Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
фізико-математичний факультет
кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

«На правах рукопису»
УДК ________________

До захисту допущено:
Завідувач кафедри
________ Олег КЛЕСОВ
«14» травня 2021 р.

Магістерська дисертація

на здобуття ступеня магістра
за освітньо-науковою програмою «Страхова та фінансова математика»
зі спеціальності 111 Математика
на тему: «Оцінка мінімального контрасту параметра спектральної щільності лінійного випадкового шуму нелінійної регресії з дискретним часом»

Виконала:
студентка II курсу магістратури, групи ОМ-91мн
Яремко Катерина Сергіївна ___________

Керівник:
кандидат ф.-м. н., доцент
Орловський Ігор Володимирович ___________

Рецензент:
кандидат ф.-м. н., доцент
Млавець Юрій Юрійович ___________

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студентка ___________

Київ – 2021 року

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
фізико-математичний факультет
кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти — другий (магістерський) за освітньо-професійною програмою.
Спеціальність — 111 «Математика»
Освітньо-наукова програма «Страхова та фінансова математика».

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри
____ Олег КЛЕСОВ
«04» лютого 2021 р.

ЗАВДАННЯ
на магістерську дисертацію студентці
Яремко Катерині Сергіївні

1. **Тема дисертації** «Оцінка мінімального контрасту параметра спектральної щільності лінійного випадкового шуму нелінійної регресії з дискретним часом», науковий керівник дисертації Орловський Ігор Володимирович, кандидат фізико-математичних наук, доцент, затверджена наказом по університету від « 26 » березня 2021 р. № 901-с
2. **Термін здачі** студентом оформленої дисертації « 13 » травня 2021 р.
3. **Об'єкт дослідження** нелінійна модель регресії з дискретним часом.
4. **Предмет дослідження** консистентність оцінки Уітла параметрів спектральної щільності лінійного випадкового шуму вказаної моделі регресії.

5. **Перелік завдань, які потрібно розробити**

1) Ознайомитись з літературою щодо оцінки Уітла параметрів спектральної щільності випадкових процесів.

2) Сформулювати умови щодо випадкового шуму нелінійної моделі регресії.

4) Дослідити асимптотичні властивості періодограми залишків.

3) Сформулювати умови та довести теорему про консистентність оцінки Уітла.

6. **Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного матеріалу)** 18 слайдів.

7. **Перелік публікацій**

1) Яремко К.С., Орловський І.В. Оцінка мінімального контрасту параметра спектральної щільності лінійного випадкового шуму нелінійної регресії з дискретним часом // X Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених з математики та фізики. — 16-17 квітня, 2021. — Київ. — С.56-57, Url: http://matan.kpi.ua/public/files/2021/ysXconf/ysXabstracts.pdf.

8. **Дата видачі завдання** « 04 » лютого 2021 р.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1.	Отримання завдання та узгодження плану роботи	04.02.2020-09.02.2021	Виконано
2.	Огляд літератури	10.02.2021-20.02.2021	Виконано
3.	Визначення блоку умов щодо випадкового шуму в заданій моделі	21.02.2021-3.03.2021	Виконано
4.	Отримання умов консистентності оцінки Уітла	4.03.2021-14.03.2021	Виконано

5.	Вивчення ядер Феєра та їх багатовимірних аналогів	15.03.2021-24.03.2021	Виконано
6.	Дослідження асимптотичних властивостей періодограми залишків	25.03.2021-16.04.2021	Виконано
7.	Доведення теореми про консистентність	17.04.2021-28.04.2021	Виконано
8.	Оформлення роботи	29.04.2021-12.05.2021	Виконано

Науковий керівник І. В. Орловський

Завдання прийняла до виконання К.С. Яремко

РЕФЕРАТ

Магістерська дисертація: 43 сторінки, 1 рисунок, 36 першоджерел.

Мета роботи полягає у дослідженні консистентності оцінки Уітла параметра спектральної щільності лінійного випадкового шуму в нелінійній моделі регресії. Слід зазначити, що випадковий шум не обов'язково є гаусcівським.

Об'єкт дослідження — нелінійна модель регресії з дискретним часом та лінійним випадковим шумом.

Предмет дослідження — консистентність оцінки Уітла параметрів спектральної щільності випадкового шуму вказаної моделі регресії.

Результатом дисертаційної роботи є отримання достатніх умов консистентності оцінки Уітла параметрів спектральної щільності лінійного випадкового шуму в нелінійній моделі регресії.

Дослідження мають теоретичний характер, але можуть бути застосовані в багатьох сферах, зокрема в статистичному аналізі, метеорології, геофізиці, економіці, статистичній радіофізиці, фінансах тощо.

Результати магістерської дисертації доповідались на X Всеукраїнській науковій конференції молодих математиків.

Ключові слова: оцінка Уітла, оцінка мінімального контрасту, спектральна щільність, лінійний випадковий шум, нелінійна модель регресії, консистентість, оцінка найменших квадратів.

ABSTRACT

Master's thesis: 43 pages, 1 drawing, 36 primary sources.

The aim of the work is to study the consistency properties of the Whittle estimator of the linear random noise spectral density parameters in a nonlinear regression model. It should be noted that random noise is not necessarily Gaussian.

The object of research is the nonlinear regression model with discrete-time and linear random noise.

The subject of research is the consistency of Whittle's estimator of parameters of the random noise spectral density of the specified regression model.

Sufficient conditions of the consistency of Whittle's estimation of the parameters of the spectral density of linear random noise in the nonlinear regression model are obtained in the master's thesis.

The research made in this work is theoretical but can be applied in many fields, including statistical analysis, meteorology, geophysics, economics, statistical radiophysics, finance, and so on.

The results of the master's thesis were presented at the X All-Ukrainian Scientific Conference of Young Mathematicians.

Keywords: Whittle estimator, minimum contrast estimator, spectral density, linear random noise, nonlinear regression model, consistency, least-squares estimator.

Зміст

ВСТУП

Проблематика дисертації відноситься до статистики випадкових процесів, яка є важливою галуззю сучасної теорії ймовірностей та математичної статистики. У роботі зосереджено увагу на такому важливому аспекті дослідження, як вивчення регресійних моделей і оцінка функціональних характеристик випадкового шуму. Для дослідження в роботі використано модель регресії типу «сигнал + шум». Складністю такої постановки задачі є те, що «сигнал» в цьому випадку стає заважаючим і ускладнює аналіз випадкового шуму. Тоді, щоб нейтралізувати його присутність, ми повинні оцінити параметр.

Першим кроком є застосування оцінки найменших квадратів (ОНК) для невідомого параметра нелінійної регресії. Вибір такої оцінки є доцільним з огляду на широку вживаність, дослідженість та простоту обчислення. Асимптотичні властивості ОНК в нелінійній моделі регресії вивчались багатьма авторами, ми зішлемось лише на монографії Іванова О.В. [8], Іванова О.В. і Леоненка М. М. [9] та Іванова О.В. і Приходька В. В. [2], в яких міститься, зокрема, великий бібліографічних джерел, з даної тематики.

Наступним кроком є побудова оцінки параметра спектральної щільності лінійного випадкового шуму. У якості такої оцінки в даній роботі було обрано оцінку Уітла, названу на честь новозеландського математика і статистика П. Уітла. Дана оцінка була запропонована ще в 50-х роках минулого століття, а на сьогоднішній час її результати утворюють розвинену теорія, що охоплює різні математичні моделі стохастичних процесів і полів.

Праці Уітла та інших сучасних авторів на цю тему наведемо в посиланнях далі: P.Whittle [10], [11], Hannan [12], [13], Dunsmuir, Hannan [14], Guyon

[15], Rosenblatt [16], Fox, Taqqu [17], Dahlhaus [18], Heyde, Gay [19], [20] Giraitis, Surgailis [21], Giraitis, Taqqu [22], Gao та ін. [23], Gao [24] Leonenko, Sakhno [25], Bahamonde,Doukhan [26], Ginovyan, Sahakyan [27], Avram та ін. [29], Anh та ін. [28], Bai та ін. [30], Ginovyan та ін. [31], Giraitis та ін. [32].

У статті Koul, Surgailis [33] в моделі лінійної регресії асимптотичні властивості оцінювача Уітла сильно залежних параметрів спектральної щільності випадкових шумів вивчались в дискретному часі.

У роботі [2] отримано достатні умови щодо консистенції Уітла параметра спектральної щільності гауссового стаціонарного випадкового шуму, а стаття [1] продовжує це дослідження, поширюючи його на випадок Леві керованого лінійного випадкового шуму. Дослідження дисертаційної роботи мають теоретичний характер, але можуть бути застосовані в багатьох сферах, зокрема в статистичному аналізі, метеорології, геофізиці, економіці, статистичній радіофізиці, фінансах тощо.

Отриманий результат доповнює результат праці Іванова О.В., Леоненко Н. Н., Орловського І. В. [1] на випадок дискретного часу.

В дисертації використовувалась схема доведення робіт [1], [2] та допоміжні результати [3] і [4], де описувались властивості ядер Феєра.

Розділ 1

Умови для параметрів моделі регресії

1.1 Постановка задачі

На ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ розглянемо модель регресії:

$$X_j = g(j, \alpha_0) + \varepsilon_j, \quad j \geq 1, \tag{1.1}$$

де $g(j, \cdot) : A_\beta \to \mathbb{R}, j \geq 1,$ – неперервні функції, $A_\beta = \bigcup\limits_{\|e\| \leq 1} (A + \beta e), \beta > 0$ – деяке число, $A \subset \mathbb{R}^q$ – обмежена опукла відкрита множина, $\alpha_0 \in A$ – істинне значення параметра.

Відносно шуму $\varepsilon = \{\varepsilon_j, j \in \mathbb{Z}\}$ припустимо наступну умову:

A1. $\varepsilon_j, j \in \mathbb{Z}$, є лінійним часовим рядом вигляду:

$$\varepsilon_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{a}(j-k)\xi_k \tag{1.2}$$

де $\xi_k, k \in \mathbb{Z}$, – незалежні однаково розподілені випадкові величини з $E\xi_0 = 0$, $E{\xi_0}^4 < \infty$ та $\hat{a} \in l_1$.

Позначимо:

$$c_r(j_1, \ldots, j_r) = i^{-r} \frac{\partial^r}{\partial z_1 \ldots \partial z_r} \ln E \exp \left\{ i \sum_{k=1}^{r} z_k \varepsilon_{j_k} \right\} \Bigg|_{z_1 = \ldots = z_r = 0}, \tag{1.3}$$

як кумулянту функції відповідно до порядку $r, r \geq 1$, часового ряду ε.

Тоді вираз для кумулянти часового ряду ε задається формулою

$$c_r(j_1, \ldots j_r) = d_r \sum_{i \in \mathbb{Z}} \prod_{k=1}^{r} \hat{a}(j_k - i), \tag{1.4}$$

де d_r – r-та кумулянта випадкової величини ξ_0. Зокрема,

$$d_2 = E\xi_0^2, \quad d_4 = E\xi_0^4 - 3(E\xi_0^2)^2. \tag{1.5}$$

З умови А1 випливає існування спектральних щільностей лінійного часового ряду ε до четвертого порядку включно. Загальний вигляд спектральної щільності порядку r, для лінійного часового ряду ε, має вигляд

$$f_r(\lambda_1, \ldots, \lambda_{r-1}) = (2\pi)^{-r+1} d_r\, a\left(\sum_{k=1}^{r-1} \lambda_k\right) \prod_{k=1}^{r-1} a(\lambda_k), \tag{1.6}$$

де $a(\lambda) = \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} \hat{a}(j)e^{-i\lambda j}$, $\lambda \in [-\pi; \pi]$, $a \in L_2[-\pi; \pi]$.

Для $r = 2$ спектральна щільність другого порядку буде мати вигляд

$$f_2(\lambda) = d_2 a(\lambda) a(-\lambda),$$

Для зручності позначимо $f_2(\lambda) = f(\lambda)$.

А2. Припустимо, що $a(\lambda) = a(\lambda, \theta^{(1)})$, $d_2 = d_2(\theta^{(2)}), \theta = (\theta^{(1)}, \theta^{(2)}) \in \Theta_\tau, \Theta_\tau = \bigcup\limits_{\|e\|<1} (\Theta + \tau e)$, $\tau > 0$ — деяке число, $\Theta \subset \mathbb{R}^m$ — обмежена відкрита опукла множина, тобто спектральна щільність випадкового процесу ε

$$f(\lambda) = f(\lambda, \theta),$$

де $\theta \in \Theta_\tau$,$\theta_0 \in \Theta$ – істинне значення параметра.

Означення 1.1. Будь-який випадковий вектор $\hat{\alpha} = (\hat{\alpha}_{1N}, \ldots, \hat{\alpha}_{qN})' \in A$, який має властивість

$$Q_N(\hat{\alpha}_N) = \min_{\tau\in A^c} Q_N(\tau), \qquad Q_N(\tau) = \sum_{j=1}^{N} [X_j - g(j, \tau)]^2,$$

де A^c замикання множини A, називається оцінкою найменших квадратів (ОНК) невідомого параметра α_0, отриманого за спостереженнями $\{X_j, j = \overline{1, N}\}$.

Розглянемо залишкову періодограму

$$I_N(\lambda, \hat{\alpha}_N) = \frac{1}{2\pi N}\left|\sum_{j=1}^{N} e^{-ij\lambda}(X_j - g(j, \hat{\alpha}_N))\right|^2, \qquad \lambda \in [-\pi; \pi]$$

і поле контрасту Уітла буде наступним:

$$U_N(\theta, \hat{\alpha}_N) = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\ln f(\lambda, \theta) + \frac{I_N(\lambda)}{f(\lambda, \theta)} \right) d\lambda, \ \theta \in \Theta^c. \tag{1.7}$$

Означення 1.2. Оцінкою мінімального контрасту (ОМК) для невідомого параметра $\theta_0 \in \Theta$ називають випадковий вектор $\hat{\theta}_N = (\hat{\theta}_{1N}, \ldots, \hat{\theta}_{mN})$ такий що

$$U_N(\hat{\theta}_N; \hat{\alpha}_N) = \min_{\theta \in \Theta^c} U_N(\theta; \hat{\alpha}_N),$$

1.2 Додатковий блок умов

Нехай функція $g(j,\alpha)$, $j \geq 1$, у (1.1) неперервно диференційовна відносно $\alpha \in A^c$.

Позначимо

$$g_i(j,\alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} g(j,\alpha), i = \overline{1,q},$$

$$d_N(\alpha) = \mathrm{diag}(d_{iN}(\alpha), i = \overline{1,q}), \quad d_{iN}^2(\alpha) = \sum_{j=1}^{N} g_i^2(j,\alpha),$$

і $\liminf\limits_{N\to\infty} N^{-\frac{1}{2}} d_{iN}(\alpha) > 0, i = \overline{1,q}$, $\alpha \in A_j$.

Тоді

$$\Phi_N(\alpha_1,\alpha_2) = \sum_{j=1}^{N} (g(j,\alpha_1) - g(j,\alpha_2))^2, \quad \alpha_1,\alpha_2 \in A^c.$$

.

Припустимо, що виконуються наступні умови:

C1. ОНК $\hat{\alpha_N}$ є слабко консистентною оцінкою $\alpha_0 \in A$ у наступному розумінні

$$N^{-\frac{1}{2}} d_N(\alpha_0)(\hat{\alpha}_N - \alpha_0) \xrightarrow{P} 0, \quad N \to \infty.$$

C2. Існує така константа $c_0 < \infty$, що для будь-яких $\alpha_0 \in \Theta$ і $N > N_0$, де c_0 і N_0 можуть залежати від α_0,

$$\Phi_N(\alpha;\alpha_0) \leq c_0 \| d_N(\alpha_0)(\alpha - \alpha_0)\|^2, \quad \alpha \in A^c.$$

C3. $f(\lambda,\theta_1) \neq f(\lambda,\theta_2)$ на множині додатної міри Лебега, при $\theta_1 \neq \theta_2$, $\theta_1,\theta_2 \in \Theta^c$.

C4. Функція $f(\lambda,\theta)$ неперервна за $\theta \in \Theta^c$ для майже всіх $\lambda \in [-\pi;\pi]$ причому існують $c_1, c_2 \in (0;\infty)$ такі, що для $(\lambda,\theta) \in [-\pi;\pi] \times \Theta^c$ виконується

$$c_1 < f(\lambda,\theta) < c_2.$$

Розділ 2

Допоміжні твердження

2.1 Часові ряди

Нижче викладено деякі результати роботи [35].

Часовий ряд — це послідовність змінних, значення яких представляють однаково віддалені спостереження явища з часом. Ми можемо написати часовий ряд X_j в загальному випадку як

$$X_j = \alpha_0 + \alpha_1 X_{j-1} + \ldots + \alpha_N X_{j-N} + \varepsilon_j, j \geq 1$$

де ε_j — білий шум. Деякі спостереження $X_j, j = \overline{1, N}$ — це рівні часового ряду, з кількістю рівнів N.

Статистичне явище, що розповсюджується в часі за законами теорії ймовірностей називається *стохастичним процесом.* Далі ми будемо називати його просто *процесом.* Аналізуючи часовий ряд, ми розглядаємо його, як реалізацію стохастичного процесу.

Стохастичний процес буде *стаціонарним*, якщо його математичне сподівання, дисперсія і коваріація випадкової величини X_j не залежать від часу. Тоді з припущення про стаціонарність середнє значення і дисперсія будуть константою і матимуть вигляд

$$M = E[X_j]$$

$$D = E[(X_j - M)^2]$$

Крім того, середнє значення M стохастичного процесу можна оцінити за допомогою вибіркового середнього числового ряду

$$\bar{X_N} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} X_j,$$

а дисперсію — за допомогою вибіркової дисперсії

$$\hat{D}_N = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} (X_j - \bar{X_N})^2.$$

Модель часових рядів — це інструмент, який використовується для прогнозування майбутніх значень ряду шляхом аналізу залежності між значеннями, що спостерігаються в ряді, і часом їх виникнення. Моделі часових рядів можуть бути розроблені з використанням різноманітних статистичних методів часових рядів. Методика, що з'являється в цій галузі — це використання нейроних мереж, оголошених універсальним апроксиматором для нелінійних моделей.

2.2 Процес ковзного середнього

Ковзне середнє є одними з найбільш простих і популярних індикаторів в математичній статистиці, оскільки є основою багатьох методів розрахунку числових рядів. Цей метод являє собою узагальнення відомих даних шляхом знаходження середнього арифметичного послідовних менших наборів даних. Також ковзне середнє іноді називають лінією тренда. Чим менший параметр ковзного середнього, тим швидше воно визначає нову тенденцію, але й одночасно робить більше помилкових коливань, і навпаки чим більший параметр (довге ковзне середнє), тим повільніше визначається новий тренд, але надходить менше помилкових коливань. Його можна обчислити за формулою

$$S_j = \frac{\sum\limits_{j=1}^{N} X_j}{N},$$

де X_j — числова характеристика процесу, а N — кількість періодів.

Один з найбільш серйозних недоліків ковзного середнього полягає в тому, що цей метод надає однакові оцінки як новим даним, так і більш старими, хоча логічніше було б припустити, що нові дані важливіші, тому що відображають більш близьку ситуацію до поточного моменту. Також при використанні методу ковзного середнього для торгівлі по тренду запізнювання на вході і на виході з тренда як правило дуже значне, тому в більшості випадків втрачається велика частина трендового руху [36].

2.3 Ядра Феєра

В математиці ядро Феєра використовується для знаходження суми за Чезаро рядів Фур'є або перетворень Фур'є. Воно назване на честь угорського математика Ліпота Фейер (1880–1959).

Ядро Феєра задається як:

$$F_N(u) = \frac{1}{u+1}\frac{\sin^2\left(\frac{(N+1)u}{2}\right)}{\sin^2\frac{u}{2}}.$$

Багатовимірним аналогом ядра Фейєра є функція $F_N^{(k)}(u_1,\ldots,u_k),\ k\geq 3$, яка має наступний вигляд

$$\begin{aligned} F_N^{(k)}(u_1,\ldots,u_k) = F_N^{(k)}(u_{1,\ldots},u_{k-1}) = (2\pi)^{-(k-1)}N^{-1}\sum_{j=1}^{N} e^{i\sum\limits_{s=1}^{k} j_s u_s} = \\ = (2\pi)^{-(k-1)}N^{-1}\prod_{i=1}^{k}\frac{\sin\frac{Nu_s}{2}}{\sin\frac{u_s}{2}}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

де $u_k = -(u_1+\ldots+u_{k-1}), \quad u_s\in[-\pi;\pi]$.

Властивості:

1) $\sup\limits_N \int\limits_{-\pi}^{\pi}\ldots\int\limits_{-\pi}^{\pi}|F_N^{(k)}(u_1,\ldots,u_k)|du_1\ldots du_k<\infty$;

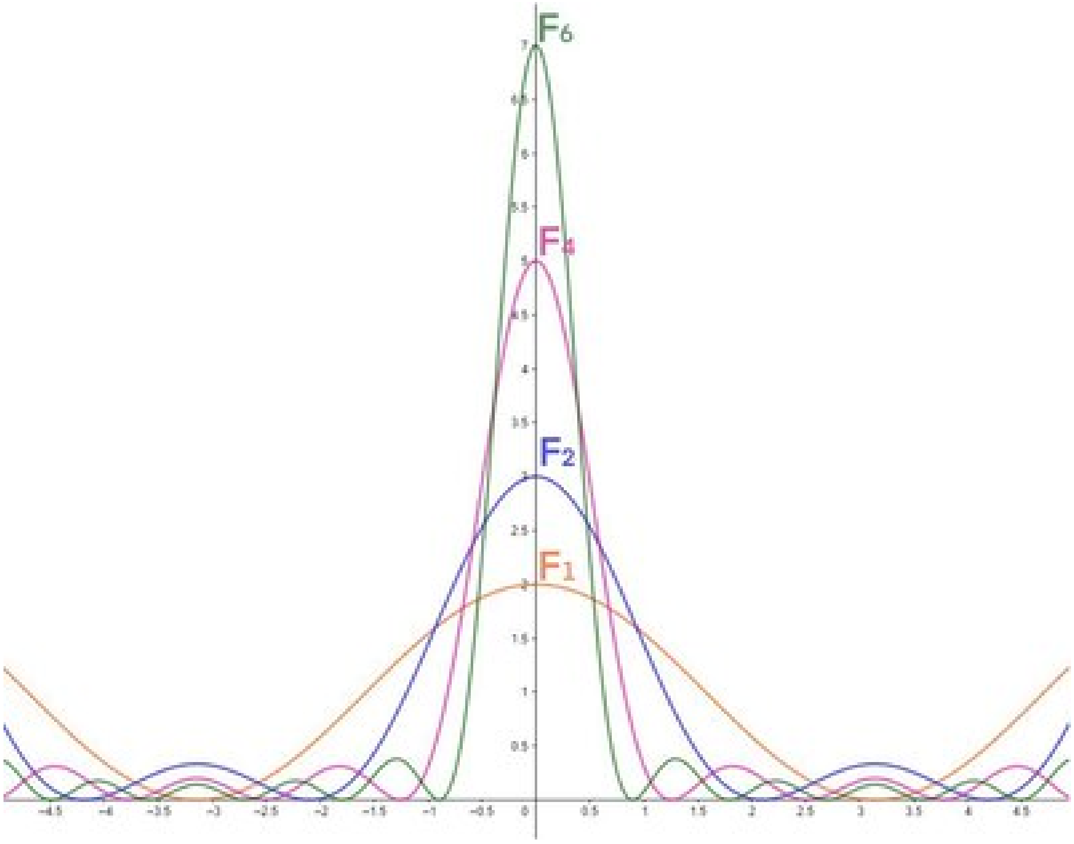
2) $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ldots\int\limits_{-\pi}^{\pi}F_N^{(k)}(u_1,\ldots,u_k)du_1\ldots du_k=1$;

3) для кожного $s>0$, при $N\geq 2$

$$\int\limits_{|u|\leq\pi\ |u|\leq s}\ldots\int|F_N^{(k)}(u_1,\ldots,u_k)|du_1\ldots du_k = O\left(\frac{\ln^k N}{N\sin\frac{s}{2}}\right),$$

де $\{|u|\leq\alpha\} = \{(u_1,\ldots,u_k): |u_n|\leq\alpha, n=\overline{1,k}\}$.

Наступний малюнок ілюструє графіки деяких ядер Феєра.



Наступне твердження базується на результатах Бенктуса [3], [4].

Лема 2.1. *Нехай функція* $G(u_1, \ldots, u_k), \quad u_k = -(u_1 + \ldots + u_{k-1})$ *обмежена і неперервна в точці* $(u_1, \ldots, u_{k-1}) = (0, \ldots, 0)$. *Тоді*

$$\lim_{N\to\infty} \int\limits_{[-\pi;\pi]^{k-1}} F_N^k(u_1, \ldots, u_{k-1}) G(u_1, \ldots, u_k) du_1 \ldots \cdot du_{k-1} = G(0, \ldots, 0).$$

2.4 Спектральна щільність та її властивості

У цьому розділі наведені деякі результати робіт [7], [6] та [5].

Математичне сподівання і дисперсія є важливими характеристиками випадкового процесу, але вони не дають достатнього уявлення про те, який характер матимуть окремі реалізації випадкового процесу.

Якщо, до прикладу, виникне ситуація, де реалізація двох випадкових процесів, зовсім різних за своєю структурою, але мають однакові значення математичного сподівання і дисперсії, то для більш детальної характеристики внутрішньої структури, тобто врахувати зв'язок між значеннями випадкового процесу в різні моменти часу необхідно обчислити кореляційну функцію випадкового процесу.

Нехай $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ — ймовірнісний простір і $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, ...)$ — деякий часовий ряд випадкових величин. Позначимо $\omega_j \zeta$ часовий ряд $(\zeta_{j+1}, \zeta_{j+2}, ...)$.

Означення 2.1. Часовий ряд ζ є стаціонарним в вузькому сенсі, якщо для будь-якого $j \geq 1$ розподіли ймовірностей $\omega_j \zeta$ і ζ співпадають, тобто

$$P\{(\zeta_1, \zeta_2, ...) \in \mathbb{B}\} = P\{(\zeta_{j+1}, \zeta_{j+2}, ...) \in \mathbb{B}, \quad \mathbb{B} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{\infty}). \tag{2.2}$$

Звідси, зокрема, випливає що якщо $E\zeta_1^2 < \infty$ то $E\zeta_j$ не залежить лише від j

$$E\zeta_j = E\zeta_1, \tag{2.3}$$

а коваріація $K(\zeta_{j+k}, \zeta_j) = E(\zeta_{j+k} - E\zeta_{j+k})(\zeta_j - E\zeta_j)$ залежить лише від k

$$K(\zeta_{j+k}, \zeta_j) = K(\zeta_{1+k}, \zeta_1) \tag{2.4}$$

Стаціонарним в широкому сенсі часовим рядом (з скінченним другим моментом) буде часовий ряд для якого умова (2.2) заміняється умовами (2.3) і (2.4).

Нехай $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, то якщо $\zeta, \eta \in \mathbb{R}^2$, тоді

$$(\zeta, \eta) = E\zeta\eta \tag{2.5}$$

і норма

$$\|\zeta\| = (\zeta, \zeta)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.6}$$

Якщо $\zeta, \eta \in \mathbb{R}^2$, то їх кореляцію назвем величину

$$K(\zeta, \eta) = E(\zeta - E\zeta)(\eta - E\eta). \tag{2.7}$$

З (2.3) і (2.7) випливає, що якщо $E\zeta = E\eta = 0$, то

$$K(\zeta, \eta) = (\zeta, \eta). \tag{2.8}$$

Означення 2.2. Часовий ряд $\zeta = \{\zeta_j, j \in \mathbb{Z}\}$ з $E|\zeta_j|^2 < \infty, j \in \mathbb{Z}$ є стаціонарним в широкому сенсі, якщо для всіх $j \in \mathbb{Z}$ виконується

$$E\zeta_k = E\zeta_0, \qquad K(\zeta_{j+k}, \zeta_j) = K(\zeta_j, \zeta_0), k \in \mathbb{Z} \tag{2.9}$$

Для спрощення викладу далі будемо припускати, що $E\zeta_0 = 0$.

Означення 2.3. Фукнцію $B(k)$ будемо називати функцією кореляції, якщо виконується

$$B(j) = K(\zeta_j, \zeta_0), j \in \mathbb{Z}. \tag{2.10}$$

Безпосередньо з (2.10) випливає, що кореляційна функція $B(j)$ є невід'ємною, тобто для будь-яких чисел $a_1, \ldots, a_m$ і будь-яких $t_1, \ldots, t_m$, $m \geq 1$, виконується

$$\sum_{i,l=1}^{m} a_i a_l B(t_i - t_l) \geq 0.$$

В свою чергу звідси випливають наступні властивости кореляціної функції:

1) $B(0) \geq 0$,

2) $B(-j) = B(j)$,

3) $|B(j)| \leq B(0)$,

При дослідженні автоматичних систем управління зручно користуватися такою характеристикою стаціонарного випадкового процесу як спектральна щільність.

У багатьох випадках, особливо при вивченні перетворення стаціонарних випадкових процесів лінійними системами управління, спектральна щільність виявляється більш зручною характеристикою, ніж кореляційна функція.

Фізичний зміст спектральної щільності це характеристика розподілу потужності сигналу за частотним спектром. Спектральну щільність можна визначити експериментально через середню величину квадрата амплітуди гармонік реалізації випадкового процесу. Прилади, що застосовують для цього, називаються спектрометрами.

Аналітично, термін спектральна щільність визначається наступним чином.

Означення 2.4. *Спектральною щільністю* стаціонарного випадкового процесу X_j називають функцію $f_X(u)$ яка пов'язана з кореляційної функцією $B(j)$ взаємно-оберненими перетвореннями Фур'є:

$$f_X(u) = \sum_{j=1}^{\infty} B(j) e^{-iuj},$$

$$B(j) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{\infty} f_X(u) e^{iuj}.$$

Ці формули називають *формулами Вінера-Хінчина.*

Властвості спектральної щільності

1) $f_X(u) \geq 0$,

2) $f_X(-u) = s_X(u)$,

3) $\lim\limits_{u \to \infty} f_X(u) = 0$,

Загалом кореляційна функція $K_X(j)$ і спектральна щільність $f_X(u)$ стаціонарного в широкому сенсі випадкового процесу мають всі властивості, характерні для пари взаємних перетворень Фур'є. Зокрема, чим «ширше» спектральна щільність, тим «вужче» кореляційна функція і навпаки. Цей результат кількісно виражається у вигляді принципу або співвідношення невизначеності.

2.5 Деякі властивості лінійних випадкових процесів

Результати наведені в підрозділі спираються на результати [1].

Припустимо, що випадковий процес ε задовольняє умові **A1**.

Позначимо

$$m_r(j_1,\dots,j_r) = E\varepsilon(j_1)\dots\varepsilon(j_r), \tag{2.11}$$

як момент функції відповідно до порядку $r, r\ \geq 1$, часового ряду ε.

Тоді з умови **A1** маємо

$$m_2(j_1,j_2) = E\varepsilon(j_1)\varepsilon(j_2) = B(j_1-j_2),$$

де

$$B(j) = d_2\sum_{i\in\mathbb{Z}} \hat{a}(j+i)\hat{a}(i), \quad j\geq 1, \tag{2.12}$$

є функцією коваріації ε, функція четвертого моменту задається

$$\begin{gathered} m_4(j_1,j_2,j_3,j_4) = c_4(j_1,j_2,j_3,j_4) + m_2(j_1,j_2)m_2(j_3,j_4)+ \\ +m_2(j_1,j_3)m_2(j_2,j_4) + m_2(j_1,j_4)m_2(j_2,j_3). \end{gathered} \tag{2.13}$$

Лема 2.2. *За умови* ***A1***

$$\nu_N^* = N^{-1}\sum_{j=1}^{N}\varepsilon^2(j)\xrightarrow{P} B(0), \quad N\to\infty. \tag{2.14}$$

Доведення. Для будь-якого $\rho>0$ за нерівністю Чебишева:

$$P\{|\nu_N^* - B(0)|\geq\rho\} \leq \frac{E(\nu_N^*-B(0))^2}{\rho^2} = \rho^{-2}\,E\left(N^{-1}\sum_{j=1}^{N}\varepsilon^2(j) - B(0)\right)^2 =$$

$$= \rho^{-2}E\left(N^{-2}\sum_{j=1}^{N}\varepsilon^2(j)\,\sum_{k=1}^{N}\varepsilon^2(k) - 2N^{-1}B(0)\sum_{j=1}^{N}\varepsilon^2(j) + B^2(0)\right) =$$

$$= \rho^{-2}N^{-1}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}E\varepsilon^2(j)\varepsilon^2(k) - 2\rho^{-2}N^{-1}B(0)\sum_{j=1}^{N}E\varepsilon^2(j) + \rho^{-2}B^2(0)$$

Оскільки $B(0)$, то $EB^2(0) = B^2(0),\ E\varepsilon^2(j) = B(0)$.

Користуючись формулами (2.11) і (2.13) :

$$E\varepsilon^2(j)\varepsilon^2(k) = m_4(j,j,k,k) = m_4(j_1,j_2,j_3,j_4) = c_4(j_1,j_2,j_3,j_4)+$$

$$m_2(j_1,j_2)m_2(j_3,j_4) + m_2(j_1,j_3)m_2(j_2,j_4) + m_2(j_1,j_4)m_2(j_2,j_3),$$

де $m_2(j,j) = B(0),\ m_2(k,k) = B(0),\ m_2(j,k) = B(j-k)$ отримаємо:

$$P\{|\nu_N^* - B(0)| \geq \rho\} \leq \rho^{-2}N^{-2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}(c_4(j,j,k,k) + B^2(0) +$$

$$+ 2B^2(j-k)) + \rho^{-2}B^2(0) =$$

$$= \rho^{-2}N^{-2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} c_4(j,j,k,k) + \rho^{-2}N^{-2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} B^2(0) +$$

$$+ \rho^{-2}N^{-2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} 2B^2(j-k) - \rho^{-2}B^2(0) =$$

$$= \rho^{-2}N^{-2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} c_4(j,j,k,k) + 2\rho^{-2}N^{-2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} B^2(j-k) = I_1 + I_2$$

Користуючись формулою (1.4) розпишемо I_1.

$$I_1 = \rho^{-2}N^{-2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} c_4(j,j,k,k) =$$

$$= \rho^{-2}N^{-2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} d_4\sum_{i\in\mathbb{Z}} \hat{a}^2(j-i)\hat{a}^2(k-i) =$$

$$\leq d_4\rho^{-2}N^{-2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i\in\mathbb{Z}} \hat{a}^2(j-i)\sum_{k=1}^{N}\hat{a}^2(k-i) \leq$$

$$\leq d_4\rho^{-2}N^{-2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i\in\mathbb{Z}} \hat{a}^2(i)\sum_{k=1}^{N}\hat{a}^2(k) \leq$$

$$= d_4\rho^{-2}N^{-1}\|\hat{a}\|_2^4,$$

де $\|\hat{a}\|_2 = \left(\sum\limits_{i\in\mathbb{Z}} |a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, а те, що $\hat{a} \in l_2$ випливає з того, що $\hat{a} \in l_1$.

Тобто $I_1 = O(N^{-1})$.

З умови **A1** випливає, що коваріаційна функція $B \in l_1$.

Дійсно,

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |B(j)| = \sum_{j\in\mathbb{Z}} |d_2 \sum_{i\in\mathbb{Z}} \hat{a}(j+i)\hat{a}(i)| \leq$$
$$\leq d_2 \sum_{j\in\mathbb{Z}} \sum_{i\in\mathbb{Z}} |\hat{a}(j+i)\hat{a}(i)| = d_2 \sum_{i\in\mathbb{Z}} |\hat{a}(i)| \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\hat{a}(j+i)| =$$
$$= d_2 \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} |\hat{a}(i)| \right)^2 < \infty,$$

оскільки $\hat{a} \in l_1$. Це означає, що також $B \in l_2$, а тому

$$I_2 = 2\rho^{-2} N^{-2} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} B^2(j-k) \leq 2\rho^{-2} N^{-2} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k\in\mathbb{Z}} B^2(j-k) =$$
$$= 2\rho^{-2} N^{-1} \|B\|_2^2$$

Тобто, $I_2 = O(N^{-1})$.

Таким чином для довільного $\rho > 0$ виконується

$$P\left\{|v_N^* - B(0)| \geq \rho\right\} \to 0, N \to \infty.$$

Лему доведено.

$\square$

2.6 Оцінка залишкової періодограми

Позначимо

$$g_N(\lambda, \alpha) = \sum_{j=1}^{N} e^{-ij\lambda} g(j, \alpha), \quad S_N(\lambda, \alpha) = g_N(\lambda, \alpha_0) - g_N(\lambda, \alpha)$$

$$\varepsilon_N(\lambda) = \sum_{j=1}^{N} e^{-\mathrm{i}j\lambda} \varepsilon_j, \quad I_N^{\varepsilon} = (2\pi N)^{-1} |\varepsilon_N(\lambda)|^2.$$

Запишемо залишкову періодограму у вигляді:

$$I_N(\lambda, \hat{\alpha}_N) = (2\pi N)^{-1} \left| \sum_{j=1}^{N} e^{-ij\lambda} (X_j - g(j, \hat{\alpha}_N)) \right|^2 =$$

$$= (2\pi N)^{-1} \sum_{j=1}^{N} e^{-ij\lambda} (X_j - g(j, \hat{\alpha}_N)) \sum_{k=1}^{N} e^{ik\lambda} (X_k - g(k, \hat{\alpha}_N)).$$

Знаючи, що $X_j = g(j, \alpha_0) + \varepsilon_j$, отримаєм наступне:

$$I_N(\lambda, \hat{\alpha}_N) = (2\pi N)^{-1} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} e^{-ij\lambda} e^{ik\lambda} (g(j, \hat{\alpha}_0) - g(j, \hat{\alpha}_N) + \varepsilon_j) \cdot$$

$$\cdot\, (g(k, \hat{\alpha}_0) - g(k, \hat{\alpha}_N) + \varepsilon_k)) =$$

$$= (2\pi N)^{-1} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} e^{-ij\lambda} e^{ik\lambda} (g(j, \hat{\alpha}_0) - g(j, \hat{\alpha}_N))(g(k, \hat{\alpha}_0) - g(k, \hat{\alpha}_N)) +$$

$$+ (2\pi N)^{-1} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} e^{-ij\lambda} e^{ik\lambda} (g(j, \hat{\alpha}_0) - g(j, \hat{\alpha}_N)) \varepsilon_k) +$$

$$+ (2\pi N)^{-1} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} e^{-ij\lambda} e^{ik\lambda} (g(k, \hat{\alpha}_0) - g(k, \hat{\alpha}_N)) \varepsilon_j +$$

$$+ (2\pi N)^{-1} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} e^{-ij\lambda} e^{ik\lambda} \varepsilon_j \varepsilon_k.$$

З властивостей комплексного числа: $Re\, z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$. Тоді

$$I_N(\lambda, \hat{\alpha}_N) = (2\pi N)^{-1} |S_N(\lambda, \hat{\alpha}_N)|^2 + 2(2\pi N)^{-1} Re\{\varepsilon_N(\lambda) \overline{S_N(\lambda, \hat{\alpha}_N)}\} +$$

$$+ (2\pi N)^{-1} |\varepsilon_N(\lambda)|^2 = (2\pi N)^{-1} |S_N(\lambda, \hat{\alpha}_N)|^2 +$$

$$+ (\pi N)^{-1} Re\{\varepsilon_N(\lambda) \overline{S_N(\lambda, \hat{\alpha}_N)}\} + I_N^{\varepsilon}.$$

Нехай $\varphi = \varphi(\lambda;\theta), (\lambda;\theta) \in [-\pi;\pi] \times \Theta^c$, буде парною вимірною за Лебегом відносно змінної λ для кожного фіксованого θ ваговою функцією.

Розглянемо

$$I_N(\varphi, \hat{\alpha}_N) = \int_{-\pi}^{\pi} I_N(\lambda, \hat{\alpha}_N)\varphi(\lambda,\theta)d\lambda = (2\pi N)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} |S_N(\lambda, \hat{\alpha}_N)|^2 \varphi(\lambda,\theta)d\lambda +$$
$$+\ (\pi N)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} Re\{\varepsilon_N(\lambda)\overline{S_N(\lambda, \hat{\alpha}_N)}\}\varphi(\lambda,\theta)d\lambda + \int_{-\pi}^{\pi} I_N^{\varepsilon}\varphi(\lambda,\theta)d\lambda =$$
$$= J_N^{(1)}(\varphi) + J_N^{(2)}(\varphi) + J_N^{e}(\varphi).$$

Припустимо

$$\varphi(\lambda;\theta) \geq 0, \sup_{\lambda\in[-\pi,\pi],\theta\in\Theta} \varphi(\lambda;\theta) = c(\varphi) < \infty. \tag{2.15}$$

Використовуючи нерівність Коші-Буняковського

$$|J_N^{(2)}(\varphi)| \leq 2c(\varphi)\left((2\pi N)^{-1}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\varepsilon_N(\lambda)|^2 d\lambda\right)^{\frac{1}{2}} \cdot$$
$$\cdot \left((2\pi N)^{-1}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |S_N(\lambda, \hat{\alpha}_N)| d\lambda\right)^{\frac{1}{2}}.$$

За умовою **C2** і рівністю Парсеваля

$$\begin{aligned}&(2\pi N)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} |S_N(\lambda, \hat{\alpha}_N)|^2 d\lambda = N^{-1}\Phi(\hat{\alpha}_N, \alpha_0) \leq \\ &\leq c_0 N^{-1}\|d_N(\alpha_0)(\hat{\alpha}_N - \alpha_0)\|^2,\end{aligned} \tag{2.16}$$

а тому

$$|J_N^{(2)}(\varphi)| \leq 2c_0^{\frac{1}{2}}(\varphi)(\nu_N^*)^{\frac{1}{2}}\|N^{-\frac{1}{2}}d_N(\alpha_0)(\hat{\alpha}_N - \alpha_0)\|,$$

де ν_N^* задано (2.14).

Беручи до уваги умови **A1**, **C1**, **C2** і Лему 2.2 отримаємо

$$\sup_{\theta\in\Theta^c} |J_N^{(2)}(\varphi)| \xrightarrow{P} 0, \quad N \xrightarrow{P} \infty. \tag{2.17}$$

З іншого боку використовуючи (2.16)

$$J_N^{(1)}(\varphi) \leq c(\varphi)(2\pi N)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi} |S_N(\lambda, \hat{\alpha}_N)|^2 d\lambda \leq$$
$$\leq c_0 c(\varphi) N^{-1}\|d_N(\alpha_0)(\hat{\alpha}_N - \alpha_0)\|^2,$$

і завдяки **C1**, **C2** отримаємо наступне

$$\sup_{\theta\in\Theta^c} |J_N^{(1)}(\varphi)| \xrightarrow{P} 0, \quad N \xrightarrow{P} \infty. \tag{2.18}$$

Лема 2.3. *Припустимо, що виконуються умови* ***A1***, ***A2*** *і ведена вище вагова функція* $\varphi(\lambda;\theta)$ *задовольняє* (2.15)*. Тоді, при* $N \to \infty$

$$J_N^e(\varphi) \xrightarrow{P} J(\varphi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda,\theta_0)\varphi(\lambda,\theta)d\lambda, \quad \theta \in \Theta^c$$

Доведення. Нам достатньо довести, що

$$1) EJ_N^\varepsilon(\varphi) \to J(\varphi); \quad 2) J_N^\varepsilon(\varphi) - EJ_N^\varepsilon(\varphi) \xrightarrow{P} 0. \tag{2.19}$$

З того, що $I_N^\varepsilon(\lambda) = (2\pi N)^{-1} \left| \sum\limits_{j=1}^{N} e^{-\mathrm{i}j\lambda}\varepsilon_j \right|^2$, маємо:

$$EJ_N^\varepsilon(\varphi) = E\int\limits_{-\pi}^{\pi} I_N^\varepsilon(\lambda)\varphi(\lambda,\theta)d\lambda = \int\limits_{-\pi}^{\pi} (2\pi N)^{-1} \sum_{j,k=1}^{N} E\varepsilon_j\varepsilon_k e^{-ij\lambda}e^{ik\lambda}\varphi(\lambda,\theta)d\lambda =$$

$$= (2\pi N)^{-1} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sum_{j,k=1}^{N} B(j-k)e^{-i(j-k)\lambda}\varphi(\lambda,\theta)d\lambda =$$

$$= (2\pi N)^{-1} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{j,k=1}^{N} \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(u,\theta_0)e^{i(j-k)u}du \right) e^{-i(j-k)\lambda} \right) \varphi(\lambda,\theta)d\lambda =$$

$$= (4\pi^2 N)^{-1} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(\lambda,\theta)d\lambda \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sum_{j,k=1}^{N} e^{i(j-k)u-i(j-k)\lambda} f(u,\theta_0)du =$$

$$= (4\pi^2 N)^{-1} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(\lambda,\theta)d\lambda \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{j=1}^{N} e^{ij(u-\lambda)} \sum_{k=1}^{N} e^{ik(\lambda-u)} \right) f(u,\theta_0)du =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(\lambda,\theta)d\lambda \int\limits_{-\pi}^{\pi} F_N^{(2)}(u-\lambda)f(u,\theta_0)du,$$

де $F_N^{(2)}(u-\lambda) = F_N^{(2)}(u-\lambda, \lambda-u)$ – ядро Феєра, яке задається рівністю (2.1).

Зробимо заміну змінних $t = u - \lambda$

$$EJ_N^{\varepsilon}(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(\lambda,\theta)d\lambda\int\limits_{-\pi-\lambda}^{\pi-\lambda}\Phi_N(t)f(t+\lambda,\theta_0)dt =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(\lambda,\theta)d\lambda\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Phi_N(t)f(t+\lambda,\theta_0)dt \tag{2.20}$$

в силу періодичності ядра $\Phi_N(t)$ та спректральної щільності $f(t,\theta_0)$.

Отже,

$$EJ_N^{\varepsilon}(\varphi) = \int\limits_{-\pi}^{\pi}G_2(t)\Phi_N(t)dt, \quad G_2(t) = \int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t+\lambda,\theta_0)\varphi(\lambda,\theta)d\lambda; \tag{2.21}$$

Оскільки, використовуючи (2.15) та періодичність спектральної щільності f

$$|G_2(t)| \leq c(\varphi)\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t+\lambda,\theta_0)dt = c(\varphi)\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(\lambda,\theta_0)dt = c(\varphi)B(0),$$

то функція $G_2(t)$ є обмеженою. Неперервність функції $G_2(t)$ випливає з умов теореми. Тоді застосовуючи Лему 2.1 до (2.21) будемо мати

$$EJ_N^{\varepsilon}(\varphi) \to G_2(0) = \int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t+\lambda,\theta_0)\varphi(\lambda,\theta)d\lambda = J(\varphi)$$

і умову 1) з формули (2.19) виконано.

Для доведення 2) з (2.19) достатньо показати, що

$$DJ_N^{\varepsilon} \to 0, N \to \infty.$$

Розглянемо

$$DJ_N^{\varepsilon}(\lambda) = E(J_N^{\varepsilon}(\varphi))^2 - (EJ_N^{\varepsilon}(\varphi))^2 =$$
$$= (2\pi N)^{-2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{j,k=1}^{N}\sum_{l,s=1}^{N}E\varepsilon_j\varepsilon_k\varepsilon_l\varepsilon_s e^{-i(j-k)\lambda}e^{-i(l-s)\mu}\right)\varphi(\lambda,\theta)\varphi(\mu,\theta)d\lambda d\mu -$$
$$-(2\pi^N)^{-2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(B(j-k)B(l-s)e^{-i(j-k)\lambda}e^{-i(l-s)\mu}\right)\varphi(\lambda,\theta)\varphi(\mu,\theta)d\lambda d\mu.$$

Використаємо (2.11) і (2.13)

$$E\varepsilon_j\varepsilon_k\varepsilon_l\varepsilon_s = m_4(j,k,l,s) =$$
$$= c_4(j,k,l,s) + m_2(j,k)m_2(l,s) + m_2(j,l)m_2(k,s) + m_2(j,s)m_2(k,l) =$$
$$= c_4(j,k,l,s) + B(j-k)B(l-s) + B(j-l)B(k-s) + B(j-s)B(k-l).$$

Тоді

$$DJ_N^{\varepsilon}(\varphi) = (2\pi N)^{-2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sum_{j,k,l,s=1}^{N}(c_4(j,k,l,s) + B(j-l)B(k-s)+$$
$$+B(j-s)B(k-l))e^{-i(j-k)\lambda - i(l-s)\mu}\varphi(\lambda,\theta)\varphi(\mu,\theta)d\lambda d\mu = I_3 + I_4 + I_5.$$

Помітимо, що

$$(2\pi^N)^{-2}\sum_{j,k,l,s=1}^{N} c_4(j,k,l,s)e^{-i(j-k)\lambda - i(l-s)\mu} =$$
$$= (2\pi^N)^{-2}\sum_{j,k,l,s=1}^{N} c_4(j-s,k-s,l-s,0)e^{-i(j-k)\lambda - i(l-s)\mu} =$$
$$= (2\pi^N)^{-2}\sum_{j,k,l,s=1}^{N}\int\limits_{[-\pi,\pi]^3} f_4(u_1,u_2,u_3)e^{i[(j-s]u_1+(k-s)u_2+(l-s)u_3]}\cdot$$
$$\cdot\, e^{-i[(j-k)\lambda+(l-s)\mu]}du_1du_2du_3 =$$
$$= \frac{2\pi}{N}\int\limits_{[-\pi,\pi]^3}\left((8\pi^3N)^{-1}\sum_{j,k,l,s=1}^{N} e^{i[(u_1-\lambda)j+(u_2+\lambda)k+(u_3-\mu)l+(\mu-u_1-u_2-u_3)s]}\right)\cdot$$
$$\cdot\, f_4(u_1,u_2,u_3)du_1du_2du_3 =$$
$$= \frac{2\pi}{N}\int\limits_{[-\pi,\pi]^3} F_N^{(4)}(u_1-\lambda,u_2+\lambda,u_3-\mu)f_4(u_1,u_2,u_3)du_1du_2du_3,$$

де $F_N^{(4)}$ є ядром Феєра (2.1) при $k=4$.

Тоді

$$I_3 = (2\pi^N)^{-2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sum_{j,k,l,s=1}^{N} c_4(j,k,l,s) e^{-i(j-k)\lambda - i(l-s)\mu} \varphi(\lambda,\theta)\varphi(\mu,\theta) d\lambda d\mu =$$

$$= \frac{2\pi}{N} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left[\int\limits_{[-\pi,\pi]^3} F_N^{(4)}(u_1-\lambda, u_2+\lambda, u_3-\mu) f_4(u_1,u_2,u_3) du_1 du_2 du_3 \right] \cdot$$

$$\cdot \varphi(\lambda,\theta)\varphi(\mu,\theta) d\lambda d\mu =$$

$$= \frac{2\pi}{N} \int\limits_{[-\pi,\pi]^3} F_N^{(4)}(v_1,v_2,v_3) G_4(v_1,v_2,v_3) dv_1 dv_2 dv_3,$$

де

$$G_4(v_1,v_2,v_3) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f_4(v_1+\lambda, v_2-\lambda, v_3+\mu) \varphi(\lambda,\theta)\varphi(\mu,\theta) d\lambda d\mu,$$

результат отримується аналогічно (2.20) заміною змінних

$$v_1 = u - \lambda, v_2 = u_2 + \lambda, v_3 = u_3 - \mu,$$

та використанням періодичності функцій $F_N^{(4)}$ та f.

Неперервність G_4 випливає з умов леми, а тому нам достатньо показати обмеженість.

Помітимо, що завдяки (1.6)

$$|G_4(v_1,v_2,v_3)| \leq d_4 (2\pi)^{-3} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |a(\lambda+v_1) a(-\lambda+v_2)\varphi(\lambda,\theta) d\lambda \cdot$$

$$\cdot \int\limits_{-\pi}^{\pi} |a(\mu+v_3) a(-\mu-v_1-v_2-v_3)| \varphi(\mu,\theta) d\mu \leq$$

$$\leq d_4 c^2(\varphi) (2\pi)^{-3} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |a(\lambda+v_1) a(-\lambda+v_2) \varphi d\lambda \cdot$$

$$\cdot \int\limits_{-\pi}^{\pi} |a(\mu+v_3) a(-\mu-v_1-v_2-v_3)| d\mu \leq$$

$$\leq d_4 c^2(\varphi)(2\pi)^{-3}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}|a(\lambda+v_1)|^2 d\lambda\int\limits_{-\pi}^{\pi}|a(-\lambda+v_2)|^2 d\lambda\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\int\limits_{-\pi}^{\pi}|a(\mu+v_3)|^2 d\mu\int\limits_{-\pi}^{\pi}|a(-\mu-v_1-v_2-v_3)|^2 d\mu\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$= d_4 c^2(\varphi)(2\pi)^{-3}\|a\|_2^4,$$

де

$$\|a\|_2=\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}|a(\lambda)|^2 d\lambda\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.22}$$

Застосовуючи Лему (2.1) до $G_4(v_1,v_2,v_3)$, будемо мати

$$\int\limits_{[-\pi,\pi]^3} F_N^{(4)}(v_1,v_2,v_3)G_4(v_1,v_2,v_3)\to G_4(0,0,0),$$

звідки

$$I_3\to 0, N\to\infty. \tag{2.23}$$

За аналогією

$$(2\pi N)^{-2}\sum_{j,k,l,s=1}^{N}B(j-l)B(k-s)e^{-i(j-k)\lambda-i(l-s)\mu}=$$

$$=(2\pi N)^{-2}\sum_{j,k,l,s=1}^{N}\left[\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(u_1,\theta_0)f(u_2,\theta_0)e^{i(j-s)u_1}e^{i(k-l)u_2}du_1du_2\right]\cdot$$

$$\cdot e^{-i(j-k)\lambda-i(l-s)\mu}=$$

$$=\frac{2\pi}{N}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(8\pi^3N)^{-1}\sum_{j,k,l,s=1}^{N}e^{i[(u_1-\lambda)+k(u_2+\lambda)-l(u_1+\mu)+s(-u_2+\mu)]}\cdot$$

$$\cdot f(u_1,\theta_0)f(u_2,\theta_0)du_1du_2=$$

$$=\frac{2\pi}{N}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}F_N^{(4)}(u_1-\lambda,u_2+\lambda,-u_1-\mu)f(u_1,\theta_0)f(u_2,\theta_0)du_1du_2$$

і

$$I_4 = (2\pi N)^{-2} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j,k,l,s=1}^{N} B(j-l)B(k-s)e^{-i(j-k)\lambda - i(l-s)\mu}\varphi(\lambda,\theta)\varphi(\mu,\theta)d\lambda d\mu =$$

$$= \frac{2\pi}{N} \int_{[-\pi,\pi]^3} F_N^{(4)}(v_1,v_2,v_3)G_5(v_1,v_2,v_3)dv_1dv_2dv_3,$$

де

$$G_5(v_1,v_2,v_3) = \int_{-\pi}^{\pi} f(v_1+\lambda,\theta_0)f(v_2-\lambda,\theta_0)\varphi(\lambda,\theta)\varphi(-v_1-v_3-\lambda,\theta)d\lambda.$$

Для застосування Леми 2.1 достатньо показати обмеженість G_5.

$$|G_5(v_1,v_2,v_3)| \le d_4c^2(\varphi)\int_{-\pi}^{\pi} |f(v_1+\lambda,\theta_0)||f(v_2-\lambda,\theta_0)|d\lambda \le$$

$$\le c^2(\varphi)\left(\int_{-\pi}^{\pi} f^2(v_1+\lambda,\theta_0)d\lambda \int_{-\pi}^{\pi} f^2(v_2-\lambda,\theta_0)d\lambda\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= c^2(\varphi)\|f\|_2^2 < \infty$$

і тому

$$I_4 \to 0, N \to \infty. \tag{2.24}$$

Отримання того, що

$$I_5 \to 0, N \to \infty \tag{2.25}$$

є аналогічним доведенню (2.24).

З (2.23) — (2.25) випливає виконання умови 2) з (2.19).

З виконання обох умов (2.19) випливає результат даної Леми. □

Наслідок 2.1. *Якщо* $\varphi(\lambda,\theta) = \frac{1}{f(\lambda,\theta)}$, *то за умов* ***A1***, ***A2***, ***C1***, ***C2*** *і* ***C4***

$$U_N(\theta,\hat{\alpha}_N) \xrightarrow{P} U_N(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi}(\ln f(\lambda,\theta) + \frac{f(\lambda,\theta_0)}{f(\lambda,\theta)})d\lambda, \theta \in \Theta^c.$$

Доведення.

$$U_N(\theta, \hat{\alpha}_N) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\ln f(\lambda, \theta) + \frac{I_N(\lambda, \hat{\alpha}_N)}{f(\lambda, \theta)} \right) d\lambda =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln f(\lambda, \theta) d\lambda + \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{I_N(\lambda, \hat{\alpha}_N)}{f(\lambda, \theta)} d\lambda$$

Перший доданок є константою. За умовою **C4** вагова функція $\varphi(\lambda, \theta) = \frac{1}{f(\lambda,\theta)}$ буде задовольняти умовам Леми 2.3.

Тоді

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\lambda, \theta)}{I_N(\lambda, \hat{\alpha}_N)} d\lambda \xrightarrow{P} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\lambda, \theta_0)}{f(\lambda, \theta)} d\lambda.$$

Наслідок доведено. □

Розглянемо функцію контрасту Уітла

$$K(\theta, \theta_0) = U(\theta) - U(\theta_0) = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{f(\lambda, \theta_0)}{f(\lambda, \theta)} - 1 - \ln \frac{f(\lambda, \theta_0)}{f(\lambda, \theta)} \right) d\lambda \geq 0,$$

де $K(\theta, \theta_0) = 0$ тоді дише тоді, коли $\theta = \theta_0$, що випливає з умови **C3**.

Лема 2.4. *Якщо виконуються умови **A1**, **A2**, **C1**, **C2** і **C2**, то*

$$\sup_{\theta \in \Theta^c} |U_N(\theta, \hat{\alpha}_N) - U(\theta)| \xrightarrow{P} 0, N \to \infty.$$

Доведення. Нехай $\{\theta_j, j = \overline{1, N_j}\}$ δ - сітка множини Θ^c. Нехай $\theta \in \Theta$. Тоді існує $k \in \{1, \ldots, N_\delta\}$ таке, що $\|\theta - \theta_k\| \leq \delta$.

Тоді

$$|U_N(\theta, \hat{\alpha}_N) - U(\theta)| \leq |U_N(\theta, \hat{\alpha}_N) - U(\theta) - (U_N(\theta_k, \hat{\alpha}_N) - U(\theta_k))| +$$

$$+ |U_N(\theta_k, \hat{\alpha}_N) - U(\theta_k)| \leq \sup_{\|\theta_1 - \theta_2\| \leq \delta} |U_N(\theta_1, \hat{\alpha}_N) - U(\theta_1) -$$

$$- (U_N(\theta_2, \hat{\alpha}_N) - U(\theta_2))| + \max_{1 \leq j \leq N_\delta} |U_N(\theta_j, \hat{\alpha}_N) - U(\theta_j)|.$$

З останнього випливає, що для кожного $\rho \geq 0$ маємо

$$P\{\sup_{\theta \in \Theta^c} |U_N(\theta, \hat{\alpha}_N) - U_N(\theta)| \geq \rho\} \leq$$

$$\leq P\{\sup_{\|\theta_1 - \theta_2\| \leq \delta} |U_N(\theta_1, \hat{\alpha}_N) - U_N(\theta_1) - (U_N(\theta_2, \hat{\alpha}_N) - U_N(\theta_2))| \geq \frac{\rho}{2}\} +$$

$$+ P\{\max_{1 \leq j \leq N_\delta} |U_N(\theta_j, \hat{\alpha}_N) - U_N(\theta_j)| \geq \frac{\rho}{2}\} = P_1 + P_2$$

За Наслідком 2.1

$$P_2 = \{\max_{1\le j\le N_\delta} |U_N(\theta_j, \hat{\alpha}_N) - U_N(\theta_j)| \le \frac{\rho}{2}\} \to 0, N \to \infty.$$

З іншого боку,

$$P_1 = P\left\{\sup_{\|\theta_1-\theta_2\|\le\delta} |U_N(\theta_1, \hat{\alpha}_N) - U_N(\theta_1) - (U_N(\theta_2, \hat{\alpha}_N) - U_N(\theta_2))| \ge \frac{\rho}{2}\right\} \le$$

$$\le P\left\{\sup_{\|\theta_1-\theta_2\|\le\delta} \left|\int_{-\pi}^{\pi} \left(\ln f(\lambda,\theta_1) + \frac{I_N(\lambda,\hat{\alpha}_N)}{f(\lambda,\theta_1)}\right) d\lambda - \right.\right.$$

$$- \int_{-\pi}^{\pi} \left(\ln f(\lambda,\theta_1) + \frac{f(\lambda,\theta_0)}{f(\lambda,\theta_1)}\right) d\lambda - \int_{-\pi}^{\pi} \left(\ln f(\lambda,\theta_2) + \frac{I_N(\lambda,\hat{\alpha}_N)}{f(\lambda,\theta_2)}\right) d\lambda +$$

$$\left.\left. + \int_{-\pi}^{\pi} \left(\ln f(\lambda,\theta_1) + \frac{f(\lambda,\theta_0)}{f(\lambda,\theta_2)}\right) d\lambda \right| \ge \frac{\rho}{2}\right\} \le$$

$$\le P\left\{\sup_{\|\theta_1-\theta_2\|\le\delta} \left|\int_{-\pi}^{\pi} \ln f(\lambda,\theta_1) + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{I_N(\lambda,\hat{\alpha}_N)}{f(\lambda,\theta_1)} d\lambda - \int_{-\pi}^{\pi} \ln f(\lambda,\theta_1) - \right.\right.$$

$$- \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\lambda,\theta_0)}{f(\lambda,\theta_1)} d\lambda - \int_{-\pi}^{\pi} \ln f(\lambda,\theta_2) - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{I_N(\lambda,\hat{\alpha}_N)}{f(\lambda,\theta_2)} d\lambda +$$

$$\left.\left. + \int_{-\pi}^{\pi} \ln f(\lambda,\theta_1) + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\lambda,\theta_0)}{f(\lambda,\theta_2)} d\lambda \right| \ge \frac{\rho}{2}\right\} \le$$

$$\le P\left\{\sup_{\|\theta_1-\theta_2\|\le\delta} \left|\int_{-\pi}^{\pi} I_N(\lambda,\hat{\alpha}_N) \left(\frac{1}{f(\lambda,\theta_1)} - \frac{1}{f(\lambda,\theta_2)}\right) d\lambda\right| + \right.$$

$$\left. + \sup_{\|\theta_1-\theta_2\|\le\delta} \left|\int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda,\theta_0) \left(\frac{1}{f(\lambda,\theta_1)} - \frac{1}{f(\lambda,\theta_2)}\right) d\lambda\right| \ge \frac{\rho}{2}\right\} \le$$

$$\le P\{\sup_{\|\theta_1-\theta_2\|\le\delta} \left|\int_{-\pi}^{\pi} \left[(2\pi N)^{-1} |S_N(\lambda,\hat{\alpha}_N)|^2 (\pi N)^{-1} Re\{\varepsilon_N(\lambda) \overline{S_N(\lambda,\hat{\alpha}_N)}\} + \right.\right.$$

$$\left. + I_N^{\varepsilon}\right] \left(\frac{1}{f(\lambda,\theta_1)} - \frac{1}{f(\lambda,\theta_2)}\right) d\lambda \Bigg| +$$

$$+ \sup_{\|\theta_1-\theta_2\|\le\delta} \left|\int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda,\theta_0) \left(\frac{1}{f(\lambda,\theta_1)} - \frac{1}{f(\lambda,\theta_2)}\right) d\lambda\right| \ge \frac{\rho}{2}\} \le$$

$$\leq P\left\{\sup_{\|\theta_1-\theta_2\|\leq\delta}\left|\int_{-\pi}^{\pi} I_N^{\varepsilon}(\lambda)\left(\frac{1}{f(\lambda,\theta_1)}-\frac{1}{f(\lambda,\theta_2)}\right)d\lambda\right|+\right.$$

$$+\sup_{\|\theta_1-\theta_2\|\leq\delta}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda,\theta_0)\left(\frac{1}{f(\lambda,\theta_1)}-\frac{1}{f(\lambda,\theta_2)}\right)d\lambda\right|+$$

$$\left.+\,2\sup_{\theta\in\Theta^c}\left|J_N^{(1)}\left(\frac{1}{f}\right)\right|+2\sup_{\theta\in\Theta^c}J_N^{(2)}\left(\frac{1}{f}\right)\geq\frac{\rho}{2}\right\}.$$

Звідки

$$P_1\leq P\left\{\sup_{\|\theta_1-\theta_2\|\leq\delta}\left|\int_{-\pi}^{\pi} I_N^{\varepsilon}(\lambda)\left(\frac{1}{f(\lambda,\theta_1)}-\frac{1}{f(\lambda,\theta_2)}\right)d\lambda\right|+\right.$$

$$\left.+\sup_{\|\theta_1-\theta_2\|\leq\delta}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda,\theta_0)\left(\frac{1}{f(\lambda,\theta_1)}-\frac{1}{f(\lambda,\theta_2)}\right)d\lambda\right|\geq\frac{\rho}{4}\right\}+$$

$$+\,P\left\{\sup_{\theta\in\Theta^c}J_N^{(1)}\left(\frac{1}{f}\right)\geq\frac{\rho}{16}\right\}++P\left\{\sup_{\theta\in\Theta^c}J_N^{(2)}\left(\frac{1}{f}\right)\geq\frac{\rho}{16}\right\}=$$

$$=P_3+P_4+P_5$$

З (2.17) та (2.18) з $\varphi(\lambda,\theta)=\frac{1}{f(\lambda,\theta)}$ випливає, що

$$P_4\to 0, N\to 0, \tag{2.26}$$

$$P_5\to 0, N\to 0. \tag{2.27}$$

Помітимо, що

$$\sup_{\|\theta_1-\theta_2\|\leq\delta}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda,\theta_0)\left(\frac{1}{f(\lambda,\theta_1)}-\frac{1}{f(\lambda,\theta_2)}\right)d\lambda\right|\leq\eta(\delta)\int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda,\theta_0)(\lambda)d\lambda,$$

де

$$\eta(\delta)=\sup_{\lambda\in[-\pi,\pi],\|\theta_1-\theta_2\|\leq\delta}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{1}{f(\lambda,\theta_1)}-\frac{1}{f(\lambda,\theta_2)}\right|d\lambda\to 0,\delta\to 0. \tag{2.28}$$

Тому можна обрати таке $\delta > 0$, то

$$P_3 \leq P\left\{\sup_{\|\theta_1-\theta_2\|\leq\delta}\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi} I_N^{\varepsilon}(\lambda)\left(\frac{1}{f(\lambda,\theta_1)}-\frac{1}{f(\lambda,\theta_2)}\right)d\lambda\right| \geq \frac{\rho}{8}\right\} \leq$$

$$\leq \left\{\eta(\delta)\int\limits_{-\pi}^{\pi} I_N^{\varepsilon}(\lambda)d\lambda \geq \frac{\rho}{8}\right\} =$$

$$= P\left\{\eta(\delta)\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} I_N^{\varepsilon}(\lambda)d\lambda - \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\lambda,\theta_0)d\lambda\right) + \eta(\delta)\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\lambda,\theta_0)d\lambda \geq \frac{\rho}{8}\right\}.$$

Враховуючи (2.28) та Лему 2.3 будемо мати

$$P_3 \leq P\left\{\eta(\delta)\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} I_N^{\varepsilon}(\lambda)d\lambda - \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\lambda,\theta_0)d\lambda\right) \geq \frac{\rho}{16}\right\} \to 0, N \to \infty. \quad (2.29)$$

З (2.26), (2.27) та (2.29) випливає, що

$$P_1 \to 0, N \to \infty.$$

Лему доведено.

$\square$

Розділ 3

Консистентність оцінки Уітла

Теорема 3.1. *Якщо виконуються умови* ***A1****,* ***A2*** *,* ***C1*** *–* ***C3****, то ОМК є слабко консистентною оцінкою параметра* θ_0*, тобто*

$$\hat{\theta}_N \xrightarrow{P} \theta_0, N \to \infty.$$

Доведення. За Означенням 1.2, для будь-якого $\rho > 0$

$$P\left\{\left\|\hat{\theta}_N - \theta_0\right\| \geq \rho\right\} = P\left\{\left\|\hat{\theta}_N - \theta_0\right\| \geq \rho; U_N(\hat{\theta}_N, \hat{\alpha}_N) \leq U_N(\theta_0, \hat{\alpha}_N)\right\} \leq$$

$$\leq P\left\{\left\|\hat{\theta}_N - \theta_0\right\| \geq \rho; \inf_{\theta \in \Theta^c} U_N(\theta, \hat{\alpha}_N) - U_N(\theta_0, \hat{\alpha}_N) \leq 0\right\} \leq$$

$$\leq P\left\{\inf_{\|\theta-\theta_0\| \geq \rho} (U_N(\theta, \hat{\alpha}_N) - U_N(\theta_0, \hat{\alpha}_N)) \leq 0\right\} =$$

$$= P\left\{\inf_{\|\theta-\theta_0\| \geq \rho} U_N(\theta, \hat{\alpha}_N) - U(\theta) - (U_N(\theta_0, \hat{\alpha}_N) - U(\theta_0)) +\right.$$

$$\left. + K(\theta_0, \theta) \leq 0\right\} \leq$$

$$\leq P\left\{\inf_{\|\theta-\theta_0\| \geq \rho} [U_N(\theta, \hat{\alpha}_N) - U(\theta) - (U_N(\theta_0, \hat{\alpha}_N) - U(\theta_0))] +\right.$$

$$\left. + \inf_{\|\theta-\theta_0\| \geq \rho} K(\theta_0, \theta) \leq 0\right\} \leq$$

$$\leq P\left\{\sup_{\|\theta-\theta_0\| \geq \rho} |U_N(\theta, \hat{\alpha}_N) - U(\theta) - U_N(\theta_0, \hat{\alpha}_N) - U(\theta_0)| \geq\right.$$

$$\left. \geq \inf_{\|\theta-\theta_0\| \geq \rho} K(\theta_0, \theta)\right\} \leq$$

$$\leq P\left\{\sup_{\theta \in \Theta^c} |U_N(\theta, \hat{\alpha}_N) - U(\theta)| + |U_N(\theta_0, \hat{\alpha}_N) - U(\theta_0)| \geq\right.$$

$$\left. \inf_{\|\theta-\theta_0\| \geq \rho} K(\theta_0, \theta)\right\} \to 0,$$

коли $N \to \infty$ завдяки Лемі 2.4, Наслідку 2.1 та властивості функції контрасту K. $\square$

Висновки

В магістерській дисертації було досліджено і сформульовано достатні умови консистентності оцінки мінімального контрасту параметра спектральної щільності лінійного випадкового шуму в нелінійній моделі регресії з дискретним часом. При цьому розглядався не обов'язково гауссівський випадковий процес. Відмова гауссовості та розгляд дискретного часу привезли до значних ускладнень дослідження , тому при роботі з негауссівським випадковим процесом було використано спектральні щільності старших порядків.

Отримана властивість консистентності оцінки Уітла є необхідною для подальших досліджень асимптотичних властивостей оцінки, зокрема для асимптотичної нормальності.

Знайдений результат повністю задовольняє поставлену мету роботи.

Використана література

[1] Ivanov A.V., Leonenko N.N., I.V. *Orlovsky On the Whittle estimator for linear random noise spectral density parameter in continuous-time nonlinear regression models.*

[2] Ivanov O.V., Prykhod'ko V.V.*On the Whittle estimator of the parameter of spectral density of random noise in the nonlinear regression model.*,2016, Ukrainian Mathematical Journal. 67, No 8:1183–1203.

[3] Р. Бенткус *Об асимптотической нормальности оценки спектральной функции*, 1972.

[4] Р. Бенткус *Об ошибке оценки спектральной функции стиционарного процесса*, 1972.

[5] О.В. Михайлова, Т.В. Облакова *Случайные процессы-2. Стохастический анализ* Москва, 2014, МГТУ им. Н.Э. БАУМАНА.

[6] Ширяев А. Н. *Вероятность — 2*, 2004, М.: МЦНМО, — 3-е изд., перераб. и доп. — 408 с.

[7] А. А. Воронов, Д. П. Ким, В. М. Лохин и др. *Теория нелинейных и специальных систем автоматического управления.*, 1986, М.: Высш. шк.,— 504 с.

[8] Ivanov A. V. *Asymptotic Theory of Nonlinear Regression.*, 1997, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht.

[9] Ivanov A.V., Leonenko N.N. *Statistical Analysis of Random Fields.*, 1989, Kluwer Acad. Publ. Dordrecht.

[10] Whittle P. *Hypothesis Testing in Time Series.*, 1951, Hafner, New York.

[11] Whittle P. *Estimation and information in stationary time series.*, 1953, Ark. mat. No 2:423–434.

[12] Hannan E.J. *Multiple Time Series.*, 1970, Springer, New York.

[13] Hannan E.J. *The asymptotic theory of linear time series models.*, 1973, J. Appl. Probab. No 10:130–145.

[14] Dunsmuir W., Hannan E.J. *Vector linear time series models.*, 1976, Adv. Appl. Probab. No 8:339–360.

[15] Guyon X. *Parameter estimation for a stationary process on a d-dimensional lattice.*, 1982, Biometrica. No 69:95–102.

[16] Rosenblatt M.R. *Stationary Sequences and Random Fields.*, 1985, Birkhauser, Boston.

[17] Fox R., Taqqu M.S. *Large-sample properties of parameter estimates for strongly dependent stationary Gaussian time series.*, 1986, Ann. Statist. 2, No 14:517–532.

[18] Fox R., Taqqu M.S. *Efficient parameter estimation for self-similar processes.*, 1989, Ann. Statist. 17:1749–1766.

[19] Heyde C., Gay R. *On asymptotic quasi-likelihood stochastic process.*, 1989, Stochast. Process. Appl. No 31:223–236.

[20] Heyde C., Gay R. *Smoothed periodogram asymptotic and estimation for processes and fields with possible long-range dependence.*, 1993, Stochast. Process. Appl. No 45:169–182.

[21] Giraitis L., Surgailis D. *A central limit theorem for quadratic forms in strongly dependent linear variables and its application to asymptotic normality of Whittle estimate.* , 1990, Probab. Theory Relat. Fields. No 86:87–104.

[22] Giraitis L., Surgailis D. *Whittle estimator for finite-variance non-Gaussian time series with long memory.*, 1999, Ann. Statist.1, No 27:178–203.

[23] Gao J., Anh Vo, Heyde C. C., Tieng Q. *Parameter estimation of stochastic processes with long-range dependence and intermittency.*, 2001, J. Time Ser. Anal. No 22:517–535.

[24] Gao J., *Modelling long-range-dependent Gaussian processes with application in continuous-time financial models.*, 2004, J.Appl. Probab. No 41:467–485.

[25] Leonenko N.N., Sakhno L.M. *On the Whittle estimator for some classes of continuous-parameter random processes and fields.*, 2006, Statist. and Probab. Lett. No 76:781–795.

[26] Bahamonde N., Doukhan P. *Spectral estimation in the presence of missing data.*, 2017, Theor. Probability and Math. Statist.95:59–79.

[27] Ginovyan M.S., Sahakyan A.A. *Robust estimation for continuous-time linear models with memory.*, 2017, Theor. Probability and Math. Statist.95:81–98.

[28] Anh V.V., Leonenko N.N., Sakhno L.M. *On a class of minimum contrast estimators for fractional stochastic processes and fields.*, 2004, J. Statist. Planning and Inference No 123: 161–185.

[29] Avram F., Leonenko N., Sakhno L. *On a Szegö type limit theorem, the Hölder-Young-Brascamp-Lieb inequality, and the asymptotic theory of integrals and quadratic forms of stationary fields.*, 2010, ESAIM: PS. 14:210–255.

[30] Bai S., Ginovyan M.S., Taqqu M.S. *Limit theorems for quadratic forms of Levy-driven continuous-time linear processes.* , 2016, Stochastic Process. Appl. 126, No. 4:1036-–1065.

[31] Ginovyan M.S., Sahakyan A.A., Taqqu M.S. *The trace problem for Toeplitz matrices and operators and its impact in probability.*, 2014, Probab. Surv. 11:393—440.

[32] Giraitis L., Surgailis D. *A central limit theorem for quadratic forms in strongly dependent linear variables and its application to asymptotic normality of Whittle estimate.*, 1990, Probab. Theory Relat. Fields. No 86:87–104.

[33] Koul H.L., Surgailis D. *Asymptotic normality of the Whittle estimator in linear regression models with long memory errors.*, 2000, Statist. Inference for Stochast. Processes. 3:129–147.

[34] Anh V.V., Leonenko N.N., Sakhno L.M. *On a class of minimum contrast estimators for fractional stochastic processes and fields.*, 2004, J. Statist. Planning and Inference No 123: 161–185.

[35] Box G., Jenkins G. *Time Series Analysis: forecasting and control, rev. ed.*, 1976, Oakland, California: Holden-Day

[36] Yule G.V *On a method of investigating periodicities in disturbed series with special reference of Wolfer's sunspot numbers*, 1927, Roy. Soc., Series A.- Vol. 226. – P. 267-298.