдання 04 лютого 2021 року

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1.	Огляд літератури	04.02.21-17.02.21	виконано
2.	Нотування основних результатів та тверджень	18.02.21-28.02.21	виконано
3.	Розв'язання допоміжних завдань про знаходження спектрів операторів	01.03.21-14.03.21	виконано
4.	Формулювання класичних теорем щодо операторних рівнянь та їх розв'язків	15.03.21-21.03.21	виконано
5.	Знаходження явного вигляду розв'язку матричного рівняння у випадку двох пар попарно різних власних чисел матриць	22.03.21-28.03.21	виконано
6.	Підготовка тез доповідей для конференції	29.03.21-02.04.21	виконано
7.	Знаходження явного вигляду розв'язку матричного рівняння у випадку кратних власних чисел матриць	03.04.21-13.04.21	виконано
8.	Знаходження явного вигляду розв'язку матричного рівняння у мішаному випадку	14.04.21-21.04.21	виконано
9.	Наведення прикладів, що підтверджують отримані результати.	22.04.21-30.04.21	виконано
10.	Оформлення результатів	01.05.21-12.05.21	виконано

Студент

Валентина МАТЛАШ

Науковий керівник

Антон СИРОТЕНКО

Реферат

Магістерська дисертація: 42 сторінки, 22 першоджерела, 13 слайдів презентації. Робота складається зі вступу, двох розділів, висновків та списку використаної літератури.

У дисертації вивчаються лінійні операторні рівняння у банаховому просторі для конкретного прикладу вказаних просторів. Метою дослідження є встановлення явних формул розв'язку матричного рівняння в залежності від того, як саме виглядають множини власних чисел матриць, що наявні у рівнянні. Об'єктом дослідження є лінійні операторні рівняння в банаховому просторі. Предметом дослідження є формули єдиного розв'язку для операторного рівняння в банаховому просторі у різних випадках.

Перший розділ дисертаційної роботи містить теоретичні відомості з теорії операторів та операторних рівнянь у банаховому просторі. Сформульовано класичні результати щодо існування розв'язку таких рівнянь у вигляді контурних інтегралів. Також в розділі наведено формули та теореми, які використовуються в дослідженні для знаходження вказаних інтегралів. Починається перший розділ зі списку умовних позначень, наявних у роботі.

Другий розділ містить основні результати дослідження, сформульовані у вигляді трьох теорем. Кожна теорема описує умову існування розв'язку матричного рівняння у деякому випадку, що визначається структурою множини власних чисел матриць, а також дає явний вигляд цього розв'язку.

В процесі роботи над дисертацією було використано важливі теореми з теорії функцій комплексної змінної, а також результати з лінійної алгебри, функціонального аналізу та теорії операторів.

Ключові слова: банахів простір, матричне рівняння, спектр оператора, власні числа матриць, лишки.

Abstract

Master's thesis: 42 pages, 22 primary sources, 13 slides of the presentation. The work consists of the introduction, two sections, conclusions and the list of references.

In the dissertation linear operator equations in a Banach space for a concrete example of the specified spaces are studied. The aim of the study is to establish explicit formulas for solution for the matrix equation depending on how the sets of eigenvalues of the matrices present in the equation look like. The object of research is linear operator equations in a Banach space. The subject of the study is the formulas of a single solution for the operator equation in a Banach space in different cases.

The first section of the dissertation contains theoretical information about the theory of operators and operator equations in a Banach space. The classical results for the existence of a solution of such equations in the form of contour integrals are formulated. Also in the section the formulas and theorems which are used in research for finding of the specified integrals are listed. The first section begins with a list of symbols which are used in the work.

The second section contains the main results of the study, formulated in the form of three theorems. Each theorem describes the condition for the existence of a solution of a matrix equation in some case, which is determined by the structure of the set of eigenvalues of matrices, and also gives an explicit form of this solution.

In the process of work on the dissertation, important theorems of the theory of functions of a complex variable were used, as well as results of linear algebra, functional analysis and operator theory.

Keywords: a Banach space, matrix equation, spectrum of an operator, eigenvalues of matrices, residue.

ЗМІСТ

Вступ.....	8
Розділ 1. Теоретичні відомості	10
1.1. Список умовних позначень.	10
1.1. Обчислення інтегралів по контуру.....	11
1.2. Функції лінійних неперервних операторів.	14
1.3. Розв’язки лінійних операторних рівнянь.....	18
Розділ 2. Знаходження явних виглядів розв’язків лінійного операторного рівняння	23
2.1. Постановка задачі.	23
2.2. Знаходження розв'язку рівняння у випадку двох пар різних власних чисел.....	25
2.3. Приклад.....	29
2.4. Знаходження розв'язку рівняння у випадку кратних власних чисел у обох матрицях.	30
2.5. Приклад.....	34
2.6. Знаходження розв'язку рівняння у випадку, коли одна матриця має два власних числа, а друга - одне.	35
2.7. Приклад.....	38
Висновки.....	39
Список використаних джерел.....	40

Вступ

В багатьох напрямках сучасних математичних досліджень доводиться мати справу з диференціальними рівняннями. Історія розвитку диференціальних рівнянь починається досить давно, однак питання про існування обмежених розв'язків таких рівнянь постало на порядку денному лише в XIX сторіччі. Перші роботи в цьому напрямку належить видатним математикам А.Пуанкаре [1], О.Перрону та О.М.Ляпунову. Слідом за ними, дослідженню диференціальних рівнянь у скінченновимірних та нескінченновимірних просторах присвятила свої роботи велика кількість відомих математиків, таких як М.Г.Крейн, Ю.Л.Далецький [2, 3], А.М.Самойленко [4], В.Ю.Слюсарчук [5-8], А.Г.Баскаков, А.Я.Дороговцев [9, 10], М.Ф.Городній [11, 12] та багато інших. Зокрема, в роботах М.Г.Крейна було показано, що в процесі дослідження різноманітних диференціальних рівнянь час від часу доводиться стикатися з операторними рівняннями типу $AX + XB = Y$ та подібними до нього. Відтак вивчення властивостей та розв'язків подібних рівнянь можуть бути корисними не лише самі по собі, а й в розрізі більш широкого класу задач.

Операторні рівняння вищезазначеного типу у випадку скінченновимірних просторів перетворюються у матричні рівняння, які (за умови некомутуючих матриць) також потребують більш детального вивчення, що доводить актуальність цієї роботи.

Основною метою цього дисертаційного дослідження є отримання явних формул для розв'язку конкретного типу матричних рівнянь, в залежності від структури множини власних чисел матриць, що фігурують в рівнянні.

Перший розділ цієї роботи присвячений теоретичним відомостям, які використовуються в процесі дослідження. Зокрема, в ньому наведені результати М.Г.Крейна та Ю.Л.Далецького стосовно існування загального розв'язку операторних рівнянь. Також в розділі містяться інші теореми та

означення, що так чи інакше мають відношення до результатів, отриманих в дисертаційній роботі.

В другому розділі дисертації розглядається матричне рівняння $AX - XB = Y$, для якого проводяться дослідження в трьох різних випадках, що залежать від того, скільки різних власних чисел мають матриці A та B . Для кожного випадку за умови, що єдиний розв'язок матричного рівняння існує, знайдено явну формулу для такого розв'язку.

Кожен підрозділ другого розділу закінчується прикладом, який демонструє коректність отриманих формул.

Закінчується дисертаційна роботи розділом з висновками, які підбивають підсумок проведеним дослідженням.

Окремі результати цієї роботи були апробовані на X Всеукраїнській конференції молодих математиків у квітні 2021 року.

У роботі використовується подвійна нумерація формул, де перше число вказує на номер розділу, а друга – на номер формули в цьому розділі.

Розділ 1.

Теоретичні відомості

1.1. Список умовних позначень.

$\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ – банахові простори;

$[\mathfrak{B}_1; \mathfrak{B}_2]$ – множина лінійних неперервних операторів, що діють з простору $\mathfrak{B}_1$ в простір $\mathfrak{B}_2$;

$[\mathfrak{B}_1] \stackrel{\text{def}}{=} [\mathfrak{B}_1; \mathfrak{B}_1]$ – множина лінійних неперервних операторів, що відображають простір $\mathfrak{B}_1$ в себе;

$\sigma(A)$ – спектр оператора A ;

A^{-1} – оператор, обернений до оператора A ;

I – тотожний (одиничний) оператор, тобто такий, що $Ix = x$ для всіх $x \in \mathfrak{B}_1$;

$R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$ – резольвента оператора A ;

$\partial\Omega$ – межа області Ω ;

γ^+ – додатно орієнтована замкнена крива, тобто така, що рухаючись вздовж неї, маємо внутрішню область кривої з лівої сторони;

$\text{int}(\gamma)$ – внутрішня область, що обмежується замкненою кривою γ ;

$\mathcal{A}(\Omega)$ – множина аналітичних в області Ω функцій;

$\text{res}_{z=z_0} f(z)$ – лишок функції $f(z)$ в точці $z = z_0$.

1.1. Обчислення інтегралів по контуру.

Нехай Ω – область в множині $\mathbb{C}$.

Означення 1.1. Нехай задано дві криві $\gamma_0: [0; 1] \rightarrow \Omega$ та $\gamma_1: [0; 1] \rightarrow \Omega$, для яких $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = a$, $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) = b$, $a \neq b$. Криві γ_0 та γ_1 називаються гомотопними в області Ω ($\gamma_0 \approx \gamma_1$) в Ω , якщо існує неперервна функція $\varphi: [0; 1] \times [0; 1] \rightarrow \Omega$ така, що

$$1) \varphi(0, t) = \gamma_0(t), \quad \varphi(1, t) = \gamma_1(t) \quad \forall t \in [0; 1];$$

$$2) \varphi(s, 0) = a, \quad \varphi(s, 1) = b \quad \forall s \in [0; 1].$$

У випадку, коли γ_0 та γ_1 – замкнені криві ($a = b$), друга умова має такий вигляд:

$$\varphi(s, 0) = \varphi(s, 1) \quad \forall s \in [0; 1].$$

Означення 1.2. Функція f називається диференційованою в точці z_0 , якщо $\exists A \in \mathbb{C}: f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A \cdot \Delta z + \bar{o}(\Delta z), (\Delta z \rightarrow 0)$, при цьому лінійна частина приросту називається диференціалом функції f у точці z_0 ($df(z_0) \stackrel{\text{def}}{=} A \cdot \Delta z =: A \cdot dz$).

Нагадаємо, що $g(\Delta z) = \bar{o}(\Delta z)$ при $\Delta z \rightarrow 0$, якщо

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{g(\Delta z)}{\Delta z} = 0 \Leftrightarrow \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|g(\Delta z)|}{|\Delta z|} = 0 \Leftrightarrow g = \bar{o}(|\Delta z|) \text{ при } \Delta z \rightarrow 0.$$

Означення 1.3. Функція f називається аналітичною в області Ω , якщо вона диференційована в кожній точці цієї області.

Важливим результатом теорії функцій комплексної змінної є наступна теорема.

Теорема 1.1. (узагальнена теорема Коші). Якщо функція f – аналітична в області Ω та $\gamma_0 \approx \gamma_1$ в Ω , то

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz. \quad (1.1)$$

Велику кількість криволінійних інтегралів по замкненому контуру від аналітичних (за винятком скінченної кількості точок) функцій зручно обчислювати, використовуючи теорему Коші про лишки. Нагадаємо деякі важливі означення.

Означення 1.4. Нехай функція $f(z)$ аналітична в деякому проколотому (тобто не включаючи центр) крузі з центром в точці $a \in \mathbb{C}$ та радіуса r . Лишком функції f у точці a називається величина

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\{|z-a|=\rho\}^+} f(z) dz \quad (1.2)$$

де ρ – деяке число, що належить $(0; a)$.

Справедливою є наступна теорема.

Теорема 1.2. (теорема Коші про лишки). Нехай Ω – обмежена область така, що $\partial\Omega = \bigcup_{j=0}^k E_{\gamma_j}$ де $\{\gamma\}_{j=0}^k$ – замкнені жорданові (тобто такі, що не мають точок самоперетину) криві, шляхи яких попарно не перетинаються, та $E_{\gamma_j} \subset \operatorname{int}(\gamma_0)$ для довільного $j \in \{1, \dots, k\}$; функція f є аналітичною в замиканні області Ω за винятком точок $a_1, \dots, a_p$ з області Ω , тобто функція $f \in \mathcal{A}(\bar{\Omega} \setminus \{a_1, \dots, a_p\})$. Тоді

$$\int_{\partial+\Omega} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^p \operatorname{res}_{z=a_k} f(z). \quad (1.3)$$

При цьому обчислення лишків за формулою (1.2) не завжди просте. Відтак, наведемо декілька більш зручних формул для їх обчислення.

Нехай точка $a \in \mathbb{C}$ – полюс першого порядку для функції f . Тоді

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a) f(z). \quad (1.4)$$

Нехай точка $a \in \mathbb{C}$ – полюс m -ого порядку для функції f і $m \geq 2$. Тоді

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z-a)^m f(z)). \quad (1.5)$$

1.2. Функції лінійних неперервних операторів.

Розглянемо комплексний банахів простір $\mathfrak{B}$ і оператор $A \in [\mathfrak{B}]$.

Означення 1.5. Точка $\lambda \in \mathbb{C}$ називається регулярною точкою оператора A , якщо існує оператор $(A - \lambda I)^{-1}$, який називається резольвентою оператора A .

Означення 1.6. Множина $\rho(A)$ усіх регулярних точок оператора A називається резольвентною множиною оператора A , а її доповнення $\sigma(A)$ – спектром оператора A .

Позначимо через K_A клас всіх функцій $\varphi(\lambda)$, що діють на множині комплексних чисел та є кусково-аналітичними на множині $\sigma(A)$. Тоді функції з K_A мають наступні властивості:

1) Множина визначення D функції $\varphi(\lambda)$ складається зі скінченної кількості відкритих компонент зв'язності, об'єднання яких містить спектр $\sigma(A)$ оператора A , причому кожна компонента містить принаймні одну точку спектра.

2) Функція $\varphi(\lambda)$ кусково-голоморфна, тобто голоморфна в кожній компоненті своєї множини визначення D .

Домовимося не розрізняти функції $\varphi_1(\lambda), \varphi_2(\lambda) \in K_A$, які співпадають на деякому відкритому околі спектру $\sigma(A)$, адже в такому випадку вони будуть аналітичним продовженням одна одної.

В класі K_A природним чином можна визначити додавання, множення і множення на скаляр, в результаті чого K_A можна буде вважати алгеброю з одиницею.

Згідно до правила Ф. Рісса існує алгебраїчний ізоморфізм між алгеброю K_A і деякою комутативною алгеброю операторів, при якому функції $\varphi(\lambda) \equiv \lambda$

відповідає оператор A (а отже, функції $\varphi(\lambda) = \frac{1}{\lambda - z}$ ($z \notin \sigma(A)$) відповідає резольвента $R_z = (A - zI)^{-1}$).

Цей ізоморфізм встановлюється наступним чином. Для $\varphi(\lambda) \in K_A$ завжди знайдеться гладкий, складний контур Γ_A , що охоплює спектр $\sigma(A)$. Це, в свою чергу означає, що Γ_A розпадається на скінченне число границь деяких відкритих множин, об'єднання яких належить D і покриває спектр $\sigma(A)$. Для кожного з жорданових контурів, що входять до складу Γ_A , ми обираємо додатну орієнтацію, тобто таку, що при русі по контуру відповідна відкрита множина залишається ліворуч.

Після цього вважаємо для $\varphi(\lambda) \in K_A$

$$\varphi(A) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_A} \varphi(\lambda) R_\lambda d\lambda. \quad (1.6)$$

З теореми 1.1 можемо зробити висновок, що інтеграл (1.6) не залежить від вибору контуру.

Відповідність $\varphi(\lambda) \leftrightarrow \varphi(A)$, очевидно, лінійна. Для доведення її мультиплікативності спочатку доведемо більш загальну формулу.

Лема 1.1. *Нехай $F_1(\lambda)$, $F_2(\lambda)$ – кусково-аналітичні на спектрі $\sigma(A)$ оператор-функції, значеннями яких є оператори з $[\mathfrak{B}]$. Тоді виконується рівність*

$$\begin{aligned} \left\{ -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_A} F_1(\lambda) R_\lambda d\lambda \right\} \cdot \left\{ -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_A} R_\lambda F_2(\lambda) d\lambda \right\} = \\ = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_A} F_1(\lambda) R_\lambda F_2(\lambda) d\lambda. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Доведення. Справді, нехай Γ_1 і Γ_2 – два контури типу Γ_A , причому контур Γ_1 охоплює Γ_2 . З тотожності Гільберта

$$R_\lambda - R_\mu = (\lambda - \mu)R_\lambda R_\mu \quad (\lambda, \mu \in \rho(A)) \quad (1.8)$$

впливає, що

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} F_1(\lambda) R_\lambda d\lambda \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2} R_\mu F_2(\mu) d\mu = \\ & = -\frac{1}{4\pi^2} \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} F_1(\lambda) R_\lambda R_\mu F_2(\mu) d\lambda d\mu = \\ & = -\frac{1}{4\pi^2} \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} F_1(\lambda) \frac{R_\lambda}{\lambda - \mu} F_2(\mu) d\lambda d\mu + \\ & + \frac{1}{4\pi^2} \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} F_1(\lambda) \frac{R_\mu}{\lambda - \mu} F_2(\mu) d\lambda d\mu = \\ & = -\frac{1}{4\pi^2} \oint_{\Gamma_1} F_1(\lambda) R_\lambda \oint_{\Gamma_2} \frac{F_2(\mu)}{\lambda - \mu} d\mu d\lambda + \\ & + \frac{1}{4\pi^2} \oint_{\Gamma_2} \left\{ \oint_{\Gamma_1} \frac{F_1(\lambda)}{\lambda - \mu} d\lambda \right\} R_\mu F_2(\mu) d\mu. \end{aligned}$$

Отримуємо звідси формулу (1.7), так як $\oint_{\Gamma_2} \frac{F_2(\mu)}{\lambda - \mu} d\mu = 0$ при $\lambda \in \Gamma_1$, а

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{F_1(\lambda)}{\lambda - \mu} d\lambda = F_1(\mu) \quad \text{при } \mu \in \Gamma_2.$$

Лема доведена.

Якщо тепер покладемо $F_1(\lambda) = \varphi_1(\lambda)I$ та $F_2(\lambda) = \varphi_2(\lambda)I$, то побачимо, що з $\varphi(\lambda) = \varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda)$ впливає $\varphi(A) = \varphi_1(A)\varphi_2(A)$.

З лінійності та мультиплікативності відповідності $\varphi(\lambda) \leftrightarrow \varphi(A)$ впливає, що при

$$\varphi(\lambda) = \sum_{k=0}^n c_k \lambda^k$$

виконується

$$\varphi(A) = \sum_{k=0}^n c_k A^k.$$

1.3. Розв'язки лінійних операторних рівнянь.

Нехай задано банахові простори $\mathfrak{B}_1$ та $\mathfrak{B}_2$, а також лінійні неперервні оператори $B \in [\mathfrak{B}_1]$, $A \in [\mathfrak{B}_2]$ та $Y \in [\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2]$.

Розглянемо рівняння відносно невідомого оператора $X \in [\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2]$

$$\sum_{j,k=0}^n c_{jk} A^j X B^k = Y, \quad (1.9)$$

де c_{jk} — комплексні числа.

Введемо в просторі $[\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2]$ лінійні оператори A_l і B_r , які утворені відповідно множенням оператора X на оператор A зліва і оператор B справа:

$$A_l X \stackrel{\text{def}}{=} AX, \quad B_r \stackrel{\text{def}}{=} XB \quad (X \in [\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2]).$$

Легко побачити, що при будь-яких $A \in [\mathfrak{B}_2]$ і $B \in [\mathfrak{B}_1]$ оператори A_l і B_r комутують.

Розглянемо многочлен від двох змінних

$$P(\lambda, \mu) = \sum_{j,k=0}^n c_{jk} \lambda^j \mu^k$$

та побудуємо оператор

$$P_{A,B} \stackrel{\text{def}}{=} P(A_l, B_r) = \sum_{j,k=0}^n c_{jk} A_l^j B_r^k, \quad (1.10)$$

який належить простору $[\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2]$. Після цього рівняння (1.9) набуде вигляду $P_{A,B} = Y$. Тепер з'ясуємо умову існування оператора, оберненого до $P_{A,B}$.

Якщо $\lambda \notin \sigma(A)$, то неважко побачити, що існує оператор

$$(A_l - \lambda I)^{-1} = (A - \lambda I)_l^{-1}.$$

Зокрема, це означає, що $\sigma(A_l) \subset \sigma(A)$. Аналогічно $\sigma(B_r) \subset \sigma(B)$.

Ми можемо тепер виразити оператор $P(A_l, B_r)$ через многочлен $P(\lambda, \mu)$. Справді, якщо ми підставимо тепер в (1.10) вирази степенів операторів A_l і B_r , отримані з (1.7), отримаємо

$$P(A_l, B_r) = -\frac{1}{4\pi^2} \oint_{\Gamma_A} \oint_{\Gamma_B} P(\lambda, \mu) (A_l - \lambda I)^{-1} (B_r - \mu I)^{-1} d\lambda d\mu \quad (1.11)$$

Таким чином, формула (1.11) задає узагальнення задачі, яку ми вивчаємо. Нехай $K_{A,B}$ – сукупність однозначних функцій $\varphi(\lambda, \mu)$, які визначено в деякому околі множини $\sigma(A) \times \sigma(B)$ і аналітичних по λ в околі кожної точки $\sigma(A)$ при фіксованому $\mu \in \sigma(B)$, а також по μ в околі кожної точки $\sigma(B)$ при фіксованому $\lambda \in \sigma(A)$.

Визначимо для заданої цим шляхом функції $\varphi(\lambda, \mu) \in K_{A,B}$ оператор в просторі $[\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2]$:

$$\varphi_{A,B} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(A_l, B_r) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{4\pi^2} \oint_{\Gamma_A} \oint_{\Gamma_B} \varphi(\lambda, \mu) (A_l - \lambda I)^{-1} (B_r - \mu I)^{-1} d\lambda d\mu. \quad (1.12)$$

В результаті (1.12) встановлює відповідність між функціями, що належать $K_{A,B}$ та деякою комутуючою сукупністю операторів в просторі $[\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2]$, що має наступні властивості:

а) якщо $\varphi(\lambda, \mu) = I$, то $\varphi(A_l, B_r) = I$;

б) якщо $\varphi(\lambda, \mu) = \alpha_1 \varphi_1(\lambda, \mu) + \alpha_2 \varphi_2(\lambda, \mu)$, де α_1 і α_2 – сталі, то

$$\varphi(A_l, B_r) = \alpha_1 \varphi_1(A_l, B_r) + \alpha_2 \varphi_2(A_l, B_r);$$

в) якщо $\varphi(\lambda, \mu) = \varphi_1(\lambda, \mu) \varphi_2(\lambda, \mu)$ то згідно леми 1.1

$$\varphi(A_l, B_r) = \varphi_1(A_l, B_r) \varphi_2(A_l, B_r);$$

г) якщо має місце рівномірна збіжність $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(\lambda, \mu) = \varphi(\lambda, \mu)$ в деякому околі добутку множин $\sigma(A) \times \sigma(B)$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(A_l, B_r) = \varphi(A_l, B_r).$$

Зауважимо, що при $X \in [\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2]$ справедлива наступна рівність:

$$\varphi(A_l, B_r)X = -\frac{1}{4\pi^2} \oint_{\Gamma_A} \oint_{\Gamma_B} \varphi(\lambda, \mu)(A - \lambda I)^{-1}X(B - \mu I)^{-1}d\lambda d\mu.$$

Як результат наведених міркувань, можемо сформулювати наступну теорему.

Теорема 1.3. *Нехай функція $\varphi(\lambda, \mu)$ класу $K_{A,B}$ не перетворюється в нуль при $(\lambda, \mu) \in \sigma(A) \times \sigma(B)$.*

Тоді оператор $\varphi(A_l, B_r)$ має обернений оператор $\psi(A_l, B_r)$, де $\psi(\lambda, \mu) = 1/\varphi(\lambda, \mu)$.

Іншими словами, в цьому випадку рівняння

$$\varphi(A_l, B_r)X = Y \tag{1.13}$$

для кожного $Y \in [\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2]$ має єдиний розв'язок $X \in [\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2]$. Цей розв'язок може бути представлено у вигляді

$$X = -\frac{1}{4\pi^2} \oint_{\Gamma_A} \oint_{\Gamma_B} \frac{(A - \lambda I)^{-1}X(B - \mu I)^{-1}}{\varphi(\lambda, \mu)} d\lambda d\mu.$$

Сформулюємо, зокрема, цей результат в застосуванні до рівняння (1.9).

Теорема 1.4. *Якщо виконується умова*

$$P(\lambda, \mu) = \sum_{j,k=0}^n c_{jk} \lambda^j \mu^k \neq 0$$

Для всіх пар $(\lambda, \mu) \in \sigma(A) \times \sigma(B)$, то рівняння (1.9) для кожного $Y \in [\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2]$ має єдиний розв'язок $X \in [\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2]$, який може бути представлено у вигляді

$$X = -\frac{1}{4\pi^2} \oint_{\Gamma_A} \oint_{\Gamma_B} \frac{(A - \lambda I)^{-1}Y(B - \mu I)^{-1}}{P(\lambda, \mu)} d\lambda d\mu. \tag{1.14}$$

Зауваження 1.1. Нехай $A, B \in [\mathfrak{B}]$. Припустимо, що функція $\varphi(\lambda, \mu) \in K_{A,B}$ відмінна від нуля лише на множині $\sigma_1(A) \times \sigma_2(B)$, де $\sigma_1(A)$, $\sigma_2(B)$ – деякі спектральні множини операторів A та B відповідно.

Введемо в розгляд інваріантний щодо оператора A підпростір $\mathfrak{B}_1$, такий, що відповідає спектральній множині $\sigma_1(A)$. Нехай P_1 – відповідний спектральний проектор і A_1 – частина оператора A в $\mathfrak{B}_1$. Аналогічно визначимо для оператора B інваріантний підпростір $\mathfrak{B}_2$, що відповідає спектральній множині $\sigma_2(B)$, спектральний проектор P_2 і частину B_2 .

Тоді якщо оператор Y в (1.9) задовольняє умову $Y = P_1 Y P_2$, то рівняння (1.9) може бути трансформовано до вигляду

$$\sum_{j,k=0}^n c_{jk} A_1^j \hat{X} B_2^k = \hat{Y},$$

де $\hat{X}$ та $\hat{Y}$ мають розглядатися як оператори з $\mathfrak{B}_2$ в $\mathfrak{B}_1$. Формула (1.14) в такому випадку також дозволяє знайти розв'язок $\hat{X} \in [\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2]$. Отриманий оператор можна поширити на весь простір $\mathfrak{B}$, поклавши $X = P_1 \hat{X} P_2$. Оператор X при цьому буде єдиним розв'язком рівняння (1.9), який задовольняє умову $X = P_1 X P_2$.

Розглянемо тепер частковий випадок рівняння (1.9)

$$AX - XB = Y. \quad (1.15)$$

В такому випадку $P(\lambda, \mu) = \lambda - \mu$. Це означає, що за умови

$$\lambda - \mu \neq 0$$

для всіх можливих пар $(\lambda, \mu) \in \sigma(A) \times \sigma(B)$, яка, фактично еквівалентна умові

$$\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset \quad (1.16)$$

рівняння (1.15) має єдиний розв'язок, що може бути представлено у вигляді

$$X = -\frac{1}{4\pi^2} \oint_{\Gamma_A} \oint_{\Gamma_B} \frac{(A-\lambda I)^{-1} Y (B-\mu I)^{-1}}{\lambda-\mu} d\lambda d\mu. \quad (1.17)$$

Якщо ж тепер покласти

$$\sigma(A) = \sigma_+(A) \cup \sigma_-(A), \quad \sigma(B) = \sigma_+(B) \cup \sigma_-(B),$$

То, враховуючи зауваження 1.1, можемо представити оператор, що є розв'язком рівняння (1.15), у вигляді

$$X = P_+(A) X P_-(B) = -\frac{1}{4\pi^2} \oint_{\Gamma_{A+}} \oint_{\Gamma_{B-}} \frac{(A-\lambda I)^{-1} Y (B-\mu I)^{-1}}{\lambda-\mu} d\lambda d\mu. \quad (1.18)$$

Цей розв'язок є єдиним, що задовольняє умову $P_+(A) X P_-(B) = X$, якщо виконується умова

$$P_+(A) Y P_-(B) = Y. \quad (1.19)$$

Розділ 2.

Знаходження явних виглядів розв'язків лінійного операторного рівняння

2.1. Постановка задачі.

Розглянемо операторне рівняння

$$AX - XB = Y, \quad (2.1)$$

в якому оператори A, B, Y – задані, оператор X – шуканий.

Якщо в якості просторів $\mathfrak{B}_1$ та $\mathfrak{B}_2$ взяти простір $\mathbb{R}$, то рівняння (2.1) матиме єдиний розв'язок у випадку, коли $A \neq B$. І цей розв'язок може бути представлений у вигляді

$$X = \frac{Y}{A - B},$$

Тобто цей випадок – тривіальний і не потребує додаткового вивчення.

Оберемо тепер у якості просторів $\mathfrak{B}_1$ та $\mathfrak{B}_2$ простір $\mathbb{R}^2$.

Оскільки в скінченновимірному нормованому просторі будь-який лінійний неперервний оператор може бути представлений матрицею, то в просторі $\mathbb{R}^2$ рівняння (2.1) буде матричним рівнянням. Але за рахунок того, що в загальному вигляді матриці не комутують, задача знаходження розв'язку рівняння (2.1) не є тривіальною, відтак побудова явного вигляду такого розв'язку є цікавим завданням, яке і розв'язується в цій дисертаційній роботі.

Отже, нехай A, B, X, Y матриці розміру 2×2 . Згідно теореми 1.4 рівняння (2.1) має єдиний розв'язок, якщо

$$\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset. \quad (2.2)$$

Нехай умова (2.2) виконується. Можливі наступні випадки для множин власних чисел матриць A та B :

- 1) A та B мають по два різних власних числа;
- 2) A та B мають по одному власному числу;
- 3) – 4) одна з матриць має два власних числа, інша – одне.

Випадки 3) та 4) симетричні, тому можна розглянути лише один з них.

2.2. Знаходження розв'язку рівняння у випадку двох пар різних власних чисел.

Нехай λ_1, λ_2 – власні числа матриці A . μ_1, μ_2 – власні числа матриці B , причому $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\mu_1 \neq \mu_2$, а також $\lambda_i \neq \mu_j$, $i, j = \overline{1, 2}$. В такому випадку, згідно теореми 1.4, для кожної матриці Y рівняння (2.1) має єдиний розв'язок, що може бути записаний у вигляді

$$X = -\frac{1}{4\pi^2} \oint_{\Gamma_A} \oint_{\Gamma_B} \frac{(A - \lambda I)^{-1} Y (B - \mu I)^{-1}}{\lambda - \mu} d\lambda d\mu, \quad (2.3)$$

де Γ_A – контур, що містить всередині власні числа матриці A , а Γ_B – власні числа матриці B . Оскільки умова (2.2) виконана, ми можемо обрати Γ_A та Γ_B таким чином, щоб вони не перетиналися і не містилися в одному.

Знайдемо за вказаних умов розв'язок рівняння (2.3) у явному вигляді.

Покладемо

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}.$$

Тоді за правилом знаходження оберненої матриці

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)^{-1} &= \frac{1}{\det(A - \lambda I)} \begin{pmatrix} a_{22} - \lambda & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} - \lambda \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)} \begin{pmatrix} a_{22} - \lambda & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} - \lambda \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Аналогічно,

$$(B - \mu I)^{-1} = \frac{1}{(\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2)} \begin{pmatrix} b_{22} - \mu & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} - \mu \end{pmatrix}.$$

Як наслідок, формула (2.3) набуде вигляду

$$X = -\frac{1}{4\pi^2} \oint_{\Gamma_A} \oint_{\Gamma_B} \frac{\begin{pmatrix} a_{22} - \lambda & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{22} - \mu & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} - \mu \end{pmatrix}}{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2)(\lambda - \mu)} d\lambda d\mu.$$

Обчислимо X , використовуючи теорему Коші 1.2.

Спочатку знайдемо інтеграл по $d\mu$. Всередині контуру Γ_B присутні дві точки неаналітичності функції

$$f_\lambda(\mu) = \frac{\begin{pmatrix} a_{22} - \lambda & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{22} - \mu & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} - \mu \end{pmatrix}}{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2)(\lambda - \mu)},$$

а саме $\mu = \mu_1$ та $\mu = \mu_2$.

Ці точки є особливими точками типу полюс I порядку. Тому

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_B} f_\lambda(\mu) &= 2\pi i (\text{res} f_\lambda(\mu_1) + \text{res} f_\lambda(\mu_2)) = \\ &= 2\pi i \left(\lim_{\mu \rightarrow \mu_1} (f_\lambda(\mu)(\mu - \mu_1)) + \lim_{\mu \rightarrow \mu_2} (f_\lambda(\mu)(\mu - \mu_2)) \right) = \\ &= 2\pi i \frac{\begin{pmatrix} a_{22} - \lambda & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{22} - \mu_1 & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} - \mu_1 \end{pmatrix}}{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\mu_1 - \mu_2)(\lambda - \mu_1)} + \\ &+ 2\pi i \frac{\begin{pmatrix} a_{22} - \lambda & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{22} - \mu_2 & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} - \mu_2 \end{pmatrix}}{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\mu_2 - \mu_1)(\lambda - \mu_2)} = 2\pi i g(\lambda). \end{aligned}$$

Таким чином

$$X = -\frac{1}{4\pi^2} \oint_{\Gamma_A} 2\pi i g(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_A} g(\lambda) d\lambda.$$

Аналогічно обчислимо інтеграл по контуру Γ_A , враховуючи, що всередині нього містяться дві особливі точки функції $g(\lambda)$ типу полюс I порядку $\lambda = \lambda_1$ та $\lambda = \lambda_2$.

$$\begin{aligned}
\oint_{\Gamma_A} g(\lambda) d\lambda &= 2\pi i (\text{res} g(\lambda_1) + \text{res} g(\lambda_2)) = \\
&= 2\pi i \left(\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1} (g(\lambda)(\lambda - \lambda_1)) + \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_2} (g(\lambda)(\lambda - \lambda_2)) \right) = \\
&= 2\pi i \left(\frac{\begin{pmatrix} a_{22} - \lambda_1 & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{22} - \mu_1 & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} - \mu_1 \end{pmatrix}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\mu_1 - \mu_2)(\lambda_1 - \mu_1)} - \right. \\
&\quad - \frac{\begin{pmatrix} a_{22} - \lambda_1 & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{22} - \mu_2 & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} - \mu_2 \end{pmatrix}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\mu_1 - \mu_2)(\lambda_1 - \mu_2)} - \\
&\quad - \frac{\begin{pmatrix} a_{22} - \lambda_2 & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} - \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{22} - \mu_1 & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} - \mu_1 \end{pmatrix}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\mu_1 - \mu_2)(\lambda_2 - \mu_1)} + \\
&\quad \left. + \frac{\begin{pmatrix} a_{22} - \lambda_2 & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} - \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{22} - \mu_2 & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} - \mu_2 \end{pmatrix}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\mu_1 - \mu_2)(\lambda_2 - \mu_2)} \right).
\end{aligned}$$

В результаті єдиний розв'язок рівняння (2.1) у випадку двох пар різних власних чисел матриць A та B може бути записаний у вигляді

$$\begin{aligned}
X &= \frac{\begin{pmatrix} a_{22} - \lambda_1 & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{22} - \mu_1 & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} - \mu_1 \end{pmatrix}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\mu_1 - \mu_2)(\lambda_1 - \mu_1)} - \\
&\quad - \frac{\begin{pmatrix} a_{22} - \lambda_1 & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{22} - \mu_2 & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} - \mu_2 \end{pmatrix}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\mu_1 - \mu_2)(\lambda_1 - \mu_2)} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\begin{pmatrix} a_{22} - \lambda_2 & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} - \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{22} - \mu_1 & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} - \mu_1 \end{pmatrix}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\mu_1 - \mu_2)(\lambda_2 - \mu_1)} + \\
& + \frac{\begin{pmatrix} a_{22} - \lambda_2 & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} - \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{22} - \mu_2 & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} - \mu_2 \end{pmatrix}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\mu_1 - \mu_2)(\lambda_2 - \mu_2)}.
\end{aligned}$$

Таким чином, була доведена наступна теорема:

Теорема 2.1. *Якщо матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ мають по два різних власних числа $\lambda_1 \neq \lambda_2$ і $\mu_1 \neq \mu_2$, причому власні числа матриці A не дорівнюють власним числам матриці B , то для кожної матриці $Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}$ рівняння (2.1) має єдиний розв'язок, який може бути представлений у вигляді*

$$\begin{aligned}
X = & \frac{\begin{pmatrix} a_{22} - \lambda_1 & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{22} - \mu_1 & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} - \mu_1 \end{pmatrix}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\mu_1 - \mu_2)(\lambda_1 - \mu_1)} - \\
& - \frac{\begin{pmatrix} a_{22} - \lambda_1 & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{22} - \mu_2 & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} - \mu_2 \end{pmatrix}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\mu_1 - \mu_2)(\lambda_1 - \mu_2)} - \\
& - \frac{\begin{pmatrix} a_{22} - \lambda_2 & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} - \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{22} - \mu_1 & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} - \mu_1 \end{pmatrix}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\mu_1 - \mu_2)(\lambda_2 - \mu_1)} + \\
& + \frac{\begin{pmatrix} a_{22} - \lambda_2 & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} - \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{22} - \mu_2 & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} - \mu_2 \end{pmatrix}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\mu_1 - \mu_2)(\lambda_2 - \mu_2)}.
\end{aligned}$$

Зауваження 2.1. Якщо умова (2.2) не виконується, то в залежності від матриці Y рівняння (2.1) може не мати розв'язків взагалі або мати безліч розв'язків. Дослідження загального виду розв'язку у другому випадку виходить за межі даної дисертаційної роботи і може бути проведено додатково.

2.3. Приклад.

Покладемо

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Для матриці A власними числами будуть $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 7$. А для матриці B отримаємо відповідно $\mu_1 = 20, \mu_2 = 5$.

Тоді згідно з отриманої формули загального розв'язку рівняння (2.1), можемо знайти

$$\begin{aligned} X &= \frac{\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -60 & -3 \end{pmatrix}}{-8 \cdot 15 \cdot (-21)} - \frac{\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}}{-8 \cdot 15 \cdot (-6)} - \\ &- \frac{\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -60 & -3 \end{pmatrix}}{-8 \cdot 15 \cdot (-13)} + \frac{\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}}{-8 \cdot 15 \cdot 2} = \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{29}{182} & \frac{61}{91} \\ \frac{18}{91} & -\frac{82}{91} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Переконаємося, що отримана матриця дійсно є розв'язком рівняння (2.1):

$$\begin{aligned} AX - XB &= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{29}{182} & \frac{61}{91} \\ \frac{18}{91} & -\frac{82}{91} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{29}{182} & \frac{61}{91} \\ \frac{18}{91} & -\frac{82}{91} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = Y. \end{aligned}$$

2.4. Знаходження розв'язку рівняння у випадку кратних власних чисел у обох матрицях.

Нехай тепер λ_0 – єдине власне число матриці A , μ_0 – єдине власне число матриці B , причому $\lambda_0 \neq \mu_0$. В такому випадку, згідно теореми 1.4, для кожної матриці Y рівняння (2.1) має єдиний розв'язок, що може бути записаний у вигляді (2.3), де Γ_A – контур, що містить всередині власне число матриці A , а Γ_B – власне число матриці B . Оскільки умова (2.2) виконана, ми можемо обрати Γ_A та Γ_B таким чином, щоб вони не перетиналися і не містилися в одному.

Знайдемо за вказаних умов розв'язок рівняння (2.3) у явному вигляді.

Покладемо

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}.$$

Тоді відповідно до правил знаходження оберненої матриці

$$(A - \lambda I)^{-1} = \frac{1}{(\lambda - \lambda_0)^2} \begin{pmatrix} a_{22} - \lambda & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} - \lambda \end{pmatrix}.$$

Аналогічно,

$$(B - \mu I)^{-1} = \frac{1}{(\mu - \mu_0)^2} \begin{pmatrix} b_{22} - \mu & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} - \mu \end{pmatrix}.$$

В результаті можемо записати формулу (2.3) у наступному вигляді

$$X = -\frac{1}{4\pi^2} \oint_{\Gamma_A} \oint_{\Gamma_B} \frac{\begin{pmatrix} a_{22} - \lambda & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{22} - \mu & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} - \mu \end{pmatrix}}{(\lambda - \lambda_0)^2 (\mu - \mu_0)^2 (\lambda - \mu)} d\lambda d\mu.$$

Спочатку обчислимо інтеграл по $d\mu$. Всередині контуру Γ_B присутня одна точка неаналітичності функції, а саме $\mu = \mu_0$.

Ця точка є особливою точкою типу полюс порядку 2 функції

$$f_{\lambda}(\mu) = \frac{\begin{pmatrix} b_{22} - \mu & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} - \mu \end{pmatrix}}{(\mu - \mu_0)^2(\lambda - \mu)}.$$

. Тому

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_B} f_{\lambda}(\mu) d\mu &= 2\pi i \operatorname{res} f_{\lambda}(\mu_0) = \\ &= 2\pi i \lim_{\mu \rightarrow \mu_0} \frac{d}{d\mu} (f_{\lambda}(\mu)(\mu - \mu_0)^2) = 2\pi i \lim_{\mu \rightarrow \mu_0} \frac{d}{d\mu} \left(\frac{\begin{pmatrix} b_{22} - \mu & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} - \mu \end{pmatrix}}{\lambda - \mu} \right) = \\ &= 2\pi i \frac{\begin{pmatrix} b_{22} - \mu & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} - \mu \end{pmatrix}' (\lambda - \mu) - \begin{pmatrix} b_{22} - \mu & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} - \mu \end{pmatrix} (\lambda - \mu)'}{(\lambda - \mu)^2} = \\ &= 2\pi i \frac{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} (\lambda - \mu_0) - \begin{pmatrix} b_{22} - \mu_0 & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} - \mu_0 \end{pmatrix} (-1)}{(\lambda - \mu_0)^2} = \\ &= 2\pi i \frac{\begin{pmatrix} \mu_0 - \lambda & 0 \\ 0 & \mu_0 - \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu_0 - b_{22} & -b_{12} \\ -b_{21} & \mu_0 - b_{11} \end{pmatrix}}{(\lambda - \mu_0)^2} = \\ &= 2\pi i \frac{\begin{pmatrix} b_{22} - \lambda & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} - \lambda \end{pmatrix}}{(\lambda - \mu_0)^2}. \end{aligned}$$

Таким чином

$$X = -\frac{i}{2\pi} \oint_{\Gamma_A} \frac{\begin{pmatrix} a_{22} - \lambda & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{22} - \lambda & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} - \lambda \end{pmatrix}}{(\lambda - \lambda_0)^2(\lambda - \mu_0)^2} d\lambda.$$

Аналогічно обчислимо інтеграл по контуру Γ_B , враховуючи, що всередині нього міститься одна особлива точка типу полюс порядку 2.

$$\begin{aligned}
& \oint_{\Gamma_A} \frac{\begin{pmatrix} a_{22} - \lambda & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{22} - \lambda & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} - \lambda \end{pmatrix}}{(\lambda - \lambda_0)^2 (\lambda - \mu_0)^2} d\lambda = \\
& = 2\pi i \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\begin{pmatrix} a_{22} - \lambda & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{22} - \lambda & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} - \lambda \end{pmatrix}}{(\lambda - \mu_0)^2} \right) = \\
& = 2\pi i \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{\left[\begin{pmatrix} a_{22} - \lambda & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{22} - \lambda & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} - \lambda \end{pmatrix} \right]' (\lambda - \mu_0)^2}{(\lambda - \mu_0)^4} - \\
& - \frac{\begin{pmatrix} a_{22} - \lambda & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{22} - \lambda & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} - \lambda \end{pmatrix} [(\lambda - \mu_0)^2]'}{(\lambda - \mu_0)^4} = \\
& = 2\pi i \left(\frac{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{22} - \lambda_0 & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} - \lambda_0 \end{pmatrix}}{(\lambda_0 - \mu_0)^2} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\begin{pmatrix} a_{22} - \lambda_0 & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} - \lambda_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}{(\lambda_0 - \mu_0)^2} - \right. \\
& \quad \left. - 2 \frac{\begin{pmatrix} a_{22} - \lambda_0 & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} - \lambda_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{22} - \lambda_0 & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} - \lambda_0 \end{pmatrix}}{(\lambda - \mu_0)^3} \right).
\end{aligned}$$

Таким чином, загальний розв'язок рівняння (2.1) може бути записаний у вигляді

$$\begin{aligned}
X = & \frac{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{22} - \lambda_0 & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} - \lambda_0 \end{pmatrix}}{(\lambda_0 - \mu_0)^2} + \\
& + \frac{\begin{pmatrix} a_{22} - \lambda_0 & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} - \lambda_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}{(\lambda_0 - \mu_0)^2} -
\end{aligned}$$

$$-2 \frac{\begin{pmatrix} a_{22} - \lambda_0 & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} - \lambda_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{22} - \lambda_0 & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} - \lambda_0 \end{pmatrix}}{(\lambda - \mu_0)^3}.$$

В результаті в цьому підрозділі нами було доведено таку теорему:

Теорема 2.2. *Якщо матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ та $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ мають по одному власному числу λ_0 і μ_0 , причому власне число матриці A не дорівнює власному числу матриці B , то для кожної матриці $Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}$ рівняння (2.1) має єдиний розв'язок, який може бути представлений у вигляді*

$$\begin{aligned} X = & \frac{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{22} - \lambda_0 & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} - \lambda_0 \end{pmatrix}}{(\lambda_0 - \mu_0)^2} + \\ & + \frac{\begin{pmatrix} a_{22} - \lambda_0 & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} - \lambda_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}{(\lambda_0 - \mu_0)^2} - \\ & - 2 \frac{\begin{pmatrix} a_{22} - \lambda_0 & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} - \lambda_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{22} - \lambda_0 & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} - \lambda_0 \end{pmatrix}}{(\lambda - \mu_0)^3}. \end{aligned}$$

Зауваження 2.2. Якщо умова (2.2) не виконується, то в залежності від матриці Y рівняння (2.1) може не мати розв'язків взагалі або мати безліч розв'язків. Дослідження загального виду розв'язку у другому випадку виходить за межі даної дисертаційної роботи і може бути проведено додатково.

2.5. Приклад.

Покладемо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо власні числа матриць A та B . Отримаємо $\lambda_0 = 1, \mu_0 = 2$.

Умова (2.2) виконується. Отже, згідно теореми 2.2 загальний розв'язок рівняння (2.1) знайдемо наступним чином

$$\begin{aligned} X = & \frac{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{(1-2)^2} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}{(1-2)^2} + \\ & + 2 \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{(1-2)^3} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -6 & 26 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Підставимо отриману матрицю X у рівняння (2.1), щоб переконатися, що знайдено правильний розв'язок:

$$\begin{aligned} AX - XB = & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -6 & 26 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -6 & 26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -16 \\ -8 & -30 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & -42 \\ -12 & -58 \end{pmatrix} = \\ = & \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = Y. \end{aligned}$$

2.6. Знаходження розв'язку рівняння у випадку, коли одна матриця має два власних числа, а друга - одне.

Розглянемо випадок, коли матриця A має два власних числа, а матриця B – одне. Нехай тепер λ_1, λ_2 – власні числа матриці A , μ_0 – єдине власне число матриці B , причому $\lambda_{1,2} \neq \mu_0$. В такому випадку, згідно теореми 1.4, для кожної матриці Y рівняння (2.1) має єдиний розв'язок, що може бути записаний у вигляді (2.3), де Γ_A – контур, що містить всередині власні числа матриці A , а Γ_B – власне число матриці B . Оскільки умова (2.2) виконана, ми можемо обрати Γ_A та Γ_B таким чином, щоб вони не перетиналися і не містилися в одному.

Знайдемо за вказаних умов розв'язок рівняння (2.3) у явному вигляді.

Покладемо

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}.$$

Тоді згідно до правил знаходження оберненої матриці, можемо записати

$$(A - \lambda I)^{-1} = \frac{1}{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)} \begin{pmatrix} a_{22} - \lambda & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} - \lambda \end{pmatrix}.$$

Аналогічно,

$$(B - \mu I)^{-1} = \frac{1}{(\mu - \mu_0)^2} \begin{pmatrix} b_{22} - \mu & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} - \mu \end{pmatrix}.$$

В результаті для таких множин власних чисел формула (2.3) набуде вигляду

$$X = -\frac{1}{4\pi^2} \oint_{\Gamma_A} \oint_{\Gamma_B} \frac{\begin{pmatrix} a_{22} - \lambda & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{22} - \mu & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} - \mu \end{pmatrix}}{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\mu - \mu_0)^2(\lambda - \mu)} d\lambda d\mu.$$

Спочатку візьмемо інтеграл по $d\mu$. Всередині контуру Γ_B присутня одна точка неаналітичності функції

$$f_\lambda(\mu) = \frac{\begin{pmatrix} b_{22} - \mu & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} - \mu \end{pmatrix}}{(\mu - \mu_0)^2(\lambda - \mu)},$$

а саме $\mu = \mu_0$.

Ця точка є особливою точкою типу полюс порядку 2. Тому

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_B} \frac{\begin{pmatrix} b_{22} - \mu & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} - \mu \end{pmatrix}}{(\mu - \mu_0)^2(\lambda - \mu)} d\mu &= 2\pi i \lim_{\mu \rightarrow \mu_0} \frac{d}{d\mu} \left(\frac{\begin{pmatrix} b_{22} - \lambda & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} - \lambda \end{pmatrix}}{\lambda - \mu} \right) = \\ &= 2\pi i \frac{\begin{pmatrix} b_{22} - \lambda & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} - \lambda \end{pmatrix}}{(\lambda - \mu_0)^2}. \end{aligned}$$

Далі обчислимо інтеграл по $d\lambda$. Всередині контуру Γ_A присутні дві точки неаналітичності функції, а саме $\lambda = \lambda_1$ та $\lambda = \lambda_2$.

Ці точки є особливими точками типу полюс I порядку. Тому

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_A} \frac{\begin{pmatrix} a_{22} - \lambda & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{22} - \lambda & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} - \lambda \end{pmatrix}}{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \mu_0)^2} d\lambda = \\ = 2\pi i \frac{\begin{pmatrix} a_{22} - \lambda_1 & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{22} - \lambda_1 & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} - \lambda_1 \end{pmatrix}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \mu_0)^2} + \\ + \frac{\begin{pmatrix} a_{22} - \lambda_2 & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} - \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{22} - \lambda_2 & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} - \lambda_2 \end{pmatrix}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \mu_0)^2}. \end{aligned}$$

В результаті можемо зробити висновок, що загальний розв'язок рівняння (2.1) в розглядуваному випадку має вигляд

$$X = \frac{\begin{pmatrix} a_{22} - \lambda_1 & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{22} - \lambda_1 & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} - \lambda_1 \end{pmatrix}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \mu_0)^2} +$$

$$+ \frac{\begin{pmatrix} a_{22} - \lambda_2 & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} - \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{22} - \lambda_2 & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} - \lambda_2 \end{pmatrix}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \mu_0)^2}.$$

Отже, ми довели наступну теорему:

Теорема 2.3. *Якщо матриця $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ має два власних числа $\lambda_1 \neq \lambda_2$ та матриця $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ має одне власне число μ_0 , причому власні числа матриці A не дорівнюють власному числу матриці B , то для кожної матриці $Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}$ рівняння (2.1) має єдиний розв'язок, який може бути представлений у вигляді*

$$X = \frac{\begin{pmatrix} a_{22} - \lambda_1 & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{22} - \lambda_1 & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} - \lambda_1 \end{pmatrix}}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \mu_0)^2} +$$

$$+ \frac{\begin{pmatrix} a_{22} - \lambda_2 & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} - \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{22} - \lambda_2 & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} - \lambda_2 \end{pmatrix}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \mu_0)^2}.$$

Зауваження 2.3. Якщо умова (2.2) не виконується, то в залежності від матриці Y рівняння (2.1) може не мати розв'язків взагалі або мати безліч розв'язків. Дослідження загального виду розв'язку у другому випадку виходить за межі даної дисертаційної роботи і може бути проведено додатково.

2.7. Приклад.

Нехай задано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо власні числа матриць A та B . Отримаємо

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 5, \mu_0 = 3.$$

Відповідно до твердження теореми 2.3, можемо записати розв'язок рівняння (2.1) у вигляді (враховуючи, що умова (2.2) виконується)

$$\begin{aligned} X &= \frac{\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}}{-6 \cdot 16} + \frac{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}}{6 \cdot 4} = \\ &= \frac{\begin{pmatrix} 12 & 16 \\ -12 & -16 \end{pmatrix}}{-6 \cdot 16} + \frac{\begin{pmatrix} 24 & 16 \\ 48 & 32 \end{pmatrix}}{6 \cdot 4} = \frac{\begin{pmatrix} 21 & 12 \\ 51 & 36 \end{pmatrix}}{6 \cdot 4} = \begin{pmatrix} \frac{21}{24} & \frac{12}{24} \\ \frac{51}{24} & \frac{36}{24} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Підставивши отриману матрицю X у рівняння (2.1), переконаємося, що ця матриця перетворює його у тотожність. Дійсно,

$$\begin{aligned} AX - XB &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{21}{24} & \frac{12}{24} \\ \frac{51}{24} & \frac{36}{24} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{21}{24} & \frac{12}{24} \\ \frac{51}{24} & \frac{36}{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{41}{8} & \frac{7}{2} \\ \frac{79}{8} & \frac{13}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{25}{8} & \frac{3}{2} \\ \frac{63}{8} & \frac{9}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = Y. \end{aligned}$$

Висновки

При розв'язанні завдання, яке полягало у знаходженні явного вигляду розв'язку матричного рівняння у випадку двох пар попарно різних власних чисел матриць, у випадку кратних власних чисел матриць та у випадку, коли одна з матриць має два власних числа, а інша – одне, були отримані явні формули для цього розв'язку.

Практична значущість дослідження полягає в тому, що операторні рівняння різних типів часто виникають в процесі розв'язання задач у багатьох математичних розділах, і у випадку скінченновимірних просторів такі рівняння перетворюються у матричні рівняння, що (за умови некомутуючих матриць) також потребують більш детального вивчення.

Таким чином, завдання вирішенні в повному обсязі, мета досягнута – отримано явні формули для розв'язку конкретного типу матричних рівнянь, в залежності від структури множини власних чисел матриць, що фігурують в рівнянні.

В ході проведення дослідження було доведено і сформульовано теореми для знаходження розв'язку матричного рівняння $AX - XB = Y$. Також для кожного випадку було наведено приклади, які показують істинність отриманих формул.

Список використаних джерел

1. *Poincare H.* Sur les equations linéaires aux différentielles ordinaire et aux différences finies. // Amer. J. Math. – 1885. – 7. – P. 203-258.
2. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. - Москва: Наука, 1970. - 536 с.
3. *Крейн М. Г.* Лекции по теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1964. – 186 с.
4. *Самойленко А. М., Пелюх Г. П.* Ограниченные на всей действительной оси решения систем нелинейных функционально-дифференциальных уравнений и их свойства // Укр. матем. журн. – 1994. – 46, № 6. – С. 737 – 747.
5. *Слюсарчук В. Е.* О разрешимости функциональных и функционально-дифференциальных уравнений в пространстве ограниченных на оси функций // Приближенные и качественные методы теории дифференциально-функциональных уравнений. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1983. – С. 83 – 88.
6. *Слюсарчук В.Е.* Ограниченные и почти периодические решения разностных уравнений в банаховом пространстве // Аналитические методы исследования решений нелинейных дифференциальных уравнений. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1975. – С. 147 – 156.
7. *Слюсарчук В.Е.* Оценки спектров и обратимость функциональных операторов // Матем. сборник. – 1978. – 105 (147), № 2. – С. 268 – 285.

8. *Слюсарчук В. Е.* Ограниченные и периодические решения нелинейных дифференциально-функциональных уравнений // Матем. сб. – 2012. – 203, №5. – С. 135-160.

9. *Dorogovtsev A. Ya.* Bounded solutions of abstract equations // Novi Sad J. Math. – 2000. – 30, № 1. – P. 59 – 67.

10. *Дороговцев А.Я.* Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем. – К.: Вища шк., 1992 – 319с.

11. *Городний М.Ф.* Ограниченные и периодические решения одного разностного уравнения и его стохастического аналога в банаховом пространстве. / М.Ф.Городний // Укр.мат.журн. – 1991. – Т.41, №1 – С.41-46.

12. *Городний М.Ф.* l_p -розв'язки одного різницевого рівняння в банаховому просторі. // УМЖ. – 2003. – Т.55, №3. – С.425-430.

13. *Дороговцев А.Я.* Элементы общей теории меры и интеграла. – К.: Выща школа, 1989. – 152 с.

14. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 830 с.

15. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. (пер. с англ.) - Москва: Издательство иностранной литературы, 1962. - 896 с.

16. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967. – 464 с.

17. *Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г.* Функциональный анализ. Курс лекций: Учебное пособие. – К.: Выща школа, 1990. – 600с.

18. *Popescu N.* Equations differentielles de deuxieme ordre et operateurs hermitien-equivalents dans les espaces de Banach // “ Proc. 4-th Conf. Oper. Theory, Timișoara, 1979”. - Timișoara, 1980. – P. 270 – 275.

19. Збірник задач з функціонального аналізу (розділи: «Банахові простори», «Гільбертові простори», «Спряжені простори», «Теорія операторів») / Упорядники: *О.Ю.Константинов, Ю.С.Мишура, О.Н.Нестеренко, А.В.Чайковський.* – К: ВПЦ «Київський університет», 2004. – 124 с.

20. *Horodnii M.F., Syrotenko A.V.*, PTH Power Integrable Solutions of an Operator-Differential Equation. // Journal of Mathematical Sciences . Jan2016, Vol. 212 Issue 4, p371-379.

21. *Мельник Т.А.* Комплексний аналіз: підручник / К.: ВПЦ «Київський університет», 2015. – 192 с.

22. *Матлаш В.Ю., Сиротенко А.В.* Розв’язки лінійного операторного рівняння в просторі $\mathbb{R}^2$. // Збірник тез X Всеукраїнської наукової конференції молодих математиків. – 2021. – С. 31-32.