НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

фізико-математичний факультет

кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

«На правах рукопису»
УДК _______________

До захисту допущено:
Завідувач кафедри
________ Олег КЛЕСОВ
«14» травня 2021 р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра

за освітньо-науковою програмою «Страхова та фінансова математика»

зі спеціальності 111 Математика

на тему: «Консистентність оцінки найменших квадратів параметрів нелінійної моделі регресії у присутності лінійного випадкового шуму»

Виконала:
студентка ІІ курсу магістратури, групи ОМ-91мн
Митрофанова Олена Вячеславівна ___________

Керівник:
доктор фізико-математичних наук, професор
Іванов Олександр Володимирович ___________

Рецензент:
Професор кафедри дослідження операцій
Київського національного університету
Імені Тараса Шевченка
д. ф.-м. н., с. н. с. ___________
Мацак Іван Каленикович

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студентка ______________

Київ – 2021

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

фізико-математичний факультет

кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський) за освітньо-науковою програмою

Спеціальність – 111 «Математика»

Освітньо-наукова програма «Страхова та фінансова математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_______ Олег КЛЕСОВ

«04» лютого 2021 р.

ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію студенту

Митрофановій Олені Вячеславівні

1. Тема дисертації «Консистентність оцінки найменших квадратів параметрів нелінійної моделі регресії у присутності лінійного випадкового шуму», науковий керівник дисертації Іванов Олександр Володимирович, доктор фізико-математичних наук, професор, затверджені наказом по університету від «26» березня 2021 р. № 901-с

2. Термін подання студентом дисертації 13 травня 2021 року

3. Об'єкт дослідження нелінійна модель регресії.

4. Предмет дослідження консистентність оцінки найменших квадратів параметрів нелінійної моделі регресії у присутності лінійного випадкового шуму.

5. Перелік завдань, які потрібно розробити:

1) Довести консистентність оцінки найменших квадратів параметрів тригонометричної моделі регресії у присутності лінійного випадкового шуму.
2) Довести одне узагальнення теореми Малінво.

3) Довести одне узагальнення теореми Дженріча.

6. Орієнтовний перелік ілюстративного матеріалу 27 слайдів.

7. Орієнтовний перелік публікацій

1) О. В. Іванов, О. В. Митрофанова. Консистентність оцінки найменших квадратів параметрів тригонометричної моделі регресії у присутності лінійного випадкового шуму. // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика» / Видавництво УжНУ «Говерла», 2020. Вип. №2 (37). – с. 54-65.

2) О. В. Митрофанова. Одне узагальнення теореми Малінво. // X Всеукраїнська наукова конференція молодих математиків. Нац. техн. ун-т України «КПІ ім. І. Сікорського». – Київ. – 2021. – с.30-31

8. Дата видачі завдання 04 лютого 2021 року

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1.	Ознайомлення з літературою	05.02.21 – 16.02.21	виконано
2.	Доведення консистентності оцінки найменших квадратів параметрів тригонометричної моделі регресії	17.02.21 – 08.03.21	виконано
3.	Доведення узагальненої теореми Малінво	09.03.21 – 01.04.21	виконано
4.	Доведення узагальненої теореми Дженріча	02.04.21 – 26.05.21	виконано
5.	Оформлення магістерської дисертації	27.05.21 – 10.05.21	виконано

Студент Олена МИТРОФАНОВА

Науковий керівник дисертації Олександр ІВАНОВ

Реферат

Магістерська дисертація: 43 сторінки, 27 слайдів для проектора, 16 першоджерел.

Вивчається властивість консистентності оцінки найменших квадратів параметрів нелінійної моделі регресії з неперервним часом, де шум є лінійним Леві-керованим стаціонарним 4-го порядку випадковим процесом із нульовим середнім, інтегровную та інтегровную з квадратом імпульсною перехідною функцією.

Мета роботи полягає в отриманні вимог до функції регресії та випадкового шуму, для яких оцінка найменших квадратів параметрів функції регресії є консистентною.

Завданням роботи є отримання результатів про консистентність найменших квадратів параметрів нелінійної функції регресії і, зокрема, тригонометричної функції регресії. Об'єктом досліджень є нелінійна модель регресії з неперервним часом спостереження. Предметом дослідження є властивості консистентності оцінки найменших квадратів параметрів нелінійної моделі регресії.

Для оцінювання амплітуд та кутових частот тригонометричної моделі ми використовуємо оцінки найменших квадратів у сенсі Уолкера, тобто розглянуто спеціальну сім'ю параметричних множин, щоб розрізнити належним чином різні кутові частоти в сумі гармонічних коливань.

Отримано теорему про сильну консистентність оцінки найменших квадратів параметрів тригонометричної моделі регресії за описаними вище припущеннями щодо випадкового шуму. Для отримання такого результату було доведено лему про рівномірну збіжність майже напевно середнього значення фінітного перетворення Фур'є лінійного Леві-керованого випадкового процесу.

Сформульовано і доведено узагальнення теореми Малінво про слабку консистентність оцінки найменших квадратів. Також сформульовано і доведено узагальнення теореми Малінво про сильну консистентність оцінки найменших квадратів параметрів нелінійної моделі регресії у випадку обмеженої параметричної множини.

Ключові слова: нелінійна модель регресії, тригонометрична функція регресії, Леві-керований лінійний випадковий шум, оцінка найменших квадратів, слабка консистентність, сильна консистентність.

Abstract

Master degree thesis contains 43 pages, 27 slides for projector, 16 primary sources.

The least squares estimator property of consistency of the parameters of nonlinear regression model with continuous time, where the random noise is a linear Lévy driven stationary of the fourth order stochastic process with zero mean, integrable and square integrable impulse transmission function is studied.

The goal of the work lies in obtaining the requirements to regression function and the random noise under which the least squares estimator of regression model parameters are consistent.

The task of the research is receiving results on the least squares estimator consistency of nonlinear regression parameters and, in particular, trigonometric regression parameters. Nonlinear regression model with continuous observation time is the research object. Consistency of the least squares estimator of nonlinear regression model parameters is the subject of the research.

To estimate unknown amplitudes and angular frequencies of a trigonometric model we use the least squares estimators in the Walker sense, that is special parametric sets are considered to distinguish properly different angular frequencies in the sum of harmonic oscillations.

Theorem on strong consistency of the least squares estimators of trigonometric regression parameters is obtained under the assumption on the random noise described above. To obtain such a result a lemma was proved on the uniform tending to zero almost surely of the average value of Lévy-driven linear stochastic process Fourier transform.

A generalization of Malinvaud theorem on weak consistency of the least squares estimators was formulated and proved in the case of the unbounded parametric set. Also a generalization of Jennrich theorem on strong consistency of the least squares estimators of nonlinear regression parameters in the case of bounded parametric set is formulated and proved.

Key words: nonlinear regression model, trigonometric regression function, Lévy-driven linear random noise, the least squares estimators, weak consistency, strong consistency.

Зміст

Вступ **9**

1 Постановка задачі та допоміжні результати **11**

2 Консистентність оцінки найменших квадратів параметрів тригонометричної моделі регресії **17**

3 Узагальнення теореми Малінво **27**

4 Узагальнення теореми Дженріча **35**

Висновки **41**

Список використаних джерел **42**

Вступ

Регресійний аналіз є істотною частиною математичної та прикладної статистики. Нелінійний регресійний аналіз є значним розширенням та ускладненням класичного лінійного регресійного аналізу, завдяки використанню нелінійних або частково нелінійних за параметрами моделей, які адекватніше описують, ніж лінійні моделі, явища, що потребують статистичного аналізу. Велика кількість прикладних проблем у численних наукових, технічних та гуманітарних галузях знань дають поштовх розвитку нелінійного регресійного аналізу.

Задача оцінювання векторного параметра сигналу в моделях спостереження "сигнал + шум" є добре відомою проблемою статистики випадкових процесів, та у випадку нелінійного параметра сигналу – задачею нелінійного регресійного аналізу.

Серед різноманітності задач нелінійного регресійного аналізу оцінювання амплітуд та кутових частот суми гармонічних коливань, що спостерігається на фоні випадкового шуму, займає значне місце, завдяки її численним застосуванням. Статистичні моделі такого типу називаються тригонометричними моделями регресії, а проблема статистичного оцінювання її параметрів називається задачею виявлення прихованих періодичностей.

Перший розділ роботи присвячено вивченню тригонометричної моделі регресії, в якій випадковий шум є лінійним Леві-керованим стаціонарним 4-го порядку випадковим процесом із нульовим середнім, інтегровную та інтегровную з квадратом імпульсною перехідною функцією. Це припущення призводить до інтегровності коваріаційної функції та кумулянтної функції 4-го порядку.

Для оцінювання амплітуд та кутових частот такої тригонометричної моделі ми використовуємо оцінки найменших квадратів (ОНК) у сенсі Уолкера, тобто розглянуто спеціальну сім'ю параметричних множин, щоб розрізнити належним чином різні кутові частоти в сумі гармонічних коливань.

У 2-му розділі отримано теорему про сильну консистентність ОНК параметрів тригонометричної моделі регресії за описаними вище припущеннями щодо випадкового шуму. Для отримання такого результату було доведено лему про рівномірну збіжність майже напевно (м.н.) середнього значення фінітного перетворення Фур'є лінійного Леві-керованого випадкового процесу.

Ця лема є головним інструментом доведення теореми про сильну консистентність. Для доведення теореми, по-перше, знаходимо деякі представлення ОНК амплітуд через відповідні оцінки кутових частот. По-друге, ми підставляємо ці формули у функціонал методу найменших квадратів. Останній крок доведення полягає у перетворенні L_2-норми різниці між емпіричною тригонометричною функцією регресії та істиною функцією регресії таким чином, що ця норма прямує до нуля м.н. тоді і тільки тоді, коли оцінки є сильно консистентними.

У 3-му розділі роботи сформульовано та доведено узагальнення теореми Малінво (див. A.V. Ivanov, N.N. Leonenko [1], E. Malinvaud [2]) про слабку консистентність ОНК параметрів нелінійної моделі регресії у випадку необмеженої параметричної множини.

У 4-му розділі роботи доведено узагальнення теореми Дженріча (див. R.I. Jennrich [3]) про сильну консистентність ОНК невідомого параметра нелінійної моделі регресії у випадку обмеженої параметричної множини.

1 Постановка задачі та допоміжні результати

Припустимо, що задано модель спостережень

$$X(t) = g(t, \theta^0) + \varepsilon(t), \qquad t \in [0, T], \tag{1}$$

де $g(t, \theta) : [0, +\infty) \times \Theta \to \mathbb{R}$ - неперервна функція, невідомий параметр $\theta^0 \in \Theta \subset \mathbb{R}^q$, де Θ - відкрита множина; $\varepsilon = \{\varepsilon(t), t \in \mathbb{R}\}$ - випадковий шум, визначений на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Щоб ввести умови на випадковий процес ε, з (1), нам потрібні деякі зауваження, які наведено в [4].

Процес Леві $L(t), t \geq 0$, є випадковим процесом з незалежними та стаціонарними приростами, неперервний за ймовірністю, з траєкторіями, які є м.н. неперервними справа та мають границі зліва (*cádlág*) та $L(0) = 0$.

Нехай (a, b, Π) — це характеристична трійка процесу Леві $L(t), t \geq 0$, тобто для будь-яких $t \geq 0$

$$\log E \exp\{izL(t)\} = tk(z)$$

для всіх $z \in \mathbb{R}$, де

$$k(z) = iaz - \frac{1}{2}bz^2 + \int\limits_{\mathbb{R}} (e^{izu} - 1 - iz\tau(u))\, \Pi(du), z \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

де $a \in \mathbb{R}, b \geq 0$, та

$$\tau(u) = \begin{cases} u, & |u| \leq 1; \\ \frac{u}{|u|}, & |u| > 1. \end{cases}$$

Міра Леві Π у (2) — це така міра Радона на $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, що $\Pi(\{0\}) = 0$, та

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \min(1, u^2)\, \Pi(du) < \infty.$$

Відомо, що $L(t)$ має скінченний p-ий момент для $p > 0$ ($E|L(t)|^p < \infty$), тоді і лише тоді, коли

$$\int\limits_{|u| \geq 1} |u|^p\, \Pi(du) < \infty. \tag{3}$$

Якщо $L(t),\ t \geq 0$ — це процес Леві з характеристиками (a, b, Π), тоді $-L(t),\ t \geq 0$, також є процесом Леві з характеристиками $(-a, b, \breve{\Pi})$, де $\breve{\Pi}(A) = \Pi(-A)$ для кожної борелівської множини A. Розглянемо *cáglád* модифікацію процесу $-L(t)$, тобто її траєкторії м.н. неперервні зліва та мають границі справа.

Введемо двосторонній процес Леві $L(t), t \in \mathbb{R}$, такий, що для $t < 0$ він дорівнює незалежній копії процесу $-L(-t)$.

Нехай $\hat{a} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ — вимірна функція. Будемо розглядати Леві-керований лінійний стохастичний процес (процес ковзного середнього)

$$\varepsilon(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \hat{a}(t-s)\, dL(s), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

де L - двосторонній процес Леві, а стохастичний інтеграл (4) означено в $L_2(\Omega)$ в роботі B. Rajput, J. Rosinski [5].

У подальшому будемо припускати, що

$$\hat{a} \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R}),\ EL(1) = 0. \tag{5}$$

Популярними варіантами ядра в (4) є ядра Гамма-типу:

(i) $\hat{a}(t) = t^{\alpha} e^{-\lambda t} \mathbb{I}_{[0,\infty)}(t), \lambda > 0, \alpha > -\frac{1}{2}$;

(ii) $\hat{a} = e^{-\lambda t} \mathbb{I}_{[0,\infty)}(t), \lambda > 0$ (процес Ornstein-Uhlenbeck);

(iii) $\hat{a} = e^{-\lambda t}, \lambda > 0$ (добре збалансований процес Ornstein-Uhlenbeck).

A. Процес ε в (1) є каузальним лінійним вимірним процесом, заданим формулою (4), де симетричний процес Леві L та $\hat{a}$ задовольняють (5). Більш того, міра Леві Π задовольняє (3) для p=4.

З умови ***A*** випливає [6] для $r = 1, 2, 3, 4$

$$\log E \exp\{i \sum_{j=1}^{r} z_j \varepsilon(t_j)\} = \int_{\mathbb{R}} k\left(\sum_{j=1}^{r} z_j \hat{a}(t_j - s)\right) ds. \tag{6}$$

У свою чергу, з формули (6) можна побачити, що випадковий процес ε є стаціонарним 4-го порядку.

Позначимо

$$m_r(t_1, \ldots, t_r) = E\varepsilon(t_1) \ldots \varepsilon(t_r),$$

$$c_r(t_1, \ldots, t_r) = i^{-r} \frac{\partial^r}{\partial z_1 \ldots \partial z_r} \log E \exp\{i \sum_{j=1}^{r} z_j \varepsilon(t_j)\}|_{z_1 = \ldots = z_r = 0}$$

моментну та кумулянтну функції, відповідно, порядку r процесу ε. Таким чином, $m_2(t_1, t_2) = B(t_1 - t_2)$, де

$$B(t) = d_2 \int_{\mathbb{R}} \hat{a}(t - s)\hat{a}(s)\, ds, t \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

є коваріаційною функцією ε, а змішаний момент 4-го порядку можна обчислити за формулою

$$m_4(t_1, t_2, t_3, t_4) = c_4(t_1, t_2, t_3, t_4) + m_2(t_1, t_2)m_2(t_3, t_4) +$$
$$+ m_2(t_1, t_3)m_2(t_2, t_4) + m_2(t_1, t_4)m_2(t_2, t_4). \tag{8}$$

Точний вираз для кумулянтів випадкового процесу ε можна отримати з (6) прямими обчисленнями:

$$c_r(t_1, \ldots, t_r) = d_r \int_{\mathbb{R}} \prod_{j=1}^{r} \hat{a}(t_j - s)\ ds, \tag{9}$$

де d_r — це r-ий кумулянт випадкової величини $L(1)$. Зокрема,

$$d_2 = EL^2(1) = -k^{(0)},$$

$$d_4 = EL^4(1) - 3(EL^2(1))^2.$$

Лема 1. *Якщо виконується умова* $\boldsymbol{A}$, *то*

$$\upsilon_T^* \xrightarrow[T \to \infty]{} B(0) \qquad \text{м.н.} \tag{10}$$

Доведення. Доведемо спочатку, що

$$E[v_T^* - B(0)]^2 = O(T^{-1}) \text{ при } T \to \infty. \tag{11}$$

З рівності (8) отримуємо

$$E[v_T^* - B(0)]^2 =$$
$$= T^{-2} \int\limits_0^T \int\limits_0^T c_4(t,t,s,s)\ dt\ ds + 2T^{-2} \int\limits_0^T \int\limits_0^T B^2(t-s)\ dt\ ds =$$
$$= I_1 + I_2.$$

За умови $\boldsymbol{A}$, формули (9) для коваріаційної функції процесу $\varepsilon(t)$ та теореми Фубіні - Тонеллі випливає, що

$$\int_{\mathbb{R}} B^2(t) dt \le B(0) d_2 \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\hat{a}(t+s)| \cdot |\hat{a}(s)|\ ds \right)\ dt =$$

$$= B(0) d_2 \|\hat{a}\|_1^2 = d_2^2 \|\hat{a}\|_1^2 \|\hat{a}\|_2^2,$$

де

$$\|\hat{a}\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |\hat{a}(t)|\ dt,$$

$$\|\hat{a}\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}} |\hat{a}(t)|^2\ dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Тому

$$I_2 \le 2 d_2^2 \|\hat{a}\|_1^2 \|\hat{a}\|_2^2 T^{-1}. \tag{12}$$

З іншого боку, з формули (9) для кумулянтів процесу ε та теореми Фубіні-Тонеллі одержуємо

$$I_1 = d_4 T^{-2} \int_0^T \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \hat{a}^2(t-u) \hat{a}^2(s-u)\ du\ dt\ ds =$$

$$d_4 T^{-2} \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}} \hat{a}^2(t-u) \left(\int_0^T \hat{a}^2(s-u)\ ds \right)\ du \right)\ dt \le$$

$$\leq d_4 \|\hat{a}\|_2^4 T^{-1}. \tag{13}$$

Справедливість (11) безпосередньо випливає з (12) та (13).

Позначимо

$$\xi_T = v_T^* - B(0),$$

та нехай $T_n = n^2, \quad n \geq 1$. Тоді, з (11) випливає, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\xi_{T_n}^2 < \infty.$$

Отже,

$$\xi_{T_n} = \frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} \varepsilon^2(t)\, dt - B(0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \text{м.н.},$$

тобто,

$$v_{T_n}^* = \frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} \varepsilon^2(t)\, dt \xrightarrow[n\to\infty]{} B(0) \qquad \text{м.н.}$$

Покажемо, що

$$\sup_{T_n \leq T < T_{n+1}} |\xi_T - \xi_{T_n}| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \text{м.н.} \tag{14}$$

Дійсно,

$$\sup_{T_n \leq T < T_{n+1}} |\xi_T - \xi_{T_n}| =$$

$$= \sup_{T_n \leq T < T_{n+1}} \left| v_T^* - v_{T_w}^* \right| \leq$$

$$\leq \sup_{T_n \leq T < T_{n+1}} \left(\left| \frac{1}{T} - \frac{1}{T_n} \right| \int_0^{T_n} \varepsilon^2(t)\, dt + \int_{T_n}^{T} \varepsilon^2(t)\, dt \right) \leq$$

$$\leq \sup_{T_n \leq T < T_{n+1}} I_3 + \sup_{T_n \leq T < T_{n+1}} I_4;$$

$$I_3 = \frac{T + T_n}{T_n T} \int_0^{T_n} \varepsilon^2(t)\, dt \leq \frac{T_{n+1} - T_n}{T_n^2} \int_0^{T_n} \varepsilon^2(t)\, dt =$$

$$= \frac{T_{n+1} - T_n}{T_n} \cdot v^*_{T_n} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2} \cdot v^*_{T_n} =$$

$$= \frac{2n+1}{n^2} \cdot v^*_{T_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \text{м.н.};$$

$$I_4 = \frac{1}{T} \int_{T_n}^{T} \varepsilon^2(t)\ dt \le \frac{1}{T_n} \int_{T_n}^{T_{n+1}} \varepsilon^2(t)\ dt =$$

$$\frac{T_{n+1}}{T_n} \cdot \frac{1}{T_{n+1}} \int_0^{T_{n+1}} \varepsilon^2(t)\ dt - \frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} \varepsilon^2(t)\ dt =$$

$$= \frac{T_{n+1}}{T_n} \cdot v^*_{T_{n+1}} - v^*_{T_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot v^*_{T_{n+1}} - v^*_{T_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \text{м.н.},$$

оскільки

$$\frac{(n+1)^2}{n^2} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Отже,

$$\sup_{T_n \le T < T_{n+1}} (I_3 + I_4) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \text{м.н.},$$

з чого випливає справедливість (14).

$\square$

2 Консистентність оцінки найменших квадратів параметрів тригонометричної моделі регресії

Розглянемо у моделі (1) тригонометричну функцію регресії

$$g(t,\theta^0)=\sum_{k=1}^{N}(A_k^0 cos\varphi_k^0 t+B_k^0 sin\varphi_k^0 t), \quad (15)$$

$$\theta^0=(\theta_1^0,\theta_2^0,\theta_3^0,\ldots,\theta_{3N-2}^0,\theta_{3N-1}^0,\theta_{3N}^0)=(A_1^0,B_1^0,\varphi_1^0,\ldots,A_N^0,B_N^0,\varphi_N^0), \quad (16)$$

$$(A_k^0)^2+(B_k^0)^2>0, k=\overline{1,N}.$$

Статистичне оцінювання невідомих амплітуд та кутових частот (16) суми гармонічних коливань (15), що спостерігається на фоні випадкового шуму $\varepsilon(t)$ є ймовірнісною постановкою задачі проблеми виявлення прихованих періодичностей. Дослідження цієї проблеми, а також її детермінованої постановки $\varepsilon(t)\equiv 0$ розпочато Лагранжем. До середини 20-го сторіччя було розглянуто багато застосувань розв'язків цієї задачі у різних наукових галузях, описаних у [7]. Пізніше прикладні аспекти проблеми виявлення прихованих періодичностей було розглянуто в оглядовій статті [8], та монографії [9].

Існує велика кількість літератури, де розглядається ця проблема. Ми розглянемо лише декілька з цих публікацій [10] - [15], де консистентність та асимптотична нормальність вивчаються для різних статистичних оцінок невідомих амплітуд та кутових частот за різних припущень щодо випадкового статистичного шуму $\varepsilon(t)$ у моделі спостережень (1), (15), де $N\geq 1$. У цих роботах розглядаються обидва випадки дискретного та неперервного часу.

У цьому розділі для тригонометричної моделі регресії (1), (15) за умови $\boldsymbol{A}$ розглядається консистентність ОНК параметра θ^0.

Розглянемо частоти $\varphi^0 = (\varphi_1^0, \ldots, \varphi_N^0)$ у порядку зростання. Іншими словами, ми припустимо, що параметрична множина, де ми будемо шукати оцінку невідомих кутових частот, має наступний вигляд

$$\Phi(\underline{\varphi}, \overline{\varphi}) = \{\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_N) \in \mathbb{R}^N : 0 \leq \underline{\varphi} < \varphi_1 < \ldots < \varphi_N < \overline{\varphi} < +\infty\}.$$

Нехай

$$Q_T(\theta) = T^{-1} \int\limits_0^T [X(t) - g(t, \theta)]^2 \, dt. \tag{17}$$

Згідно за стандартним означенням, ОНК параметра θ^0, отриманою за спостереженнями процесу $\{X(t), t \in [0, T]\}$, є будь-який випадковий вектор

$$\theta_T = (A_{1T}, B_{1T}, \varphi_{1T}, \ldots, A_{NT}, B_{NT}, \varphi_{NT}), \tag{18}$$

що мінімізує функціонал $Q_T(\theta)$ на параметричній множині $\Theta_T \subset \mathbb{R}^{3N}$, де амплітуди $A_k, B_k, k = \overline{1, N}$, набувають довільні значення з $\mathbb{R}$, а кутові частоти $\varphi \in \Phi^c$, де Φ^c – замикання множини $\Phi(\underline{\varphi}, \overline{\varphi})$.

Доводячи консистентність оцінок θ_T (див. теорему 1 нижче), ми стикаємось із проблемою вивчення поведінки при $T \to \infty$, відношень

$$\frac{\sin T(\varphi_{kT} - \varphi_{jT})}{T(\varphi_{kT} - \varphi_{jT})}, \ \frac{\sin T(\varphi_{kT} - \varphi_j^0)}{T(\varphi_{kT} - \varphi_j^0)}, \ k \neq j, \ \frac{\sin T\varphi_{kT}}{T\varphi_{kT}}, \ k = \overline{1, N}. \tag{19}$$

Однак, користуючись наведеним вище означенням оцінки $\varphi_T = (\varphi_{1T}, \ldots, \varphi_{NT})$, неможливо з'ясувати поведінку різниць $\varphi_{kT} - \varphi_{jT}$ та $\varphi_{kT} - \varphi_j^0$, $j \neq k$, при $T \to \infty$. Тому питання поведінки відношень (19) залишається відкритим.

Уолкер [11] запропонував модифікацію означення оцінки φ^0, яка гарантує збіжність відношень (19) до нуля. У свою чергу, це гарантує консистентність ОНК.

Ідея Уолкера полягає в тому, щоб оцінка (18) визначалась як точка мінімуму функціонала (17) на множині, в якій можна достатньо добре розрізнити параметри φ_k.

Розглянемо неспадну сім'ю відкритих множин

$$\Phi_T \subset \Phi(\underline{\varphi}, \overline{\varphi}), \qquad T \geq T_0 > 0.$$

Припустимо, що вони містять істинне значення параметра φ^0 і задовольняють наступним умовам

$$\lim_{T\to\infty} \inf_{1<k\leq N} \inf_{\varphi\in\Phi_T} T(\varphi_k - \varphi_j) = +\infty, \tag{20}$$

$$\lim_{T\to\infty} \inf_{\varphi\in\Phi_T} T\varphi_1 = +\infty. \tag{21}$$

З огляду на це зауваження, ми кажемо, що вектор θ_T є ОНК, якщо θ_T є точкою мінімуму функціонала $Q_T(\theta)$ на множині Θ_T, такий, що $A_k, B_k \in \mathbb{R},\ k = \overline{1,N}$, а $\varphi \in \Phi_T^c$. У множині Θ_T вже можна достатньо добре розрізнити параметри φ_k.

Умова (21), очевидно, виконується, якщо $\underline{\varphi} > 0$. Якщо $\Phi_T \subset \Phi(0, \overline{\varphi}))$, тоді можна розглянути, наприклад, параметричні множини, для яких

$$\inf_{1<k\leq N} \inf_{\varphi\in\Phi_T} (\varphi_k - \varphi_j) = T^{-1/2},$$

$$\inf_{\varphi\in\Phi_T} \varphi_1 = T^{-1/2},$$

щоб задовольнити (20), (21).

ОНК, означена таким чином, називається ОНК у сенсі Уолкера.

Теорема 1. *Нехай виконується припущення $\boldsymbol{A}$. Тоді ОНК θ_T у сенсі Уолкера є сильно консистентною оцінкою параметра θ^0, а саме:*

$$A_{kT} \to A_k^0,\ B_{kT} \to B_k^0,\ T(\varphi_{kT} - \varphi_k^0) \to 0 \qquad \text{м.н.}, \tag{22}$$

при $T \to \infty, k = \overline{1,N}$.

Наступна лема є основною частиною доведення збіжності (22).

Лема 2. *За умови **A***

$$\xi(T) = \sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \left| T^{-1} \int\limits_0^T e^{-i\lambda t}\varepsilon(t)\ dt \right| \to 0 \qquad \text{м.н., при } T \to \infty. \tag{23}$$

Доведення. Оскільки

$$\left| \int\limits_0^T e^{-i\lambda t}\varepsilon(t)\ dt \right|^2 = \int\limits_{-T}^T e^{-i\lambda t} \int\limits_0^{T-|u|} \varepsilon(t+|u|)\varepsilon(t)\ dt\ du =$$

$$= 2\int\limits_0^T \cos\lambda u \int\limits_0^{T-u} \varepsilon(t+u)\varepsilon(t)\ dt\ du,$$

тоді

$$E\xi^2(t) \le 2T^{-2}\int\limits_0^T E\left| \int\limits_0^{T-u} \varepsilon(t+u)\varepsilon(t)dt \right| du \le 2T^{-2}\int_0^T K^{\frac{1}{2}}(u)du.$$

За формулою (8)

$$K(u) = \int_0^{T-u}\int_0^{T-u} E\varepsilon(t+u)\varepsilon(s+u)\varepsilon(t)\varepsilon(s)dtds =$$

$$\int_0^{T-u}\int_0^{T-u} c_4(t+u, s+u, t, s)dtds + (T-u)^2B^2(u) +$$

$$+\int_0^{T-u}\int_0^{T-u} B^2(t-s)dtds + \int_0^{T-u}\int_0^{T-u} B(t-s+u)B(t-s-u)dtds \le$$

$$\le K_1(u) + K_2(u) + K_3(u) + |K_4(u)|,$$

та

$$E\xi^2(T) \le 2T^{-2}\int_0^T (K_1^{\frac{1}{2}}(u) + K_2^{\frac{1}{2}}(u) + K_3^{\frac{1}{2}}(u) + |K_4(u)|^{\frac{1}{2}})du. \tag{24}$$

Відповідно до (9)

$$K_1(u) = d_4 \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{T-u} \hat{a}(t+u-r)\hat{a}(t-r)dt \right)^2 dr \leq$$

$$\leq d_4 \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{T-u} \hat{a}^2(t+u-r) \int_0^{T-u} \hat{a}^2(t-r)dt \right) dr \leq$$

$$\leq d_4 \|\hat{a}\|_2^2 \int_0^{T-u} dt \int_{\mathbb{R}} \hat{a}^2(t+u-r)dr \leq d_4 \|\hat{a}\|_4^2 (T-u),$$

а саме

$$T^{-2} \int_0^T K_1^{\frac{1}{2}}(u)du \leq d_4^{\frac{1}{2}} \|\hat{a}\|_2^2 T^{-2} \int_0^T \sqrt{T-u}du = \frac{2}{3} d_4^{\frac{1}{2}} \|\hat{a}\|_2^2 T^{-\frac{1}{2}}. \tag{25}$$

З умови $\boldsymbol{A}$ випливає $\|B\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |B(t)|dt < \infty$. Тоді

$$T^{-2} \int_0^T K_2^{\frac{1}{2}}(u)du = T^{-2} \int_0^T (T-u)|B(u)|du \leq \|B\|_1 T^{-1}. \tag{26}$$

Більш того,

$$K_3(u) \leq B(0) \int_0^{T-u} \int_0^{T-u} |B(t-s)|dtds \leq B(0)\|B\|_1 (T-u),$$

$$T^{-2} \int_0^T K_3^{\frac{1}{2}}(u)du \leq \frac{2}{3} B^{\frac{1}{2}}(0) \|B\|_1^{\frac{1}{2}} T^{-\frac{1}{2}}. \tag{27}$$

Так само,

$$T^{-2} \int_0^T K_4^{\frac{1}{2}}(u)du \leq \frac{2}{3} B^{\frac{1}{2}}(0) \|B\|_1^{\frac{1}{2}} T^{-\frac{1}{2}}. \tag{28}$$

З нерівностей (24) - (28) отримуємо, що $E\xi^2(T) = O(T^{-\frac{1}{2}})$, при $T \to \infty$. Нехай $T_n = n^{2+\delta}$ для деякого $\delta > 0$. Тоді

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\xi^2(T_n) < \infty,$$

тобто

$$\xi(T_n) \to 0 \qquad \text{м.н., при } n \to \infty.$$

Розглянемо послідовність випадкових величин

$$\zeta_n = \sup_{T_n \le T < T_{n+1}} |\xi(T) - \xi(T_n)| =$$

$$= \sup_{T_n \le T < T_{n+1}} \left| \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^1} \left| \frac{1}{T} \int_0^T e^{-i\lambda t} \varepsilon(t) dt \right| - \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^1} \left| \frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} e^{-i\lambda t} \varepsilon(t) dt \right| \right| \le$$

$$\le \sup_{T_n \le T < T_{n+1}} \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^1} \left| \frac{1}{T} \int_0^T e^{-i\lambda t} \varepsilon(t) dt - \frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} e^{-i\lambda t} \varepsilon(t) dt \right| \le$$

$$\le \sup_{T_n \le T < T_{n+1}} \left[\sup_{\lambda \in \mathbb{R}^1} \left| \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_n} \right) \int_0^{T_n} e^{-i\lambda t} \varepsilon(t) dt \right| + \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^1} \left| \frac{1}{T} \int_{T_n}^T e^{-i\lambda t} \varepsilon(t) dt \right| \right] \le$$

$$\le \frac{T_{n+1} - T_n}{T_n} \xi(T_n) + \frac{1}{T_n} \int_{T_n}^{T_{n+1}} |\varepsilon(t)| dt = \zeta_n^{(1)} + \zeta_n^{(2)}.$$

Зрозуміло, що $\zeta_n^{(1)} \to 0$ м.н., при $n \to \infty$.

Враховуватимемо, що

$$E(\zeta_n^{(2)})^2 = \frac{1}{T_n^2} \int_{T_n}^{T_{n+1}} \int_{T_n}^{T_{n+1}} E|\varepsilon(t_1)\varepsilon(t_2)| dt_1 dt_2 \le$$

$$\le B(0) \left(\frac{T_{n+1} - T_n}{T_n} \right)^2 = O(n^{-2}), \text{ м.н., при } n \to \infty.$$

Таким чином, $\zeta_n^{(2)} \to 0$ м.н., при $n \to \infty$. □

Доведення теореми 1 використовує ідею статті [14].

Доведення. Нехай

$$x_{kT} = \frac{\sin T(\varphi_{kT} - \varphi_k^0)}{T(\varphi_{kT} - \varphi_k^0))}, \qquad y_{kT} = \frac{1 - \cos T(\varphi_{kT} - \varphi_k^0))}{T(\varphi_{kT} - \varphi_k^0)}.$$

Покажемо, що

$$A_{kT} = A_k^0 x_{kT} - B_k^0 y_{kT} + o(1), \qquad B_{kT} = A_k^0 y_{kT} - B_k^0 x_{kT} + o(1), \qquad (29)$$

для $k = \overline{1, N}$, де $o(1)$ позначає, взагалі кажучи, різні випадкові процеси, що прямують до нуля м.н., при $T \to \infty$.

Диференціюючи функціонал $Q_T(\theta)$ за змінними $A_1, \ldots, A_N$ та $B_1, \ldots, B_N$, отримуємо наступну систему лінійних рівнянь для ОНК A_{kT} та B_{kT}, $k = \overline{1, N}$:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^N a_{kj}^{(1)}(T) A_{kT} + \sum_{k=1}^N b_{kj}^{(1)}(T) B_{kT} = c_j^{(1)}(T), \quad j = \overline{1, N}, \\ \sum_{k=1}^N a_{kj}^{(2)}(T) A_{kT} + \sum_{k=1}^N b_{kj}^{(2)}(T) B_{kT} = c_j^{(2)}(T), \quad j = \overline{1, N}, \end{cases} \tag{30}$$

де використано позначення

$$\langle u(t), v(t) \rangle = T^{-1} \int_0^T u(t) v(t) dt,$$

$$a_{kj}^{(1)}(T) = \langle \cos \varphi_{kT} t, \cos \varphi_{jT} t \rangle, \qquad a_{kj}^{(2)}(T) = \langle \cos \varphi_{kT} t, \sin \varphi_{jT} t \rangle,$$

$$b_{kj}^{(1)}(T) = \langle \sin \varphi_{kT} t, \cos \varphi_{jT} t \rangle, \qquad b_{kj}^{(2)}(T) = \langle \sin \varphi_{kT} t, \sin \varphi_{jT} t \rangle,$$

$$c_j^{(1)}(T) = \langle X(t), \cos \varphi_{jT} t \rangle, \qquad c_j^{(2)}(T) = \langle X(t), \sin \varphi_{jT} t \rangle,$$

$$k, j = \overline{1, N}.$$

Розглядаючи властивості (20) та (21) параметричної множини Φ_T (у замиканні якої набуває значення ОНК $\varphi_T = (\varphi_{1T}, \ldots, \varphi_{NT})$), виводимо такі співвідношення:

$$a_{kj}^{(1)}(T) = o(1), \qquad k \neq j,$$

$$a_{kk}^{(1)}(T) = \frac{1}{2} + o(1), \qquad a_{kj}^{(2)}(T) = o(1), \qquad k, j = \overline{1, N}, \tag{31}$$

та

$$b_{kj}^{(1)}(T) = a_{kj}^{(2)}(T) = o(1),$$

$$b_{kj}^{(2)}(T) = o(1), \qquad k \neq j, \qquad b_{kk}^{(2)}(T) = \frac{1}{2} + o(1), \qquad k, j = \overline{1, N}. \tag{32}$$

Далі маємо

$$c_j^{(1)}(T) = \langle \varepsilon(t), \cos \varphi_{jT} t \rangle + \langle g(t, \theta^0) m \cos \varphi_{jT} t \rangle = d_j^{(1)}(T) + d_j^{(2)}(T),$$

крім того, $d_j^{(1)}(T) = o(1)$ за лемою 2. Тоді

$$d_j^{(2)}(T) = A_j^0 \langle \cos \varphi_j^0 t, \cos \varphi_{jT} t \rangle + B_j^0 \langle \sin \varphi_j^0 t, \cos \varphi_{jT} t \rangle + o(1) \tag{33}$$

$$= \frac{1}{2}[A_j^0 y_{jT} - B_j^0 x_{jT}] + o(1), \qquad j = \overline{1, N}.$$

Так само

$$c_j^{(2)}(T) = \frac{1}{2}[A_j^0 y_{jT} + B_j^0 x_{jT}] + o(1), \qquad j = \overline{1, N}. \tag{34}$$

Тепер співвідношення (29) випливають із (30) - (34).

Оскільки $|x_{kT}|, |y_{kT}| \leq 1$, то з (29) випливає, що

$$|A_{kT}|, |B_{kT}| \leq |A_{kT}| + |B_{kT}| + o(1), \qquad k = \overline{1, N}. \tag{35}$$

Нехай

$$\Delta g(t; \theta_1, \theta_2) = g(t; \theta_1) - g(t; \theta_2)$$

та

$$G_T(\theta_1, \theta_2) = \langle \Delta g(t; \theta_1, \theta_2), \Delta g(t; \theta_1, \theta_2) \rangle.$$

За означенням ОНК

$$Q_T(\theta_T) \leq Q_T(\theta^0). \tag{36}$$

З іншого боку,

$$Q_T(\theta_T) - Q_T(\theta^0) = G_T(\theta_T, \theta^0) + 2\langle \varepsilon(t), \Delta g(t; \theta^0, \theta_T) \rangle, \tag{37}$$

де

$$\langle \varepsilon(t), \Delta g(t;\theta^0,\theta_T)\rangle = o(1) \tag{38}$$

з огляду на лему 2 та оцінки (35). Беручи до уваги нерівність (36), отримуємо з (37) та (38), що

$$G_T(\theta_T,\theta^0)\to 0 \qquad \text{м.н., при } T\to\infty. \tag{39}$$

Покладемо

$$g_{kT}(t) = A_{kT}\cos\varphi_{kT}t + B_{kT}\sin\varphi_{kT}t - A_k^0\cos\varphi_k^0 t - B_k^0\sin\varphi_k^0 t.$$

Тоді

$$G_T(\theta_T,\theta^0) = \sum_{k=1}^{N}\langle g_{kT}(T), g_{kT}(T)\rangle + 2\sum_{k<j}\langle g_{kT}(T), g_{jT}(T)\rangle.$$

Використовуючи наведені вище міркування та оцінки (35), ми знаходимо, що

$$\langle g_{kT}(t), g_{jT}(t)\rangle = o(1), \qquad k\neq j, \tag{40}$$

$$\langle g_{kT}(t), g_{kT}(t)\rangle = \frac{1}{2}[A_{kT}^2 + B_{kT}^2 + (A_k^0)^2 + (B_k^0)^2] -$$

$$-(A_{kT}A_k^0 + B_{kT}B_k^0)x_{kT} + (A_{kT}B_k^0 - A_k^0 B_{kT})y_{kT} + o(1), \qquad k=\overline{1,N}. \tag{41}$$

Підставивши співвідношення (29) у (41) та врахувавши (40), ми знаходимо, що

$$G_T(\theta_T,\theta^0) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}((A_k^0)^2 + (B_k^0)^2)(1 - x_{kT}^2 - y_{kT}^2) + o(1)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}((A_k^0)^2 + (B_k^0)^2)\left(1 - \left(\frac{\sin\frac{1}{2}T(\varphi_{kT}-\varphi_k^0)}{\frac{1}{2}T(\varphi_{kT}-\varphi_k^0}\right)^2\right) + o(1).$$

Таким чином, співвідношення (39) виконується тоді і лише тоді, коли

$$T(\varphi_{kT} - \varphi_k^0) \to 0 \qquad \text{м.н., при } T \to \infty,\ k = \overline{1, N}. \tag{42}$$

Із співвідношень (42), очевидно, випливає, що

$$x_{kT} \to 1, \qquad y_{kT} \to 0 \qquad \text{м.н., при } T \to \infty,\ k = \overline{1, N}.$$

Сильна консистентність оцінок A_{kT} та B_{kT} випливає з рівностей (29).

$\square$

3 Узагальнення теореми Малінво

Розглянемо класичну модель регресії

$$X_j = g(j, \theta^0) + \varepsilon_j,\ j = \overline{1, n}, \tag{43}$$

де $g(j, \theta) : \Theta \to \mathbb{R},\ j \geq 1,$ – послідовність неперервних функцій, невідомий параметр $\theta^0 \in \Theta \subset \mathbb{R}^q$, де Θ – вікрита множина; $\varepsilon_j,\ j \geq 1,$ – послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин з нульовим середнім та скінченним 2-им моментом: $E\varepsilon_j = 0$, та $E\varepsilon_j^2 = \sigma^2 < \infty$.

Означення 1. ОНК параметра $\theta^0 \in \Theta$ в класичній моделі регресії (43) називається будь-який вектор $\theta_n \in \Theta^c$ такий, що

$$Q_n(\theta_n) = \min_{\theta \in \Theta^c} Q_n(\theta),$$

$$Q_n(\theta) = \sum_{j=1}^{n} (X_j - g(j, \theta))^2.$$

Позначимо

$$\varphi_n(\theta_1, \theta_2) = \sum_{j=1}^{n} (g(j, \theta_1) - g(j, \theta_2))^2, \quad \theta_1, \theta_2 \in \Theta^c,\ n \geq 1. \tag{44}$$

Припустимо, що виконано наступні умови.

B. Для будь-яких $\varepsilon > 0$ та $R > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon, R)$ таке, що для достатньо великих $n\ \ (n > n_0)$

$$\sup_{\substack{u_1, u_2 \in (\Theta^c - \theta^0)\ \cap\ v(R), \\ \|u_1 - u_2\| \leq \delta}} n^{-1} \varphi_n(\theta^0 + u_1, \theta^0 + u_2) \leq \varepsilon. \tag{45}$$

C. Для деякого $R_0 > 0$ та будь-якого $\rho \in (0; R_0)$ існують числа $a = a(R_0) > 0$ та $b = b(\rho, R_0) > 0$ такі, що для $n > n_0$

$$\inf_{u \in (\Theta^c - \theta^0) \cap (v^c(R_0) \setminus v(\rho))} n^{-1} \varphi_n(\theta^0 + u, \theta^0) \geq b; \tag{46}$$

$$\inf_{u\in(\Theta^c-\theta^0)\cap v(R_0)} n^{-1}\varphi_n(\theta^0+u,\theta^0)\geq 4\sigma^2+a. \tag{47}$$

У роботі [2] Малінво довів для класичної моделі (43) наступну теорему.

Теорема (Малінво)**.** *За умов **B** та **C** ОНК θ_n параметра θ^0 у класичній моделі регресії (43) слабко консистентна, тобто*

$$\theta_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} \theta^0. \tag{48}$$

Деякі результати про консистентність ОНК θ_T у моделі (1) зі стаціонарним випадковим шумом $\varepsilon(t), t\in\mathbb{R}$, було отримано у [1] та [4]. У цьому розділі ми доведемо одне узагальнення теореми Малінво про консистентність ОНК θ_T за умови $\boldsymbol{A}$ і розглядаємо нелінійну функцію регресії $g(t,\theta)$, яка задовольняє умовам, наведеним далі.

Згідно зі стандартним означенням ОНК параметра θ^0, отриманою за спостереженнями процесу $\{X(t), t\in[0,T]\}$, якщо $g(t,\theta)$ - нелінійна функція, або $g(t,\theta)$ лінійна, але $\Theta\not\equiv\mathbb{R}^q$ та неможливо множину Θ описати простими обмеженнями, тоді оцінку θ_T, взагалі кажучи, неможливо записати в явному вигляді. Якщо $g(t,\theta)$ - лінійна функція та $\Theta=\mathbb{R}^q$, тоді оцінка θ_T знаходиться в явному вигляді.

Припустимо, що функція $g(t,\theta)$ для будь-якого $t\geq 0$ є неперервно диференційовною за $\theta\in\Theta^c$, а її похідні $g_i(t,\theta)=\frac{\partial}{\partial\theta_i}g(t,\theta), i=\overline{1,q}$, локально інтегровані з квадратом за t, тобто $d_{iT}^2(\theta)=\int\limits_0^T g_i^2(t,\theta)dt,\ t>0$.

Також введемо діагональну матрицю

$$d_T(\theta)=\operatorname{diag}(d_{iT}(\theta), i=\overline{1,q}).$$

Позначимо

$$\Phi_T(\theta_1,\theta_2)=\int\limits_0^T (g(t,\theta_1)-g(t,\theta_2))^2dt, \qquad \theta_1,\theta_2\in\Theta^c,$$

$$w_T(\theta_1,\theta_2)=\int\limits_0^T \varepsilon(t)(g(t,\theta_1)-g(t,\theta_2))dt, \qquad \theta_1,\theta_2\in\Theta^c,$$

$$z_T(\theta_1, \theta_2) = \Phi_T^{-1}(\theta_1, \theta_2) w_T(\theta_1, \theta_2), \qquad \theta_1 \neq \theta_2,$$

$$z_T(\theta_1, \theta_2) = 0, \qquad \theta_1 = \theta_2.$$

За означенням θ_T м.н.

$$v_T^* \geq T^{-1} Q_T(\theta_T) = v_T^* - 2T^{-1} w_T(\theta_T, \theta) + T^{-1} \Phi(\theta_T, \theta),$$

або

$$\Phi_T(\theta_T, \theta)(z_T(\theta_T, \theta) - \frac{1}{2}) \geq 0. \tag{49}$$

Нехай $B_T(\theta) \in \Theta^c$ - борелева множина та $\theta \notin B_T^c(\theta)$. Якщо $\theta_T \in B_T(\theta)$ і для будь-яких $\delta > 0$ та $\theta_1, \theta_2 \in \Theta^c$

$$\inf_{|\theta_1 - \theta_2| > \delta} \Phi_T(\theta_1, \theta_2) > 0,$$

тоді з (49) випливає, що

$$P\{\theta_T \in B_T(\theta)\} \leq P\{\sup_{\tau \in B_T^c(\theta)} z_T(\tau, \theta) \geq \frac{1}{2}\}. \tag{50}$$

Ця нерівність (50) є вихідною для отримання достатніх умов консистентності θ_T. Зокрема, якщо $B_T(\theta) = \Theta^c \cap \{\tau : |\tau - \theta| \geq \rho\}$, тоді зі збіжності правої частини (50) при $T \to \infty$ до нуля випливає, що для θ_T виконується

$$P\{|\theta_T - \theta| \geq \rho\} \xrightarrow[T \to \infty]{} 0.$$

Позначимо

$$v(R) = \{u \in \mathbb{R}^q : \|u\| < R\},$$

$$\Psi_T(u_1, u_2) = \int_0^T [g(t, \theta^0 + T^{\frac{1}{2}} d_T^{-1}(\theta^0) u_1) - g(t, \theta^0 + T^{\frac{1}{2}} d_T^{-1}(\theta^0) u_2)]^2 \, dt.$$

Для будь-якого фіксованого $\theta^0 \in \Theta$ функцію $\Psi_T(u_1, u_2)$ будемо розглядати на множині $U_T(\theta^0) \times U_T(\theta^0), \ U_T(\theta^0) = T^{-\frac{1}{2}} d_T(\theta^0)(\Theta^c - \theta^0)$.

Стосовно функції регресії g припустимо наступне.

D. Для будь-яких $\varepsilon > 0$ та $R > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon, R) > 0$ таке, що

$$\sup_{\substack{u_1,u_2 \in U_T(\theta^0)\cap v^c(R),\\ \|u_1-u_2\|\le\delta}} T^{-1}\Psi_T(u_1,u_2) \le \varepsilon. \tag{51}$$

E. Для деякого $R_0 > 0$ та будь-якого $\rho \in (0, R_0)$ існують $a = a(R_0) > 0$ та $b = b(\rho, R_0) > 0$ такі, що

$$\inf_{u\in U_T(\theta^0)\cap(v^c(R_0)\setminus v(\rho))} T^{-1}\Psi_T(u,0) \ge b; \tag{52}$$

$$\inf_{u\in U_T(\theta^0)\setminus v^c(R_0)} T^{-1}\Psi_T(u,0) \ge 4B(0) + a. \tag{53}$$

У лемі 1 було доведено, що за умови ***A***

$$E(v_T^* - B(0))^2 = O(T^{-1}). \tag{54}$$

Щодо доведення наступного твердження, див. роботу A.V. Ivanov, N.N. Leonenko, I.V. Orlovskyi [4].

Лема 3. *За умови* ***A*** *для будь-яких* $\theta_1, \theta_2 \in \Theta^c$

$$Ew_T^4(\theta_1,\theta_2) \le c\Phi_T^2(\theta_1,\theta_2). \tag{55}$$

Доведення. З формули (8)

$$Ew_T^4(\theta_1,\theta_2) = \int\limits_{[0,T]^4} c_4(t_1,t_2,t_3,t_4)\prod_{i=1}^{4}(g(t_i,\theta_1) - g(t_i,\theta_2))\, dt_1\, dt_2\, dt_3\, dt_4 +$$

$$+3\left(\int\limits_0^T\int\limits_0^T B(t_1-t_2)(g(t_1,\theta_1)-g(t_1,\theta_2))(g(t_2,\theta_1)-g(t_2,\theta_2))\, dt_1\, dt_2\right)^2 =$$

$$= I_7 + 3I_8^3.$$

За умови $\boldsymbol{A}$ і теореми Фубіні-Тонеллі

$$|I_8| \le \frac{1}{2}\int\limits_0^T\int\limits_0^T B(t_1-t_2)[(g(t_1,\theta_1)-g(t_1,\theta_2))^2+$$

$$+(g(t_2,\theta_1)-g(t_2,\theta_2))^2]\ dt_1\ dt_2 \le d_2\|\hat{a}\|_1^2,$$

$$\|\hat{a}\|_1 = \int\limits_{\mathbb{R}} |\hat{a}(t)|\ dt.$$

З іншого боку, за формулою (9)

$$|I_7| \le d_4\int\limits_{\mathbb{R}}\ ds\int\limits_{[0,T]^4}\prod_{i=1}^4 |(\hat{a}(t_i-s))(g(t_i,\theta_1)-g(t_i,\theta_2))|\ dt_1\ dt_2\ dt_3\ dt_4 \le$$

$$\le \frac{1}{2}d_4\int\limits_{[0,T]^4}\prod_{i=1}^4 |(\hat{a}(t_i-s))|[(g(t_1,\theta_1)-g(t_1,\theta_2))^2(g(t_2,\theta_1)-g(t_2,\theta_2))^2+$$

$$+(g(t_3,\theta_1)-g(t_3,\theta_2))^2(g(t_4,\theta_1)-g(t_4,\theta_2))^2]dt_1\ dt_2\ dt_3\ dt_4 = I_7^{(1)}+I_7^{(2)};$$

$$I_7^{(1)} = \frac{1}{2}d_4\int\limits_{\mathbb{R}}\ ds\int\limits_0^T\int\limits_0^T |\hat{a}(t_1-s)\hat{a}(t_2-s)|(g(t_1,\theta_1)-g(t_1,\theta_2))^2\cdot$$

$$\cdot(g(t_2,\theta_1)-g(t_2,\theta_2))^2 dt_1\ dt_2\int\limits_0^T\int\limits_0^T |\hat{a}(t_1-s)\hat{a}(t_2-s)|\ dt_3\ dt_4 \le$$

$$\le \frac{1}{4}d_4\|\hat{a}\|_1^2\int\limits_0^T\int\limits_0^T (g(t_1,\theta_1)-g(t_1,\theta_2))^2(g(t_2,\theta_1)-g(t_2,\theta_2))^2\cdot$$

$$\cdot \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \left[\hat{a}^2(t_1 - s) + \hat{a}^2(t_2 - s)\right] \right) \, dt_1 \, dt_2 \le \frac{1}{2} d_4 \|\hat{a}\|_1^2 \Phi_T^2(\theta_1, \theta_2).$$

Для інтеграла $I_7^{(1)}$ отримуємо ту саму оцінку. Отже, отримуємо нерівність (55) з $= d_4\|\hat{a}\|_1^2\|\hat{a}\|_2^2 + 3d_2^2\|\hat{a}\|_1^4$. $\square$

Наступну теорему для гауссівського стаціонарного процесу $\varepsilon(t)$ було доведено в роботі A.V. Ivanov, N.N. Leonenko [1].

Теорема 2. *Якщо виконано умови* $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{D}$ *та* $\boldsymbol{E}$, *то для будь-якого* $\rho > 0$

$$P\{\|T^{-\frac{1}{2}} d_T(\theta^0)(\theta_T - \theta^0)\| \ge \rho\} = O(T^{-1}) \qquad \text{при} \qquad T \to \infty.$$

Доведення. Нехай $\rho \in (0; R_0)$ фіксоване, числа R_0, b та a з умови $\boldsymbol{E}$.

Для зручності позначимо

$$u_T = T^{-\frac{1}{2}} d_T(\theta^0)(\theta_T - \theta^0),$$

$$z_T(u) = z_T(t, \theta^0 + T^{-\frac{1}{2}} d_T(\theta^0) u)$$

Для будь-якого $\theta^0 \in \Theta$ з нерівності (50) отримуємо

$$P\{\|u_T(\theta^0)\| \ge \rho\} \le P\{\sup_{u \in U_T(\theta^0) \setminus v^c(R_0)} z_T(u) \ge \frac{1}{2}\} +$$

$$+ P\{\sup_{u \in U_T(\theta^0) \cap (v^c(R_0) \setminus v(\rho))} z_T(u) \ge \frac{1}{2}\} = P_1 + P_2.$$

Використовуючи нерівність Коші-Буняковського, умову (53), нерівність Чебишова та умову (54) послідовно отримуємо:

$$\inf_{u \in U_T(\theta^0)\backslash v^c(R_0)} T^{-1}\Psi(u,0) - 4B(0) \geq a,$$

$$\frac{1}{4} \inf_{u \in U_T(\theta^0)\backslash v^c(R_0)} T^{-1}\Psi(u,0) - B(0) \geq \frac{a}{4},$$

$$v_T^* - B(0) \geq \frac{1}{4} \inf_{u \in U_T(\theta^0)\backslash v^c(R_0)} T^{-1}\Psi(u,0) - B(0) \geq \frac{a}{4},$$

$$v_T^* - B(0) \geq \frac{a}{4},$$

$$P_1 \leq P\{v_T^* \geq \frac{1}{4} \inf_{u \in U_T(\theta^0)\backslash v^c(R_0)} T^{-1}\Psi(u,0)\} \leq P\{v_T^* - B(0) \geq \frac{a}{4}\} = O(T^{-1}).$$

Нехай $F^{(1)}, \ldots, F^{(m)} \subset v^c(R_0)\backslash v(\rho)$ - замкнені множини, $\bigcup_{i=1}^m F^{(i)} = v^c(R_0)\backslash v(\rho)$, де діаметр кожного $F^{(i)}$ менше за δ, з умови $\boldsymbol{E}$ для будь-якого $\varepsilon > 0$ та $R_0 > 0, u_{(i)} \in F^{(i)} \bigcap U_T(\theta^0), i = \overline{1,m}.$

Тоді

$$P_2 \leq \sum_{i=1}^m P\{\sup_{u \in F^{(i)} \bigcap U_T(\theta^0)} z_T(u) \geq \frac{1}{2}\},$$

$$P\{\sup_{u \in F^{(i)} \bigcap U_T(\theta^0)} z_T(u) \geq \frac{1}{2}\} \leq P\{|z_T(u_{(i)})| \geq \frac{1}{4}\}+$$

$$+P\{\sup_{u_1,u_2 \in F^{(i)} \bigcap U_T(\theta^0)} |z_T(u_1) - z_T(u_2)| \geq \frac{1}{4}\} = P_3^{(i)} + P_4^{(i)}, \qquad i = \overline{1,m}.$$

За умови (52) та нерівності (55) маємо

$$P_3^{(i)} \leq c\Psi_T^{-2}(u_{(i)},0) \leq cb^{-2}T^{-2}, \qquad i = \overline{1,m}.$$

Зауважимо, що

$$|z_T(u_1) - z_T(u_2)| \leq |w_T(\theta^0 + T^{\frac{1}{2}}d_T^{-1}u_1, \theta)| \cdot |\Psi_T^{-1}(u_1,0) - \Psi_T^{-1}(u_2,0)|+$$

$$+\Psi_T^{-1}(u_2,0)_T(\theta^0+T^{\frac{1}{2}}d_T^{-1}u_1,\theta^0+T^{\frac{1}{2}}d_T^{-1}u_2)|,$$

$$|\Psi_T^{-1}(u_1,0)-\Psi_T^{-1}(u_2,0)|\leq$$

$$\leq 2^{\frac{1}{2}}\Psi_T^{\frac{1}{2}}(u_1,u_2)\cdot(\Psi_T^{-\frac{1}{2}}(u_1,0)\Psi_T^{-1}(u_2,0)+\Psi_T^{-1}(u_1,0)\Psi_T^{-\frac{1}{2}}(u_2,0)).$$

Таким чином, для $u_1,u_2\in F^{(i)}\bigcap U_T^c(\theta)$ за умов (51) та (52) отримуємо

$$|z_T(u_1)-z_T(u_2)|\leq v_T^*\Psi_T^{\frac{1}{2}}(u_1,u_2)\cdot$$

$$\cdot[2^{\frac{1}{2}}(\Psi_T^{-\frac{1}{2}}(u_1,0)\Psi_T^{-1}(u_2,0)+\Psi_T^{-1}(u_1,0)\Psi_T^{-\frac{1}{2}}(u_2,0))+\Psi_T^{-1}(u_2,0)]=$$

$$=v_T^*\Psi_T^{\frac{1}{2}}(u_1,u_2)[2^{\frac{1}{2}}\Psi_T^{-\frac{1}{2}}(u_1,0)\Psi_T^{-1}(u_2,0)(1+\Psi_T^{-\frac{1}{2}}(u_1,0))+\Psi_T^{-1}(u_2,0)]=$$

$$=v_T^*\Psi_T^{\frac{1}{2}}(u_1,u_2)((1+2^{\frac{3}{2}})\Psi_T^{-1}(u_2,0)+2^{\frac{1}{2}}\Psi_T^{-\frac{1}{2}}(u_1,0)\Psi_T^{-\frac{1}{2}}(u_2,0))\cdot T^{\frac{1}{2}}.$$

З умови (51) та (52)

$$\sup_{\substack{u_1,u_2\in U_T(\theta^0)\cap v^c(R),\\ |u_1-u_2|\leq\delta}} T^{-\frac{1}{2}}\Psi_T^{\frac{1}{2}}(u_1,u_2)\leq\varepsilon^{\frac{1}{2}};$$

$$\inf_{u\in U_T(\theta^0)\cap(v^c(R_0)\setminus v(\rho))} T\Psi^{-1}(u,0)\leq b^{-1}.$$

Отже, для $u_1,u_2\in F^{(i)}\bigcap U_T(\theta^0), i=\overline{1,m}$

$$|z_T(u_1)-z_T(u_2)|\leq(1+2^{\frac{3}{2}})v_T^*\varepsilon^{\frac{1}{2}}b^{-1}.$$

Тоді $P_4^{(i)}=O(T^{-1})$, якщо ε обране так, що $b^2/16(9+4\sqrt{2})\varepsilon>B(0)$. Таким чином, згрупувавши оцінки $P_1,P_2,P_3^{(i)},\ P_4^{(i)}, i=\overline{1,m}$, отримаємо твердження теореми.

$\square$

4 Узагальнення теореми Дженріча

У роботі [3] Р.Дженріч довів для класичної регресійної моделі (43) теорему про сильну консистентність ОНК θ_n невідомого параметра $\theta^0 \in \Theta$, де $\Theta \subset \mathbb{R}^q$ є відкритою обмеженою множиною. Введемо умову цієї теореми.

***F*.**

$$\sup_{\theta_1, \theta_2 \in \Theta^c} |n^{-1}\varphi_n(\theta_1, \theta_2) - \varphi(\theta_1, \theta_2)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \tag{56}$$

де функція $\varphi(\theta_1, \theta_2) \geq 0$ є неперервною на $\Theta^c \times \Theta^c$, причому $\varphi(\theta_1, \theta_2) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $\theta_1 = \theta_2$.

Теорема (Дженріч)**.** *За умови* $\boldsymbol{F}$ *ОНК* θ_T *є сильно консистентною оцінкою параметра* $\theta^0 \in \Theta$*, тобто*

$$\theta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \theta^0 \qquad \textit{м.н.} \tag{57}$$

У цьому розділі отримано одне узагальнення теореми Дженріча для ОНК θ_T в моделі спостережень (1). Зауважимо, що для моделі (43) Теорему Дженріча було узагальнено в [16].

Припустимо, що в моделі (1) параметрична множина ще й обмежена, та для будь-якого $\theta \in \Theta$ існують такі константи $\underline{k}_i(\theta) > 0$ та $\overline{k}_i(\theta) < \infty, i = \overline{1, q}$, що

$$\overline{k}_i(\theta) \leq \varliminf_{T\to\infty} T^{-\frac{1}{2}} d_{iT}(\theta) \leq \varlimsup_{T\to\infty} T^{-\frac{1}{2}} d_{iT}(\theta) \leq \overline{k}_i(\theta). \tag{58}$$

У цьому випадку при доведенні консистентності ОНК параметра θ у моделі (1) зникає потреба у нормуванні ОНК вигляду $T^{-\frac{1}{2}} d_T(\theta)$ в умовах відповідної теореми та її доведення.

Введемо потрібні нам умови.

***G*.** Для будь-яких $r > 0$ таких, що $(\Theta^c - \theta) \backslash v(r) \neq \varnothing$, та $\theta^0 \in \Theta$ існує число $\rho = \rho(r, \theta^0) > 0$ таке, що

$$\inf_{u \in (\Theta^c - \theta^0) \backslash v(r)} T^{-1} \Phi_T(\theta^0 + u, \theta^0) \geq \rho. \tag{59}$$

***H*.** Існує константа $c_0 < \infty$ така, що для $T > T_0$ рівномірно за $\theta_1, \theta_2 \in \Theta^c$

$$T^{-1}\Phi_T(\theta_1, \theta_2) \le c_0\|\theta_1 - \theta_2\|^2. \tag{60}$$

Теорема 3. *Нехай виконано умови* $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{G}$ *та* $\boldsymbol{H}$. *Тоді ОНК* θ_T *є сильно консистентною, тобто*

$$\theta_T \xrightarrow[T\to\infty]{} \theta^0 \qquad \text{м.н.} \tag{61}$$

Доведення. За означенням ОНК θ_T, яке ми вже писали вище, м.н.

$$v_T^* \ge T^{-1}Q_T(\theta_T) = v_T^* - 2T^{-1}w_T(\theta_T, \theta^0) + T^{-1}\Phi_T(\theta_T, \theta^0),$$

або

$$T^{-1}\Phi_T(\theta_T, \theta^0) - 2T^{-1}w_T(\theta_T, \theta^0) \le 0 \qquad \text{м.н.} \tag{62}$$

Покажемо, для довільного фіксованого $\tau \in \Theta^c$

$$T^{-1}w_T(\tau, \theta^0) \xrightarrow[T\to\infty]{} 0 \qquad \text{м.н.} \tag{63}$$

Очевидно,

$$E(T^{-1}w_T(\tau, \theta^0))^2 = E(T^{-1}\int\limits_0^T \varepsilon(t)(g(t,\tau) - g(t,\theta^0))\,dt)^2 =$$

$$= T^{-2}\int\limits_0^T\int\limits_0^T B(t-s)((g(t,\tau) - g(t,\theta^0))((g(s,\tau) - g(t,\theta^0))\,dt\,ds \le$$

$$\le \frac{1}{2}T^{-2}\int\limits_0^T\int\limits_0^T |B(t-s)|(((g(t,\tau) - g(t,\theta^0))^2 + ((g(s,\tau) - g(s,\theta^0))^2)\,dt\,ds \le$$

$$\le T^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}} |B(t)|\,dt(T^{-1}\Phi_T(\tau, \theta^0)). \tag{64}$$

Покажемо, що $B \in L_1(\mathbb{R})$. Дійсно, за умови $\boldsymbol{A}$ та формули (9) випливає, що

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |B(t)|\ dt = d_2 \int\limits_{\mathbb{R}} \left| \int\limits_{\mathbb{R}} \hat{a}(t+s)\hat{a}(s)\ ds \right|\ dt \leq$$

$$\leq d_2 \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} \left(|\hat{a}(t+s)|\, |\hat{a}(s)| \right)\ ds\ dt =$$

$$= d_2 \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} |\hat{a}(t+s)|\ dt \right) |\hat{a}(s)|\ ds = d_2 \|\hat{a}\|^2_{L_1}. \tag{65}$$

При отриманній нерівності (65) ми скористались теоремою Фубіні-Тонеллі. Таким чином, повертаючись до нерівності (64) отримуємо за допомогою $\boldsymbol{H}$

$$E(T^{-1} w_T(\tau, \theta^0))^2 \leq (d_2 \|\hat{a}\|^2_{L_1} c_0 \sup_{\theta_1, \theta_2 \in \Theta^c} \|\theta_1 - \theta_2\|^2) T^{-1} = O(T^{-1}). \tag{66}$$

Розглянемо послідовність $T_n = n^2,\ n \geq 1$. За (66) маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} E(T_n^{-1} w_{T_n}(\tau, \theta^0))^2 < \infty, \tag{67}$$

тобто для довільного фіксованого $\tau \in \Theta^c$

$$T_n^{-1} w_{T_n}(\tau, \theta^0) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \qquad \text{м.н.} \tag{68}$$

Для отримання (63) доведемо, що послідовність в.в

$$\eta_n = \sup_{T_n \leq T < T_{n+1}} \left| T^{-1} w_T(\tau, \theta^0) - T_n^{-1} w_{T_n}(\tau, \theta^0) \right| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \qquad \text{м.н.} \tag{69}$$

Нехай $T \in [T_n, T_{n+1})$. Тоді з використанням позначення $\Delta(t) = g(t, \tau) - g(t, \theta^0)$, одержуємо

$$\left| T^{-1} \int_0^T \varepsilon(t) \Delta(t)\ dt - T_n^{-1} \int_0^T \varepsilon(t) \Delta(t)\ dt \right| =$$

$$= \left|(T^{-1} - T_n^{-1}) \int_0^{T_n} \varepsilon(t)\Delta(t)\ dt + T^{-1} \int_{T_n}^{T} \varepsilon(t)\Delta(t)\ dt\right| \leq$$

$$\leq \frac{T_{n+1} - T_n}{T_n} T_n^{-1} \left|w_{T_n}(\tau, \theta^0)\right| + \left(T_n^{-1} \int_{T_n}^{T_{n+1}} \varepsilon^2(t)\ dt\right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left(T_n^{-1} \int_{T_n}^{T_{n+1}} \left(g(t,\tau) - g(t,\theta^0)\right)^2\ dt\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (70)$$

Завдяки (68) і тому, що

$$\frac{T_{n+1} - T_n}{T_n} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2} = \frac{2n+1}{n^2} = O(n^{-1}),$$

1-й доданок правої частини нерівності (70) прямує до нуля м.н. З іншого боку, за лемою 1

$$T_n^{-1} \int_{T_n}^{T_{n+1}} \varepsilon^2(t)\ dt = \frac{T_{n+1}}{T_n}\ v^*_{T_{n+1}} - v^*_{T_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \text{м.н.}$$

Аналогічно за умови $\boldsymbol{H}$

$$T_n^{-1} \int_{T_N}^{T_{n+1}} \left(g(t,\tau) - g(t,\theta^0)\right)^2\ dt \leq \left(\frac{T_{n+1}}{T_n}\right) T_{n+1}^{-1} \Phi_{Tn+1}(\tau, \theta^0) \leq$$

$$\leq c_0 \sup_{\theta_1,\theta_2 \in \Theta^c} \|\theta_1 - \theta_2\|^2 \left(\frac{T_{n+1}}{T_n}\right).$$

Таким чином, і 2-й доданок правої частини нерівності (70) збігається до нуля м.н., звідки і випливає (63).

Розглянемо довільну зліченну множину $\Theta' \subset \Theta^c$ всюди щільну в Θ^c. Нехай $\Omega' \subset \Omega$ подія повної ймовірності така, що для елементарних подій $w \in \Omega'$

$$T^{-1} w_T(\tau, \theta^0) \xrightarrow[T\to\infty]{} 0, \quad \tau \in \Theta', \quad v_T^* \xrightarrow[T\to\infty]{} B(0).$$

Нехай також для $T > T_0$ $\quad T^{-1}\Phi_T(\theta_1, \theta_2) \leq \varepsilon$ при $\|\theta_1 - \theta_2\| < \delta$. За умови $\boldsymbol{H}$ можна взяти $c_0\delta^2 \leq \varepsilon$. Зрозуміло, що

$$\sup_{\tau \in \Theta^c} \left(T^{-1} w_T(\tau, \theta^0)\right)^2 \leq 2(\max_{1 \leq i \leq m_\delta} \left|n^{-1} w_T(\tau_i, \theta^0)\right|^2 +$$

$$+\max_{1\le i\le m_\delta}\ \sup_{\tau\in v_{\tau_i}(\delta)\cap\Theta^c}\left|T^{-1}w_T(\tau_i,\tau)\right|^2), \tag{71}$$

де $v_{\tau_i}(\delta),\ i=\overline{1,m_\delta}$, є скінченне покриття $\Theta^c,\ \tau_i\in\Theta'$. Якщо $w\in\Omega'$, то для $T>T_0$

$$\max_{1\le i\le m_\delta}\left|T^{-1}w_T(\tau_i,\theta^0)\right|^2<\varepsilon,\ v_T^*<B(0)+\varepsilon. \tag{72}$$

Тепер, оскільки

$$\left|T^{-1}w_T(\tau_i,\tau)\right|^2\le T^{-1}\Phi_T(\tau_i,\tau)v_T^*,$$

то з умови $\boldsymbol{H}$ та тексту перед нерівністю (71) випливає, що 2-й доданок правої частини нерівності (71) при $T>T_0$ оцінюється зверху величиною $\varepsilon(B(0)+\varepsilon)$. Таким чином,

$$\sup_{\tau\in\Theta^c}\left|T^{-1}w_T(\tau,\theta^0)\right|^2\le 2\varepsilon(B(0)+\varepsilon+1), \tag{73}$$

та

$$\sup_{\tau\in\Theta^c}\left|T^{-1}w_T(\tau,\theta^0)\right|\xrightarrow[T\to\infty]{}0\qquad\text{м.н.} \tag{74}$$

У свою чергу, з (74) маємо

$$T^{-1}w_T(\theta_T,\theta^0)\xrightarrow[T\to\infty]{}0\qquad\text{м.н.} \tag{75}$$

Разом з (62) це означає, що

$$T^{-1}\Phi_T(\theta_T,\theta^0)\xrightarrow[T\to\infty]{}0\qquad\text{м.н.} \tag{76}$$

Покажемо, як із (76) та $\boldsymbol{G}$ випливає твердження теореми. Припустимо, що для елементарної події $w\in\Omega$

$$T^{-1}\Phi(\theta_T,\theta^0)\xrightarrow[T\to\infty]{}0,\quad\text{але }\theta_T\not\xrightarrow[T\to\infty]{}0.$$

Це означає, що існує $r>0$ та послідовність $T_k,\ k\ge 1$, така, що

$$\|\theta_{T_k}-\theta^0\|\ge r.$$

Для цієї послідовності за умови $\boldsymbol{G}$

$$T_k^{-1}\Phi_{T_k}(\theta_{T_k}(w), \theta^0) \geq \rho(r) > 0.$$

Прийшли до протиріччя.

$\square$

Висновки

У магістерській дисертації розглянуто нелінійну модель регресії з неперервним часом і випадковим шумом, який є лінійним Леві-керованим випадковим процесом.

Нами доведено:

1) теорему про сильну консистентність ОНК параметрів тригонометричної моделі регресії;

2) узагальнення теореми Малінво про слабку консистентність ОНК параметрів загальної моделі регресії у випадку необмеженої параметричної множини;

3) узагальнення теореми Дженріча про сильну консистентність ОНК у випадку обмеженої параметричної множини.

Природним напрямом подальших досліджень є отримання умов консистентності періодограмних оцінок параметрів тригонометричної моделі регресії з лінійним Леві-керованим шумом. Варто також отримати властивість консистентності ОНК для більш широкого різномаїття функцій регресії, ніж в цій дисертації, для моделі з лінійним Леві-керованим випадковим шумом.

Список використаних джерел

[1] Ivanov A.V., Leonenko N.N. Statistical Analysis of Random Fields. Kluwer Acad. Publ. Dordrecht. 1989

[2] Malinvaud E. The consistency of nonlinear regression. Ann. Math. Statist. Vol 41. P. 953-969. 1970.

[3] Jennrich R.I. Non-linear least squares estimators. Ann. Math. Statist. 1969. Vol 40, P. 633-643.

[4] Ivanov A.V., Leonenko N.N., Orlovskyi I.V. On the Whittle estimator for linear random noise spectral density parameter in continuous-time nonlinear regression models, Stat. Inference Stoch. Processes 2020. Vol. 23 P. 129-169.

[5] Rajput B., and Rosinski J. Spectral representations of infinitely divisible processes, Prob. Theory Rel. Fields. 1989. 82. P. 451-487.

[6] Anh V.V., Heyde C.C., Leonenko N.N. Dynamic models of long-memory processes driven by Lévy noise.J. Appl. Prob. 2002. Vol. 39. No. 4. P. 780-747.

[7] Серебренников М.Г., Первозванский А.А. Выявление скрытых периодичностей. Москва: Наука 1965, 244 с.

[8] Artis M., Hoffman M., Nachane D., Toro J. The detection of hidden periodicities: a comparison of alternative methods. EUI Working paper ECO, 10, 2004, 26p.

[9] Quinn B.G., Hannan E.J. The estimation and tracking of frequency Cambridge Univ. Press. 2001. 280p.

[10] Whitle P. On the estimation of a time series harmonic components and covariance structure, Trabajos Estadistica. 1952. Vol. 3. P. 43-57.

[11] Walker A.M. On the estimation of a harmonic component in a time series with stationary dependent residuals, Adv. Appl. Probab. 1973. Vol. 5. Iss.2. 217-241.

[12] Hannan E.J. The estimation of frequency, J.Appl. Probab., 1973. Vol. 10. No.3. P. 510-519.

[13] Ivanov A.V. A solution of the problem of detecting hidden periodicities, Theor. Probab. Math. Statist. 1980. Vol. 20, P. 51-68.

[14] Ivanov A.V. Consistency of the least squares estimator of the amplitudes and angular frequencies of a sum of harmonic oscillations i models with long-range dependence, Theor. Probab. Math. Statist. 2010. Vol. 80. P. 61-69.

[15] Ivanov A.V., Leonenko N.N., Ruiz-Medina M.D., Zhurakovsky B.M. Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics. 2015. Vol. 49, Iss.1.P. 156-186.

[16] Ivanov A.V. Asymptotic Theory of Nonlinear Regression. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht. 1997.