НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
Фізико-математичний факультет
Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

«На правах рукопису»
УДК 519.21

До захисту допущено
Завідувач кафедри
______ Олег КЛЕСОВ
«14» травня 2021 р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра
за освітньо-науковою програмою «Страхова та фінансова математика»
зі спеціальності 111 «Математика»
на тему: «Асимптотичні властивості оцінок параметрів нелінійної регресії з лінійним випадковим шумом»

Виконав:
студент II курсу магістратури, групи ОМ-91мн
Середенко Іван Олександрович ________
Керівник:
Доктор ф.-м. наук, проф.
Іванов Олександр Володимирович ________
Рецензент:
Професор кафедри дослідження операцій
Київського національного університету
імені Тараса Шевченка
д. ф.-м. н., с. н. с.
Мацак Іван Каленикович ________

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студент ________

Київ - 2021

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Фізико-математичний факультет
Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Спеціальність – 111 «Математика»

Освітньо-наукова програма – «Страхова та фінансова математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри
______ Олег КЛЕСОВ
«04» лютого 2021 р.

ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію студенту
Середенку Івану Олександровичу

1.Тема дисертації «Асимптотичні властивості оцінок параметрів нелінійної регресії з лінійним випадковим шумом», науковий керівник дисертації Іванов Олександр Володимирович, доктор фізико-математичних наук, професор, затверджені наказом по університету від «26» березня 2021 р. № 901-с.

2. Термін подання студентом дисертації 13 травня 2021 року.

3. Об'єкт дослідження – тригонометрична модель регресії з неперервним часом спостереження.

4. Предмет дослідження – асимптотична нормальність оцінки найменших квадратів параметрів нелінійної функції регресії з лінійним випадковим шумом.

5. Перелік завдань, які потрібно розробити:

1) довести теорему редукції;

2) довести теорему єдиності для оцінки найменших квадратів;

3) довести асимптотичну нормальність оцінки найменших квадратів параметрів загальної нелінійної та тригонометричної моделей регресії.

6. Орієнтовний перелік ілюстративного матеріалу – 23 слайди.

7. Орієнтовний перелік публікацій – 1 публікація за темою магістерської дисертації:

1) Середенко І.О. Асимптотичні властивості оцінок параметрів нелінійної регресії з лінійним випадковим шумом // Десята всеукраїнська наукова конференція молодих математиків. Нац. техн. ун-т України «КПІ ім. І. Сікорського». – Київ. – 2021. – с. 41 - 42.

8. Дата видачі завдання «04» лютого 2021 року.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1.	Ознайомлення з літературою	05.02.2021-18.02.2021	Виконано
2.	Доведення теореми редукції	19.02.2021-11.03.2021	Виконано
3.	Доведення асимптотичної єдиності оцінки найменших квадратів	12.03.2021-31.03.2021	Виконано
4.	Доведення асимптотичної нормальності оцінки найменших квадратів	01.04.2021-16.04.2021	Виконано
5.	Оформлення роботи	17.04.2021-12.05.2021	Виконано

Студент Іван СЕРЕДЕНКО

Науковий керівник дисертації Олександр ІВАНОВ

Реферат

Магістерська дисертація: 48 сторінок, 23 слайди для проектора, 19 першоджерел.

В роботі досліджується асимптотична нормальність оцінки найменших квадратів парарметрів нелінійної моделі регресії з лінійним випадковим шумом, керованим процесом Леві.

Мета дослідження полягає в отриманні ряду умов на функцію регресії та випадкового процесу, що задає випадковий шум, за яких оцінка найменших квадратів є асимптотично нормальною.

Завданням магістерської дисертації є доведення асимптотичної нормальності оцінки найменших квадратів параметрів нелінійної, зокрема, тригонометричної моделі регресії. Об'єктом дослідження є нелінійна модель регресії з лінійним випадковим шумом та неперервним часом спостереження. Предметом дослідження є асимптотична нормальність оцінки найменших квадратів параметрів нелінійної функції регресії.

Для досягнення вказаної мети було використано такі поняття, як Леві-керований лінійний стохастичний процес, нормована оцінка найменших квадратів, спектральна міра функції регресії, центральна гранична теорема для зваженого інтегралу від випадкового шуму, а також теорема Брауера про нерухому точку.

Вперше в нелінійній моделі регресії з Леві-керованим лінійним випадковим шумом доведено асимптотичну нормальність оцінки найменших квадратів невідомих параметрів, що визначає важливість, новизну та актуальність отриманих результатів у статистиці випадкових процесів.

Ключові слова: нелінійна модель регресії, функція регресії, лінійний випадковий шум, Леві-керований процес, коваріаційна функція, спектральна щільність, оцінка найменших квадратів, теорема редукції, спектральна міра функції регресії, асимптотична єдиність, асимптотична нормальність,

центральна гранична теорема, теорема Брауера про нерухому точку.

Abstract

Master degree thesis contains 48 pages, 23 slides for projector, 19 primary sources.

The least squares estimator asymptotic normality of the parameters of a nonlinear regression model with Levy-driven continuous-time linear random noise is investigated.

The goal of the study is to obtain a number of conditions for the regression function and the random noise process, under which the least squares estimator is asymptotically normal.

The task of the master thesis is to prove the least squares estimator of the parameters of a nonlinear, in particular, trigonometric regression model asymptotic normality. The object of the study is a nonlinear regression model with linear random noise and continuous observation time. The subject of the study is the least squares estimator of the parameters of the nonlinear regression function asymptotic normality.

To achieve this goal, we used such concepts as Levi-driven continuous stochastic process, normalized least squares estimator, spectral measure of the regression function, central limit theorem for the weighted integral of a random noise, and Brauer fixed point theorem.

For the first time in nonlinear regression model with Levi-driven linear random noise, the least squares estimator of unknown parameters asymptotic normality was proved, which determines obtained results importance, novelty and relevance in statistics of stochastic processes.

Key words: nonlinear regression model, regression function, linear random noise, Levi-driven process, covariance function, spectral density, least squares estimator, reduction theorem, spectral measure of a regression function, asymptotic uniqueness, asymptotic normality, central limit theorem, Brauer fixed point theorem.

Зміст

Вступ

В роботі розглядається нелінійна модель регресії з неперервним часом спостереження та Леві-керованим лінійним випадковим шумом.

Ми розглянемо таку проблему регресійного аналізу як оцінювання амплітуд та кутових частот суми гармонічних коливань, прихованих наявністю адитивного лінійного випадкового шуму. Описану регресійну модель називають тригонометричною, а вказану проблему – задачею про виявлення прихованих періодичностей.

Асимптотична поведінка оцінок найменших квадратів (ОНК) тригонометричних регресійних моделей з неперервним часом та різними умовами щодо випадкового шуму вивчалась у роботах П. Уітла [1], А. М. Уолкера [2], Е. Дж. Хеннана [3], А. Я. Дороговцева [4], П. С. Кнопова [5], О. В. Іванова [6], О. В. Іванова, Н. Н. Леоненка, М. Д. Руіз-Медини, Б. М. Жураковського [7] та інших.

В ході нашого дослідження було проаналізовано асимптотичну нормальність ОНК параметрів тригонометричної регресійної моделі з лінійним випадковим шумом. Ми спирались на статті [7] та О. В. Іванов, Н. Н. Леоненко, І. В. Орловський [8]. На відміну від нашої нелінійної регресійної моделі з лінійним випадковим шумом, у статті [7] описано асимптотичні властивості ОНК параметрів нелінійної регресійної моделі з випадковим шумом, який є локальним нелінійним перетворенням гауссівського часового ряду. Робота [8] містить постановку задачі статистичного оцінювання з лінійним Леві-керованим випадковим шумом та деякі потрібні нам результати.

Магістерська дисертація налічує 4 розділи.

У 1-му розділі розглянуто нелінійну, зокрема, тригонометричну, регресійну модель, формулюється умова на випадковий шум, потрібна для доведення асимптотичної нормальності ОНК параметрів моделі, а також, дається означення ОНКв сенсі Уолкера Walker A .M. [2].

У 2-му розділі розглянуто умови на функцію регресії, потрібні для доведення теореми редукції (теорема 1), яка дозволяє замінити вивчення асимптотичного розподілу ОНК в нелінійній моделі вивченням асимптотичного розподілу ОНК в деякій віртуальній лінійній моделі регресії.

У 3-му розділі доведено теорему єдиності (теорема 2), яка стверджує, що асимптотично ОНК є єдиною за ймовірністю, якщо вона є слабко консистентною, і є асимптотично єдиною з ймовірністю 1, коли ОНК є сильно консистентною оцінкою невідомого параметра θ.

У 4-му розділі сформульовано центральну граничну теорему (теорема 3) про асимптотичну нормальність зваженого інтегралу від Леві-керованого лінійного випадкового процесу [8]. Крім цього, застосовані результати попередніх розділів, які дозволяють разом зі вказаною центральною граничною теоремою, довести теорему про асимптотичну нормальність ОНК параметрів загальної нелінійної моделі регресії (теорема 4).

Результати проведеного дослідження доповідались на Десятій всеукраїнській науковій конференції молодих математиків [9].

1 Постановка задачі

Розглянемо регресійну модель

$$X(t) = g(t, \theta^0) + \varepsilon(t), \ \ t \geq 0, \tag{1}$$

де $g : (0; \infty) \times \Theta_\gamma \to \mathbb{R}$ – неперервна функція, $\Theta \subset \mathbb{R}^q$ – відкрита опукла множина, $\Theta_\gamma = \bigcup\limits_{\|e\| \leq 1} (\Theta + \gamma e), \gamma > 0, \ \ \theta^0 \in \Theta$ – істинне значення невідомого параметра, ε – випадковий шум, описаний нижче.

Позначимо $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ – повний ймовірнісний простір, на якому задано випадковий процес, що розглянуто в роботі.

Процес Леві $L(t), \ \ t \geq 0$, – це стохастичний процес з незалежними та стаціонарними приростами, м. н. неперервними справа траєкторіями та з лівими границями (cadlag), а також для якого $L(0) = 0$.

Позначимо через (a, b, π) характеристичну трійку процесу Леві $L(t)$, $t \geq 0$. Тоді для всіх $t \geq 0$

$$\log \mathbb{E} \exp \{izL(t)\} = tk(z)$$

для $z \in \mathbb{R}$, де

$$k(z) = iaz - \frac{1}{2} bz^2 + \int\limits_{\mathbb{R}} \left(e^{izu} - 1 - iz\tau(u) \right) \pi(du), z \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

причому $a \in \mathbb{R}, \ \ b \geq 0$ та

$$\tau(u) = \begin{cases} u, |u| \leq 1, \\ \frac{u}{|u|}, |u| > 1. \end{cases}$$

Міра Леві π в (2) – міра на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ така, що $\pi(\{0\}) = 0$ та

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \min(1, u^2)\, \pi(du) < \infty.$$

Відомо, що $L(t)$ має скінченний p-ий момент для $p > 0$ ($\mathbb{E}|L(t)|^p < \infty$) тоді й лише тоді, коли

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |u|^p \, \pi(du) < \infty,$$

та $L(t)$ має скінченний експоненціальний момент p-го порядку, $p > 0$ $\left(\mathbb{E}e^{pL(t)} < \infty\right)$ тоді й лише тоді, коли

$$\int\limits_{|u|\geq 1} e^{pu}\,\pi(du) < \infty. \tag{3}$$

Якщо $L(t),\ t \geq 0,$ — процес Леві з характеристиками (a, b, π), тоді $-L(t),\ t \geq 0,$ є також процесом Леві з характеристиками $(-a, b, \tilde{\pi})$, де $\tilde{\pi}(A) = \pi(-A)$ для кожної борелевої множини A.

Розглянемо модифікацію процесу Леві $-L(t)$, з траекторіями, які м. н. неперервні зліва та мають границі справа (caglad), і позначимо цю модифікацію $-\tilde{L}(t),\ \ t \geq 0$. Тоді розглянемо двосторонній процес Леві $L(t),\ \ t \in \mathbb{R}$, такий, що для $t \geq 0$ він дорівнює $L(t)$, а для $t < 0$, є незалежною копією процесу $-\tilde{L}(t)$.

Нехай $\hat{a} : R_+ \to R$ – вимірна функція. Розглянемо Леві-керований лінійний випадковий процес

$$\varepsilon(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \hat{a}(t-s)\, dL(s),\ \ t \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Для каузального процесу (4) $\hat{a}(t) = 0,\ \ t < 0$.

Припустимо, що

$$\hat{a} \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R}),\ \ \mathbb{E}L(1) = 0. \tag{5}$$

За умови (5) та

$$\int\limits_{\mathbb{R}} u^2\,\pi(du) < \infty,$$

інтеграл в (4) коректно визначений в $L_2(\Omega)$ в сенсі стохастичної інтегрованості, введеної в роботі Б. Райпута та Я. Розинського [10].

Часто в якості ядра в (4) обирають ядра гамма-типу [7]:

1. $\hat{a} = t^{\alpha} e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{[0;+\infty)}(t), \lambda > 0, \alpha > -\frac{1}{2}$;

2. $\hat{a} = e^{-\lambda t}\mathbb{1}_{[0;+\infty)}(t), \lambda > 0$ (процес Орнштейна - Уленбека);

3. $\hat{a} = e^{-\lambda t}, \lambda > 0$ (збалансований процес Орнштейна - Уленбека).

A. Процес $\{\varepsilon(t),\ t \in \mathbb{R}\}$, заданий в (4), є вимірним лінійним процесом, де двосторонній процес Леві $L(t)$ та функція $\hat{a}$ задовольняють умови (3) та (5).

З умови A випливає, що для будь-якого $r \geq 1$

$$\log \mathbb{E} \exp\left\{i \sum_{j=1}^{r} z_j \varepsilon(t_j)\right\} = \int_{\mathbb{R}} k\left(\sum_{j=1}^{r} z_j \hat{a}(t_j - s)\right) ds. \tag{6}$$

З формули (6) видно, що стохастичний процес ε стаціонарний.

Позначимо

$$m_r(t_1, ..., t_r) = \mathbb{E}\varepsilon(t_1)...\varepsilon(t_r),$$

$$c_r(t_1, ..., t_r) = i^{-r} \frac{\partial^r}{\partial z_1 ... \partial z_r} \log \mathbb{E} \exp\left\{i \sum_{j=1}^{r} z_j \varepsilon(t_j)\right\}\Big|_{z_1 = ... = z_r = 0}$$

моментні та кумулянтні функції відповідно порядків $r \geq 1$ процесу ε. Тоді $m_2(t_1, t_2) = B(t_1 - t_2)$, де

$$B(t) = d_2 \int_{\mathbb{R}} \hat{a}(t + s)\hat{a}(s)\, ds, \ \ t \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

– коваріаційна функція процесу ε, та моментна функція 4-го порядку має вигляд

$$m_4(t_1, t_2, t_3, t_4) = c_4(t_1, t_2, t_3, t_4) + m_2(t_1, t_2)m_2(t_3, t_4) +$$

$$+ m_2(t_1, t_3)m_2(t_2, t_4) + m_2(t_1, t_4)m_2(t_2, t_3). \tag{8}$$

Явне представлення кумулянтів стохастичного процесу ε може бути отримано з (6) прямими обчисленнями:

$$c_r(t_1, ..., t_r) = d_r \int_{\mathbb{R}} \prod_{j=1}^{r} \hat{a}(t_j - s)\, ds, \tag{9}$$

де d_r — r-ий кумулянт випадкової величини $L(1)$. Зокрема,

$$d_2 = \mathbb{E}L^2(1) = -k^{(2)}(0), \ \ d_4 = \mathbb{E}L^4(1) - 3(\mathbb{E}L^2(1))^2.$$

За умови A, спектральні щільності стаціонарного процесу ε всіх порядків існують та задаються формулами

$$f_r(\lambda_1, ..., \lambda_{r-1}) = (2\pi)^{-r+1} d_r \cdot a\left(-\sum_{j=1}^{r-1} \lambda_j\right) \cdot \prod_{j=1}^{r-1} a(\lambda_j), \tag{10}$$

де $a \in L_2(\mathbb{R}), \ \ a(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda t} \hat{a}(t)\, dt, \ \ \lambda \in \mathbb{R}$, якщо комплекснозначні функції $f_r \in L_1(\mathbb{R}^{r-1}), \ \ r > 2$, [11].

Для $r = 2$, щільність 2-го порядку має вигляд:

$$f(\lambda) = f_2(\lambda) = \frac{1}{2\pi} d_2 a(\lambda) a(-\lambda) = \frac{1}{2\pi} d_2 |a(\lambda)|^2.$$

Розглянемо тригонометричну функцію регресії

$$g(t, \theta^0) = \sum_{k=1}^{N} (A_k^0 \cos \varphi_k^0 t + B_k^0 \sin \varphi_k^0 t), \tag{11}$$

$$\theta^0 = (\theta_1^0, \theta_2^0, \theta_3^0, ..., \theta_{3N-2}^0, \theta_{3N-1}^0, \theta_{3N}^0) = (A_1^0, B_1^0, \varphi_1^0, ..., A_N^0, B_N^0, \varphi_N^0),$$

$$(C_k^0)^2 = (A_k^0)^2 + (B_k^0)^2 > 0, k = \overline{1, N}.$$

Розташуємо частоти $\varphi^0 = (\varphi_1^0, ..., \varphi_N^0)$ у порядку зростання та розглянемо монотонно неспадну сім'ю відкритих множин $\Phi_T, \ \ T > T_0 > 0$, таку, що

$$\bigcup_{T > T_0} \Phi_T = \Phi(\underline{\varphi}, \overline{\varphi}),$$

де

$$\Phi(\underline{\varphi}, \overline{\varphi}) = \{\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_N) \in \mathbb{R}^N : 0 \leq \underline{\varphi} < \varphi_1 < ... < \varphi_N < \overline{\varphi} < \infty\}.$$

Припустимо, що множини Φ_T містять істинне значення параметра φ^0 та задовольняють наступним умовам:

$$\lim_{T \to \infty} \inf_{\substack{1 \leq j < k \leq N \\ \varphi \in \Phi_T}} T(\varphi_k - \varphi_j) = +\infty, \tag{12}$$

$$\lim_{T\to\infty}\inf_{\varphi\in\Phi_T} T\varphi_1 = +\infty. \qquad (13)$$

Умови (12) та (13) називають умовами розрізнення параметрів тригонометричної регресійної моделі (1), (11).

Якщо $\underline{\varphi} > 0$, то умова (13) виконується. У випадку $\underline{\varphi} = 0$ та $\Phi_T \subset \subset \Phi(0, \overline{\varphi})$ для виконання (12), (13) достатньо взяти, наприклад, параметричні множини Φ_T, для яких виконується

$$\inf_{\substack{1\le j<k\le N\\ \varphi\in\Phi_T}}(\varphi_k - \varphi_j) = T^{-1/2}, \quad \inf_{\varphi\in\Phi_T}\varphi_1 = T^{-1/2}.$$

Позначимо

$$Q_T(\theta) = \int_0^T (X(t) - g(t,\theta))^2\,dt.$$

Означення 1. *ОНК параметра $\theta^0 \in \Theta$ у сенсі Уолкера [2] називається випадковий вектор*

$$\hat{\theta}_T = (A_{1T}, B_{1T}, \varphi_{1T}, ..., A_{NT}, B_{NT}, \varphi_{NT}),$$

що мінімізує функціонал $Q_T(\theta)$ на множині параметрів $\Theta_T \subset \mathbb{R}^{3N}$, в якій амплітуди $A_k, B_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1, N}$, а кутові частоти $\varphi \in \Phi_T^c$, де Φ_T^c – замикання множини Φ_T.

2 Теорема редукції (лінеаризації)

Розглянемо загальну нелінійну регресійну модель (1) з випадковим шумом, який задовольняє умову A. Узагальнимо означення 1 для загальної моделі регресії (1).

Нехай $\Theta_T,\ T > T_0$, – монотонно неспадна сім'я відкритих множин, які містять істинне значення параметра θ^0 та таких, що

$$\bigcup_{T>T_0} \Theta_T = \Theta.$$

Означення 2. *ОНК невідомого параметра $\theta^0 = (\theta_1^0, \dots, \theta_q^0) \in \Theta$ за спостереженнями процесу $\{X(t),\ t \in [0,T]\}$ називається випадковий вектор $\hat{\theta}_T \in \Theta_T^c$, який має наступну властивість:*

$$Q_T(\hat{\theta}_T) = \inf_{\theta \in \Theta_T^c} Q_T(\theta).$$

Розглянемо наступні умови.

B1. Припустимо, що $g(t,\theta)$ двічі неперервно диференційовна за $\theta \in \Theta^c$. Позначимо

$$g_i(t,\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta_i} g(t,\theta), \quad g_{il}(t,\theta) = \frac{\partial^2}{\partial\theta_i \partial\theta_l} g(t,\theta),\ \ i,l = 1,...,q, \tag{14}$$

$$d_T(\theta) = diag(d_{iT}(\theta))_{i=1}^q,\ \ \theta \in \Theta^c, \quad d_{iT}^2(\theta) = \int_0^T g_i^2(t,\theta)\,dt,\ \ i = 1,...,q.$$

Зробимо додаткове припущення.

B2. Існують границі

$$\underline{\lim}_{T\to\infty} T^{-1} d_{iT}^2(\theta) > 0,\ \ \theta \in \Theta,\ \ i = 1,..,q. \tag{15}$$

Відмітимо, що границі в (15), в загальному випадку, можуть бути нескінченними. Також, покладемо

$$d_{il,T}^2(\theta) = \int_0^T g_{il}^2(t,\theta)\,dt, \theta \in \Theta^c,\ \ i,l = 1,...,q. \tag{16}$$

Розглянемо нормовану ОНК

$$\hat{u}_T = d_T(\theta^0)(\hat{\theta}_T - \theta^0) \tag{17}$$

та введемо наступні позначення:

$$h(t,u) = g(t,\theta^0 + d_T^{-1}(\theta^0)u),$$

$$h_i(t,u) = g_i(t,\theta^0 + d_T^{-1}(\theta^0)u),\ \ i = 1,...,q,$$

$$h_{il}(t,u) = g_{il}(t,\theta^0 + d_T^{-1}(\theta^0)u),\ \ i,l = 1,...,q,$$

$$V(R) = \{u \in \mathbb{R}^q : ||u|| < R\} \text{ – відкрита куля радіусу } R.$$

Ці позначення відповідають заміні змінних $u = d_T(\theta^0)(\theta - \theta^0)$. Літерою k будемо позначати додатні константи. Наступні припущення сформульовані для $R > 0,\ \ \theta \in \Theta$ та достатньо великого $T > T_0(R)$:

B3.

$$\textbf{(i)} \qquad \sup_{t\in[0,T]} \sup_{u\in V^c(R)} \frac{|h_i(t,u)|}{d_{iT}(\theta^0)} \le k_i(R)T^{-\frac{1}{2}}, \tag{18}$$

$$\textbf{(ii)} \qquad \sup_{t\in[0,T]} \sup_{u\in V^c(R)} \frac{|h_{il}(t,u)|}{d_{il,T}(\theta^0)} \le k_{il}(R)T^{-\frac{1}{2}}, \tag{19}$$

$$\textbf{(iii)} \qquad \frac{d_{il,T}(\theta^0)}{d_{iT}(\theta^0)d_{lT}(\theta^0)} \le \tilde{k}_{il}(R)T^{-\frac{1}{2}}, i,l = 1,...,q. \tag{20}$$

В умові B3 константи $k_i, k_{il}, \tilde{k}_{il},\ \ i,l = 1,...,q$, можуть залежати від істинного значення параметра $\theta^0 \in \Theta$.

Далі будемо використовувати такі позначення: $H(t;u_1,u_2) = h(t,u_1) - -h(t,u_2)$, $H_i(t;u_1,u_2) = h_i(t,u_1) - h_i(t,u_2), i = 1,...,q$. Позначимо також вектори $\Psi_T(u) = \left(\Psi_T^i(u)\right)_{i=1}^q$, з

$$\Psi_T^i(u) = \int_0^T \varepsilon(t)\frac{h_i(t,u)}{d_{iT}(\theta)}\,dt + \int_0^T H(t;0,u)\frac{h_i(t,u)}{d_{iT}(\theta)}\,dt, \tag{21}$$

та $L_T(u) = \left(L_T^i(u)\right)_{i=1}^q$, з

$$L_T^i(u) = \int_0^T \left(\varepsilon(t) - \sum_{l=1}^q \frac{g_l(t,\theta)}{d_{lT}\theta}u_l\right)\frac{g_i(t,\theta)}{d_{iT}(\theta)}\,dt, i = 1,...,q. \tag{22}$$

Вектори (21) та (22) визначені для $u \in U_T^c(\theta^0)$, де $U_T(\theta^0) = d_T(\theta^0)(\Theta_T^c - -\theta^0)$. Зауважимо, що за нашим припущенням, для будь-якого $R > 0$ та $T > T_0(R)$, $V^c(R) \subset U_T(\theta)$.

Нормована ОНК $\hat{u}_T$ задовольняє систему нормальних рівнянь

$$\Psi_T(u) = 0, \tag{23}$$

а вектор $L_T(\theta)$ відповідає віртуальній моделі лінійної регресії

$$Z(t) = \sum_{i=1}^{q} g_i(t,\theta)\beta_i + \varepsilon(t), t \in [0, T]. \tag{24}$$

Система нормальних рівнянь для моделі (24)

$$L_T(\theta) = 0 \tag{25}$$

визначає нормовану ОНК $\tilde{u}_T$ параметра β, де

$$\tilde{u}_T = d_T(\theta)(\tilde{\beta}_T - \beta), \tag{26}$$

$\tilde{\beta}_T$ – звичайна ОНК параметра β в моделі (24).

Далі ми доводимо теорему редукції для загальної моделі регресії, яка дозволяє замінити вивчення асимптотичного розподілу ОНК в нелінійній моделі (1) вивченням асимптотичного розподілу ОНК у віртуальній лінійній моделі (24). Таким чином, вказана теорема редукції, фактично, є теоремою лінеаризації.

Доведення проводиться за схемою роботи [7]. Відмінність полягає в тому, що ми використовуємо умову A стостовно випадкового шуму, тоді як у [7] у якості шуму розглядалось нелінійне локальне перетворення гауссового випадкового шуму з сильною залежністю.

Теорема 1 (редукції)**.** *За умов* ***A*****,** ***B1 - B3*** *для будь-яких* $R > 0$, $r > 0$,

$$\mathbb{P}\Big\{ \sup_{u \in V^c(R)} ||\Psi_T(u) - L_T(u)|| > r \Big\} \to 0, \;\; T \to \infty. \tag{27}$$

Доведення. Запишемо представлення

$$\Psi_T^i(u) - L_T^i(u) = \int_0^T \varepsilon(t)\frac{h_i(t,u)}{d_{iT}(\theta)}\,dt + \int_0^T H(t;0,u)\frac{h_i(t,u)}{d_{iT}(\theta)}\,dt-$$

$$-\int_0^T \varepsilon(t)\frac{g_i(t,\theta)}{d_{iT}(\theta)}\,dt + \int_0^T \frac{g_i(t,\theta)}{d_{iT}(\theta)}\sum_{l=1}^{q}\frac{g_l(t,\theta)}{d_{lT}(\theta)}u_l\,dt =$$

$$= \int_0^T \varepsilon(t)\frac{H_i(t;u,0)}{d_{iT}(\theta)}\,dt + \int_0^T H(t;0,u)\frac{H_i(t;u,0)}{d_{iT}(\theta)}\,dt+$$

$$+\int_0^T \frac{g_i(t,\theta)}{d_{iT}(\theta)}\left[H(t;0,u) + \sum_{l=1}^{q}\frac{g_l(t,\theta)}{d_{lT}(\theta)}u_l\right]dt =$$

$$= I_1(u) + I_2(u) + I_3(u). \tag{28}$$

$$\mathbb{E}I_1^2(u) = \int_0^T\int_0^T B(t-s)\cdot\frac{H_i(t;u,0)}{d_{iT}(\theta)}\cdot\frac{H_i(s;u,0)}{d_{iT}(\theta)}\,dt\,ds \le$$

$$\le \sup_{t\in[0;T]}\left\{\frac{H_i^2(t;u,0)}{d_{iT}^2(\theta)}\int_0^T\int_0^T |B(t-s)|\,dt\,ds\right\}. \tag{29}$$

Використовуючи умову *B3*, знаходимо наступне:

$$\sup_{t\in[0;T]}\frac{|H_i(t;u,0)|}{d_{iT}(\theta)} \le \sup_{t\in[0;T]}\left\{\sum_{l=1}^{q}\sup_{u\in V^c(R)}\frac{|h_{il}(t;u)|}{d_{iT}(\theta)d_{lT}(\theta)}|u_l|\right\} =$$

$$= \sup_{t\in[0;T]}\left\{\sum_{l=1}^{q}\sup_{u\in V^c(R)}\frac{|h_{il}(t;u)|}{d_{il,T}(\theta)}\cdot\frac{d_{il,T}(\theta)}{d_{iT}(\theta)d_{lT}(\theta)}|u_l|\right\} \le$$

$$\le R\left(\sum_{l=1}^{q}k_{il}(R)\tilde{k}_{il}\right)T^{-1}.$$

$$\mathbb{E}I_1^2(u) \le \left(\sum_{l=1}^{q}k_{il}(R)\tilde{k}_{il}\right)^2 R^2T^{-2}\int_0^T\int_0^T |B(t-s)|\,dt\,ds.$$

Покажемо, що

$$T^{-2}\int_0^T\int_0^T |B(t-s)|\,dt\,ds \to 0, T\to\infty. \tag{30}$$

За формулою (7) та теоремою Фубіні, отримуємо

$$T^{-2}\int\limits_0^T\int\limits_0^T |B(t-s)|\,dt\,ds =$$

$$= T^{-2}\int\limits_0^T\int\limits_0^T d_2\left|\int\limits_{\mathbb{R}} \hat{a}(t-s+u)\hat{a}(u)\,du\right| dt\,ds \leq$$

$$\leq d_2T^{-2}\int\limits_0^T\int\limits_0^T\int\limits_{\mathbb{R}} |\hat{a}(t-s+u)|\cdot|\hat{a}(u)|\,du\,dt\,ds =$$

$$= d_2T^{-2}\int\limits_{\mathbb{R}} |\hat{a}(u)|\cdot\left(\int\limits_0^T\int\limits_0^T |\hat{a}(t-s+u)|\,dt\,ds\right)du. \tag{31}$$

Оцінимо інтеграл в дужках:

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^T |\hat{a}(t-s+u)|\,dt\,ds \leq \int\limits_0^T\left(\int\limits_{\mathbb{R}} |\hat{a}(t)|\,dt\right)ds = ||\hat{a}||_{L_1}\int\limits_0^T ds = T||\hat{a}||_{L_1}.$$

Таким чином,

$$d_2T^{-2}\int\limits_{\mathbb{R}} |\hat{a}(u)|\cdot\left(\int\limits_0^T\int\limits_0^T |\hat{a}(t-s+u)|\,dt\,ds\right)du \leq$$

$$\leq d_2T^{-1}||\hat{a}||_{L_1}\int\limits_{\mathbb{R}} |\hat{a}(u)|\,du =$$

$$= d_2\,||\hat{a}||^2_{L_1}T^{-1}. \tag{32}$$

Тобто маємо, що

$$T^{-2}\int\limits_0^T\int\limits_0^T |B(t-s)|\,dt\,ds \leq d_2\,||\hat{a}||^2_{L_1}T^{-1}, \tag{33}$$

отже,

$$T^{-2}\int\limits_0^T\int\limits_0^T |B(t-s)|\,dt\,ds = O(T^{-1}) \text{ при } T\to\infty. \tag{34}$$

Тоді поточково для $u \in V^c(R)$

$$I_1(u) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \text{ при } T \to \infty. \tag{35}$$

З іншого боку, за нерівністю Маркова

$$\mathbb{P}\Big\{ \sup_{||u_1-u_2||\le h} |I_1(u_1) - I_1(u_2)| > r \Big\} \le r^{-1}\mathbb{E} \sup_{||u_1-u_2||\le h} \left| \int_0^T \varepsilon(t) \frac{H_i(t; u_1, u_2)}{d_{iT}(\theta)}\, dt \right| \le$$

$$\le r^{-1} \sup_{||u_1-u_2||\le h} \sup_{t\in[0;T]} \frac{|H_i(t; u_1, u_2)|}{d_{iT}(\theta)} \mathbb{E}|\varepsilon(0)|T. \tag{36}$$

За умови *B3* маємо

$$\sup_{||u_1-u_2||\le h} \sup_{t\in[0;T]} \frac{|H_i(t; u_1, u_2)|}{d_{iT}(\theta)} \le$$

$$\le h \sup_{t\in[0;T]} \left\{ \sum_{l=1}^{q} \sup_{u\in V^c(R)} \frac{|h_{il}(t; u)|}{d_{il,T}(\theta)} \cdot \frac{d_{il,T}(\theta)}{d_{iT}(\theta) d_{lT}(\theta)} \right\} \le$$

$$\le h \left(\sum_{l=1}^{q} k_{il}(R) \tilde{k}_{il} \right) T^{-1}. \tag{37}$$

З (36) та (37) випливає, що

$$\mathbb{P}\Big\{ \sup_{||u_1-u_2||\le h} |I_1(u_1) - I_1(u_2)| > r \Big\} \le k_1 r^{-1} h, \tag{38}$$

де

$$k_1 = \left(\sum_{l=1}^{q} k_{il}(R) \tilde{k}_{il} \right) \mathbb{E}|\varepsilon(0)|.$$

Припустимо, що N_h – скінченна h-сітка кулі $V^c(R)$. Тоді,

$$\sup_{u\in V^c(R)} |I_1(u)| \le \sup_{||u_1-u_2||\le h} |I_1(u_1) - I_1(u_2)| + \max_{u\in N_h} |I_1(u)|. \tag{39}$$

Із (36) та (37) випливає, що для будь-якого $r > 0$,

$$\mathbb{P}\Big\{ \sup_{||u_1-u_2||\le h} |I_1(u)| > r \Big\} \le 2k_1 r^{-1} h + \mathbb{P}\Big\{ \max_{u\in N_h} |I_1(u)| > \frac{r}{2} \Big\}. \tag{40}$$

Для $\epsilon > 0$ покладемо $h = \frac{\epsilon r}{4k_1}$.

Оскільки $I_1(u) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ поточково, то для $T > T_0$,

$$\mathbb{P}\left\{ \max_{u \in N_{\frac{\epsilon r}{4k_1}}} |I_1(u)| > \frac{r}{2} \right\} \le \frac{\epsilon}{2},$$

та

$$\mathbb{P}\left\{ \sup_{u \in V^c(R)} |I_1(u)| > r \right\} \le \epsilon.$$

Це означає, що $I_1(u) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0,\ \ T \to \infty$, рівномірно за $u \in V^c(R)$.

З умови *B3* та нерівності Коші-Буняковського, застосувавши формулу Лагранжа, маємо, що

$$\sup_{u \in V^c(R)} \sup_{t \in [0;T]} |H(t;0,u)| = \sup_{u \in V^c(R)} \sup_{t \in [0;T]} \left| \sum_{i=1}^{q} \frac{h_i(t,u_t^*)}{d_{iT}(\theta)} H_i \right| \le$$

$$\le \sup_{u \in V^c(R)} ||u|| \left[\sup_{t \in [0;T]} \sum_{i=1}^{q} \left(\frac{h_i(t,u_t^*)}{d_{iT}(\theta)} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \le ||k(R)|| R T^{-\frac{1}{2}}, \qquad (41)$$

де $k(R) = (k_1(R), ..., k_q(R))$.

Із (28), (37) та (41) маємо

$$\sup_{u \in V^c(R)} |I_2(u)| = \sup_{u \in V^c(R)} \left| \int_0^T H(t;0,u) \cdot \frac{H_i(t;0,u)}{d_{iT}(\theta)}\, dt \right| \le$$

$$\le T \sup_{u \in V^c(R)} \sup_{t \in [0;T]} \left| H(t;0,u) \cdot \frac{H_i(t;0,u)}{d_{iT}(\theta)} \right| \le ||k(R)|| R^2 T^{-\frac{1}{2}} \left(\sum_{l=1}^{q} k_{il}(R) \tilde{k}_{il} \right),$$

тобто, $I_2(u) \to 0,\ \ T \to \infty$, рівномірно за $u \in V^c(R)$.

Перепишемо $I_3(u)$ наступним чином:

$$I_3(u) = \int_0^T \frac{g_i(t,\theta)}{d_{iT}(\theta)} \left[H(t;0,u) + \sum_{l=1}^{q} \frac{g_l(t,\theta)}{d_{lT}(\theta)} u_l \right] dt =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^T \frac{g_i(t,\theta)}{d_{iT}(\theta)} \sum_{l,j=1}^{q} \frac{h_{lj}(t,u_t^*)}{d_{lT}(\theta) d_{jT}(\theta)} u_l u_j\, dt =$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{l,j=1}^{q} \left(\int_0^T \frac{h_{lj}(t,u_t^*)}{d_{lT}(\theta) d_{jT}(\theta)} \cdot \frac{g_i(t,\theta)}{d_{iT}(\theta)}\, dt \right) u_l u_j,\, u_t^* \in V^c(R).$$

З умови *B3*, застосувавши нерівність Коші-Буняковського, отримуємо

$$\sup_{u\in V^c(R)} |I_3(u)| \leq \frac{T}{2}k^i(R)\left(\sum_{l,j=1}^{q} k_{il}(R)\tilde{k}_{il}|u_j||u_l|\right)T^{-\frac{3}{2}} \leq$$

$$\leq \frac{qk^i(R)}{2} \max_{1\leq j,\ \ l\leq q} \left\{k_{jl}(R)\tilde{k}_{jl}\right\}||u||^2 T^{-\frac{1}{2}}.$$

Тому, $I_3(u) \to 0,\ \ T \to \infty$, рівномірно за $u \in V^c(R)$. ■

Наслідок 1. *Якщо виконано умову A, то теорема 1 справедлива для тригонометричної моделі регресії* (1), (11), *оскільки тригонометрична функція регресії задовольняє умови B1 - B3 [7].*

3 Асимптотична єдиність оцінки найменших квадраів

В цьому розділі доведено, що ОНК $\hat{u}_T$ є, в деякому сенсі, асимптотично при $T \to \infty$ єдиним розв'язком системи нормальних рівнянь (23). Позначимо $J_T(\theta) = \Big(J_{il,T}(\theta)\Big)_{i,l=1}^{q}$, де

$$J_{il,T}(\theta) = d_{iT}^{-1}(\theta) d_{lT}^{-1}(\theta) \int\limits_0^T g_i(t,\theta) g_l(t,\theta)\, dt. \tag{42}$$

Нехай також $\lambda_{min}(A)$ та $\lambda_{max}(A)$, відповідно, мінімальне та максимальне власні значення додатно визначеної матриці A. Сформулюємо наступну умову.

B4. Для деякого $\lambda_* > 0$ та $T > T_0 = T_0(\theta^0)$

$$\lambda_{min}\Big(J_T(\theta^0)\Big) \geq \lambda_*, \;\; \theta^0 \in \Theta. \tag{43}$$

Розглянемо нормовану ОНК

$$\hat{w}_T = T^{-\frac{1}{2}} d_T(\theta^0)(\hat{\theta}_T - \theta^0), \tag{44}$$

якій відповідає заміна змінних $w = T^{-\frac{1}{2}} d_T(\theta^0)(\theta - \theta^0)$ у функції регресії та її похідних. Введемо наступні позначення: для $i, l = 1, ..., q$,

$$f(t,w) = g(t, \theta^0 + T^{\frac{1}{2}} d_T^{-1}(\theta^0) w), \;\; f_i(t,w) = g_i(t, \theta^0 + T^{\frac{1}{2}} d_T^{-1}(\theta^0) w),$$

$$f_{il}(t,w) = g_{il}(t, \theta^0 + T^{\frac{1}{2}} d_T^{-1}(\theta^0) w).$$

Крім цього, для $i, l = 1, ..., q$, позначимо також

$$F(t; w_1, w_2) = f(t, w_1) - f(t, w_2),$$

$$F_i(t; w_1, w_2) = f_i(t, w_1) - f_i(t, w_2),$$

$$\Psi_{il,T}(w, 0) = \int\limits_0^T \big(f_{il}(t,w) - f_{il}(t,0)\big)^2\, dt.$$

Сформулюємо ще одну умову.

B5. Для деякого $r_0 > 0$ та для $i, l = \overline{1, q}$

$$\textbf{(i)} \qquad \sup_{t\in[0;T]} \sup_{w\in V^c(r_0)} \frac{|f_i(t,w)|}{d_{iT}(\theta^0)} \le \check{k}_i(r_0) T^{-\frac{1}{2}}; \tag{45}$$

$$\textbf{(ii)} \qquad \sup_{t\in[0;T]} \sup_{w\in V^c(r_0)} \frac{|f_{il}(t,w)|}{d_{il,T}(\theta^0)} \le \check{k}_{il}(r_0) T^{-\frac{1}{2}}; \tag{46}$$

$$\textbf{(iii)} \qquad \sup_{w\in V^c(r_0)} T d_{iT}^{-2}(\theta^0) d_{lT}^{-2}(\theta^0) \Psi_{il,T}(w, 0) ||w||^{-2} \le \hat{k}_{il}(r_0); \tag{47}$$

Розглянемо функціонал

$$(2T)^{-1} \int\limits_0^T [x(t) - f(t,w)]^2 \, dt = (2T)^{-1} Q_T\Big(\theta^0 + T^{\frac{1}{2}} d_T^{-1}(\theta^0) w\Big), \tag{48}$$

та вектор

$$M_T(w) = \Big(M_T^i(w)\Big)_{i=1}^q = \left(\frac{\partial}{\partial w_i}\Big((2T)^{-1} Q_T\Big(\theta^0 + T^{\frac{1}{2}} d_T^{-1}(\theta^0) w\Big)\Big)\right)_{i=1}^q =$$

$$= \left(T^{-\frac{1}{2}} \int\limits_0^T [x(t) - f(t,w)] \frac{-f_i(t,w)}{d_{iT}(\theta)} \, dt\right)_{i=1}^q .$$

Тоді нормована ОНК $\hat{w}_T$ задовольняє систему нормальних рівнянь

$$M_T(w) = 0. \tag{49}$$

Також припустимо, що ОНК $\hat{w}_T$ є консистентною в наступному сенсі.

CW. Для будь-якого $\rho > 0$

$$\mathbb{P}\{||\hat{w}_T|| > \rho\} \to 0, \;\; T \to \infty.$$

Позначимо

$$\nu_T^* = T^{-1} \int\limits_0^T \varepsilon^2(t) \, dt.$$

Для доведення асимптотичної єдиності ОНК $\hat{w}_T$ нам знадобиться наступна лема, слабший варіант якої доведено в [8].

Лема 1. *Якщо виконується умова* $\boldsymbol{A}$, *то*

$$\nu_T^* \to B(0) \text{ м. н.}, \ \ T \to \infty. \tag{50}$$

Доведення. Насамперед доведемо, що

$$\mathbb{E}[\nu_T^* - B(0)]^2 = O(T^{-1}), \ \ T \to \infty. \tag{51}$$

Використавши (8), отримуємо

$$\mathbb{E}[\nu_T^* - B(0)]^2 =$$

$$= T^{-2} \int_0^T \int_0^T c_4(t,t,s,s)\, dt\, ds + 2T^{-2} \int_0^T \int_0^T B^2(t-s)\, dt\, ds =$$

$$= I_1 + I_2.$$

З умови A та теореми Фубіні випливає, що

$$\int_{\mathbb{R}} B^2(t)\, dt \le B(0) d_2 \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\hat{a}(t+s)| \cdot |\hat{a}(s)|\, ds \right) dt =$$

$$= B(0)\, d_2\, ||\hat{a}||_1^2 = d_2^2\, ||\hat{a}||_1^2\, ||\hat{a}||_2^2,$$

де

$$||\hat{a}||_1 = \int_{\mathbb{R}} |\hat{a}(t)|\, dt, \ \ ||\hat{a}||_2 = \left(\int_{\mathbb{R}} |\hat{a}(t)|^2\, dt \right)^{1/2}.$$

Тому

$$I_2 \le 2 d_2^2\, ||\hat{a}||_1^2\, ||\hat{a}||_2^2\, T^{-1}. \tag{52}$$

З іншого боку, використавши формулу (9) для кумулянтів процесу ε, отримуємо

$$I_1 = d_4 T^{-2} \int_0^T \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \hat{a}^2(t-u) \hat{a}^2(s-u)\, du\, dt\, ds =$$

$$= d_4 T^{-2} \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}} \hat{a}^2(t-u) \left(\int_0^T \hat{a}^2(s-u)\, ds \right) du \right) dt \le \tag{53}$$

$$\leq d_4 \, ||\hat{a}||_2^4 \, T^{-1}.$$

Справедливість (51) безпосередньо випливає з (52) та (53).

Позначимо

$$\xi_T = \nu_T^* - B(0)$$

та нехай $T_n = n^2, \; n \geq 1$. Тоді з (51) випливає, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E} \, \xi_{T_n}^2 < \infty.$$

Отже,

$$\xi_{T_n} = T_n^{-1} \int\limits_0^{T_n} \varepsilon^2(t) \, dt - B(0) \to 0 \; \text{ м. н.}, \; T \to \infty.$$

тобто,

$$\nu_{T_n}^* = T_n^{-1} \int\limits_0^{T_n} \varepsilon^2(t) \, dt \to B(0) \; \text{ м. н.}, \; T \to \infty.$$

Покажемо, що

$$\sup_{T_n \leq T < T_{n+1}} |\xi_T - \xi_{T_n}| \to 0 \; \text{ м. н.}, \; n \to \infty. \tag{54}$$

Одержуємо

$$\sup_{T_n \leq T < T_{n+1}} |\xi_T - \xi_{T_n}| =$$

$$= \sup_{T_n \leq T < T_{n+1}} \Big| \nu_T^* - \nu_{T_n}^* \Big| \leq$$

$$\leq \sup_{T_n \leq T < T_{n+1}} \left(\Big| T^{-1} - T_n^{-1} \Big| \int\limits_0^{T_n} \varepsilon^2(t) \, dt + T^{-1} \int\limits_{T_n}^{T} \varepsilon^2(t) \, dt \right) =$$

$$= \sup_{T_n \leq T < T_{n+1}} (I_1 + I_2);$$

$$I_1 = \frac{T - T_n}{T_n T} \int\limits_0^{T_n} \varepsilon^2(t) \, dt \leq \frac{T_{n+1} - T_n}{T_n^2} \int\limits_0^{T_n} \varepsilon^2(t) \, dt =$$

$$= \frac{T_{n+1} - T_n}{T_n} \cdot \nu_{T_n}^* = \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2} \cdot \nu_{T_n}^* =$$

$$= \frac{2n+1}{n^2} \cdot \nu^*_{T_n} \to 0 \text{ м. н.}, \; n \to \infty.$$

Маємо далі

$$I_2 = T^{-1} \int\limits_{T_n}^{T} \varepsilon^2(t)\,dt \le T_n^{-1} \int\limits_{T_n}^{T_{n+1}} \varepsilon^2(t)\,dt =$$

$$= \frac{T_{n+1}}{T_n} \cdot \frac{1}{T_{n+1}} \int\limits_0^{T_{n+1}} \varepsilon^2(t)\,dt - T_n^{-1} \int\limits_0^{T_n} \varepsilon^2(t)\,dt =$$

$$= \frac{T_{n+1}}{T_n} \cdot \nu^*_{T_{n+1}} - \nu^*_{T_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \nu^*_{T_{n+1}} - \nu^*_{T_n} \to 0 \text{ м. н.}, \; n \to \infty,$$

оскільки

$$\frac{(n+1)^2}{n^2} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \to 1, \; n \to \infty.$$

Отже,

$$\sup_{T_n \le T < T_{n+1}} (I_1 + I_2) \to 0 \text{ м. н.}, \; n \to \infty,$$

з чого випливає справедливість (54). ■

Результат леми 1 дозволяє перейти до формулювання і доведення наступної теореми єдиності.

Теорема 2 (єдиності). *За умов* ***A***, ***B3(iii)***, ***B4***, ***B5*** *та* ***CW***, *нормована ОНК* (44) *є єдиним розв'язком системи рівнянь* (49) *з ймовірністю, прямуючою до* 1 *при* $T \to \infty$.

Доведення. Розглянемо функціонал (48) та загальний елемент матриці Гессе $\mathcal{H}_T = \left(\mathcal{H}_T^{il}(w)\right)_{i,l=1}^q$:

$$\mathcal{H}_T^{il}(w) = \frac{\partial^2}{\partial w_i \partial w_l}\left(\frac{1}{2} Q_T(\theta^0 + T^{1/2} d_T^{-1}(\theta^0) w)\right) =$$

$$= T^{-1} \int\limits_0^T \left([X(t) - f(t,w)] \frac{-f_{il}(t,w)}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} T + \frac{f_i(t,w) f_l(t,w)}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)} T \right) dt =$$

$$= \int\limits_0^T [F(t;0,w) + \varepsilon(t)] \frac{-f_{il}(t,w)}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)}\,dt + \int\limits_0^T \frac{f_i(t,w) f_l(t,w)}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)}\,dt =$$

$$= \int_0^T F(t;0,w)\frac{f_{il}(t,w)}{d_{iT}(\theta^0)d_{lT}(\theta^0)}\,dt - \int_0^T \varepsilon(t)\frac{f_{il}(t,w)}{d_{iT}(\theta^0)d_{lT}(\theta^0)}\,dt +$$

$$+ \int_0^T \frac{\big(f_i(t,w) - f_i(t,0) + f_i(t,0)\big)\big(f_l(t,w) - f_l(t,0) + f_l(t,0)\big)}{d_{iT}(\theta^0)d_{lT}(\theta^0)}\,dt =$$

$$= q_1(w) + q_2(w) +$$

$$+ \int_0^T \frac{\big(f_i(t,w) - f_i(t,0)\big)\big(f_l(t,w) - f_l(t,0)\big)}{d_{iT}(\theta^0)d_{lT}(\theta^0)}\,dt +$$

$$+ \int_0^T \frac{\big(f_i(t,w) - f_i(t,0)\big)f_l(t,0)}{d_{iT}(\theta^0)d_{lT}(\theta^0)}\,dt + \int_0^T \frac{\big(f_l(t,w) - f_l(t,0)\big)f_i(t,0)}{d_{iT}(\theta^0)d_{lT}(\theta^0)}\,dt +$$

$$+ \int_0^T \frac{f_i(t,0)f_l(t,0)}{d_{iT}(\theta^0)d_{lT}(\theta^0)}\,dt =$$

$$= q_1(w) + q_2(w) + q_3(w) + q_4(w) + q_5(w) + J_{il,T}(\theta^0), \;\; i,l = \overline{1,q}. \tag{55}$$

Використовуючи наступну нерівність з монографії [13],

$$|\lambda_{min}(\mathcal{H}_T(w)) - \lambda_{min}(J_T(\theta^0))| \le q \max_{1\le i,l\le q} \left|\mathcal{H}_T^{il}(w) - J_{il,T}(\theta^0)\right|, \tag{56}$$

отримуємо

$$\max_{1\le i,l\le q} \left|\mathcal{H}_T^{il}(w) - J_{il,T}(\theta^0)\right| \le \sum_{m=1}^{5} \max_{1\le i,l\le q} |q_m(w)|. \tag{57}$$

Застосовуючи умови теореми, одержуємо для $||w|| \le \tau_0$

$$|q_1(w)| = \left| \int_0^T F(t;w,0)\frac{f_{il}(t,w)}{d_{iT}(\theta^0)d_{lT}(\theta^0)}\,dt \right| \le$$

$$\le T \sup_{t\in[0;T]} \left| F(t;w,0)\frac{f_{il}(t,w)}{d_{iT}(\theta^0)d_{lT}(\theta^0)} \right| \le$$

$$\le T\check{k}_{il}(r_0)\tilde{k}_{il}T^{-1} \sup_{t\in[0;T]} |F(t;w,0)| \le$$

$$\le \check{k}_{il}(r_0)\tilde{k}_{il} \sup_{t\in[0;T]} |f(t,w) - f(t,0)| =$$

$$= \check{k}_{il}(r_0)\tilde{k}_{il}\sup_{t\in[0;T]}\left|T^{1/2}\sum_{l=1}^{q}\frac{f_i(t,w)}{d_{lT}(\theta^0)}w_l\right| \leq$$

$$\leq \check{k}_{il}(r_0)\tilde{k}_{il}T^{1/2}\left(\sum_{l=1}^{q}\sup_{t\in[0;T]}\left(\frac{f_l(t,w)}{d_{lT}(\theta^0)}\right)^2\right)^{1/2}||w|| \leq$$

$$\leq ||\check{k}(r_0)||\cdot\check{k}_{il}(r_0)\tilde{k}_{il}||w||, \tag{58}$$

де

$$\check{k}(r_0) = \big(\check{k}_1(r_0),...,\check{k}_q(r_0)\big),\ \ ||w_t^*|| \leq ||w||,\ \ t\in[0;T].$$

Далі розглянемо

$$|q_2(w)| = \left|\int\limits_0^T \varepsilon(t)\frac{f_{il}(t,w)}{d_{iT}(\theta^0)d_{lT}(\theta^0)}\,dt\right| =$$

$$= \left|\int\limits_0^T \varepsilon(t)\frac{F_{il}(t;w,0)}{d_{iT}(\theta^0)d_{lT}(\theta^0)}\,dt + \int\limits_0^T \varepsilon(t)\frac{f_{il}(t,0)}{d_{iT}(\theta^0)d_{lT}(\theta^0)}\,dt\right| \leq$$

$$\leq |q_6(w)| + |q_7(T)|. \tag{59}$$

З умови *B5(iii)* випливає, що

$$|q_6(w)| = \left|\int\limits_0^T \varepsilon(t)\frac{F_{il}(t;w,0)}{d_{iT}(\theta^0)d_{lT}(\theta^0)}\,dt\right| \leq$$

$$\leq \big(\nu_T^*\big)^{1/2}\left(T\frac{\Psi_{il,T}(w,0)}{d_{iT}^2(\theta^0)d_{lT}^2(\theta^0)}\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \big(\nu_T^*\big)^{1/2}\,\hat{k}_{il}^{1/2}(r_0)\,||w||.$$

Позначимо $o^{(k)}(1)$ випадкові процеси, які залежать від T або n та прямують до 0 м. н. при $T\to\infty$ або $n\to\infty$.

За лемою 1

$$\nu_T^* = o^{(1)}(1) + B(0),$$

тому можемо обмежити $q_6(w)$ наступним чином:

$$|q_6(w)| \leq \hat{k}_{il}^{1/2}(r_0)\big(o^{(1)}(1)+B(0)\big)^{1/2}||w||. \tag{60}$$

Беручи до уваги умови *B3(iii)*, *B5(ii)*, маємо

$$\mathbb{E}|q_7(T)|^2 = \mathbb{E}\left|\int_0^T \varepsilon(t)\frac{g_{il}(t,\theta^0)}{d_{iT}(\theta^0)d_{lT}(\theta^0)}\,dt\right|^2 \le$$

$$\le \int_0^T\int_0^T |B(t-s)|\,dt\,ds\left(\sup_{t\in[0;T]}\frac{|g_{il}(t,\theta^0)|}{d_{iT}(\theta^0)d_{lT}(\theta^0)}\right)^2 \le$$

$$\le (\check{k}_{il}(r_0)\,\tilde{k}_{il})^2\,T^{-2}\int_0^T\int_0^T |B(t-s)|\,dt\,ds.$$

З формули (34) випливає, що

$$T^{-2}\int_0^T\int_0^T |B(t-s)|\,dt\,ds \le d_2\,||\hat{a}||_1^2\,T^{-1}.$$

Тому якщо $T_n = n^2,\ n \ge 1$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}|q_7(T_n)|^2 < \infty$$

та $q_7(T_n) \to 0$ м. н., при $T \to \infty$. Розглянемо послідовність випадкових величин

$$\xi_n = \sup_{T_n\le T<T_{n+1}}|q_7(T) - q_7(T_n)| \le$$

$$\le \sup_{T_n\le T<T_{n+1}}\left|\int_0^{T_n}\varepsilon(t)g_{il}(t,\theta^0)\,dt\left(d_{iT}^{-1}(\theta^0)d_{lT}^{-1}(\theta^0) - d_{iT_n}^{-1}(\theta^0)d_{lT_n}^{-1}(\theta^0)\right)\right| +$$

$$+ \sup_{T_n\le T<T_{n+1}}\left|\int_T^{T_n}\varepsilon(t)\frac{g_{il}(t,\theta^0)}{d_{iT}(\theta^0)d_{lT}(\theta^0)}\,dt\right| =$$

$$= q_8(n) + q_9(n). \tag{61}$$

Оцінимо $q_8(n)$:

$$q_8(n) \le \int_0^{T_n}|\varepsilon(t)|\,dt\sup_{0\le t\le T_n}|g_{il}(t,\theta^0)|d_{iT_n}^{-1}(\theta^0)d_{lT_n}^{-1}(\theta^0)\times$$

$$\times\left(1-\frac{d_{iT_n}(\theta^0)d_{lT_n}(\theta^0)}{d_{iT_{n+1}}(\theta^0)d_{lT_{n+1}}(\theta^0)}\right)\leq$$

$$\leq \check{k}_{il}(r_0)\,\tilde{k}_{il}T_n^{-1}\int\limits_0^{T_n}|\varepsilon(t)|\,dt\left(1-\frac{d_{iT_n}(\theta^0)d_{lT_n}(\theta^0)}{d_{iT_{n+1}}(\theta^0)d_{lT_{n+1}}(\theta^0)}\right). \tag{62}$$

З леми 1 очевидно, що

$$T_n^{-1}\int\limits_0^{T_n}|\varepsilon(t)|\,dt\leq(\nu_{T_n}^*)^{1/2}\to B^{1/2}(0)\text{ м. н., при }T\to\infty. \tag{63}$$

Доведемо, що

$$r_i(n)=d_{iT_{n+1}}\,d_{iT_n}^{-1}\to 1,\ \ n\to\infty,\ \text{ для } i=\overline{1,q}. \tag{64}$$

Маємо

$$r_i^2(n)=1+d_{iT_n}^{-2}(\theta^0)\int\limits_{T_n}^{T_{n+1}}g_i^2(t,\theta^0)\,dt\leq$$

$$\leq 1+(T_{n+1}-T_n)\sup_{0\leq t\leq T_{n+1}}|g_i^2(t,\theta^0)|\,d_{iT_{n+1}}^{-2}(\theta^0)\,r_i^2(n)\leq$$

$$\leq 1+\check{k}_i^2(r_0)\,\frac{T_{n+1}-T_n}{T_{n+1}}\,r_i^2(n),$$

або

$$1\leq r_i^2(n)\leq\left(1-\check{k}_i^2(r_0)\,\frac{T_{n+1}-T_n}{T_{n+1}}\right)^{-1}\to 1,\ \ n\to\infty. \tag{65}$$

Тому $q_8(n)=o^{(2)}(1)$.

З іншого боку,

$$q_9(n)\leq\left(\int\limits_{T_n}^{T_{n+1}}|\varepsilon(t)|\,dt\right)\left(\frac{\sup_{t\in[0;T_{n+1}]}|g_{il}(t,\theta^0)|}{d_{il,T_{n+1}}(\theta^0)}\right)\left(\frac{d_{il,T_{n+1}}(\theta^0)}{d_{iT_{n+1}}(\theta^0)d_{lT_{n+1}}(\theta^0)}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{d_{iT_{n+1}}(\theta^0)d_{lT_{n+1}}(\theta^0)}{d_{iT_n}(\theta^0)d_{lT_n}(\theta^0)}\right)=\prod_{k=1}^{4}q_9^{(k)}(n). \tag{66}$$

Відповідно до (64),

$$q_9^{(4)}(n)\to 1,\ \ n\to\infty.$$

Більше того,

$$q_9^{(2)}(n)\, q_9^{(3)}(n) \le \check{k}_{il}(r_0)\, \tilde{k}_{il}\, T_{n+1}^{-1},$$

та за нерівністю $x \le \frac{1}{2}(1+x^2)$

$$T_{n+1}^{-1} \int\limits_{T_n}^{T_{n+1}} |\varepsilon(t)|\, dt \le \frac{1}{2}\left(\frac{T_{n+1}-T_n}{T_{n+1}} + \nu_{T_{n+1}}^* - \frac{T_n}{T_{n+1}}\, \nu_{T_n}^*\right) \to 0 \text{ м. н.}, \ n \to \infty,$$

тобто, $q_9(n) = o^{(3)}(1)$. Тоді $q_7(T) = o^{(4)}(1)$, та завдяки (60), маємо, що

$$|q_2(w)| \le \hat{k}_{il}^{1/2}(r_0)\big(o^{(1)}(1) + B(0)\big)^{1/2} ||w|| + o^{(4)}(1). \tag{67}$$

Продовжимо оцінювати доданки суми (55):

$$|q_3(w)| = \left| \int\limits_0^T \frac{\big(f_i(t,w) - f_i(t,0)\big)\big(f_l(t,w) - f_l(t,0)\big)}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)}\, dt \right| \le$$

$$\le T^2 \sum_{j=1}^{q} \sum_{s=1}^{q} \sup_{t \in [0;T],\ w \in V^c(r_0)} \frac{|f_{ij}(t,w)|}{d_{iT}(\theta^0) d_{jT}(\theta^0)} \times$$

$$\times \sup_{t \in [0;T],\ w \in V^c(r_0)} \frac{|f_{ls}(t,w)|}{d_{lT}(\theta^0) d_{sT}(\theta^0)}\, |w_j| \cdot |w_s| \le$$

$$\le \left(\sum_{j=1}^{q} \check{k}_{ij}(r_0)\, \tilde{k}_{ij}\, |w_j| \right) \left(\sum_{s=1}^{q} \check{k}_{ls}(r_0)\, \tilde{k}_{ls}\, |w_s| \right) \le$$

$$\le \left(\sum_{j=1}^{q} \Big(\check{k}_{ij}(r_0)\, \tilde{k}_{ij} \Big)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{s=1}^{q} \Big(\check{k}_{ls}(r_0)\, \tilde{k}_{ls} \Big)^2 \right)^{1/2} ||w||^2. \tag{68}$$

Аналогічно,

$$|q_4(w)| = \left| \int\limits_0^T \frac{\big(f_i(t,w) - f_i(t,0)\big) f_l(t,0)}{d_{iT}(\theta^0) d_{lT}(\theta^0)}\, dt \right| \le$$

$$\le T^{3/2} \sum_{j=1}^{q} |w_j| \sup_{t \in [0;T],\, w \in V^c(r_0)} \frac{|f_{il}(t,w)|}{d_{ij,T}(\theta^0)} \cdot \frac{d_{ij,T}(\theta^0)}{d_{iT}(\theta^0) d_{jT}(\theta^0)} \cdot \frac{|f_l(t,0)|}{d_{lT}(\theta^0)} \le$$

$$\le \check{k}_l(r_0) \left(\sum_{j=1}^{q} \Big(\check{k}_{ij}(r_0)\, \tilde{k}_{il} \Big)^2 \right)^{1/2} ||w||; \tag{69}$$

$$|q_5(w)| \le \check{k}_i(r_0)\left(\sum_{j=1}^{q}\Big(\check{k}_{lj}(r_0)\,\tilde{k}_{lj}\Big)^2\right)^{1/2}||w||. \tag{70}$$

Беручи до уваги співвідношення (55) - (70), отримуємо

$$|\lambda_{min}(\mathcal{H}_T(w)) - \lambda_{min}(J_T(\theta^0))| \le$$

$$\le q \max_{1\le i,l\le q}\Bigg(||\check{k}(r_0)||\,\hat{k}_{il}\,\tilde{k}_{il}\,||w|| + \hat{k}_{il}^{1/2}(r_0) + \Big(o^{(1)}(1) + \mathbb{E}\varepsilon^2(0)\Big)^{1/2}||w|| +$$

$$+o^{(4)}(1) + \left(\sum_{j=1}^{q}\Big(\check{k}_{ij}(r_0)\tilde{k}_{ij}\Big)^2\right)^{1/2}\left(\sum_{s=1}^{q}\Big(\check{k}_{ls}(r_0)\tilde{k}_{ls}\Big)^2\right)^{1/2}||w||^2 +$$

$$+\check{k}_l(r_0)\left(\sum_{j=1}^{q}\Big(\check{k}_{ij}(r_0)\tilde{k}_{ij}\Big)^2\right)^{1/2}||w|| +$$

$$+\check{k}_i(r_0)\left(\sum_{j=1}^{q}\Big(\check{k}_{lj}(r_0)\tilde{k}_{lj}\Big)^2\right)^{1/2}||w||\Bigg). \tag{71}$$

Замінивши в (71) w на нормовану ОНК $\hat{w}_T$, та взявши до уваги, що за умови *B4* при $T > T_0$ матриця $J_T(\theta^0)$ є додатно визначеною з мінімальним власним значенням $\lambda_{min}(J_T(\theta^0)) \ge \lambda_*$, розглянемо для деякого $r > 0$ подію

$$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \Gamma_3 =$$

$$= \Big\{|o^{(1)}(1)| \le r,\ \ |o^{(4)}(1)| \le r,\ \ ||\hat{w}_T|| \le r\Big\} \subset$$

$$\subset \left\{\Big|\lambda_{min}(\mathcal{H}_T(\hat{w}_T)) - \lambda_{min}(J_T(\theta^0))\Big| \le \frac{\lambda_*}{2}\right\} =$$

$$= \left\{\lambda_{min}(J_T(\theta^0)) - \frac{\lambda_*}{2} \le \lambda_{min}(\mathcal{H}_T(\hat{w}_T)) \le \lambda_{min}(J_T(\theta^0)) + \frac{\lambda_*}{2}\right\} \subset$$

$$\subset \left\{\lambda_{min}(\mathcal{H}_T(\hat{w}_T)) \ge \lambda_{min}(J_T(\theta^0)) - \frac{\lambda_*}{2}\right\} \subset$$

$$\subset \left\{\lambda_{min}(\mathcal{H}_T(\hat{w}_T)) \ge \frac{\lambda_*}{2}\right\}. \tag{72}$$

Отримуємо, що

$$\mathbb{P}\{\overline{\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \Gamma_3}\} \le$$

$$\le \mathbb{P}\{\overline{\Gamma_1}\} + \mathbb{P}\{\overline{\Gamma_2}\} + \mathbb{P}\{\overline{\Gamma_3}\} =$$

$$= \mathbb{P}\Big\{|o^{(1)}(1)| > r\Big\} + \mathbb{P}\Big\{|o^{(4)}(1)| > r\Big\} + \mathbb{P}\{||\hat{w}_T|| > r\}.$$

Для довільних $\varepsilon > 0$ та $T > T_0$

$$\mathbb{P}\Big\{|o^{(1)}(1)| > r\Big\} \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

та

$$\mathbb{P}\Big\{|o^{(4)}(1)| > r\Big\} \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

В такому випадку, якщо для $T > T_0$

$$\mathbb{P}\{||\hat{w}_T|| > r\} \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ за умови } CW, \text{ то}$$

$$\mathbb{P}\Big\{|o^{(1)}(1)| > r\Big\} + \mathbb{P}\Big\{|o^{(4)}(1)| > r\Big\} + \mathbb{P}\{||\hat{w}_T|| > r\} \leq \varepsilon.$$

Це означає, що для $T > T_0$

$$\mathbb{P}\{\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \Gamma_3\} > 1 - \varepsilon. \tag{73}$$

Тому нормована ОНК $\hat{w}_T$ є єдиним розв'язком системи рівнянь (49) з ймовірністю, прямуючою до 1 при $T \to \infty$, оскільки матриця $\mathcal{H}_T(\hat{w}_T)$ є додатно визначеною, та функціонал (48) має єдиний екстремум (мінімум) в точці $\hat{w}_T$. ■

Розглянемо наступну умову:

CS.

$$\hat{w}_T \to 0 \text{ м. н.}, \ \ T \to \infty. \tag{74}$$

Наслідок 2. *За умов **A**, **B3(iii)**, **B4**, **B5** та **CS**, нормована ОНК* $\hat{w}_T$ *з* (44) *є м. н. єдиним розв'язком системи рівнянь* (49).

Доведення. Доведення випливає безпосередньо з нерівності (71). ■

Зауваження 1. *Оскільки* $-T^{-1/2}\Psi(\hat{u}_T) = M_T(\hat{w}_T) = 0$, *де* $\hat{w}_T = T^{-1/2}\hat{u}_T$, $\hat{u}_T = d_T(\theta)(\hat{\theta}_T - \theta)$, *то із єдиності оцінки* $\hat{w}_T$ *в кулі* $V(r)$ *при* $T > T_0$ *для деякого* $r > 0$ *випливає єдиність оцінки* $\hat{u}_T$ *для* $T > T_0$ *в кулі* $V(T^{1/2}r)$.

Слід зауважити, що наслідок 2, зокрема, є справедливим і для тригонометричної моделі регресії (1), (11), оскільки така модель задовольняє умови даного наслідку.

4 Асимптотична нормальність оцінки найменших квадратів

Розглянемо сім'ю матричнозначних мір $\mu_T(dx, \theta^0) = \left(\mu_T^{jl}(dx, \theta^0)\right)_{j,l=1}^q$, $T > T_0$, $\theta^0 \in \Theta$, із щільностями

$$\mu_T^{jl}(x, \theta^0) = g_T^j(x, \theta^0)\overline{g_T^l(x, \theta^0)}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} |g_T^l(x, \theta^0)|^2\, dx\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}, \qquad (75)$$

де

$$g_T^j(x, \theta) = \int\limits_0^T e^{ixt} g_j(t, \theta)\, dt, \quad j = \overline{1, q}.$$

B6. Припустимо, що сім'я мір μ_T слабко збігається до міри μ:

$$\mu_T \Rightarrow \mu, \quad T \to \infty,$$

де міри μ_T визначені щільностями (75), а μ – додатно визначена матрична міра.

Ця умова означає, що елементи μ_{jl} матричнозначної міри μ є комплексними зарядами обмеженої варіації, а матриці $\mu(A)$ – невід'ємно означені для будь-якого $A \in \mathcal{L}$, де $\mathcal{L}$ – σ-алгебра вимірних за Лебегом підмножин в $\mathbb{R}$, а $\mu(\mathbb{R})$ – додатно визначена матриця.

Означення 3. *Додатно визначена матричнозначна міра*

$$\mu(dx, \theta^0) = \left(\mu^{jl}(x, \theta^0)\right)_{j,l=1}^q$$

називається спектральною мірою функції регресії $g(t, \theta^0)$ *[14], [15].*

Елементи $\mu^{jl}(x, \theta^0)$ можна визначити, користуючись наступними співвідношеннями [15]

$$R_{jl}(h, \theta^0) = \lim_{T \to \infty} d_{jT}^{-1}(\theta^0) d_{lT}^{-1}(\theta^0) \int\limits_0^T g_j(t + h, \theta^0) g_l(t, \theta^0)\, dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda h} \mu^{jl}(d\lambda; \theta^0), \ \ j, l = \overline{1, q}, \tag{76}$$

де, за припущенням, матрична функція $(R_{jl}(h; \theta^0))$ неперервна при $h = 0$.

Використовуючи співвідношення (76), можна довести [16], що тригонометрична функція регресії (11) має блочно-діагональну спектральну міру $\mu(d\lambda, \theta^0)$ з блоками

$$\begin{pmatrix} \varkappa_k & i\rho_k & \overline{\beta_k} \\ -i\rho_k & \varkappa_k & \overline{\gamma_k} \\ \beta_k & \gamma_k & \varkappa_k \end{pmatrix}, \ \ k = \overline{1, N}, \tag{77}$$

де

$$\beta_k = \frac{\sqrt{3}}{2C_k}(B_k \varkappa_k + iA_k \rho_k), \ \ \gamma_k = \frac{\sqrt{3}}{2C_k}(-A_k \varkappa_k + iB_k \rho_k),$$
$$C_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}, \ \ k = \overline{1, N}.$$

В (77) міри $\varkappa_k = \varkappa_k(d\lambda)$ та заряди $\rho_k = \rho_k(d\lambda)$ сконцентровані в точках $\pm\varphi_k$, причому $\varkappa_k\big(\{\pm\varphi_k\}\big) = \frac{1}{2}$, $\rho_k\big(\{\pm\varphi_k\}\big) = \pm\frac{1}{2}$.

Повертаючись до загального випадку, зафіксуємо параметр $\theta^0 \in \Theta$ функції регресії $g(t, \theta^0)$. Використаємо позначення

$$b_{iT}(t, \theta^0) = d_{iT}^{-1}(\theta^0) g_i(t, \theta^0)$$

та умову *B3(i)* при $R = 0$.

Наступна теорема є важливою частиною доведення асимптотичної нормальності ОНК $\hat{\theta}_T$ в моделі (1) і доведена в роботі [8].

Теорема 3. *За умов* ***A****,* ***B3(i)*** *та* ***B6*** *вектор*

$$\zeta_T = d_T^{-1}(\theta^0) \int_0^T \varepsilon(t) \nabla g(t, \theta^0)\, dt = \left(\int_0^T \varepsilon(t) b_{iT}(t, \theta^0)\, dt \right)_{i=1}^q \tag{78}$$

є асимптотично нормальним $N(0, \Sigma)$*, при* $T \to \infty$*,*

$$\Sigma = 2\pi \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) \mu(d\lambda; \theta^0) = d_2 \int_{-\infty}^{\infty} |a(\lambda)|^2 \mu(d\lambda; \theta^0).$$

Доведення. Для будь-якого $z=(z_1,...,z_q)\in\mathbb{R}^q$ позначимо

$$\eta_T=\langle\zeta_T,z\rangle=\int\limits_0^T\varepsilon(t)S_T(t)\,dt,\ \ S_T(t)=\sum_{i=1}^q b_{iT}(t,\theta^0)z_i.$$

За умови *B6*

$$\sigma^2(z)=\lim_{T\to\infty}\mathbb{E}\eta_T^2=2\pi\int\limits_{\mathbb{R}}f(\lambda)\mu_z(d\lambda;\theta^0),$$

$$\mu_z(d\lambda;\theta^0)=\sum_{i,j=1}^q\mu^{ij}(d\lambda;\theta^0)z_iz_j.$$

Для доведення теореми достатньо показати, що для будь-яких $z\in\mathbb{R}$ та $v\geq 1$

$$\lim_{T\to\infty}\mathbb{E}\eta_T^n=\mathbb{E}\eta^n=\begin{cases}(n-1)!!\sigma^n(z), & n=2v,\\ 0, & n=2v+1.\end{cases}\tag{79}$$

Використаємо формулу Леонова-Ширяєва [17]. Покладемо

$$I=\{1,2,...,n\},\ \ I_p=\left\{i_1,...,i_{l_p}\right\}\subset I,\ \ c(I_p)=c_{l_p}\left(t_{i_1},...,t_{i_{l_p}}\right).$$

Тоді

$$m(I)=m_n(t_1,...,t_n)=\sum_{A_r}\prod_{p=1}^r c(I_p),\tag{80}$$

де $\sum\limits_{A_r}$ – підсумовування за всіма невпорядкованими розбиттями $A_r=$ $=\left\{\bigcup\limits_{p=1}^r I_p\right\}$ множини I на множини $I_1,...,I_r$ такі, що $I=\bigcup\limits_{p=1}^r I_p,\ \ I_i\cap I_j=$ $=\varnothing,\ \ i\neq j.$

Отримуємо, що

$$\mathbb{E}\eta_T^n=\int\limits_{[0;T]^n}m_n(t_1,...,t_n)\prod_{k=1}^n R_T(t_k)\,dt_1...\,dt_n.\tag{81}$$

Застосувавши формулу (80) до (81), можна отримати (79), довівши, що

$$I(l)=\int\limits_{[0;T]^l}c_l(t_1,...,t_l)\prod_{k=1}^l R_T(t_k)\,dt_1...\,dt_l\to 0,\ \ T\to\infty\tag{82}$$

для $l=\overline{3,n}$. Беручи до уваги, що $\mathbb{E}\varepsilon(t)=0$, з (82) випливає, що в (79) всі непарні моменти $\mathbb{E}\eta^{2v+1}=0$. З іншого боку, для парних моментів $\mathbb{E}\eta^{2v}$ ми знайдемо, що в (81), завдяки (80), тільки ті члени відповідають розбиттям множини $I=\{1,2,...,2v\}$ на пари індексів, лишатимуться ненульовими, тобто «Гауссова частина»: всі $l_p=2$. В (80) буде $(2v-1)!!$ таких членів, і кожен з них буде дорівнювати $\sigma^{2v}(z)$.

Доведемо (82). З умови *B3(i)* випливає, що

$$\sup_{t\in[0;T]}|R_T(t)|\leq||\tilde{k}(0)||\cdot||z||\cdot T^{-\frac{1}{2}},\ \ \tilde{k}(0)=(\tilde{k}_1(0),...,\tilde{k}_q(0)),\ \ z=(z_1,...,z_q).$$

Використовуючи формулу (9), маємо

$$|I(l)=\left|\int\limits_{[0;T]^l}c_l(t_1-t_l,...,t_{l-1}-t_l,0)\prod_{k=1}^{l}R_T(t_k)\,dt_1...\,dt_l\right|\leq$$

$$\leq|d_l|\left|\int\limits_{\mathbb{R}}ds\int\limits_{[0;T]^l}\left(\prod_{k=1}^{l-1}\hat{a}(t_i-t_l-s)\right)\hat{a}(-s)\prod_{k=1}^{l}R_T(t_k)\,dt_1...\,dt_l\right|\leq$$

$$\leq|d_l|\int\limits_{\mathbb{R}}|\hat{a}(-s)|\int\limits_0^T\left(\int\limits_0^T|\hat{a}(t-t_l-s)R_T(t)|\,dt\right)^{l-1}|R_T(t_l)|\,dt_l\,ds\leq$$

$$\leq|d_l|\Big(||c||^{l-1}||z||^{l-1}||\hat{a}||_1^lT^{-\frac{l-1}{2}}\Big)\Big(||c||\cdot||z||T^{\frac{1}{2}}\Big)=$$

$$=|d_l|\cdot(||c||\cdot||z||\cdot||\hat{a}||_1)^l\cdot T^{-\left(\frac{l}{2}-1\right)}\to0,\ \ T\to\infty,\ \ l\geq3.\ \blacksquare \qquad (83)$$

Доведена теорема далі буде використана для отримання асимптотичної нормальності ОНК $\hat{\theta}_T$, заданої означенням 2, параметра нелінійної моделі регресії (1), що, в свою чергу, допоможе довести асимптотичну нормальність ОНК $\hat{\theta}_T$ з означення 1, параметра θ^0 тригонометричної моделі регресії (11).

Зауважимо, що подібну теорему було доведено в [7] за інших припущень щодо випадкового шуму $\varepsilon(t)$.

Теорема 4. *За умов* ***A***, ***B1*** – ***B6*** *та* ***CW*** *випадковий вектор* $\hat{u}_T =$ $= d_T(\theta^0)(\hat{\theta}_T - \theta^0)$ *при* $T \to \infty$ *є асимптотично нормальним* $N(0, \Gamma)$, *де*

$$\Gamma = 2\pi\left(\int\limits_{\mathbb{R}} \mu(d\lambda, \theta^0)\right)^{-1} \cdot \int\limits_{\mathbb{R}} f(\lambda)\mu(d\lambda, \theta^0) \cdot \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \mu(d\lambda, \theta^0)\right)^{-1} =$$

$$= d_2\left(\int\limits_{\mathbb{R}} \mu(d\lambda, \theta^0)\right)^{-1} \cdot \int\limits_{\mathbb{R}} |a(\lambda)|^2\mu(d\lambda, \theta^0) \cdot \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \mu(d\lambda, \theta^0)\right)^{-1}. \tag{84}$$

Доведення. Як було зазначено в (22),

$$L_T^i(u) = \int\limits_0^T \left(\varepsilon(t) - \sum_{l=1}^{q} \frac{g_l(t, \theta^0)}{d_{lT}(\theta^0)} u_l\right) \frac{g_i(t, \theta^0)}{d_{iT}(\theta^0)}\, dt = 0$$

або

$$\int\limits_0^T \varepsilon(t) \frac{g_i(t, \theta^0)}{d_{iT}(\theta^0)}\, dt = \sum_{l=1}^{q} \left(\int\limits_0^T \frac{g_l(t, \theta^0)}{d_{lT}(\theta^0)} \cdot \frac{g_i(t, \theta^0)}{d_{iT}(\theta^0)} \cdot u_l\, dt\right) =$$

$$= \sum_{l=1}^{q} J_{il,T}(\theta^0) u_l, \ \ i = \overline{1, q}.$$

Маємо наступну систему рівнянь відносно u:

$$J_T(\theta^0)u = d_T^{-1}(\theta^0) \int\limits_0^T \varepsilon(t) \nabla g(t, \theta^0)\, dt,$$

з якої випливає, що

$$\tilde{u}_T = (\tilde{u}_1, ..., \tilde{u}_q)^* = \Lambda_T(\theta^0) \int\limits_0^T \varepsilon(t) d_T^{-1}(\theta^0) \nabla g(t, \theta^0)\, dt = \Lambda_T(\theta^0)\zeta_T, \tag{85}$$

де $\Lambda_T(\theta^0) = J_T^{-1}(\theta^0)$.

Відмітимо, що з теореми 3 випливає, що вектор $\tilde{u}_T$ є асимптотично нормальним $N(0, \Gamma)$ при $T \to \infty$, де Γ задано формулою (84). Коваріаційна матриця вектора $\tilde{u}_T$ має вигляд

$$\Gamma_T = \Lambda_T(\theta^0) \sigma_T^2 \Lambda_T(\theta^0), \tag{86}$$

де σ_T^2 – коваріаційна матриця вектора ζ_T. Якщо $T \to \infty$, то

$$\Gamma = \lim_{T\to\infty} \Gamma_T = 2\pi \left(\int_{\mathbb{R}} \mu(d\lambda, \theta^0) \right)^{-1} \cdot \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\mu(d\lambda, \theta^0) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} \mu(d\lambda, \theta^0) \right)^{-1} =$$

$$= d_2 \left(\int_{\mathbb{R}} \mu(d\lambda, \theta^0) \right)^{-1} \cdot \int_{\mathbb{R}} |a(\lambda)|^2 \mu(d\lambda, \theta^0) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} \mu(d\lambda, \theta^0) \right)^{-1}. \qquad (87)$$

Доведемо, що функція розподілу $G_T(y, \theta^0)$ випадкового вектора $\hat{u}_T = d_T(\theta^0)(\hat{\theta}_T - \theta^0)$ при $T \to \infty$ збігається до функції розподілу гауссівського випадкового вектора

$$\Phi_{0,\Gamma}(y) = \Phi_{0,\Gamma}(\pi(y)), \;\; \pi(y) = (-\infty, y_1) \times ... \times (-\infty, y_q), \;\; y \in \mathbb{R}^q.$$

Покажемо, що для довільного $r > 0$

$$\Delta_T(r) = \mathbb{P}\{||\hat{u}_T - \tilde{u}_T|| > r\} \to 0, \;\; T \to \infty. \qquad (88)$$

Розглянемо подію $A_T = \{\tilde{u}_T \in V^c(R - r)\}$, де R таке, що внаслідок асимптотичної нормальності вектора $\tilde{u}_T$ та при $T > T_0$ виконується $\mathbb{P}\{\overline{A_T}\} \le \frac{\varepsilon}{3}$, де $\varepsilon > 0$ – мале фіксоване число.

Введемо ще одну подію

$$B_T = \Big\{ \max_{u \in V^c(R)} ||\Lambda_T(\theta^0)(\Psi_T(u) - L_T(u))|| \le r \Big\}.$$

З теореми редукції випливає, що для $T > T_0$ виконується

$$\mathbb{P}\{\overline{B_T}\} = \Big\{ \max_{u \in V^c(R)} ||\Lambda_T(\theta^0)(\Psi_T(u) - L_T(u))|| > r \Big\} \le$$

$$\le \mathbb{P}\Big\{ \lambda_{max} \Lambda_T(\theta^0) \max_{u \in V^c(R)} ||\Psi_T(u) - L_T(u)|| > r \Big\} =$$

$$\mathbb{P}\Big\{ \frac{1}{\lambda_{min}(J_T(\theta^0))} \max_{u \in V^c(R)} ||\Psi_T(u) - L_T(u)|| > r \Big\} \le$$

$$\le \mathbb{P}\Big\{ \max_{u \in V^c(R)} ||\Psi_T(u) - L_T(u)|| \ge \lambda_* r \Big\} \le \frac{\varepsilon}{3}.$$

Також введемо подію C_T, яка полягає в тому, що ОНК $\hat{u}_T$ є єдиним розв'язком системи рівнянь (20). Аналогічно до події B_T, з теореми єдиності випливає, що для $T > T_0$ $\mathbb{P}\{\overline{C_T}\} \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Отже, маємо, що

$$\mathbb{P}\{A_T \cap B_T \cap C_T\} = 1 - \varepsilon. \tag{89}$$

Зауважимо, що

$$\Lambda_T(\theta^0)L_T(u) = \Lambda_T(\theta^0)\left(\int\limits_0^T \varepsilon(t)\frac{g_i(t,\theta^0)}{d_{iT}(\theta^0)}\,dt\right)_{i=1}^q -$$

$$-\Lambda_T(\theta^0)\left(\sum_{l=1}^q u_l \int\limits_0^T \frac{g_l(t,\theta^0)}{d_{lT}(\theta^0)}\frac{g_i(t,\theta^0)}{d_{iT}(\theta^0)}\,dt\right)_{i=1}^q =$$

$$= \tilde{u}_T - \Lambda_T(\theta^0)\left(\sum_{l=1}^q u_l \cdot J_{il,T}(\theta^0)\right)_{i=1}^q$$

$$= \tilde{u}_T - u.$$

Якщо відбулась подія $A_T \cap B_T \cap C_T$, то для $u \in V^c(R)$ справедливо наступне:

$$||u + \Lambda_T(\theta^0)\Psi_T(u)|| =$$

$$||u + \Lambda_T(\theta^0)(\Psi_T(u) - L_T(u)) + \Lambda_T(\theta^0)L_T(u)|| =$$

$$= ||u + \tilde{u} - u + \Lambda_T(\theta^0)(\Psi_T(u) - L_T(u))|| \leq$$

$$\leq ||\tilde{u}|| + ||\Lambda_T(\theta^0)(\Psi_T(u) - L_T(u))|| \leq$$

$$\leq R - r + r = R.$$

Таким чином, $G_T(u) = u + \Lambda_T(\theta^0)\Psi_T(u)$ – неперервне відображення $V^c(R)$ в $V^c(R)$.

Для доведення (88) нам знадобиться теорема Брауера про нерухому точку [18].

Теорема 5 (Брауера)**.** *Якщо F – неперервне відображення $V^c(R)$ у себе, то існує $x_0 \in V^c(R)$ таке, що $F(x_0) = x_0$.*

Використавши теорему Брауера до $F_T(u)$, отримуємо, що існує точка $u_T^0 \in V^c(R)$ така, що $F_T(u_T^0) = u_T^0$, а з невиродженості $\Lambda_T(\theta^0) = J_T^{-1}(\theta^0)$ випливає, що $\Psi_T(u_T^0) = 0$. Оскільки, за нашим припущенням, виконується подія C_T, то єдиним розв'язком системи рівнянь $\Psi_T(u) = 0$ в кулі $V^c(R)$ є нормована ОНК $\hat{u}_T$, отже,

$$\{A_T \cap B_T \cap C_T\} \subset \{\hat{u}_T \in V^c(R)\} \text{ і } \mathbb{P}\{\hat{u}_T \in V^c(R)\} \geq 1 - \varepsilon.$$

Варто відмітити, що з (89) випливає

$$1 - \varepsilon \leq \mathbb{P}\big\{\{\hat{u}_T \in V^c(R)\} \cap B_T\big\} =$$

$$= \mathbb{P}\Big\{\{\hat{u}_T \in V^c(R)\} \cap \Big\{\max_{u \in V^c(R)} ||\Lambda_T(\theta^0)(\Psi_T(u) - L_T(u))|| \leq r\Big\}\Big\} \leq$$

$$\leq \mathbb{P}\{||\Lambda_T(\theta^0)(\Psi_T(\hat{u}_T) - L_T(\hat{u}_T))|| \leq r\} =$$

$$= \mathbb{P}\{||\Lambda_T(\theta^0) L_T(\hat{u}_T)|| \leq r\} =$$

$$= \mathbb{P}\{||\tilde{u}_T - \hat{u}_T|| \leq r\}. \tag{90}$$

Справедливість (88) випливає безпосередньо з (90).

Подальші міркування стандартні [7], [12], і наведені тільки для повноти викладення.

Розглянемо для $\varepsilon > 0$ та $A \in \mathfrak{B}^q$, де $\mathfrak{B}^q$ – σ - алгебра борелевих підмножин $\mathbb{R}^q$, множини

$$A_\varepsilon = \Big\{x \in \mathbb{R}^q : \inf_{y \in A} ||x - y|| < \varepsilon\Big\}, \;\; A_{-\varepsilon} = \mathbb{R}^q \setminus (\mathbb{R}^q \setminus A)_\varepsilon.$$

Беручи до уваги (88), отримуємо для функції розподілу

$$G_T(y, \theta^0) = \mathbb{P}\{\hat{u}_T \in \Pi(y)\}, \;\; y \in \mathbb{R}^q,$$

та для будь-яких $y \in \mathbb{R}^q$ і $\varepsilon > 0$

$$G_T(y, \theta^0) \geq \mathbb{P}\{\tilde{u}_T \in \Pi(y)_{-\varepsilon}\} - \Delta_T(\varepsilon), \tag{91}$$

$$G_T(y, \theta^0) \leq \mathbb{P}\{\tilde{u}_T \in \Pi(y)_{\varepsilon}\} + \Delta_T(\varepsilon). \tag{92}$$

Раніше вже було доведено, що для довільних $y \in \mathbb{R}^q$ та $\varepsilon > 0$

$$|\mathbb{P}\{\tilde{u}_T \in \Pi(y)_{\pm\varepsilon}\} - \Phi_{0,\Gamma}(\Pi(y)_{\pm\varepsilon})| \to 0, \;\; T \to \infty. \tag{93}$$

Позначимо $\varphi(y, \theta^0)$ як гауссівську щільність, яка відповідає функції розподілу $\Phi_{0,\Gamma}(y)$. Оскільки $\lambda_{min}(\Gamma) = \underline{\lambda} > 0, \;\; \lambda_{max}(\Gamma) = \overline{\lambda} < \infty$, то

$$\varphi(y, \theta^0) \leq (2\pi\underline{\lambda})^{-q/2} \exp\left\{ -\frac{||y||^2}{2\overline{\lambda}} \right\} = v(||y||).$$

Сформулюємо для $v(||y||)$ наступну теорему [19].

Теорема 6. *Якщо v — невід'ємна диференційовна на $[0; \infty)$ функція та така, що*

$$(1) \quad b = \int\limits_0^\infty |v'(\lambda)|\lambda^{q-1}\, d\lambda < \infty;$$

$$(2) \quad \lim_{\lambda \to \infty} v(\lambda) = 0,$$

то для будь-якої опуклої множини $C \in \mathfrak{B}^q$ та для довільних $\varepsilon, \delta > 0$ справедлива нерівність

$$\int\limits_{C_\varepsilon \setminus C_{-\delta}} v(||\lambda||)\, d\lambda \leq b\left(\frac{2\pi^{q/2}}{\Gamma(q/2)}\right)(\varepsilon + \delta).$$

Застосувавши вказану теорему до $v(||y||)$, отримуємо, що для будь-якого $\psi \neq 0$ виконується

$$|\Phi_{0,\Gamma}(\Pi(y)) - \Phi_{0,\Gamma}(\Pi(y)_\psi)| = \int\limits_{\Pi} \varphi(y, \theta^0)\, dy \leq b\left(\frac{2\pi^{q/2}}{\Gamma(q/2)}\right)|\psi|, \tag{94}$$

де

$$\Pi = \begin{cases} \Pi(y)_\psi \setminus \Pi^c(y), & \psi > 0, \\ \Pi(y) \setminus \Pi(y)_\psi, & \psi < 0. \end{cases}$$

Для будь-якого $y \in \mathbb{R}^q$ та довільного $\varepsilon > 0$

$$G_T(y, \theta^0) - \Phi_{0,\Gamma}(y) \leq$$

$$\leq \Delta_T(\varepsilon) + \mathbb{P}\{\tilde{u}_T \in \Pi(y)_\varepsilon\} - \Phi_{0,\Gamma}(y) \leq$$

$$\leq \Delta_T(\varepsilon) + |\mathbb{P}\{\tilde{u}_T \in \Pi(y)_\varepsilon\} - \Phi_{0,\Gamma}(y)| \leq$$

$$\leq \Delta_T(\varepsilon) + |\mathbb{P}\{\tilde{u}_T \in \Pi(y)_\varepsilon\} - \Phi_{0,\Gamma}(\Pi(y)_\varepsilon)| + |\Phi_{0,\Gamma}(\Pi(y)_\varepsilon) - \Phi_{0,\Gamma}(y)|; \quad (95)$$

$$\Phi_{0,\Gamma}(y) - G_T(y, \theta^0) \leq$$

$$\leq \Delta_T(\varepsilon) + \mathbb{P}\{\tilde{u}_T \in \Pi(y)_{-\varepsilon}\} - \Phi_{0,\Gamma}(y) \leq$$

$$\leq \Delta_T(\varepsilon) + |\Phi_{0,\Gamma}(y) - \mathbb{P}\{\tilde{u}_T \in \Pi(y)_{-\varepsilon}\}| \leq$$

$$\leq \Delta_T(\varepsilon) + |\Phi_{0,\Gamma}(\Pi(y)_{-\varepsilon}) - \mathbb{P}\{\tilde{u}_T \in \Pi(y)_{-\varepsilon}\}| + |\Phi_{0,\Gamma}(y) - \Phi_{0,\Gamma}(\Pi(y)_{-\varepsilon})|. \quad (96)$$

Отже, зі співвідношень (89) - (96), випливає, що

$$G_T(y, \theta^0) \to \Phi_{0,\Gamma}(y), \;\; y \in \mathbb{R}^q, \;\; T \to \infty. \;\blacksquare$$

Використавши (77) та той факт, що для тригонометричної функції регресії (11)

$$T^{-1} d^2_{3k-2,T}(\theta_0), \;\; T^{-1} d^2_{3k-1,T}(\theta_0) \to \frac{1}{2},$$
$$T^{-3} d^2_{3k,T}(\theta_0) \to \frac{1}{6}\big((A_k^0)^2 + (B_k^0)^2\big), \;\; T \to \infty,$$

можна сформулювати [7] наступну теорему.

Теорема 7. *За умови* $\boldsymbol{A}$ *та умов розрізнення параметрів* (12), (13) *для тригонометричної моделі* (1), (11), *нормована ОНК*

$$\Big(T^{\frac{1}{2}}(A_{1T} - A_1^0), T^{\frac{1}{2}}(B_{1T} - B_1^0), T^{\frac{3}{2}}(\varphi_{1T} - \varphi_1^0), ...,$$
$$T^{\frac{1}{2}}(A_{NT} - A_N^0), T^{\frac{1}{2}}(B_{NT} - B_N^0), T^{\frac{3}{2}}(\varphi_{NT} - \varphi_N^0)\Big)$$

є асимптотично нормальною $N(0, \Sigma_{TRIG})$, *де* Σ_{TRIG} *– блочно-діагональна матриця з блоками*

$$\frac{4\pi f(\varphi_k^0)}{(C_k^0)^2}\begin{pmatrix} (A_k^0)^2 + 4(B_k^0)^2 & -3A_k^0B_k^0 & -6B_k^0 \\ -3A_k^0B_k^0 & 4(A_k^0)^2 + (B_k^0)^2 & 6A_k^0 \\ -6B_k^0 & 6A_k^0 & 12 \end{pmatrix}, \;\; k = \overline{1, N},$$

причому $4\pi f(\varphi_k^0) = 2d_2|a(\varphi_k^0)|^2$.

Матриця Σ_{TRIG} є додатно визначеною, якщо $f(\varphi_k^0) > 0, \;\; k = \overline{1, N}$.

Висновки

У магістерській дисертації отримано асимптотичну нормальність ОНК параметрів нелінійної моделі регресії з неперервним часом спостереження та випадковим шумом, який задається лінійним стохастичним процесом, керованим процесом Леві. Доведено теорему редукції, яка дозволяє замінити вивчення асимптотичного розподілу ОНК в нелінійній моделі вивченням асимптотичного розподілу ОНК у віртуальній лінійній моделі. Отримано теорему асимптотичної єдиності ОНК параметрів нелінійної моделі регресії. Використавши центральну граничну теорему для зваженого інтегралу від Леві-керованого лінійного процесу та теорему Брауера про нерухому точку, доведено теорему про асимптотичну нормальність ОНК в сенсі Уолкера в загальній нелінійній моделі регресії. Нарешті, використавши результати останніх теорем, доведено асимптотичну нормальність ОНК для тригонометричної моделі регресії.

Логічним продовженням описаного дослідження є отримання властивостей асимптотичної нормальності періодограмних оцінок параметрів тригонометричної моделі регресії з лінійним Леві-керованим випадковим шумом.

Список використаних джерел

[1] Whittle P. The simultaneous estimation of a time series harmonic components and covariance structure / P. Whittle // Trabajos Estadistica. – 1952. – Vol. 3. – P. 43-47.

[2] Walker A. M. On the estimation of a harmonic component in a time series with stationary dependent residuals / A.M. Walker // Adv. Appl. Probab. – 1973. – Vol. 5. – P. 217-241.

[3] Hannan E. J. The estimation of frequency / E.J. Hannan // J. Appl. Probab. – 1973. – Vol. 10. – P. 510-519.

[4] Дороговцев А. Я. Теория оценок параметров случайных процессов / А.Я. Дороговцев // К.: Вища школа. – 1982. – 192 с.

[5] Кнопов П. С. Оптимальные оценки параметров стохастических систем / П.С. Кнопов // К.: Наукова думка. – 1980. – 151 с.

[6] Иванов А. В. Одно решение задачи о выявлении скрытых периодичностей / А.В. Иванов // Теория Вероят. и Матем. Статист. – 1979. – №20. – С. 44-59.

[7] Ivanov A. V. Estimation of harmonic component in regression with cyclically dependent errors / A.V. Ivanov, N.N. Leonenko, M.D. Ruiz-Medina, B.M. Zhurakovsky // Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics. – 2015. – V. 49, 1. – P. 156-186.

[8] Ivanov A. V. On the Whittle estimator for linear random noise spectral density parameter in continuous-time nonlinear regression models / A.V. Ivanov, N.N. Leonenko, I.V. Orlovskyi // Statistical Inference for Stochastic Processes. – 2020. – V. 23. – P. 129-169.

[9] Середенко І. О. Асимптотичні властивості оцінок параметрів нелінійної регресії з лінійним випадковим шумом. // Десята всеукраїнська наукова конференція молодих математиків. Нац. техн. ун-т України «КПІ ім. І. Сікорського». – Київ. – 2021. – С. 41-42.

[10] Rajput B. Spectral representations of infinity divisible processes / Rajput B., Rosinski, J. // Theory Rel. Fields 82. – 1989. – P. 451-487.

[11] Avram F. On a Szeg¨o type limit theorem, the H¨older-Young-Brascamp-Lieb inequality, and the asymptotic theory of integrals and quadratic forms of stationary fields / Avram F., Leonenko N., Sakhno L. // ESAIM: PS. 14 – 2010. – P. 210-255.

[12] Драбик Т. О. Асимптотична нормальність оцінки найменших квадратів у тригонометричній регресії з сильно залежним шумом. / Т. О. Драбик, О. В. Іванов // Вісник Київського нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка (серія: фіз-мат. Науки), № 4. – 2019, – С. 24-41.

[13] Wilkinson J. H. The algebraic eigenvalue problem /J. H. Wilkinson // Oxford: Clarendon Press. – 1965. - P. 680.

[14] Grenander U. On thee stimation of regression coufficients in the case of an autocorrelated disturbance / U. Grenander // Ann. Math. Statist. – 1954. – Vol.25, 2. – P. 252-272.

[15] Ибрагимов И. А. Гауссовские случайные процессы /И. А. Ибрагимов, Ю. А. Розанов // М.: Наука. –1970. – С. 384.

[16] Ivanov A. V. A solution of the problem of detecting hidden periodicities / A. V. Ivanov // Theor. Probability and Math. Statist. – 1980. – №20. –P. 51-68.

[17] Иванов А. В. Статистический анализ случайных полей / А. Я. Иванов, Н. Н. Леоненко // К.: Вища Школа. – 1986. С. 216.

[18] Гончаренко Ю. В. Теорема Брауэра / Ю.В. Гончаренко, С.И. Ляшко // К.: "КИЙ". – 2000. – С. 48.

[19] Бхаттачария Р. Н. Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения /Р. Н. Бхаттачария, Р. Ранга Рао // М.: «Наука». – 1982. – С. 286.