

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
Фізико-математичний факультет
Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірності**

«На правах рукопису»

УДК: 519.86, 330.4

До захисту допущено

завідувач кафедри

_____ О. І. Клесов

« ____ » _____ 20__ р.

**Магістерська дисертація
на здобуття ступеня Магістра
за освітньо-професійною програмою «Страхова та фінансова
математика»
спеціальності 111 «Математика»
на тему: «Дослідження динамічних процесів у фінансово-економічній
діяльності»**

Виконав:

Студент VI курсу, групи ОМ-02мп

Колесник Дмитро Максимович _____

Керівник:

професор, доктор технічних наук Бейко Іван Васильович _____

Рецензент: професор кафедри математичних
методів системного аналізу

НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського»,
доктор технічних наук Данілов Валерій Якович _____

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.

Студент _____

Київ – 2021 року

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
Фізико-математичний факультет
Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірності

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Спеціальність – 111 «Математика»

Освітньо-професійна програма «Страхова та фінансова математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ О. І. Клесов

«__» _____ 20__ р.

ЗАВДАННЯ

на магістерську дисертацію студенту

Колесника Дмитра Максимовича

1. Тема роботи «Дослідження динамічних процесів у фінансово-економічній діяльності», керівник роботи професор, доктор технічних наук Бейко І.В., затверджені наказом по університету від «__» _____ 20__ р. №__
2. Термін подання студентом роботи
3. Вихідні дані до роботи: відкриті дані фінансової звітності банків отримані за допомогою REST API НБУ (<https://bank.gov.ua/ua/open-data/api-dev> - №13), оптимізаційні моделі.
4. Зміст роботи: побудова та дослідження математичної моделі банківської діяльності, аналіз реальних даних в контексті обраної моделі, програмна реалізація моделі оптимального управління банківської діяльності
5. Перелік ілюстративного матеріалу (із зазначенням плакатів, презентацій тощо): презентація
7. Дата видачі завдання: __.__.2021 _____

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів роботи	Примітка
1	Затвердження теми МД	03.11.2021-	виконано

		05.11.2021	
2	Ознайомлення зі структурою МД згідно з Положенням про державну атестацію студентів НТУУ «КПІ ім. І. Сікорського»	06.11.2021- 10.11.2021	виконано
3	Ознайомлення з ДСТУ 3008-95 та стандарти ЄСПД	11.11.2021- 12.11.2021	виконано
4	Проведення дослідження за темою МД під керівництвом керівника	13.11.2021- 04.11.2021	виконано
5	Завершення роботи над першим варіантом частини МД	04.11.2021- 20.11.2021	виконано
6	Проведення роботи над експериментальною частиною МД	21.11.2021- 29.11.2021	виконано
7	Проведення роботи над програмним продуктом	30.11.2021- 04.12.2021	виконано
8	Оформлення МД та аналіз отриманих результатів	05.12.2021- 10.12.2021	виконано

Студент

Д.М. Колесник

Керівник

І.В. Бейко

РЕФЕРАТ

Магістерська дисертація містить 56 сторінок текстової частини, 28 ілюстрацій, 6 таблиць, 7 додаток, 12 бібліографічних посилань.

Ключові слова: БАНКІВСЬКА ДІЯЛЬНІСТЬ, МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ, ДАНІ, МОДЕЛЬ, КРЕДИТ, ДЕПОЗИТ, АКТИВИ ТА ПАССИВИ.

Об'єкт дослідження: математичні моделі підсистем банківських процесів кредитування; статистичні дані фінансової звітності Національного банку України.

Мета дослідження: побудова математичної моделі управління банківською системою кредитування та депозитів.

Використані моделі: описова модель функціонування сучасної банківської системи.

Отриманні результати: адаптована модель банківської діяльності за даними натурних спостережень.

В рамках подальшого дослідження запропонованої методології пропонується поглиблене вивчення та уточнення оптимальної стратегії управління банком в реальних умовах неповних даних.

ABSTRACT

The master's dissertation contains 56 pages of text, 28 illustrations, 6 tables, 7 appendices, 12 bibliographic references.

Key words: BANKING ACTIVITY, MODEL OF OPTIMAL MANAGEMENT, DATA, MODEL, CREDIT, DEPOSIT, ASSETS AND LIABILITIES.

Object of research: mathematical models of subsystems of banking lending processes; statistical data of the financial statements of the National Bank of Ukraine.

The purpose of the study: building a mathematical model for managing the banking system of lending and deposits.

Used models: descriptive model of modern banking system.

Obtained results: adapted model of banking activity according to field observations.

In the framework of further research of the proposed methodology, an in-depth study and refinement of the optimal strategy of bank management in real conditions of incomplete data is proposed.

Зміст

Вступ.....	8
РОЗДІЛ 1. МОДЕЛЮВАННЯ БАНКІВСЬКОЇ ДІЯЛЬНОСТІ	10
РОЗДІЛ 2. МЕТОДИ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ДИНАМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ.....	12
2.1. ІДЕНТИФІКАЦІЇ ЗА ДАНИМИ СПОСТЕРЕЖЕНЬ	13
РОЗДІЛ 3. ОПТИМІЗАЦІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ БАНКІВСЬКОЇ ДІЯЛЬНОСТІ	20
3.1. МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ БАНКОМ.....	20
3.2. УМОВИ ОПТИМАЛЬНОСТІ.....	27
3.3. ІНТЕРПРЕТАЦІЯ УМОВ ДОПОВНЮЮЧОЇ НЕЖОРСТКОСТІ (УДН).....	33
3.3.1. ВИЗНАЧЕННЯ ПРОПОЗИЦІЇ НА ПОПИТ	33
3.3.2. ПОМ'ЯКШЕННЯ УМОВ ДОПОВНЮЮЧОЇ НЕЖОРСТКОСТІ.....	35
РОЗДІЛ 4. АНАЛІЗ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ.....	37
4.1. ПІДСИСТЕМИ МІЖБАНКІВСЬКОЇ КОНКУРЕНЦІЇ.....	37
4.2. ПІДСИСТЕМА ДИНАМІКИ КАПІТАЛІВ ПРИ ФІКСОВАНИХ ТЕРМІНАХ КРЕДИТУВАННЯ ТА ЗАЙМІВ	40
4.3. ОПТИМІЗОВАНА СИСТЕМА	43
РОЗДІЛ 5. РОЗРАХУНКИ.....	45
5.1. ДАНІ ФІНАНСОВОЇ ЗВІТНОСТІ НАЦІОНАЛЬНОГО БАНКУ УКРАЇНИ	45
5.2. ОПИС ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІКИ ВХІДНИХ ПАРАМЕТРІВ	46
5.3. ВИКОРИСТАННЯ МОДЕЛІ 4.4. ЗІ ЗВІТНИМИ ДАНИМИ	53
ВИСНОВКИ.....	62
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	63

Математичне моделювання в процесах управління банківською діяльністю.

При дослідженні будь-якої сфери банківської діяльності прослідковуються циклічні властивості і на цій основі виявляються закономірності для побудови математичних моделей для прийняття ефективних управлінських рішень. Відповідні математичні моделі складної системи управління будуються із локальних моделей взаємодіючих підсистем, для яких бувають відомими моделі більш локалізованих причинно-наслідкових залежностей у відповідних локальних підсистемах управління. Такі моделі підсистем бувають суттєво простішими і описуються відповідними простішими алгебраїчними або інтегральними чи диференціальними рівняннями. Більш складні системи можуть описуватися нелінійними алгебро-інтегро-диференціальними рівняннями із частинними похідними. У випадку лінійно-параметричних моделей $\frac{dx(t)}{dt} = p_1 f_1(x(t), u(t), t) + \dots + p_n f_n(x(t), u(t), t)$ задача ідентифікації параметрів зводиться до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь навіть у випадку складних нелінійних функцій $f_i(x(t), u(t), t)$. Проте побудова математичних моделей і відповідні задачі ідентифікації суттєво ускладнюються в багатовимірних системах управління банками, які описуються нелінійними з невідомими параметрами

$p = (p_1, p_2, \dots, p_k)$ системами

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t), p_1, p_2, \dots, p_k), \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dx_m(t)}{dt} &= f_m(x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t), p_1, p_2, \dots, p_k). \end{aligned}$$

У векторному представленні таких моделей

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), u(t), p),$$

вектором $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t))$ описується фазовий стан системи; $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t))$ – це функції управління, а вектор-функції

$f(t, x(t), u(t), p) = (f_1(t, x(t), u(t), p), \dots, f_m(t, x(t), u(t), p))$ визначають швидкість зміни за часом фазового стану кожної підсистеми. У процесі відшукування та уточнення математичних моделей розв'язуються задачі ідентифікації для оптимального оцінювання за даними спостережень невідомих значень параметрів $p = (p_1, p_2, \dots, p_k)$. Дані спостережень часто задаються таблицями чисел $t_k, j_k, X_k, k = 1..N$, де k – номер спостереження, t_k – момент часу проведення k -го спостереження, а j_k – координата вектора $x(t)$, значення якої $x_{j_k}(t_k) = X_k$ отримано у момент часу $t(k)$, тобто маємо $x_{j_k}(t_k) = X_k$.

За наявності даних спостережень оптимальну оцінку p^* векторного параметра p обчислюємо, наприклад, за методом найменших квадратів (МНК) як розв'язок задачі оптимізації

$$p^* = \operatorname{argmin}_{p,a} \sum_{k=1}^N (X_k - x_k(t_k, p, a))^2\},$$

де $x_k(t, p, a)$ є значенням k -ої координати розв'язку $x(t)$ задачі Коші

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), u(t), p), x(0) = a.$$

У практичних задачах математична модель може включати вектор $z(t)$, який відображає неповноту даних оточуючого середовища

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), z(t), t, p).$$

Ітераційний алгоритм для обчислення оптимальної оцінки будуємо на основі градієнтних методів $p^{k+1} = p^k - \lambda_k \xi^k$ для обчислення послідовності $p^1, p^2, p^3, \dots, p^{k+1}$, яка для всіх значень k задовольняє нерівність

$$\varphi(p^{k+1}) < \varphi(p^k), \quad \varphi(p) = \int_{t_0}^T \|x(t, p) - x^{exp}(t)\|^2 dt$$

де градієнт ξ^k визначається як розв'язок асимптотичного рівняння

$$\varphi(p) = \varphi(p^k) + (\xi, p - p^k) + o(\|p - p^k\|).$$

З цією метою використовується апроксимаційне представлення

$$\varphi(p^k + \delta p) = \int_{t_0}^T \|x(t, p^k + \delta p) - x^{exp}(t)\|^2 dt,$$

із якого, як буде показано нижче, випливає, що $\xi^k = 2 \int_{t_0}^T (B * y(t)) dt$ тому p^{k+1} обчислюється за формулою $p^{k+1} = p^k - \lambda \int_{t_0}^T B * y(t) dt$ і на цій основі нижче будуються алгоритми, які забезпечують збіжність до екстремальних розв'язків.

В даній роботі основна увага зосереджується на банківській діяльності. Ця сфера має великий вплив на розвиток інших галузей.

РОЗДІЛ 1. МОДЕЛЮВАННЯ БАНКІВСЬКОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Зазвичай «банк» визначається як інституція, поточна діяльність якої зводиться до видачі кредитів та залучення депозитів грошових коштів (як правило, від широких груп населення). При цьому увага звертається до наступного:

- операції запозичення та кредитування можуть здійснюватись найрізноманітнішими комерційними фірмами. Однак для банків вони є поточними (що регулярно повторюються).
- операції із запозичення та кредитування одночасно мають місце в діяльності банківських установ.
- послуги, що надаються банками, пов'язані із забезпеченням збереження фінансових ресурсів та проведенням платежів, стосуються інтересів широких суспільних верств, що надає цим інститутам особливої соціальної значущості.

Специфічна роль, яку відіграють банки в економічному житті суспільства, зумовлюється і тим, що вони є об'єктами, які вимагають особливої уваги, контролю (а за необхідності – і втручання) з боку органів державного управління. Останній чинник наголошує на практичній значущості проблеми введення визначення поняття "банк", оскільки воно стає критерієм, відповідно до якого приймається рішення про те, чи повинен чи ні, той чи інший економічний інститут підпадати під заходи державного регулювання.

Отже, наведемо визначення, дане П.В. Конюховським у своїй роботі: "Банк - кредитна організація, яка має виключне право здійснювати в сукупності такі банківські операції: залучення у вклади коштів фізичних та юридичних осіб, розміщення зазначених коштів від свого імені та за свій рахунок на умовах повернення, платності, терміновості, відкриття та ведення банківських рахунків фізичних та юридичних осіб".

Сучасні банківські системи мають складну структуру. З погляду характеру послуг виділяють три найважливіші групи:

- центральний (емісійний) банк;
- комерційні банки;
- спеціалізовані фінансові установи (страхові, іпотечні, ощадні та ін.).

Відмінністю центрального банку є те, що не займається проведенням операцій із підприємствами чи населенням. Як клієнтура виступають комерційні банки та інші кредитні установи. Крім того, центральні банки часто-густо займаються наданням послуг різним урядовим установам.

Головна функція центральних банків - проведення ефективної кредитно-грошової політики, яка регулює як фінансову систему, і економіку всієї країни загалом.

Комерційні банки - функціональні установи, здійснюють діяльність на ринку позикового капіталу. Весь комплекс фінансових послуг, таких як надання

кредитів, прийом депозитів, різні розрахунки тощо, здійснюється, як правило, комерційними банками. Поряд із цим існують і спеціалізовані фінансові установи, що виконують обмежений набір послуг. В наш час комерційні банки є найвпливовішою частиною світової кредитної системи.

У спеціалізовані фінансові установи входять організації, які здійснюють діяльність у окремих сегментах ринку позичкового капіталу, потребують наявності специфічних знань, і навіть спеціальних технічних прийомів.

Особливо активно такі організації розвиваються у сфері залучення дрібних заощаджень, іпотечного кредиту, споживчого кредиту, кредиту сільськогосподарським виробникам, операцій з фінансування та розрахунків у зовнішній торгівлі, інвестування капіталу та розміщення цінних паперів промислових підприємств.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ДИНАМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ

Більшість завдань, які виникають в економіці та банківської діяльності знаходять рішення в економіко-математичному моделюванні. Шукати найбільш ефективний підхід можна у рамки загальної схеми математичного програмування.

В залежності від ознак класифікуємо шукані моделі. За призначенням поділяються на прикладні та теоретико-аналітичні, за формою подання інформації - матричні та мережеві, за формою процесу - аналітичні, графічні та логічні, за типом зв'язків – детерміновані та стохастичні, за співвідношенням екзогенних та ендегенних змінних - відкриті та закриті, за формою вхідних даних – лінійні та нелінійні, за фактором часу – статичні та динамічні, за ступенем деталізації – агреговані (макромоделі) та деталізовані (мікромоделі)), за типом математичного апарату – статичні, імітаційні, балансові, оптимізаційні та змішані, за кількістю залежностей - одноетапні та багатоетапні.

2.1. ІДЕНТИФІКАЦІЇ ЗА ДАНИМИ СПОСТЕРЕЖЕНЬ

Розглядаються нелінійні динамічні моделі

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), u(t), p)$$

причинно наслідкової залежності $u \rightarrow x$ між причинними факторами (керуваннями $u(t)$), та наслідками $x(t)$.

Оцінювання параметрів $p = (p_1, \dots, p_n)$ здійснюємо за даними натурних спостережень $x_i(t) = X_i(t)$, $u_i(t) = U_i(t)$ на деяких заданих інтервалах $t \in [t_i^0, t_i^1], i = 1, 2, \dots, N, (x_i(t) := (x_1^i(t), \dots, x_n^i(t)), u_i(t) := (u_1^i(t), \dots, u_r^i(t)))$.

У цьому випадку оцінювання ґрунтується на використанні заданих критеріїв мінімізації відхилення $x(t, p)$ (розв'язку диференціальних рівнянь з параметрами p) від даних спостережень $x_i(t) = X_i(t)$, $u_i(t) = U_i(t)$.

Приклади практичних критеріїв оптимальності

$$(1) \quad p^1 = \operatorname{argmin}_p \int_{t_0}^T (X'(t) - f(t, X(t), U(t), p))^2 dt;$$

$$(2) \quad p^2 = \operatorname{argmin}_p \max_{t \in [0, T]} |X'(t) - f(t, X(t), U(t), p)|;$$

$$(3) \quad p^3 = \operatorname{argmin}_p \min_a \int_{t_0}^T (X(t) - x(t, p))^2 dt, \text{ де } x(t, p) - \text{розв'язок}$$

задачі Коші

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), U(t), p),$$

$$x(0) = a, u(t) = U(t)$$

$$(4) \quad p^4 = \operatorname{argmin}_p \max_{t \in [0, T]} |X(t) - x(t, p)|.$$

В умовах неповних даних оптимальне значення

$$(p^5, a^5) = \operatorname{argmin}_{p, a} \sum_{k=1}^N (X_k - x_{jk}(t_k, p, a))^2,$$

параметрів p математичної моделі

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = f_i(x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t), p), x_m(0) = a_i, i = 1, 2, \dots, n,$$

будується за даними спостережень $\{t_k, j_k, X_k | k = 1..N\}, \{u(t) = (t) | t \in [0, T]\}$, значення j_k -ої координати $x_{j_k}(t)$ вектора $x(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$ у моменти $t = t_k$ дорівнює отриманим у спостереженнях значенням X_k
Алгоритм.

Крок 1. Обчислення розв'язку $x(t, p, a) = (x_1(t, p, a), \dots, x_m(t, p, a))$ задачі Коші $\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), p), x(0) = a$.

Крок 2. Обчислення значення функціонала $f(p, a) = \sum_{k=1}^N (X_k - x_{j_k}(t_k, p, a))^2$.

Крок 3. Обчислення градієнта функціонала $\frac{\partial f(p, a)}{\partial p}, \frac{\partial f(p, a)}{\partial a}$.

Крок 4. Обчислення мінімізатора функціонала $f(p, a)$.

У випадку моделі $\frac{dx(t)}{dt} = p_1 f_1(x(t), u(t), t) + \dots + p_n f_n(x(t), u(t), t)$ оптимальну оцінку за даними спостережень $(x(t), u(t)) = (X(t), U(t))$ обчислюють як мінімізатор $p^1 = \operatorname{argmin}_p F_1(p)$ функціонала

$$F(p) := \int_{t_0}^T \left(X'(t) - \sum_{i=1}^n p_i f_i(X(t), U(t), t) \right)^2 dt$$

У даному випадку оптимальною оцінкою p^1 є розв'язок системи алгебраїчних рівнянь $\partial F(p_1, \dots, p_n) / \partial p_1 = 0, \dots, \partial F(p_1, \dots, p_n) / \partial p_n = 0$.

Із очевидних рівностей

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(p)}{\partial p_1} &= \partial / \partial p_1 \int_0^T (X'(t) - \sum_{i=1}^n p_i f_i(X(t), U(t), t))^2 dt = \\ &= \int_0^T \partial / \partial p_1 (X'(t) - \sum_{i=1}^n p_i f_i(X(t), U(t), t))^2 dt = \\ &= \int_0^T 2(X'(t) - \sum_{i=1}^n p_i f_i(X(t), U(t), t)) f_1(X(t), U(t), t) dt = 0, \\ &\sum_{i=1}^n p_i \int_0^T f_i(X(t), U(t), t) f_1(X(t), U(t), t) dt = \end{aligned}$$

$$= \int_0^T X'(t) f_1(X(t), U(t), t) dt,$$

випливає, що оптимальна оцінка є розв'язком лінійного рівняння

$$\sum_{i=1}^n p_i a_{1i} = b_1,$$

$$a_{1i} = \int_0^T f_i(X(t), U(t), t) f_1(X(t), U(t), t) dt,$$

$$b_1 = \int_0^T X'(t) f_1(X(t), U(t), t) dt,$$

Аналогічний вигляд $\sum_{i=1}^n p_i a_{ki} = b_k$, приймає k -те рівняння (для всіх $k = 2, 3, \dots, n$), яке випливає із рівняння

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(p)}{\partial p_k} &= \partial / \partial p_k \int_0^T (X'(t) - \sum_{i=1}^n p_i f_i(X(t), U(t), t))^2 dt = \\ &= \int_0^T 2(X'(t) - \sum_{i=1}^n p_i f_i(X(t), U(t), t)) f_k(X(t), U(t), t) dt = 0, \end{aligned}$$

при введених позначеннях

$$a_{ki} = \int_0^T f_i(X(t), U(t), t) f_k(X(t), U(t), t) dt,$$

$$b_k = \int_{t_0}^T X'(t) f_k(X(t), U(t), t) dt,$$

При наявності неповних даних спостережень t_k, j_k, X_k , $k = 1..N$, (k – номер спостереження, t_k – часовий момент k -го спостереження, j_k – координата вектора $x(t)$, яка в даних спостережень у момент часу $t(k)$ прийняла значення $x_{jk}(t_k) = X_k$, оптимальну МНК-оцінку p^* обчислюють як мінімізатор

$$p^* = \operatorname{argmin}_{p,a} \left\{ \sum_{k=1}^N (X_k - x_k(t_k, p, a))^2 \right\},$$

де $x_k(t, p, a)$ є значенням k -ої координати розв'язку $x(t)$ задачі Коші

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), u(t), p), x(0) = a.$$

У даному випадку оптимальну оцінку p^* обчислюємо за ітераційним алгоритмом побудови послідовності $p^1, p^2, p^3, \dots, p^{k+1}$, яка для всіх значень k задовольняє нерівність

$$\varphi(p^{k+1}) < \varphi(p^k), \quad \varphi(p) = \int_{t_0}^T \|x(t, p) - x^{exp}(t)\|^2 dt.$$

Для цього скористаємось опроксимаційною в околі вектора p^k формулою

$$\varphi(p^k + \delta p) = \int_{t_0}^T \|x(t, p^k + \delta p) - x^{exp}(t)\|^2 dt,$$

із якої випливає

$$\begin{aligned} \varphi(p^k + \delta p) &= \int_{t_0}^T \left(x(t, p^k) + \delta x(t) - x^{exp}(t), x(t, p^k) + \delta x(t) - x^{exp}(t) \right) dt = \\ &= \int_{t_0}^T \left\{ \|x(t, p^k) - x^{exp}(t)\|^2 + 2 \left(x(t, p^k) - x^{exp}(t), \delta x(t) \right) + \|\delta x(t)\|^2 \right\} dt = \\ &= \varphi(p^k) + 2 \int_{t_0}^T (x(t, p^k) - x^{exp}(t), \delta x(t)) dt + \int_{t_0}^T \|\delta x(t)\|^2 dt. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t, p^k) + \delta \dot{x}(t) &= f(x(t, p^k + \delta p), u^{exp}(t), z^{exp}(t), t, p^k + \delta p) = \\ &= f(x(t, p^k), u^{exp}(t), z^{exp}(t), t, p^k) + \partial_x f(x(t, p^k), u^{exp}(t), z^{exp}(t), t, p^k) \delta x + \\ &\quad + \partial_p f(x(t, p^k), u^{exp}(t), z^{exp}(t), t, p^k) \delta p + O(\|\delta p\|^2) + O(\|\delta x\|^2). \end{aligned}$$

Із останньої рівності маємо

$$\begin{aligned} \delta \dot{x}(t) &= \partial_x f(x(t, p^k), u^{exp}(t), z^{exp}(t), t, p^k) \delta x + \\ &\quad + \partial_p f(x(t, p^k), u^{exp}(t), z^{exp}(t), t, p^k) \delta p + O(\|\delta p\|^2) + O(\|\delta x\|^2). \end{aligned}$$

і у матрично-векторних позначеннях

$$A(t) = \partial_x f(x(t, p^k), u^{exp}(t), z^{exp}(t), t, p^k),$$

$$B(t) = \partial_p f(x(t, p^k), u^{exp}(t), z^{exp}(t), t, p^k),$$

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, b_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial p_j}$$

отримуємо асимптотичну рівність

$$\varphi(p^k + \delta p) = \int_{t_0}^T \left\{ \left(x(t, p^k) - x^{exp}(t), \delta x(t) \right) + \left(y(t), A(t) \delta x(t) + B(t) \delta p - \delta \dot{x}(t) + O(\|\delta p\|^2) + O(\|\delta x\|^2) \right) \right\} dt.$$

справедливу для будь-якої для будь-якої диференційовної обмеженої функції $y(t)$. Із тотожності

$$\left(y(T), \delta x(T) \right) - \left(y(t_0), \delta x(t_0) \right) = \int_{t_0}^T \left(\dot{y}(t), \delta x(t) \right) + \left(y(t), \delta \dot{x}(t) \right) dt$$

випливає

$$\int_{t_0}^T \left(y(t), \delta \dot{x}(t) \right) dt = \left(y(T), \delta x(T) \right) - \left(y(t_0), \delta x(t_0) \right) - \int_{t_0}^T \left(\dot{y}(t), \delta x(t) \right) dt.$$

Тому для функції $y(t)$, яка задовольняє ще й умову $y(T) = 0$, є справедливим рівняння

$$\begin{aligned} \varphi(p^k + \delta p) &= \int_{t_0}^T \left\{ \left(x(t, p^k) - x^{exp}(t) + A^* \dot{y}(t), \delta x(t) \right) \right\} dt \\ &\quad + \int_{t_0}^T \left(y(t), B \delta p \right) dt + \left(y(t_0), \delta x(t_0) \right). \end{aligned}$$

Аналогічно для функції $y(t)$, яка задовольняє також умову

$$\dot{y}(t) = -A^* y(t) - (x(t, p^k) - x^{exp}(t)),$$

маємо важливі рівності

$$\begin{aligned} \varphi(p^k + \delta p) &= \int_{t_0}^T \left(y(t), B \delta p \right) dt + \left(y(t_0), \delta x(t_0) \right) + O(\|\delta p\|^2) + O(\|\delta x\|^2) = \\ &= \varphi(p^k) + 2 \int_{t_0}^T \left(y(t), B \delta p \right) dt + \left(y(t_0), \delta x(t_0) \right) + O(\|\delta p\|^2) + O(\|\delta x\|^2) = \\ &= \varphi(p^k) + \left(2 \int_{t_0}^T B^* y(t) dt, \delta p \right) + \left(y(t_0), \delta x(t_0) \right) + O(\|\delta p\|^2) + O(\|\delta x\|^2). \end{aligned}$$

Оскільки із обмеженості матриць Якобі $A(t)$ і $B(t)$ випливає асимптотична рівність $\delta x(t) = O(\|\delta p\|)$, то маємо рівність

$$\varphi(p^k + \delta p) = \varphi(p^k) + 2 \left(\int_{t_0}^T B^* y(t) dt, \delta p \right) + (y(t_0), \delta x(t_0)) + O(\|\delta p\|^2).$$

із якої випливає градієнт

$$\nabla \varphi(p) = \xi^k = 2 \int_{t_0}^T (B^* y(t)) dt$$

Це означає, що шукане значення p^{k+1} можна обчислити за формулою

$$p^{k+1} = p^k - \lambda \int_{t_0}^T B^* y(t) dt,$$

тобто, за алгоритмом:

Початок: Вибирати початкове значення $p = p^1$. Покласти $k = 1$.

1. Покласти $\lambda_k = 1$ і знайти траєкторію $x(t, p^k)$ на інтервалі часу

$$t \in (t_0, T) \text{ для задачі Коші: } \dot{x}(t) = f(x(t), u^{exp}, z^{exp}, t, p^k), x(t_0) = x.$$

2. Обчислити градієнт $\nabla \varphi(p)$:

$$\dot{y}(t) = - \int_{t_0}^T \left[\frac{\partial f}{\partial x} (x(t, p^k), u^{exp}(t), z^{exp}(t), t, p^k) \right]^* y(t) dt + x^{exp}(t) - x(t, p^k),$$

$$y(T) = 0.$$

і обчислюємо вектор

$$w = \int_{t_0}^T \left[\frac{\partial f}{\partial p} (x(t, p^k), u^{exp}(t), z^{exp}(t), t, p^k) \right]^* y(t) dt.$$

3. Якщо виконується нерівність $\|\nabla \varphi(p)\| \leq \varepsilon$, то подальші обчислення призупити із знайденим ε -екстремальним значення p^k . Якщо значення p^k не є ε -екстремальним, то обчислюємо p^{k+1} за ітераційною формулою

$$p^{k+1} = p^k - \lambda_k w$$

4. Якщо виконується нерівність

$$\varphi(p^{k+1}) \leq \varphi(p^k) - s \lambda_k^2,$$

то покладаємо $k = k + 1$ і повертаємося до кроку 1. Інакше значення λ_k зменшуємо у два рази і повертаємося до кроку 3.

У роботі [1] доведено, що якщо градієнт $\nabla\varphi(p)$ задовільняє умову Ліпшиця

$$\|\nabla\varphi(p^k) - \nabla\varphi(p^{k+1})\| \leq L\|p^k - p^{k+1}\|,$$

то на послідовності $p^{k+1} = p^k - \lambda_k \nabla\varphi(p^k)$ виконується нерівність

$$\varphi(p^{k+1}) \leq \varphi(p^k) - \lambda_k \|\nabla\varphi(p^k)\|^2 + L\lambda_k^2 \|\nabla\varphi(p^k)\|^2$$

яка разом із наступними рівностями

$$\begin{aligned} \varphi(p^{k+1}) &= \varphi(p^k) + \int_0^1 \varphi'_\lambda \left(p^k + \lambda(p^{k+1} - p^k) \right) d\lambda = \\ &= \varphi(p^k) + \int_0^1 \left(\nabla\varphi \left(p^k + \lambda(p^{k+1} - p^k) \right), p^{k+1} - p^k \right) d\lambda = \\ &= \varphi(p^k) + \int_0^1 (\nabla\varphi(p^k), p^{k+1} - p^k) d\lambda + \int_0^1 \left(\nabla\varphi \left(p^k + \lambda(p^{k+1} - p^k) \right) - \nabla\varphi(p^k), p^{k+1} - p^k \right) d\lambda, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(p^{k+1}) - \varphi(p^k) - (\nabla\varphi(p^k), p^{k+1} - p^k) &= \\ &= \int_0^1 \nabla\varphi \left(p^k + \lambda(p^{k+1} - p^k) \right) - \nabla\varphi(p^k), p^{k+1} - p^k d\lambda \leq \\ &\leq \int_0^1 \left\| \nabla\varphi \left(p^k + \lambda(p^{k+1} - p^k) \right) - \nabla\varphi(p^k) \right\| \|p^{k+1} - p^k\| d\lambda \leq \\ &\leq \int_0^1 L\|p^{k+1} - p^k\|^2 d\lambda = L\|p^{k+1} - p^k\|^2 = L\lambda_k^2 \|\nabla\varphi(p^k)\|^2. \end{aligned}$$

приводить до нерівностей

$$\begin{aligned} \varphi(p^{k+1}) &\leq \varphi(p^k) - \lambda_k \|\nabla\varphi(p^k)\|^2 + L\lambda_k^2 \|\nabla\varphi(p^k)\|^2 \\ \varphi(p^{k+1}) &\leq \varphi(p^k) - s\lambda_k^2 \end{aligned}$$

із яких випливає, що значення λ_k перевищує величину $R_k = \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{\bar{\lambda}}{2} \right\}$, де $\bar{\lambda}$ є розв'язком рівняння

$$\varphi(p^k) - s\lambda^2 = \varphi(p^k) - \lambda \|\nabla\varphi(p^k)\|^2 + L\lambda^2 \|\nabla\varphi(p^k)\|^2,$$

тобто маємо

$$\bar{\lambda} = \frac{\|\nabla\varphi(p^k)\|^2}{s+L\|\nabla\varphi(p^k)\|^2}.$$

і тому на кожній ітерації маємо нерівності

$$\varphi(p^{k+1}) < \varphi(p^k) - s(R_k)^2 = \varphi(p^k) - \frac{s}{4} \min \left\{ 1, \frac{\|\nabla\varphi(p^k)\|^4}{(s + L\|\nabla\varphi(p^k)\|^2)^2} \right\}.$$

із яких випливає, що величина $\|\nabla\varphi(p^k)\|$ прямує до 0 із зростанням k . А це означає, що для кожного числа $\varepsilon \geq 0$ знайдеться таке значення k , при якому виконається нерівність $\|\nabla\varphi(p^k)\| \leq \varepsilon$, тобто даний алгоритм визначає ε -екстремальний розв'язок p^k для будь-якого числа $\varepsilon > 0$.

РОЗДІЛ 3. ОПТИМІЗАЦІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ БАНКІВСЬКОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

3.1. МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ БАНКОМ

Для побудови динамічної математичної моделі банку позначимо через $S(t)$ наявне на момент t сумарне значення всього обсягу депозитів.

Аналогічно через $L(t)$ позначимо весь обсяг кредитів на момент t . Середні значення термінів залучення депозитів та надання кредитів позначимо

відповідно через $\frac{1}{\beta_s(t)}$ та $\frac{1}{\beta_l(t)}$. У такому випадку динаміка банківських

активів та пасивів описується диференціальними рівняннями:

$$\frac{d}{dt}L(t) = K(t) - \beta_l(t)L(t) \quad (3.2)$$

$$\frac{d}{dt}S(t) = V(t) - \beta_s(t)S(t) \quad (3.3)$$

із обмеженнями

$$K(t) \geq 0, V(t) \geq 0 \quad (3.4)$$

на потоки допустимих значень кредитів та залучених вкладів.

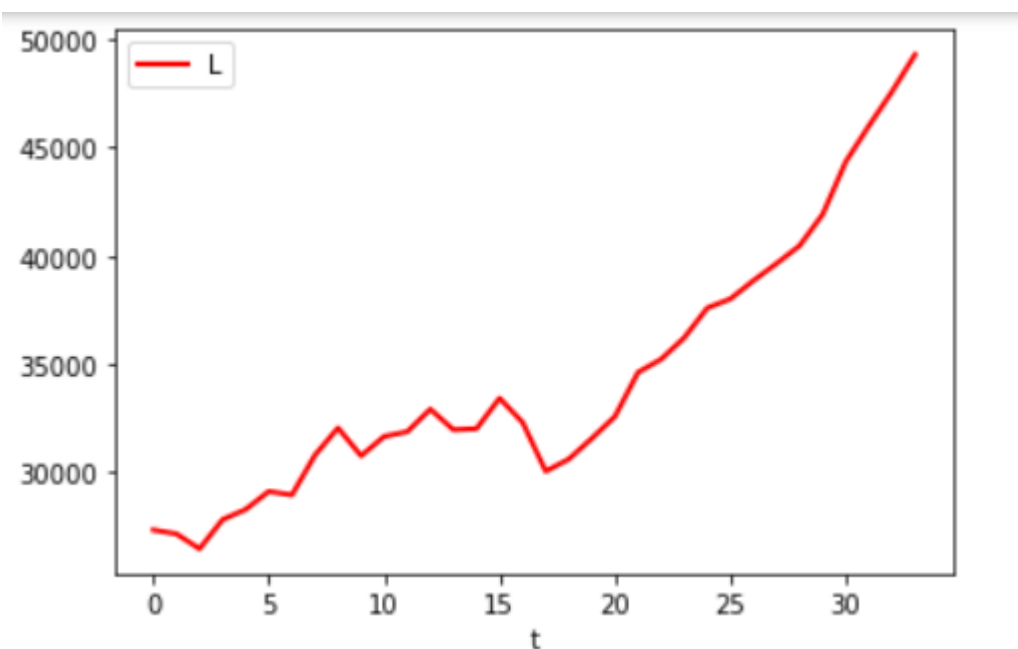
Необхідні для ідентифікації дані натурних спостережень за динамікою даних величин були отримані із наявних даних фінансової звітності Національного банку України (НБУ).

*Дані фінансової звітності НБУ для цих змінних:

$L(t)$:

header	12.2018	01.2019	02.2019	03.2019	04.2019	05.2019	06.2019	07.2019	08.2019	...	12.2020	01.2021	
0 Активи - Кредити та заборгованість клієнтів	27296.267	27112.3901	26422.7693	27775.0202	28246.574	29079.1857	28913.8324	30758.3497	32020.3036	...	37573.2076	37992.6769	38

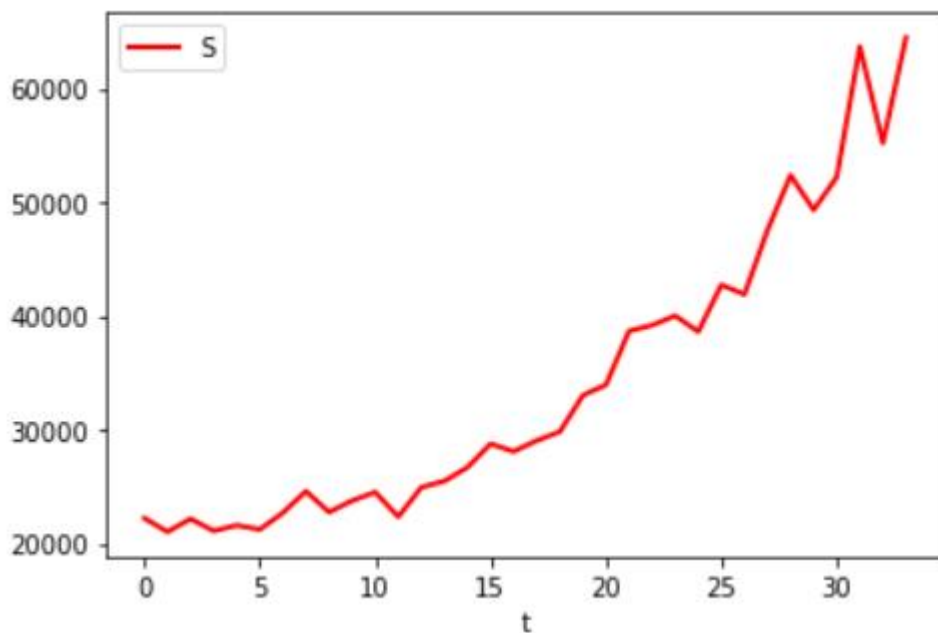
1 rows × 35 columns



$S(t)$:

header	12.2018	01.2019	02.2019	03.2019	04.2019	05.2019	06.2019	07.2019	08.2019	...	12.2020	01.2021
0 Зобов'язання - Кошти клієнтів-фізичних осіб на...	6567.4169	6732.5299	7059.3463	7077.2321	7791.8453	7680.3927	8096.7363	7699.2226	7968.9854	...	15139.9232	15447.0021
1 Зобов'язання - Кошти клієнтів-юридичних осіб н...	15661.4977	14305.1228	15114.9679	14035.8870	13814.7638	13560.2230	14606.9540	16906.0562	14795.2067	...	23482.6893	27292.6842

2 rows × 35 columns



Вважаємо, що за виданими позиками банк отримує відсоткові платежі $r_l(t)L(t)$, де $r_l(t)$ – ефективна ставка відсотка за позиками, а за залучені кошти банк сплачує відсотки $r_s(t)S(t)$, де $r_s(t)$ – ефективна ставка процентів за депозитами.

*Дані фінансової звітності НБУ для цих змінних:

$r_l(t)L(t)$:

header	12.2018	01.2019	02.2019	03.2019	04.2019	05.2019	06.2019	07.2019	08.2019	...	12.2020	01.2021	02.2021
Доходи і витрати - Процентні доходи	6573.9891	557.514	1144.2242	1759.1766	2360.1935	2967.3074	3598.0158	4306.1948	5001.6925	...	9162.1719	863.0837	1659.3526

1 rows × 35 columns

$r_s(t)S(t)$:

header	12.2018	01.2019	02.2019	03.2019	04.2019	05.2019	06.2019	07.2019	08.2019	...	12.2020	01.2021	02.2021	03.2021
Доходи і витрати - Процентні витрати	2450.4991	186.8355	354.5308	553.2413	741.5246	935.7657	1144.2902	1355.0443	1575.1638	...	2388.9991	164.7574	308.0159	485.7978

1 rows × 35 columns

В рамках моделі банку ми вважаємо, що величини $K(t)$ і $V(t)$, а разом з ними $L(t)$ і $S(t)$ визначаються банками за відповідними відсотками на депозити і на кредити. Дані величини визначають динаміку фінансово

економічної системи – умови рівності попиту та пропозицій визначають величину стаціонарних адекватних відсотків на кредити та депозити.

Крім депозитів $S(t)$ банк залучає кошти безвідсоткових залишків розрахункових рахунків $Na(t)$. Для обсягів цих залишків немає регулюючої величини аналогічної до відсотків на кредити та депозити.

Позначимо через $N(t)$ величину фактично залучених залишків розрахункових рахунків, яку визначає банк, та накладемо на неї обмеження

$$N(t) \leq N_n(t) \quad (3.5)$$

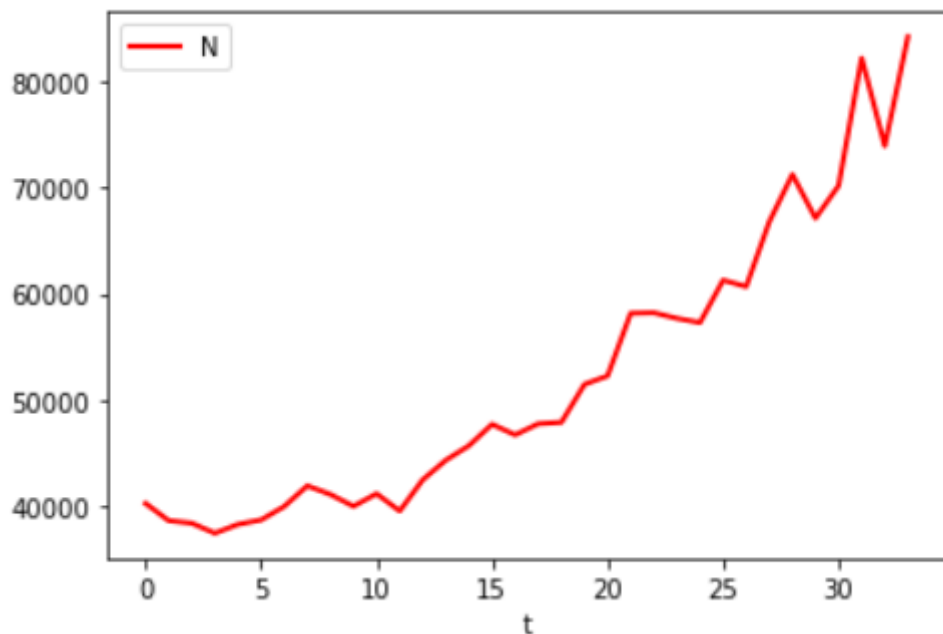
$N_n(t)$ – відома банку пропозиція залишків розрахункових рахунків.

*Дані фінансової звітності НБУ для цих змінних:

$N(t)$:

header	12.2018	01.2019	02.2019	03.2019	04.2019	05.2019	06.2019	07.2019	08.2019	...	12.2020	01.2021
Зобов'язання - Кошти клієнтів	40328.4194	38707.3048	38467.7661	37526.7436	38359.6425	38776.1453	40041.6515	41984.1657	41171.6828	...	57307.4803	61289.8279

1 rows × 35 columns



Залучені кошти $S(t) + N(t)$ банк повинен резервувати в НБУ. Позначаючи через $\zeta_l(t)$ норму резервування, отримуємо, що

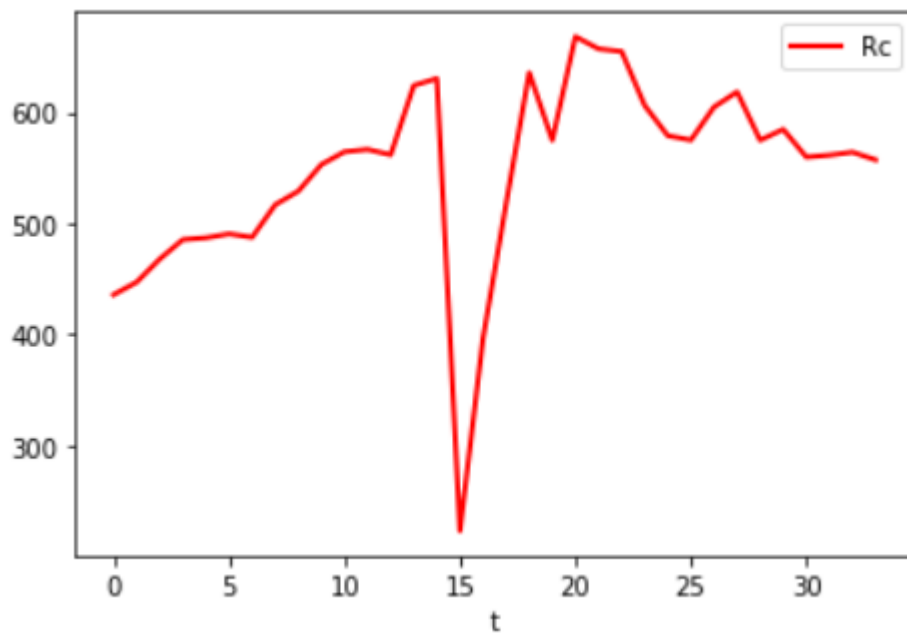
$$\frac{Rc(t)}{S(t)+N(t)} = \zeta_l(t) \quad (3.6)$$

*Дані фінансової звітності НБУ для цих змінних:

$Rc(t)$:

header	12.2018	01.2019	02.2019	03.2019	04.2019	05.2019	06.2019	07.2019	08.2019	...	12.2020	01.2021	02.2021	03.2021
0 Капітал - Резерви переоцінки	435.9361	447.2551	468.0421	485.5381	487.0933	490.6374	487.6075	516.867	529.0664	...	578.9553	575.0135	604.6865	618.3562

1 rows × 35 columns



Над обов'язкових безкоштовних резервів $Rc(t)$ банк вкладає в НБУ ще й кошти $Lc(t)$ під відсоток $r_c(t)$. Депозити в НБУ короткострокові, тому їхню дюрацію не враховуємо.

Вводимо в модель наступне обмеження на діяльність банку

$$L(t) + Lc(t) + Rc(t) \leq S(t) + Na(t). \quad (3.7)$$

Ліквідні активи банку $W(t)$ збільшуються при отриманні відсотків $r_l(t)L(t)$, $r_c(t)Lc(t)$, вкладів $V(t)$, прирощенні залишків $N(t)$ і повернення позичок $\beta_l(t)L(t)$, а зменшуються при видачі кредитів $K(t)$, виплаті відсотків $r_s(t)S(t)$, повернення депозитів $\beta_s(t)S(t)$, вкладення коштів у НБУ $\frac{d}{dt}Lc(t)$, а

також з допомогою коштів $Z(t)$, виведених із кола власне банківської діяльності.

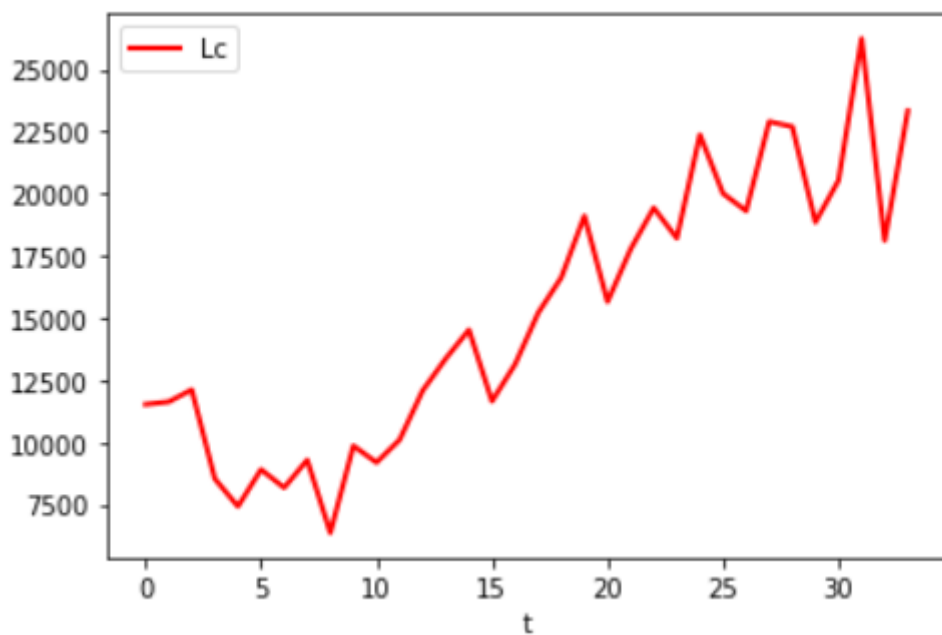
$$\frac{d}{dt}W(t) = r_l L(t) + \beta_l(t)L(t) - K(t) - r_s(t)S(t) - \beta_s(t)S(t) + \frac{d}{dt}N(t) - \frac{d}{dt}Lc(t) + r_c(t)Lc(t) - Z(t) \quad (3.8)$$

*Дані фінансової звітності НБУ для цих змінних:

$Lc(t)$:

header	12.2018	01.2019	02.2019	03.2019	04.2019	05.2019	06.2019	07.2019	08.2019	...	12.2020	01.2021
0 Активи - Цінні папери, які обліковуються за сп...	11525.874	11626.7308	12114.0622	8530.7147	7416.9708	8902.5638	8172.6473	9285.822	6357.3432	...	22377.0489	20013.5644

1 rows × 35 columns



Потік $Z(t)$ включає дивіденди власникам, податкові платежі, інвестиції в основні фонди (включаючи участь у власності), а також операційні витрати. Ці потоки (крім податків) не пов'язані безпосередньо з активами та пасивами банку, і ми спробуємо побудувати модель, не вдаючись у докладний опис структури потоку. Ми трактуватимемо цей потік як прибуток, що отримується з банківської діяльності, який банк прагне максимізувати.

Опис потреби банку у ліквідності

$$\frac{d}{dt}W(t) = \frac{W(t) - \tau_s \beta_s(t) S(t)}{\tau_w} \quad (3.9)$$

Співвідношення (3.2) - (3.9) являють собою, обмеження, накладені в рамках моделі на можливості банку вибирати значення планованих змінних:

$$S(t), L(t), W(t), K(t), V(t), Z(t), N(t), Lc(t) \quad (3.10)$$

Відповідно до принципу раціональних очікувань, що лежить в основі моделей міжчасової рівноваги, при плануванні своїх управляючих змінних банк може розраховувати на точний прогноз інформаційних змінних:

$$\zeta_l, r_s, r_l, r_c, \beta \quad (3.11)$$

В результаті вибір планованих змінних банком фактично визначає пропозицію кредитів, і навіть його попит на залучені і ліквідні кошти як функцію від поточних і майбутніх значень інформаційних змінних (насамперед, відсотків). Втім, оптимізаційна задача, що розглядається, має сильну магістральну властивість, внаслідок чого залежність попиту та пропозиції від прогнозів на майбутнє фактично зникає.

Модель, яку ми будуємо, детермінована, а реалістичнішою була б стохастична модель. Однак, поки стохастичні моделі рівноваги раціональних очікувань не придатні для прикладних цілей не лише через технічні, а й через концептуальні складності. Звісно ж, що ці складності можна подолати, і при коректному агрегуванні стохастичної макромоделі має вийти детермінована макромодель з додатковими обмеженнями.

Тепер, щоб поставити задачу оптимальної поведінки банку, слід визначити критерій вибору запланованих змінних. Використовуємо результати розвиненої теорії рівноваги із управлінням капіталом. Відповідно до цього підходу досить універсальним описом інтересів економічного об'єкту можна вважати прагнення до максимізації власної капіталізації, яке, у свою чергу, може бути зведене до задачі максимізації потоку корисних витрат (у даному випадку $Z(t)$) в заданій часовій пропорції $d_b(t)$:

$$Z(t) = \theta d_b(t), \quad \theta \rightarrow \max \quad (3.12)$$

за змінними (3.10) при обмеженнях (3.2) - (3.9) на деякому інтервалі, заданих у початковий момент t_0, T , які задані в початковий момент значення фазових змінних $S(t_0), L(t_0), W(t_0)$ та заданих траєкторіях зміни екзогенних величин (3.11) .

Для вирішення задачі (3.12) обмеження (3.2) - (3.9) треба доповнити термінальними умовами, які, природно ставити як умови зростання деякої лінійної форми фазових змінних

$$\begin{aligned} (aL(t_0)L(t_0) + aS(t_0)S(t_0) + W(t_0))e^{\gamma(T-t_0)} \\ \leq aL(T)L(T) + aS(T)S(T) + W(T) \end{aligned} \quad (3.13)$$

коефіцієнти якої уточнюються у процесі розв'язання задачі.

Ми не зупиняємося докладно на цих деталях, оскільки в силу згаданої вище магістральної властивості, при $T - t_0 \gg \tau_l$ вибір меж інтервалу планування та вид термінальних умов не впливають на вид рішення на більшій частині траєкторії, за винятком невеликої кінцевої ділянки.

3.2. УМОВИ ОПТИМАЛЬНОСТІ

Оптимізаційна задача максимізації (3.12) при наявності обмежень (3.2) - (3.9), (3.13) є складною задачею оптимального керування. Цю задачу із змішаними обмеженнями неможливо вирішити аналітично, а чисельні розв'язки є малоінформативними та ще й отримати їх є задачею нелегкою. Аналітично до кінця вона вирішена бути, звісно, не може. Чисельне вирішення неавтономної задачі поза повною моделлю рівноваги є не дуже інформативним і дуже трудомістким. Проте цей клас задач є подібним до задачі (3.2) (3.9), (3.13), як з формальної, так і з змістовної точки зору.

Першим кроком дослідження є складання достатніх умов оптимальності як умов сідлової точки функціоналу Лагранжа, який для завдання банку може бути записаний як

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^T \left(\frac{\theta K}{T-t_0} + \psi_1(t) \left(K(t) - \beta_l(t)L(t) - \sigma L(t) - \left(\frac{d}{dt} L(t) \right) \right) + \varphi_2(t)K(t) + \right. \\
& \varphi_3(t) \left(S(t) + N(t) - L(t) - Lc(t) - \zeta_l(t)(S(t) + N(t)) \right) + \psi_4(t) \left(V(t) - \right. \\
& \left. \beta_s(t)S(t) - \left(\frac{d}{dt} S(t) \right) \right) + \varphi_5(t)V(t) + \varphi_6(t)(N_n(t) - N(t)) + \varphi_7(t)Lc(t) + \\
& \psi_8(t) \left(V(t) - \beta_s(t)S(t) - r_s(t)S(t) - \left(\frac{d}{dt} Lc(t) \right) + r_c(t)Lc(t) - K(t) + \right. \\
& \left. \beta_l(t)L(t) + r_l(t)L(t) + \left(\frac{d}{dt} N(t) \right) - d_b(t)\theta - \left(\frac{d}{dt} W(t) \right) \right) + \psi_9(t) \left(W(t) - \right. \\
& \left. \tau_s \beta_s(t)S(t) - \tau_w \left(V(t) - \beta_s(t)S(t) - r_s(t)S(t) - \left(\frac{d}{dt} Lc(t) \right) + r_c(t)Lc(t) - \right. \right. \\
& \left. \left. K(t) + \beta_l(t)L(t) + r_l(t)L(t) + \left(\frac{d}{dt} N(t) \right) - d_b(t)\theta \right) \right) dt + \Phi_1(aL(T)L(T) + \\
& aLc(T)Lc(T) + aS(T)S(T) + aN(T)N(T) + W(T) - (aL(t_0)L(t_0) + \\
& aLc(t_0)Lc(t_0) + aS(t_0)S(t_0) + aN(t_0)N(t_0) + W(t_0))e^{\gamma(T-t_0)}) \quad (3.14)
\end{aligned}$$

Де $\psi_1(t), \psi_4(t), 0 \leq \varphi_2(t), 0 \leq \varphi_3(t), 0 \leq \varphi_5(t), 0 \leq \varphi_7(t) -$

функціонали Лагранджа до відповідних обмежень зі списку (3.2) - (3.9), $0 < \Phi_1$ — множник Лагранджа до термінального обмеження (3.13), а $K > 0$ — можна вважати просто нормувальною постійною, що забезпечує розумну розмірність множників Лагранджа.

Система умов оптимальності виглядає як

$$\Phi 1(aL(T)L(T) + aLc(T)Lc(T) + aS(T)S(T) + aN(T)N(T) + W(T) - (aL(t_0)L(t_0) + aLc(t_0)Lc(t_0) + aS(t_0)S(t_0) + aN(t_0)N(t_0) + W(t_0))e^{\gamma(T-t_0)}) \quad (3.15)$$

$$\varphi 7(t)Lc(t)$$

$$\varphi 6(t)(N_n(t) - N(t))$$

$$\varphi 5(t)V(t)$$

$$\varphi 3(t)(S(t) + N(t) - L(t) - Lc(t) - \zeta_l(t)(S(t) + N(t)))$$

$$\varphi 2(t)K(t) \quad (3.16)$$

Співвідношення (3.15) - (3.16) представляють умови доповнюючої нежорсткості (Умови мінімальності функціоналу (3.14) по невід'ємних множників Лагранджа до нерівностей.). Тут і нижче вираз виду $a \cdot b$ без знаків рівності чи нерівності використовується як скорочене позначення системи умов:

$$a \geq 0, b \geq 0, ab = 0. \quad (3.23)$$

$$0 = K(t) - \beta_l(t)L(t) - \left(\frac{d}{dt}L(t)\right) \quad (3.17)$$

$$0 = V(t) - \beta_s(t)S(t) - \left(\frac{d}{dt}S(t)\right)$$

$$0 = V(t) - \beta_s(t)S(t) - r_s(t)S(t) - \left(\frac{d}{dt}Lc(t)\right) + r_c(t)Lc(t) - K(t) + \beta_l(t)L(t) + r_l(t)L(t) + \left(\frac{d}{dt}N(t)\right) - d_b(t)\theta - \left(\frac{d}{dt}W(t)\right)$$

$$0 = W(t) - \tau_s\beta_s(t)S(t) - \tau_w \left(V(t) - \beta_s(t)S(t) - r_s(t)S(t) - \left(\frac{d}{dt}Lc(t)\right) + r_c(t)Lc(t) - K(t) + \beta_l(t)L(t) + r_l(t)L(t) + \left(\frac{d}{dt}N(t)\right) - d_b(t)\theta\right) \quad (3.18)$$

Співвідношення (3.17) - (3.18) вихідні рівності (Умови мінімальності функціоналу (3.14) по законевизначеним множникам Лагранжа до рівностей).

$$0 = (-\psi_9(t)\tau_w + \psi_8(t) + \varphi_5(t) + \psi_4(t))dV \quad (3.19)$$

$$0 = \left(-\left(\frac{d}{dt} \psi_8(t) \right) + \varphi_3(t) + \tau_w \left(\frac{d}{dt} \psi_9(t) \right) - \varphi_3(t)\zeta_l(t) - \varphi_6(t) \right) dN$$

$$0 = \left(\varphi_3(t) - \psi_9(t)\tau_s\beta_s(t) + \psi_9(t)\tau_w\beta_s(t) + \psi_9(t)\tau_w r_s(t) + \left(\frac{d}{dt} \psi_4(t) \right) - \varphi_3(t)\zeta_l(t) - \psi_4(t)\beta_s(t) - \psi_8(t)\beta_s(t) - \psi_8(t)r_s(t) \right) dS$$

$$0 = \left(\left(\frac{d}{dt} \psi_8(t) \right) - \varphi_3(t) - \tau_w \left(\frac{d}{dt} \psi_9(t) \right) + \psi_8(t)r_c(t) + \varphi_7(t) - \psi_9(t)\tau_w r_c(t) \right) dLc$$

$$0 = \psi_9(t)\tau_w + \varphi_2(t) - \psi_8(t) + \psi_1(t)) dK$$

$$0 = \left(\beta_l(t)\psi_8(t) - \psi_9(t)\tau_w\beta_l(t) - \psi_9(t)\tau_w r_l(t) - \beta_l(t)\psi_1(t) + \left(\frac{d}{dt} \psi_1(t) \right) - \varphi_3(t) + \psi_8(t)r_l(t) \right) dL$$

$$0 = \left(\psi_9(t) + \left(\frac{d}{dt} \psi_8(t) \right) \right) dW \quad (3.20)$$

Співвідношення (3.19) – (3.20) виражають рівність нулю варіації функціоналу Лагранжа за поточними значеннями прямих змінних. Умовні множники, dW dK і т. д. показують, варіацією якої зі змінних отримано ту чи іншу рівність.

$$0 = (-\psi_8(T) + \Phi_1)dW(T) \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned}
0 &= (-\psi_1(T) + \Phi_1 a L(T)) dL(T) \\
0 &= (\tau_w \psi_9(T) - \psi_8(T) + \Phi_1 a L_c(T)) dL_c(T) \\
0 &= (-\psi_4(T) + \Phi_1 a S(T)) dS(T) \\
0 &= (-\tau_w \psi_9(T) + \psi_8(T) + \Phi a N(T)) dN(T) \tag{3.22}
\end{aligned}$$

Нарешті, співвідношення (3.21) – (3.22) виражають умови трансверсальності (Умови максимальності функціоналу (3.14) за термінальними значеннями фазових змінних).

Наступним кроком дослідження задачі (3.12), (3.2) – (3.9), (3.13) є складання форми власного капіталу. Один з активів (в даному випадку $W(t)$) виділяється як основні кошти, тому що з залишку цього активу виплачується корисний потік (в даному випадку $Z(t)$, див. (3.12)). Множник Лагранжа до балансу основних грошей (3.18) (в цьому випадку це $\psi_8(t)$) вважається додатною та з часом зменшується. Якщо віднормувати на цю змінну оцінку залишків фінансових інструментів у множниках Лагранжа, то вийде величина

$$\begin{aligned}
\Omega(t) = & -\frac{\tau_w \psi_9(t) L_c(t)}{\psi_8(t)} + \frac{\tau_w \psi_9(t) N(t)}{\psi_8(t)} + \frac{\psi_1(t) L(t)}{\psi_8(t)} + W(t) + L_c(t) \\
& + \frac{\psi_4(t) S(t)}{\psi_8(t)} - N(t) \tag{3.24}
\end{aligned}$$

Побудована величина має сенс оцінки власного капіталу, адаптованої до поставленої задачі оптимального управління. Ця величина – аналог першого інтеграла гамільтонової системи (3.15) – (3.20), який за теоремою Нетер відповідає масштабній симетрії (лінійній однорідності) задачі яка задовольняє рівняння

$$\frac{d}{dt} \Omega(t) = p(t) \Omega(t) - Z(t), \quad p(t) = -\frac{\frac{d}{dt} \psi_6(t)}{\psi_6(t)} \geq 0. \tag{3.25}$$

Це рівняння показує, що величину $p(t)$ оптимальної траєкторії слід трактувати як внутрішню (істинну) дохідність капіталу агента.

Лінійну форму (3.24) природно використовувати для формування термінальної умови (3.13). Умови трансверсальності (3.21) – (3.22) при цьому виконуються автоматично.

Нарешті, зручним виявляється нормування всіх множників Лагранджа на позитивну величину виділеної змінної $\psi_8(t)$. Після нормування слід по можливості виключити функціонали Лагранджа системи умов оптимальності. В результаті описаних перетворень виходить повноцінна система умов оптимальності. (Ми зберігаємо за перенормованими множниками Лагранджа колишні позначення та записуємо норму резервування без індексу $\zeta_l(t) = \zeta(t)$).

$$0 = \Omega(T) - \Omega(t_0)e^{-r(-T+t_0)} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} \Omega(t) = & -\tau_w Lc(t)p(t) - N(t) + \psi_1(t)L(t) + W(t) + Lc(t) + \psi_4(t)S(t) \\ & + \tau_2 p(t)N(t) \end{aligned}$$

$$\varphi_7(t)Lc(t) \quad (3.27)$$

$$(-p(t)\tau_w r_c(t) + \varphi_7(t) + r_c(t) - \zeta(t)\varphi_3(t))(N_n(t) - N(t)) \quad (3.28)$$

$$(\psi_4(t) + p(t)\tau_w - 1)V(t) \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} & (\varphi_3(t))(S(t) + N(t) - L(t) - Lc(t) - \zeta(t)S(t) - \zeta(t)N(t)) \\ & (-\psi_1(t) - p(t)\tau_w + 1)K(t) \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$0 = K(t) - \beta_l(t)L(t) - \left(\frac{d}{dt}L(t)\right) \quad (3.31)$$

$$0 = V(t) - \beta_s(t)S(t) - \left(\frac{d}{dt}S(t)\right)$$

$$\begin{aligned}
0 &= V(t) - \beta_s(t)S(t) - r_s(t)S(t) - \left(\frac{d}{dt}Lc(t)\right) + r_c(t)Lc(t) - K(t) \\
&\quad + \beta_l(t)L(t) + r_l(t)L(t) + \left(\frac{d}{dt}N(t)\right) - d_b(t)\theta - \left(\frac{d}{dt}W(t)\right) \\
0 &= W(t) - \tau_s\beta_s(t)S(t) - \tau_w\left(V(t) - \beta_s(t)S(t) - r_s(t)S(t) - \left(\frac{d}{dt}Lc(t)\right) + \right. \\
&\quad \left. r_c(t)Lc(t) - K(t) + \beta_l(t)L(t) + r_l(t)L(t) + \left(\frac{d}{dt}N(t)\right) - d_b(t)\theta\right) \quad (3.32)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\psi_4(t) &= (-1 + \zeta(t))\varphi_3(t) + p(t)\tau_s\beta_s(t) - p(t)\tau_w\beta_s(t) + \beta_s(t) + r_s(t) \\
&\quad - p(t)\tau_w r_s(t) + (p(t) + \beta_s(t))\psi_4(t) \\
\frac{d}{dt}p(t) &= \frac{-p(t) + \tau_w p(t)^2 - p(t)\tau_w r_c(t) + r_c(t)}{\tau_w} + \frac{\varphi_7(t)}{\tau_w} - \frac{\varphi_3(t)}{\tau_w} \\
\frac{d}{dt}\psi_1(t) &= (p(t) + \beta_l(t))\psi_1(t) + p(t)\tau_w\beta_l(t) + p(t)\tau_w r_l(t) + \varphi_3(t) - \\
&\quad \beta_l(t) - r_l(t) \quad (3.33)
\end{aligned}$$

Якщо не звертати уваги на граничну умову (3.26) і вважати умови доповнюючої нежорсткості (УДН) (3.27) – (3.30) рівняннями, то рівнянь у системі (3.27) – (3.33) виявиться стільки ж, скільки невідомих.

3.3. ІНТЕРПРЕТАЦІЯ УМОВ ДОПОВНЮЮЧОЇ НЕЖОРСТКОСТІ (УДН)

3.3.1. ВИЗНАЧЕННЯ ПРОПОЗИЦІЇ НА ПОПИТ

УДН, тобто співвідношення виду (3.23), подібні до рівнянь у тому відношенні, що обмежують можливе значення величин a і b деякою кривою. Проте, ця функція – межа першого квадранта – вироджена. Задання значення однієї з величин не визначає, власне кажучи, другу.

З математичної точки зору умови на множники Лагранджа доповнюючої нежорсткості розрізняють альтернативні оптимальної траєкторії. Деякі з цих

траєкторій свідомо нереалізовані в рамках охоплюючого опису всієї економічної системи. Наприклад, розмір залишків розрахункових рахунків $N(t)$, які банки згодні тримати, повинен збігатися з попитом $N_n(t)$ (див. (3.5)), інакше клієнти не зможуть провести розрахунків. Щоб задовольнити УДН (3.27), покладемо

$$N(t) = N_n(t) = Na(t).$$

Надалі ця величина вважається заданою.

Розв'язки УДН повинні задовольняти нерівність

$$0 \leq -p(t)\tau_w r_c(t) + \varphi_7(t) + r_c(t) - \zeta(t)\varphi_3(t)$$

Шукані величини пропозиції абстрактних коштів $L(t)$ і попиту на залучені кошти $S(t)$ визначаються системою (3.27) - (3.33) тільки якщо відома величина $d_b(t)$ (Див. (3.12)). Величина $d_b(t)$ за логікою моделі має бути задана власниками банку, виходячи з інформації про прибутковість його капіталу та про прибутковість альтернативних вкладень, а також розуміння власниками своїх інтересів. Але це не описується обраною моделлю.

Однак, не маючи можливості без $d_b(t)$ визначити попит $L(t)$ пропозицію $S(t)$ окремо, ми можемо обчислити попит (та інші заплановані змінні) залежно від пропозиції.

Виключимо $d_b(t)$ з рівняння (3.32) і надалі вважатимемо заданою за даними НБУ величину депозитів $S(t)$, а пропозицію позик $L(t)$ обчислювати з моделі.

Тепер можна виключити $V(t)$ за допомогою (3.31), оскільки за статистикою $S(t)$ монотонно зростає, $V(t)$ вийде позитивним і можна буде дозволити УДН (3.29). З нього вийде співвідношення

$$0 = -\psi_4(t) + p(t)\tau_w - 1$$

В заключення введемо нові змінні $k(t)$ та $E(t)$ разом з $\psi_1(t)$ та $L_c(t)$:

$$k(t) = -\psi 1(t)(t) - p(t)\tau_w + 1$$

$$Lc(t) = E(t)(S(t) + Na(t)) - Na(t)\zeta(t) - L(t) - \zeta(t)S(t) \quad (3.34)$$

В результаті зроблених спрощень (3.27) – (3.30) прийме вигляд

$$\begin{aligned} & ((\tau_w r_c(t) + \tau_s \beta_s(t) - \tau_w r_s(t))p(t) + \zeta(t)\varphi 3(t) + r_s(t) \\ & - r_c(t))(-\frac{L(t)}{S(t) + Na(t)} - \zeta(t) + E(t)) \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$(\varphi 3(t))(1 - E(t)) \quad (3.36)$$

$$(k(t))(K(t)) \quad (3.37)$$

$$\frac{d}{dt}L(t) = K(t) - \beta_l(t)L(t)$$

$$\frac{d}{dt}W(t) = -\frac{-W(t) + \tau_s \beta_s(t)S(t)}{\tau_w}$$

$$\frac{d}{dt}p(t) = \frac{r_s(t)}{\tau_s} + \frac{(-1 + \zeta(t))\varphi 3(t)}{\tau_w} + p(t)^2 + \frac{(\tau_s \beta_s(t) - \tau_w r_s(t) - 1)p(t)}{\tau_w}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}k(t) &= (\tau_w r_s(t) - \tau_w r_l(t) + k(t) - \tau_s \beta_s(t))p(t) - \zeta(T)\varphi 3(t) + r_l(t) \\ &- r_s(t) + \beta_l k(t) \end{aligned}$$

3.3.2. ПОМ'ЯКШЕННЯ УМОВ ДОПОВНЮЮЧОЇ НЕЖОРСТКОСТІ

Із рівнянь видно, що множники Лагранжа задають деякі внутрішні оцінки. Наприклад, співвідношення (3.30) показує, що банк пропонуватиме нові позички, тільки якщо внутрішня ціна цих позичок $\psi 1(t)$ досить велика.

З іншого боку, поставлена задача є лінійною, так що в типовому випадку її оптимальні рішення «стрибатимуть по кутах». Якщо ж управління ще й не обмежені, як, наприклад, $K(t)$, то задача може бути вирішена і притому неоднозначно тільки при певному співвідношенні екзогенних

змінних. Часто з умов розв'язку задач окремих об'єктів вдається визначити нетривіальний рух усієї системи, що нагадує особливі режими теорії оптимального управління. Але при розгляді одного об'єкта становище виглядає безнадійним. Здається, що потрібно ускладнювати вихідну задачу, вводячи до неї якісь нелінійності. Ми, однак, вважаємо, що це не пізно зробити і після виведення умов оптимальності щодо простої задачі.

Вважатимемо, що УДН вирішує головне в економічній теорії питання про те, яка комбінація інформаційних змінних служить аргументом функції попиту/пропозиції, а форму цієї функції будемо підбирати емпірично.

Інакше кажучи, ми замінимо решту УДН виду $a \cdot b$ виразами $d = f(a)$, де $f(\cdot)$ – монотонно спадна функція з відповідним нормуванням за величиною, що підлягає ідентифікації за емпіричними даними. Конкретно, для регуляризації УДН (3.35), (3.36) ми використовували лінійні функції, а регуляризації (3.37) – гіперболу. В результаті замість УДН вийшло співвідношення

$$\begin{aligned} -\frac{L(t)}{S(t) + Na(t)} - \zeta(t) + E(t) \\ = -a1((\tau_s \beta_s(t) + \tau_w r_c(t) - r_s(t) \tau_w) p(t) + \zeta(t) \varphi_3(t) + r_s(t) \\ - r_c(t) - r_c(t)) \tau_w + b1 \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$-E(t) + 1 = -a2 \varphi_3(t) \tau_w + b2 \quad (3.39)$$

$$K(t) = \frac{a3}{k(t) - b3}$$

є $a1, a2, a3, b1, b2, b3$ – постійні, що підлягають ідентифікації. Виключаючи множник Лагранжа $\varphi_3(t)$ з (3.38), (3.39) отримуємо явний вираз для невідомої $E(t)$

$$E(t) = \left(\left(\frac{L(t)}{S(t) + Na(t)} + \zeta(t) + b1 \right) a2 - a1p(t)a2\tau_w\tau_s\beta_s(t) - \right. \\ \left. a1p(t)a2\tau_w^2r_c(t) + a1p(t)a2\tau_w^2r_s(t) + a1\zeta(t) - a1\zeta(t)b2 - a1r_s(t)a2\tau_w + \right. \\ \left. a1r_c(t)a2\tau_w \right) / (a2 + a1\zeta(t)) \quad (3.40)$$

Та систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}L(t) &= \frac{a3}{k(t) - b3} - \beta_l(t)L(t) \\ \frac{d}{dt}W(t) &= -\frac{-W(t) + \tau_s\beta_s(t)S(t)}{\tau_w} \\ \frac{d}{dt}p(t) &= \frac{r_s(t)}{\tau_w} + \frac{(-1 + \zeta(t))(E(t) - 1 + b2)}{\tau_w^2a2} + \\ &+ p^2(t) + \frac{(-r_s(t)\tau_w + \tau_s\beta_s(t) - 1)p(t)}{\tau_w} \\ \frac{d}{dt}k(t) &= r_l(t) - r_s(t) - \frac{\zeta(t)(E(t) - 1 + b2)}{a2\tau_w} + \beta_l k(t) + \\ &+ \left((r_s(t) - r_l(t))\tau_w - \tau_s\beta_s(t) + k(t) \right) p(t) \end{aligned}$$

РОЗДІЛ 4. АНАЛІЗ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

4.1. ПІДСИСТЕМИ МІЖБАНКІВСЬКОЇ КОНКУРЕНЦІЇ

По аналогії з процесом конкуренції між двома самозабезпечуваними системами, конкуренцію між двома банками в процесі бенчмаркінга можна представити рівняннями Ван дер Поля із запізненням з метою підвищення динамічної стійкості в умовах зовнішніх та внутрішніх збурень.

Модель такої конкурентної взаємодії між двома банками може бути описана наступною системою диференціальних рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 X_1}{dt^2} - a_1(R_1 - Z_1) \frac{dX_1}{dt} + \omega_1^2(1 + \alpha_2 X_2)X_1 = c_2 \frac{d^2 X_2}{dt^2} + r_1 F_1 + d_1 F_3 \\ b_1 Z_1 + T_1 \frac{dZ_1}{dt} = \sum_{n=1} g_n \sin^2(nX_1 + \varphi_n) \\ \frac{d^2 X_2}{dt^2} - a_2(R_2 - Z_2) \frac{dX_2}{dt} + \omega_2^2(1 + \alpha_1 X_1)X_2 = c_2 \frac{d^2 X_1}{dt^2} + r_2 F_2 + d_2 F_3 \\ b_2 Z_2 + T_2 \frac{dZ_2}{dt} = \sum_{n=1} g_n \sin^2(nX_2 + \varphi_n) \end{array} \right.$$

Де X_1, X_2 — змінні, які показують динаміку величини чистого прибутку банків,

a_1, a_2 — коефіцієнти, які відповідають рівню ритмічності діяльності банку (можуть змінюватись від 0,1 до 2),

R_1, R_2 — нормовані об'єми резервів банку

Z_1, Z_2 — змінні, які визначають степінь запізнення часу повернення по виданим кредитам (для банків залежність змінних X_1, X_2 та Z_1, Z_2 носить лінійний характер)

b_1, b_2 — коефіцієнти, пропорційні часу повернення виданих кредитів

T_1, T_2 — коефіцієнти, пропорційні часу виплати процентів по внескам

ω_1, ω_2 — величини, обернені часу обороту коштів банку, виданих під кредити

g_n — пропорційні коштам величини, які визначають додаткові операції з внесками

φ_n — величини, пропорційні часу затримки виконання циклів додаткових операцій в порівнянні з часом, який є необхідним для їх виконання (сума $\sum_{n=1} g_n \sin^2(nX_2 + \varphi_n)$ відображає цикли додаткових банківських операцій з одним внеском)

r_1, r_2 — постійні коефіцієнти, пропорційні сторонній допомозі банкам (наприклад, докапіталізація)

F_1, F_2 — періодичні функції, які мають вигляд експоненти у від'ємній степені

d_1 — коефіцієнт, рівний 0.001-0.1

F_3 — випадкова функція, яка має вигляд експоненти у від'ємній степені з випадковою фазою, яка відображає вплив світового біржевого курсу на діяльність банку

α_1, α_2 — коефіцієнти володіння банками конфіденційною інформацією про нелегальну банківську діяльність один одного (0.1-0.2)

c_1, c_2 — коефіцієнти, які відображають рівень міжбанківської взаємної підтримки та можуть змінюватись від 0 до 1

4.2. ПІДСИСТЕМА ДИНАМІКИ КАПІТАЛІВ ПРИ ФІКСОВАНИХ ТЕРМІНАХ КРЕДИТУВАННЯ ТА ЗАЙМІВ

Для того щоб врахувати залежність процентних ставок по кредитах та депозитам від термінів та умов, на які вони видаються та заохочуються розглянемо модель, в якій терміни кредитування та заохочення фінансових ресурсів заздалегідь фіксовані.

Не дивлячись на те, що формально терміни кредитування можуть бути довільними, можна виділити найбільш типові періоди у відповідності з групуванням, яке використовується в банківській діяльності. А саме: позички та термінові депозити зазвичай групуються по термінам так: на період до 30 діб, 31-90 діб, 91-180 діб, 181 діб - 1 рік, 1 – 3 роки та більше 3 років.

Виходячи з цього можна виділити декілька типових періодів, для кожного з яких термінові угоди описуються однотипними рівняннями в частинних похідних першого порядку:

$$\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial \tau} = a(\tau, x). \quad (4.3.1)$$

З граничною умовою $x(t, 0) = u(t)$ Та початковою умовою $x(0, \tau) = \varphi(\tau)$. Початкова та гранична умови повинні бути узгоджені, тобто $u(0) = \varphi(0)$.

Тут t – час $0 \leq t \leq \infty$, τ – Час, який пройшов з моменту заключення угоди, $0 < \tau \leq T$, $a(\tau, x)$ Величина амортизації актива або пасива (часткове погашення дебіторської або кредитної заборгованості по терміновим угодам), $x(t, \tau)$ розподілена змінна, яка характеризує деякий кредитний інструмент, який враховується в активах або пасивах (наприклад, видані позички, термінові депозити фізичних осіб, видані або отримані міжбанківські кредити, облігації або інші активи та пасиви з фіксованим терміном погашення).

Далі будемо вважати, що

$$a(\tau, x) = -\varepsilon x, (4.3.2)$$

Тобто погашення кредитів відбувається пропорційно їх величині з коефіцієнтом ε , не залежно від τ . Можуть бути використані і інші алгоритми, коли погашення кредитів починається з відстрочки та (або) відбувається завчасно визначеним рівним частинам.

Відомо, що розв'язок рівняння (4.3.1) з урахуванням (4.3.2) має вигляд хвилі

$$x(t, \tau) = u(t - \tau) \exp(-\varepsilon x). (4.3.3)$$

Для узгодження початкових та граничних умов при $t < \tau \leq T$ необхідно довизначити $u(t)$ на інтервалі $t \in [-T, 0)$. З (4.3.1)-(4.3.3) слідує, що

$$x(0, \tau) = \varphi(\tau) = u(-\tau) \exp(-\varepsilon \tau) \quad (4.3.4)$$

Та після заміни τ на $-t$

$$u(t) = \varphi(-t) \exp(\varepsilon t) \text{ при } T \leq t < 0. \quad (4.3.5)$$

Загальна величина активу (або пасиву) отримується інтегруванням по τ

$$X(t) = \int_0^T x(t, \tau) d\tau. \quad (4.3.6)$$

Підставляючи (4.3.3) в (4.3.6), отримаємо

$$X(t) = \int_0^T u(t - \tau) \exp(-\varepsilon x) d\tau. \quad (4.3.7)$$

Інтегруючи (4.3.1)-(4.3.2), отримаємо звичайне диференціальне рівняння

$$\frac{dX}{dt} = u(t) - \varepsilon X - x(t, T) = u(t) - \varepsilon X - u(t - T) \exp(-\varepsilon T). \quad (4.3.8)$$

Оскільки в портфель активів або пасивів входять з різними термінами погашення, скалярну змінну $X(t)$ в (4.3.8) можна замінити вектор, компонентами якого є фінансові інструменти з різними термінами погашення:

$$\begin{aligned} \frac{dX_k}{dt} &= u_k(t) - \varepsilon_k X_k - x_k(t, T_k) \\ &= u_k(t) - \varepsilon_k X_k - u_k(t - T_k) \exp(-\varepsilon_k T_k). \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

Для простоти далі будемо вважати $T_k = k$, де k — термін, виражений у місяцях.

Термінові інструменти (видані кредити, облігації, міжбанківські кредити, термінові депозити), з математичної точки зору, однотипні, тому будемо розглядати їх в рамках єдиної конструкції, даючи загальне позначення X_k терміновим інструментам в активах та Y_k — в пасивах. Тоді вихідна модель може бути представлена у вигляді:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dX_k}{dt} = u_k(t) - \varepsilon_k X_k - u_k(t - k) \exp(-\varepsilon_k), \\ dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t + f(t) dt, \\ dB = g(t) dt, \\ \frac{dR}{dt} = \sum_k \frac{dY_k}{dt} - \sum_k \frac{dX_k}{dt} + \frac{dZ}{dt} + \\ + \sum_k \rho_k X_k + \rho_B B - \eta_k Y_k - Q(t) - f(t) - g(t), \\ \frac{dY_k}{dt} = v_k(t) + \eta_k Y_k - v_k(t - k) \exp(\eta_k k), \\ \frac{dZ}{dt} = w(t) - \frac{Z}{D_z} \end{array} \right. \quad (4.3.10)$$

Де $W(t)$ — потік депозитів та позик, $v_k(t)$ — приплив термінових депозитів; $f(t)$ — придбання (+) або продаж ринкових цінних паперів; $Q(t)$ — теперішні операційні витрати; μ — дохідність портфелю центрального банку; σ — волатильність портфелю ц/б; W_t — вінеровський випадковий процес; η_k — відсоток, який нараховується по терміновим депозитам; ρ_k — відсоток по виданим позичкам; D_z — дюрація (типовий час обороту) депозитів вимоги.

В даній моделі припускається, що нараховані відсотки по терміновим депозитам сплачується по завершенню терміну депонування.

Рівняння динаміки власного капіталу знаходиться диференціюванням балансового рівняння та відповідними підстановками. Отримаємо:

$$\frac{dC}{dt} = \sum_k \rho_k X_k + \rho_B B - \sum_k \eta_k Y_k + \frac{dS_t}{dt} - f(t) - Q(t). \quad (4.3.11)$$

Для простоти припускається повне зняття депозитів по закінченню терміну, однак нескладно врахувати можливість пролонгації депозиту або його переведення у категорію депозитів до вимоги. Вважається, що дивіденди не виплачуються.

Додатково не враховуються кредитні ризики (неповернення, затримки платежів), що також можна врахувати шляхом внесення відповідних коригувань.

Нехай $\alpha_k = \frac{X_k}{X}$ та $\beta_k = \frac{Y_k}{Y}$ – структура позик та термінових депозитів.

Крім того, для простоти припустимо, що вкладення в цінні папери відсутнє. Тоді динаміка капіталу описується рівнянням:

$$\frac{dC}{dt} = X \sum_k \rho_k \alpha_k - Y \sum_k \eta_k \beta_k - Q(t). \quad (4.3.12)$$

Яке надає наочне представлення про чутливості власного капіталу до зміни структури та процентних ставок активів та пасивів.

Основною метою акціонерів та менеджерів банків є збільшення величині власного капіталу, тобто

$$\frac{dC}{dt} \rightarrow \max \quad (4.3.13)$$

При обмеженнях на фінансові ресурси та ризики (кредитні та ринкові, ліквідності та неплатеспроможності). Для досягнення цієї мети можна, керуючи процентними ставками, тимчасовою структурою виданих позичок та співвідношенням об'єму залучених та інвестованих коштів.

4.3. ОПТИМІЗОВАНА СИСТЕМА

Наступна система оптимізована за критерієм максимізації банківського прибутку на допустимій множині, заданій диференціальними рівняннями та нерівностями. Оптимальний розв'язок отриманий за методом множників Лагранжа, як сідлова точка функціонала Лагранжа

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} L(t) = \frac{a_3}{k(t) - b_3} - \beta_l(t) L(t) \\ \frac{d}{dt} W(t) = - \frac{-W(t) + \tau_s \beta_s(t) S(t)}{\tau_w} \\ \frac{d}{dt} p(t) = \frac{r_s(t)}{\tau_w} + \frac{(-1 + \zeta(t))(E(t) - 1 + b_2)}{\tau_w^2 a_2} + \\ + p^2(t) + \frac{(-r_s(t)\tau_w + \tau_s \beta_s(t) - 1)p(t)}{\tau_w} \\ \frac{d}{dt} k(t) = r_l(t) - r_s(t) - \frac{\zeta(t)(E(t) - 1 + b_2)}{a_2 \tau_w} + \beta_l k(t) + \\ + ((r_s(t) - r_l(t))\tau_w - \tau_s \beta_s(t) + k(t)) p(t) \end{array} \right.$$

$$E(t) = \left(\frac{L(t)}{S(t) + Na(t)} + \zeta(t) + b_1 \right) a_2 - a_1 p(t) a_2 \tau_w \tau_s \beta_s(t) - a_1 p(t) a_2 \tau_w^2 r_c(t) + a_1 p(t) a_2 \tau_w^2 r_s(t) + a_1 \zeta(t) - a_1 \zeta(t) b_2 - a_1 r_s(t) a_2 \tau_w + a_1 r_c(t) a_2 \tau_w) / (a_2 + a_1 \zeta(t))$$

- $L(t)$ – запропоновані кредити (виробничі + споживчі кредити);
- $L(t)r_l(t)$ – дохід по кредитах;
- $r_l(t)$ – Ефективна процентна ставка по кредитах;
- $S(t)$ – Заохочені депозити;
- $S(t)r_s(t)$ – витрати по депозитам;
- $r_s(t)$ – Ефективна процентна ставка по депозитам;
- $E(t)$ – депозити в цінних паперах;
- $Na(t)$ – Розрахункові рахунки клієнтів;
- $\zeta(t) = R/(S(t) + Na(t))$ – норма резервування. Визначається центральним банком (всі заохочені кошти банк повинен резервувати в центральному банку)
- $\frac{1}{\beta_l}$ – середній термін, на який видаються кредити

- $\frac{1}{\beta_s}$ – середній термін, на який заохочуються депозити
- $W(t)$ – ліквідні активи банку
- $\tau_w \tau_l \tau_s$ – додатні сталі, що характеризують період обороту коштів у відповідних сегментах платіжної системи.

РОЗДІЛ 5. РОЗРАХУНКИ

5.1. ДАНІ ФІНАНСОВОЇ ЗВІТНОСТІ НАЦІОНАЛЬНОГО БАНКУ УКРАЇНИ

Потрібні дані натурних спостережень, які є необхідними для розв’язання задачі максимізації банківських прибутків, нами були знайдені у базах даних, створених Національним банком України на основі статистичної звітності всіх банків України. Регулярне наповнення та достовірність цих даних забезпечується Національним Банком України, який виконує контролюючу функцію в системі всіх банків України та зобов’язує щомісячно звітувати кожен банк по всій його діяльності. Дані отримані засобами REST API, формування запитів на отримання інформації та трансформація отриманих відповідей в зручний для дослідження формат було реалізовано засобами мови програмування Python (Додаток 1). Було підключено та використано такі бібліотеки Python: requests, json, pandas, pandasql.

header	12.2018	01.2019	02.2019	03.2019	04.2019	05.2019	06.2019	07.2019	08.2019	...	12.2020	01.2021	02.2021
Активи - Provisions, total	-9401.8661	-9344.3217	-9321.0520	-9438.7670	-9382.2532	-9567.1413	-9584.8840	-9020.6257	-9144.3702	...	-9401.8661	-9401.8661	-9401.8661
Активи - Інвестиційна нерухомість	71.8759	71.3566	71.4803	110.1068	101.6186	100.7058	131.3492	128.3046	123.4141	...	71.8759	71.8759	71.8759
Активи - Інші активи	632.6472	672.7035	690.2459	653.0681	635.8883	627.4392	464.0762	520.8884	543.8895	...	632.6472	632.6472	632.6472
Активи - Інші активи - Резерви під інші активи	-8.2764	-8.2826	-8.1656	-8.1745	-8.0499	-8.0945	-8.0211	-7.8993	-7.7949	...	-8.2764	-8.2764	-8.2764
Активи - Інші фінансові активи	232.3829	190.8435	177.3810	187.3839	262.7985	226.9139	274.9934	239.7306	276.6900	...	232.3829	232.3829	232.3829
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
Капітал - Нерозподілений прибуток (непокритий ...)	1054.0577	1309.0412	1517.3086	1753.2084	1938.5802	2095.4944	2261.3239	2525.2416	2759.6624	...	1054.0577	1054.0577	1054.0577
Капітал - Резерви переоцінки	435.9361	447.2551	468.0421	485.5381	487.0933	490.6374	487.6075	516.8670	529.0664	...	435.9361	435.9361	435.9361
Капітал - Резерви та інші фонди банку	1475.4297	1475.4297	1475.4297	1475.4297	1475.4297	1475.4297	1475.4297	1475.4297	1475.4297	...	1475.4297	1475.4297	1475.4297
Капітал - Статутний капітал	3294.4924	3294.4924	3294.4924	3294.4924	3294.4924	3294.4924	3294.4924	3294.4924	3294.4924	...	3294.4924	3294.4924	3294.4924
Капітал - Усього власного капіталу	6361.5755	6627.8780	6856.9324	7110.3283	7297.2552	7457.7135	7620.5131	7913.6904	8160.3105	...	6361.5755	6361.5755	6361.5755

Мал. 5.1.1 Агреговані дані отримані з API НБУ

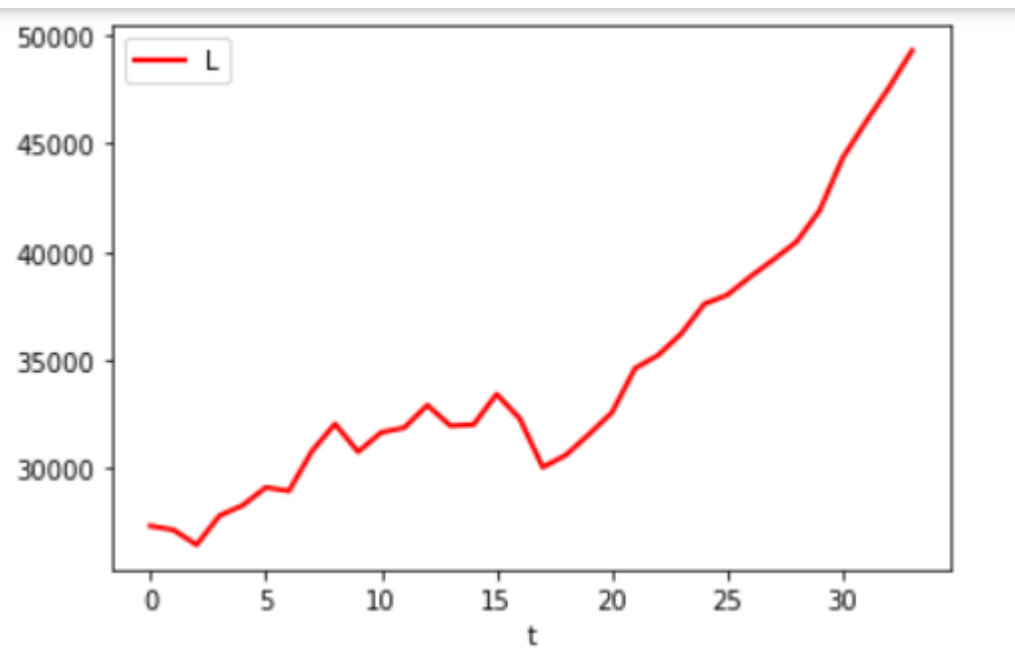
Розглянутий період: 01.12.2018 - 01.11.2021.

Кількісні дані у млн. грн.

5.2. ОПИС ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІКИ ВХІДНИХ ПАРАМЕТРІВ

Графічне представлення історичних даних НБУ (користуючись бібліотекою matplotlib) (Додаток 2):

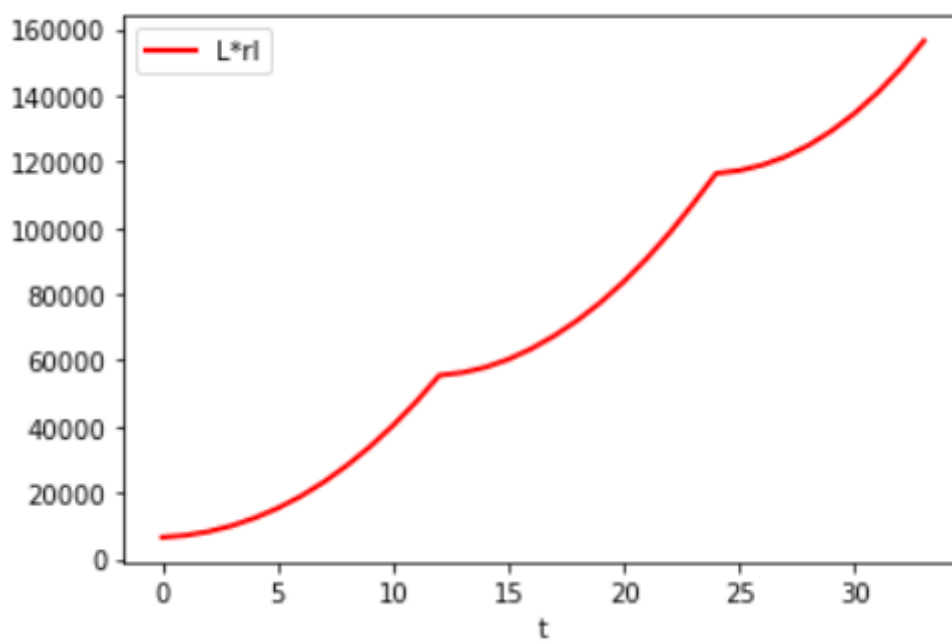
- $L(t)$ — запропоновані кредити (виробничі + споживчі кредити);



Мал. 5.2.1. Графік помісячних (01.12.2018 - 01.11.2021) значень $L(t)$ на основі історичних даних

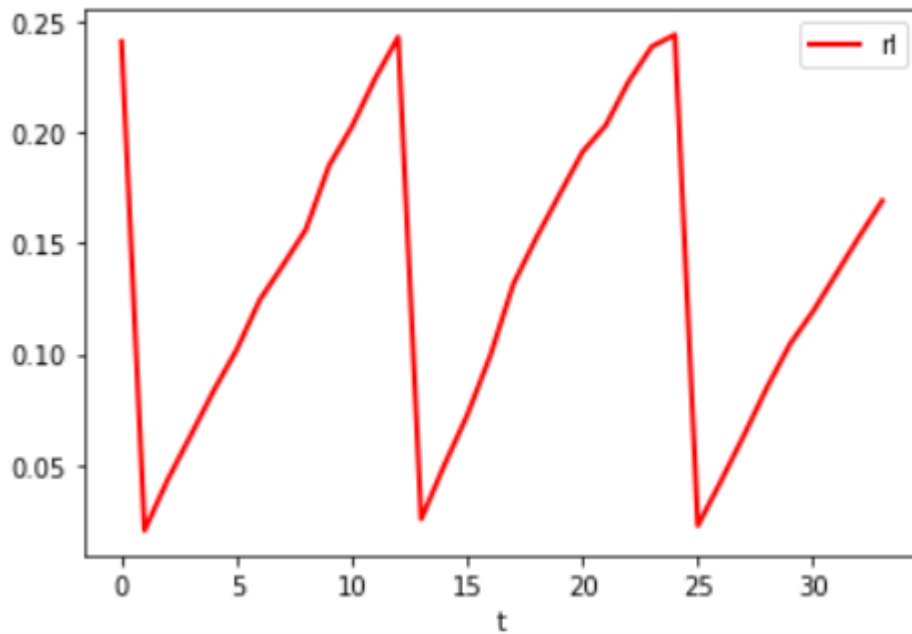
Графік має піки до $t = 17$ та монотонно зростає після

- $L(t)r_l(t)$ – дохід по кредитах;



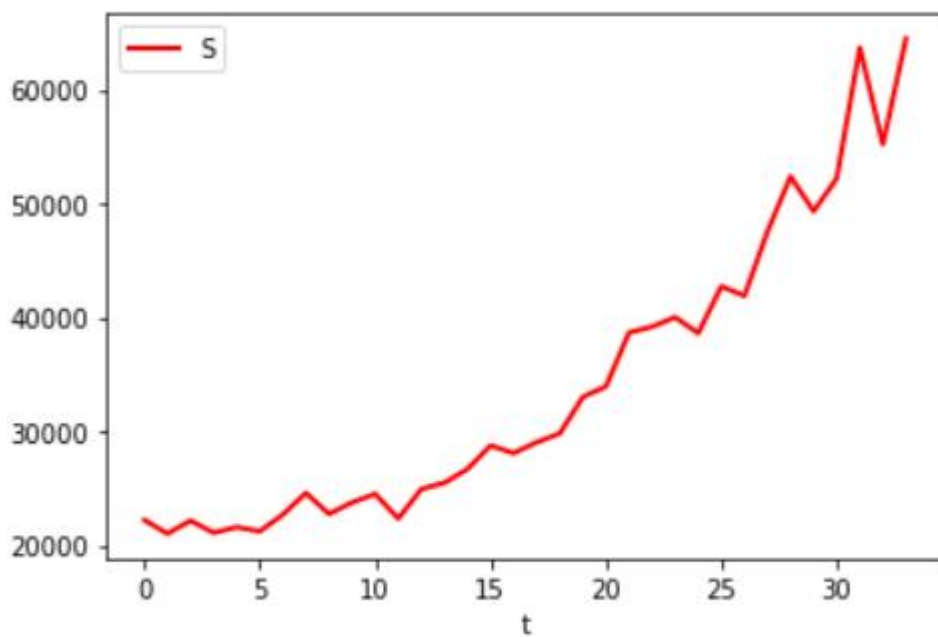
Мал. 5.2.2 Графік помісячних значень функції $L(t)r_l(t)$ на основі історичних даних

- $r_l(t)$ — Ефективна процентна ставка по кредитам;



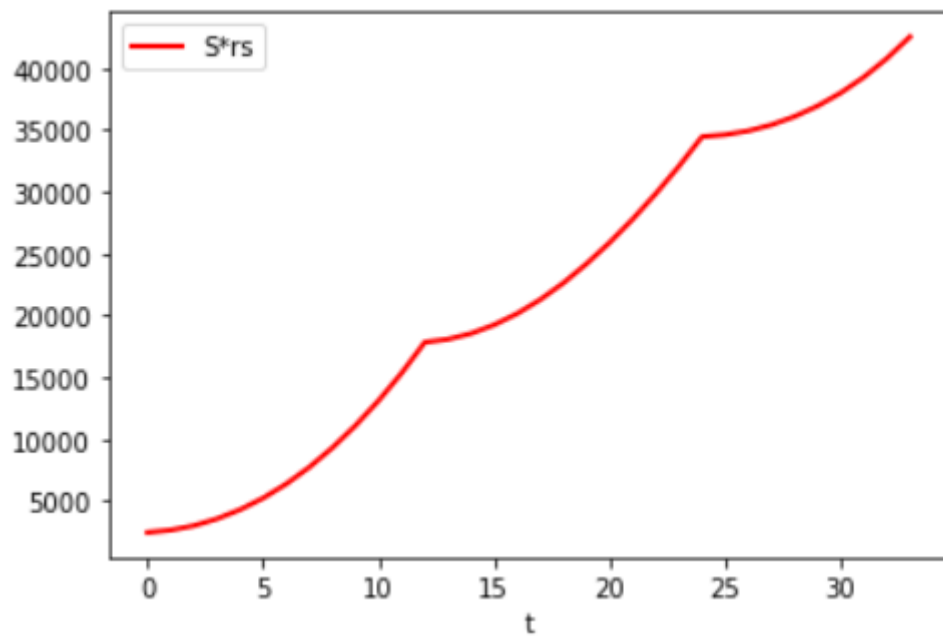
Мал. 5.2.3 Графік помісячних значень $r_l(t)$ на основі історичних даних

- $S(t)$ — депозити;



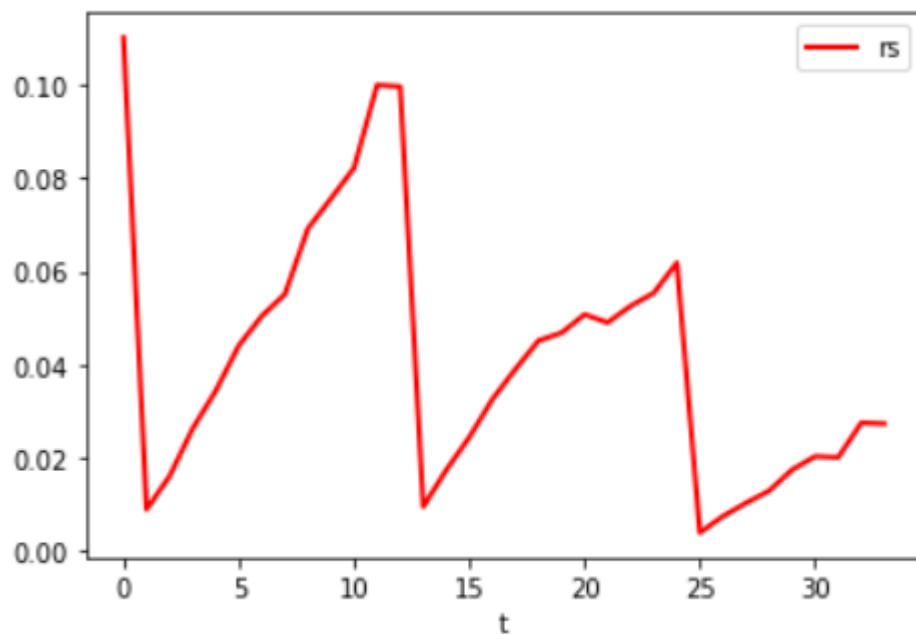
Мал. 5.2.4 Графік помісячних значень $S(t)$ на основі історичних даних

- $S(t)r_s(t)$ – витрати по депозитам;



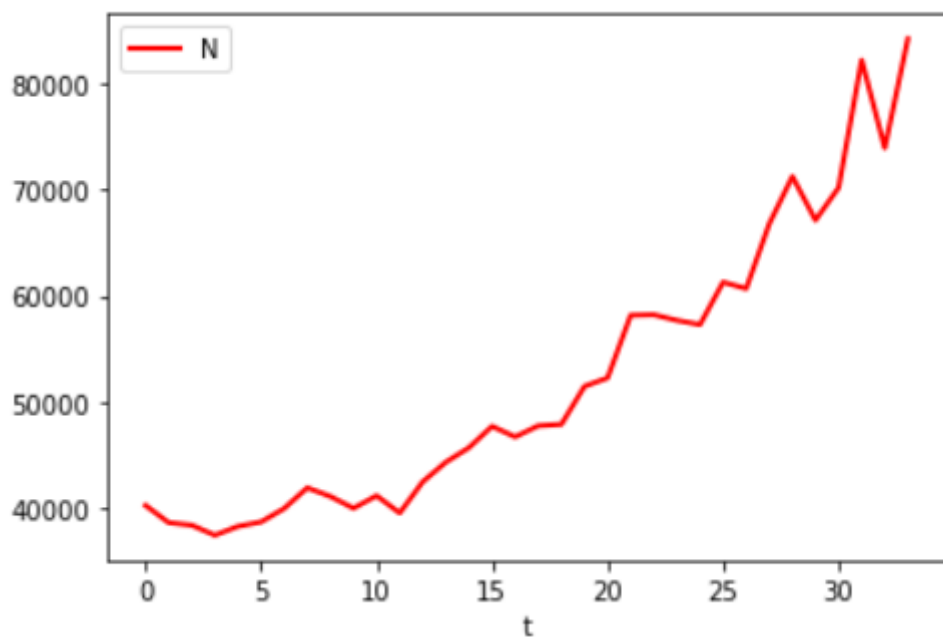
Мал. 5.2.5 Графік помісячних значень $S(t)r_s(t)$ на основі історичних даних

- $r_s(t)$ – Ефективна процентна ставка по депозитам;

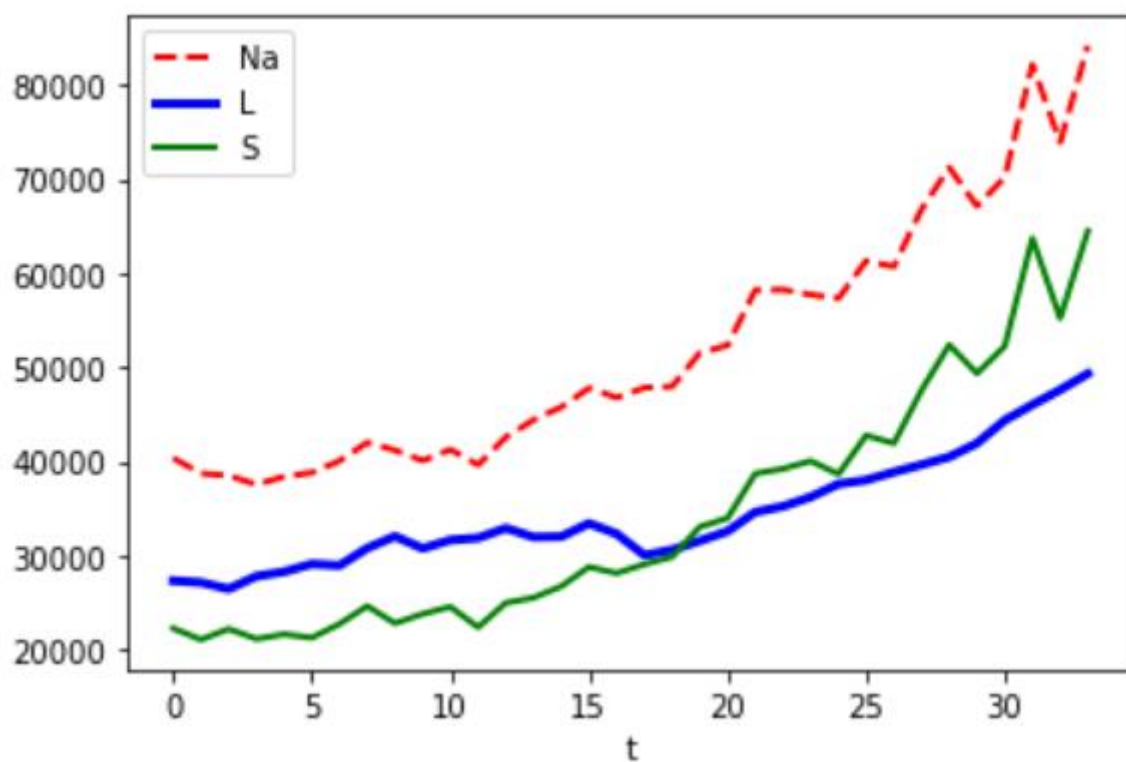


Мал. 5.2.6 Графік помісячних значень $r_l(t)$ на основі історичних даних

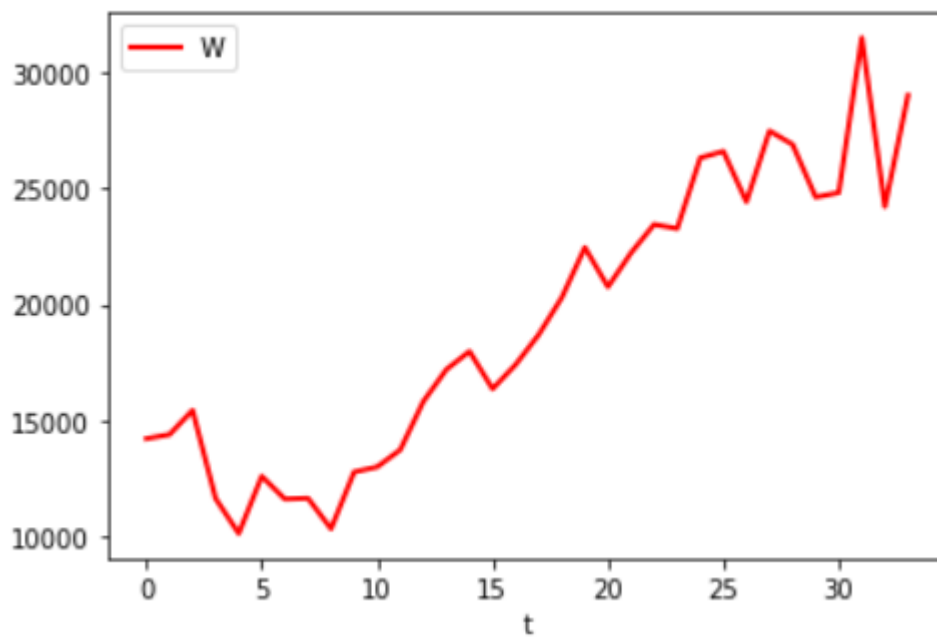
- $Na(t)$ – Розрахункові рахунки клієнтів;



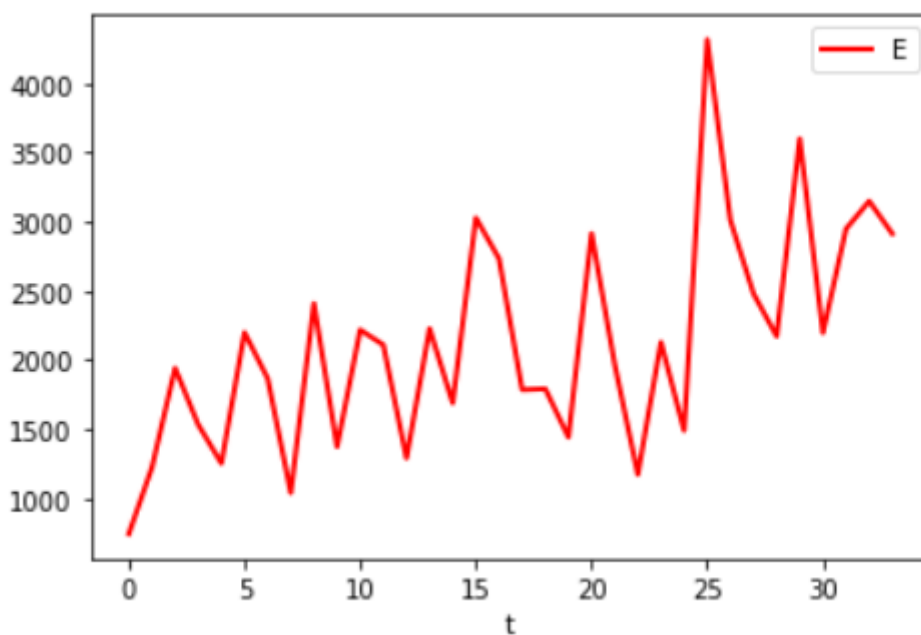
Мал. 5.2.7 Графік помісячних значень $N(t)$ на основі історичних даних



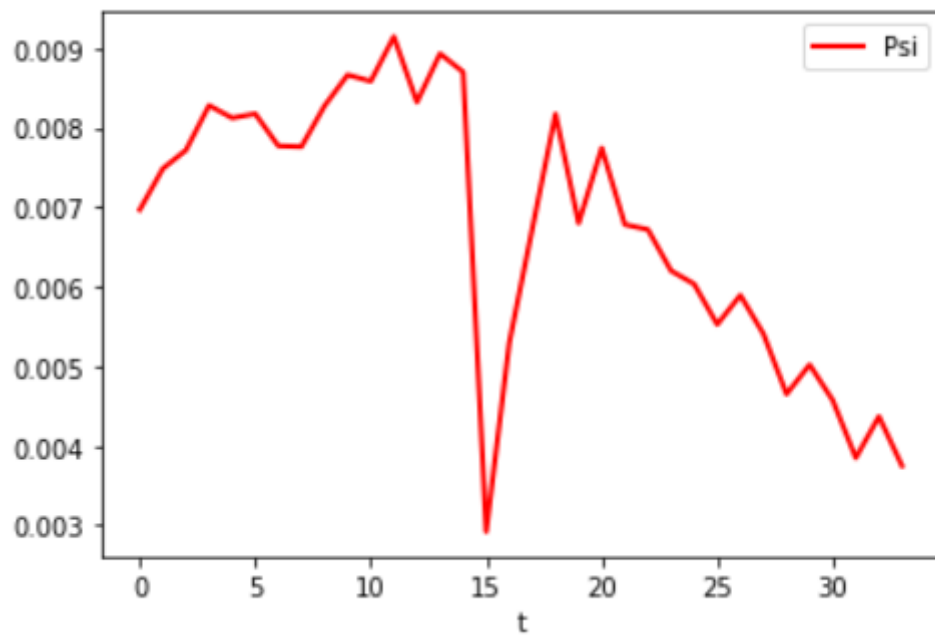
Мал. 5.2.8 Порівняння різних сфер діяльності банку



Мал. 5.2.9 Графік помісячних значень $W(t)$ на основі історичних даних
- $E(t)$ — депозити в цінних паперах;



Мал. 5.2.10 Графік помісячних значень $E(t)$ на основі історичних даних
- ζ — норма резервування



Мал. 5.2.11 Графік помісячних значень $\zeta(t)$ на основі історичних даних

5.3. ВИКОРИСТАННЯ МОДЕЛІ 4.4. ЗІ ЗВІТНИМИ ДАНИМИ

$$\begin{aligned}
 E(t) = & \left(\frac{L(t)}{S(t) + Na(t)} + \zeta(t) + b1 \right) a2 - a1p(t)a2\tau_w\tau_s\beta_s(t) \\
 & - a1p(t)a2\tau_w^2r_c(t) + a1p(t)a2\tau_w^2r_s(t) + a1\zeta(t) - a1\zeta(t)b2 \\
 & - a1r_s(t)a2\tau_w + a1r_c(t)a2\tau_w) / (a2 + a1\zeta(t)) \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 \frac{d}{dt}L(t) &= \frac{a3}{k(t) - b3} - \beta_l(t)L(t) \\
 \frac{d}{dt}W(t) &= - \frac{-W(t) + \tau_s\beta_s(t)S(t)}{\tau_w} \\
 \frac{d}{dt}p(t) &= \frac{r_s(t)}{\tau_w} + \frac{(-1 + \zeta(t))(E(t) - 1 + b2)}{\tau_w^2a2} + \\
 &+ p^2(t) + \frac{(-r_s(t)\tau_w + \tau_s\beta_s(t) - 1)p(t)}{\tau_w} \\
 \frac{d}{dt}k(t) &= r_l(t) - r_s(t) - \frac{\zeta(t)(E(t) - 1 + b2)}{a2\tau_w} + \beta_lk(t) + \\
 &+ ((r_s(t) - r_l(t))\tau_w - \tau_s\beta_s(t) + k(t))p(t)
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Зв'язок даних зі змінними, функціями та параметрами системи (Додаток 3):

1. $L(t) \rightarrow$ Активи - Кредити та заборгованість клієнтів (Larr = FullFuibArr[8]).
2. $r_l(t) \rightarrow$ Доходи і витрати - Процентні доходи / Активи - Кредити та заборгованість клієнтів (FullFuibArr[45] / Larr).
3. $S(t) \rightarrow$ Зобов'язання - Кошти клієнтів-фізичних осіб на вимогу + Зобов'язання - Кошти клієнтів-юридичних осіб на вимогу (FullFuibArr[63] + FullFuibArr[64]).
4. $r_s(t) \rightarrow$ Доходи і витрати - Процентні витрати / (Зобов'язання - Кошти клієнтів-фізичних осіб на вимогу + Зобов'язання - Кошти клієнтів-юридичних осіб на вимогу) (FullFuibArr[42] / Sarr).
5. $\zeta(t) \rightarrow$ Норма резервування (Капітал - Резервні та інші фонди банку / (Зобов'язання - Кошти клієнтів-фізичних осіб на вимогу + Зобов'язання

- Кошти клієнтів-юридичних осіб на вимогу + Зобов'язання - Кошти клієнтів) * коефіцієнт, визначений НБУ (FullFuibArr[72] / (FullFuibArr[63] + FullFuibArr[64] + FullFuibArr[61])).

6. $W(t) \rightarrow$ Ліквідність (Активи - Грошові кошти та їх еквіваленти + Активи - Цінні папери, які обліковуються за справедливою вартістю через інший сукупний дохід, в т.ч. що рефінансуються НБУ (FullFuibArr[4] + FullFuibArr[20])).

Для визначення значень наступних параметрів недостатньо вихідних даних, тому було встановлено наближені значення:

1. $\frac{1}{\beta_l} = \frac{1}{24}$ – середній термін, на який видаються кредити.
2. $\frac{1}{\beta_s} = \frac{1}{96}$ – середній термін, на який заохочуються депозити .
3. $\tau_w = 45.854, \tau_s = 10.367$ – додатні сталі, що характеризують період обороту коштів у відповідних сегментах платіжної системи.

Параметри $a1, b1, a2, b2, a3, b3$ необхідно ідентифікувати.

Можна побачити, що друге рівняння $\frac{d}{dt} W(t) = - \frac{-W(t) + \tau_s \beta_s(t) S(t)}{\tau_w}$ не залежить від інших змінних та має лише інформаційні параметри, тому стає можливим опис динаміки цієї величини, окремо від системи (Додаток 5):

Для розрахунків було встановлено такий набір значень параметрів

$$a1 = 1$$

$$a2 = 0.9$$

$$a3 = 120$$

$$b1 = 1$$

$$b2 = 10$$

$$b3 = 0.00004$$

$$rl = 0.04$$

$$rs = 0.03$$

$$rc = 0.01$$

$$tl = 0.89$$

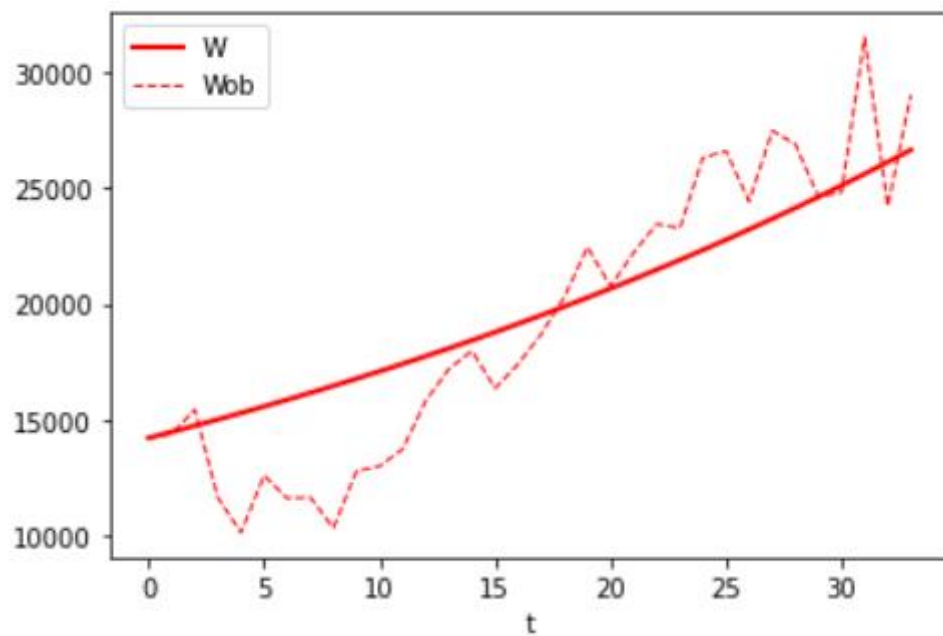
$$ts = 10.367$$

$$bl = 1/24$$

$$bs = 1/96$$

$$tw = 45.854$$

при такому наборі параметрів отримано таку траєкторію $W(t)$ мал. 5.3.1.

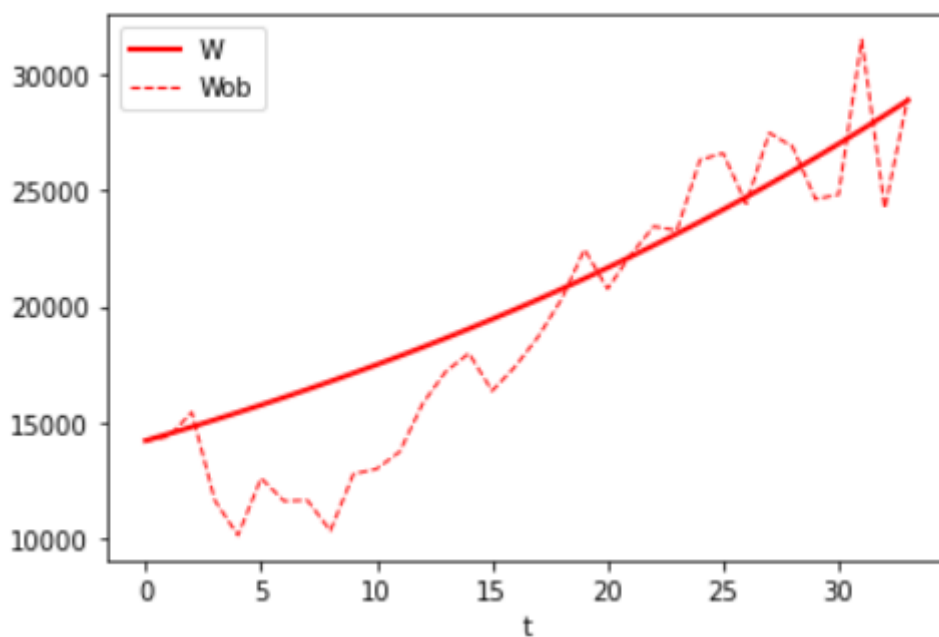


Мал.5.3.1 Динаміка ліквідності $W(t)$,

де W — траєкторія системи диференціальних рівнянь,

Wob — дані спостережень.

Якщо змінити параметр $tw = 40.854$, то отримаємо таку траєкторію:



Система відреагувала на несподівану зміну вхідних даних – зросла швидкість зростання.

Побудуємо оптимальні траєкторії для L . Для цього було підібрано оптимальні параметри та реалізовано побудову (Додаток 6):

Для розрахунків $\frac{d}{dt}L(t)$ було встановлено такий набір значень параметрів

$$a1 = 1$$

$$a2 = 0.9$$

$$a3 = 105$$

$$b1 = 1$$

$$b2 = 10$$

$$b3 = 0.00004$$

$$r1 = 0.04$$

$$rs = 0.03$$

$$rc = 0.01$$

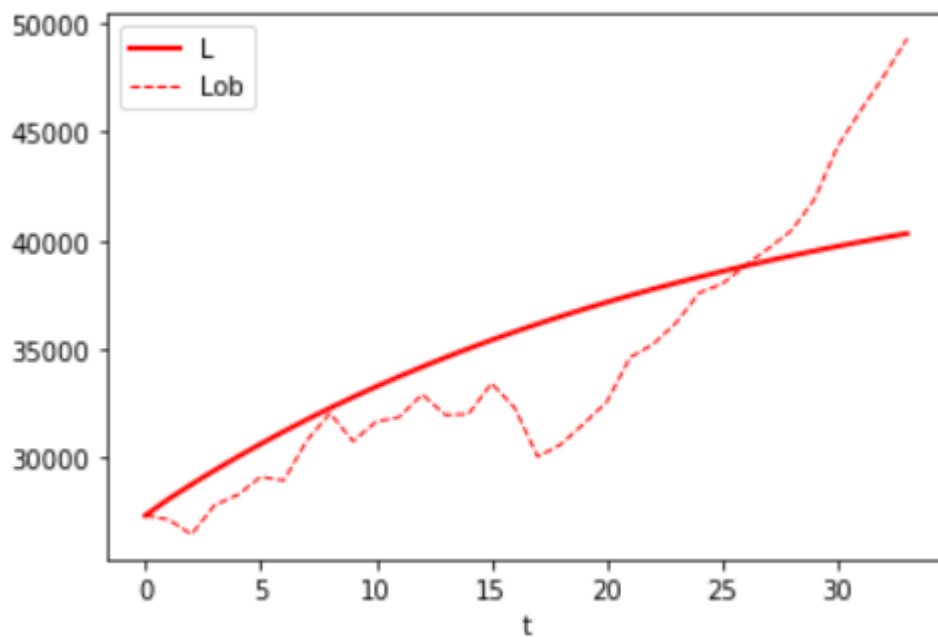
$$t_l = 0.89$$

$$t_s = 5.367$$

$$b_l = 1/24$$

$$b_s = 1/96$$

$$t_w = 0.854$$



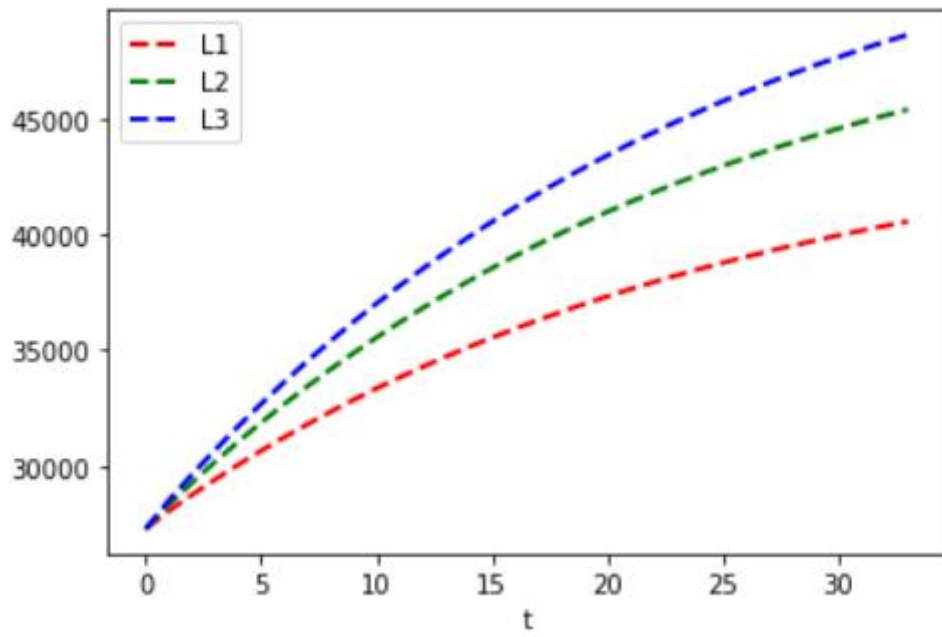
Мал.5.3.1 Динаміка зміни $L(t)$,

де L – траєкторія системи диференціальних рівнянь,

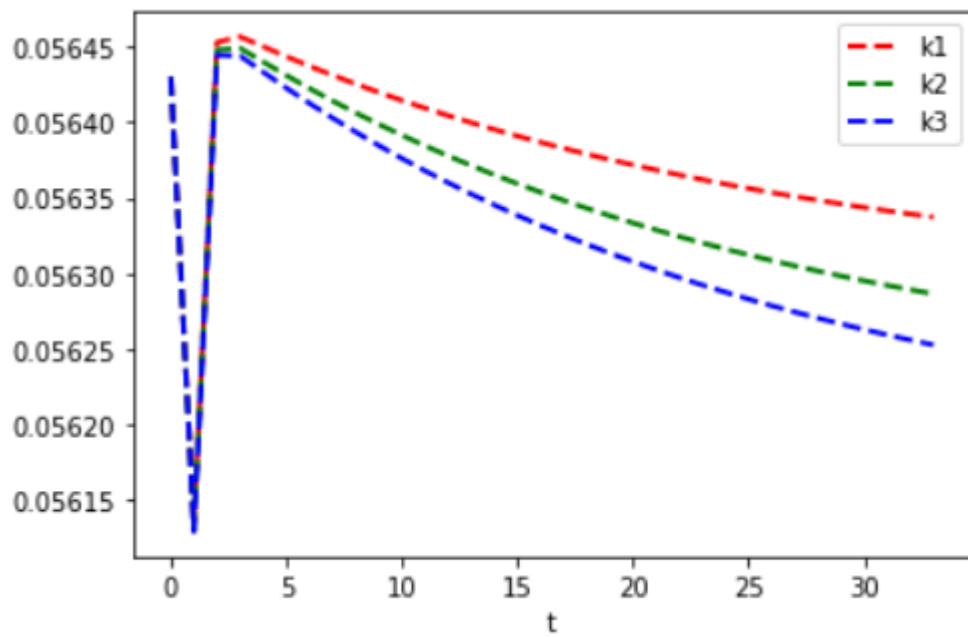
L_{ob} – дані спостережень.

Поглянемо на поведінку траєкторій $L(t), k(t)$ при зміні параметрів (Додаток 6):

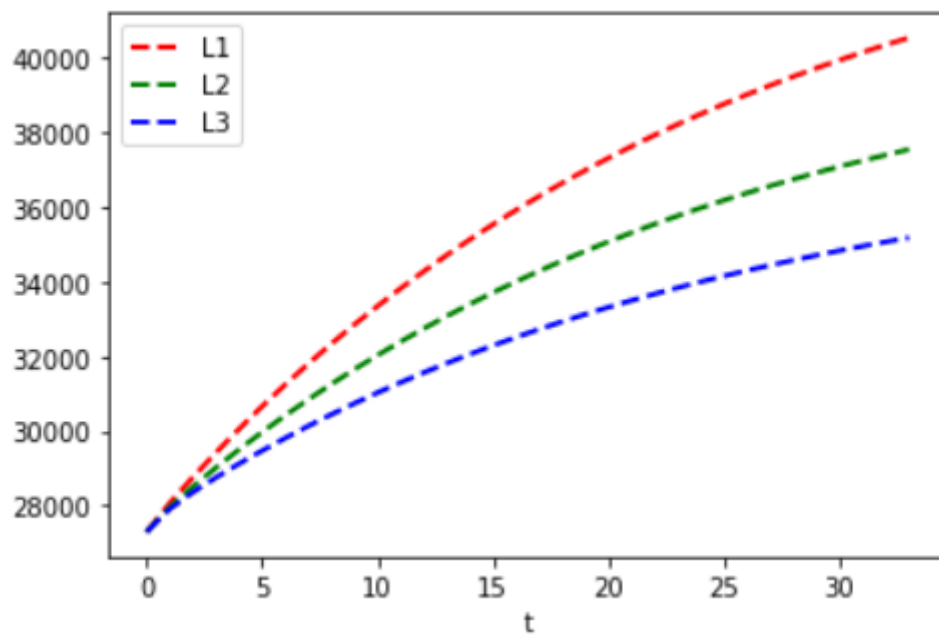
$$- a_3 = 105 (L1); a_3 = 120 (L2); a_3 = 130 (L3)$$



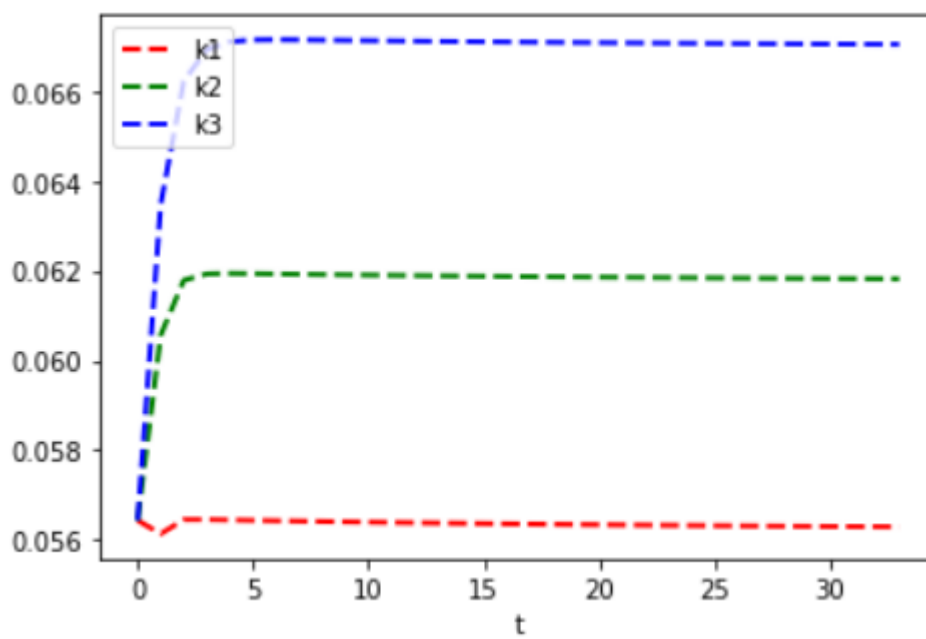
- $a3 = 105$ ($k1$); $a3 = 120$ ($k2$); $a3 = 130$ ($k3$)



- $a2 = 0.9$ ($L1$); $a2 = 2$ ($L2$); $a2 = 4$ ($L3$)

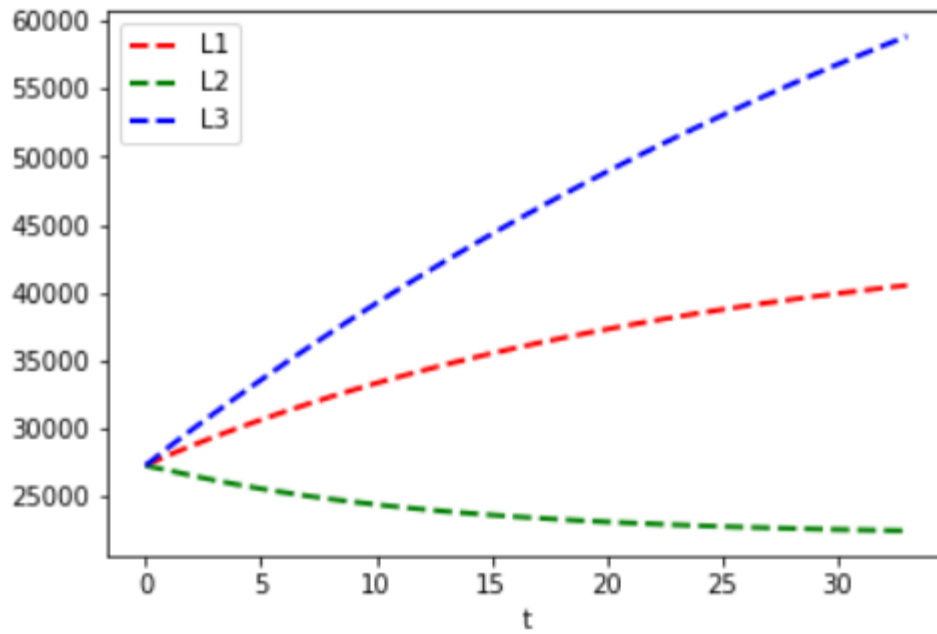


- $a2 = 0.9 (k1)$; $a2 = 2 (k2)$; $a2 = 4 (k3)$

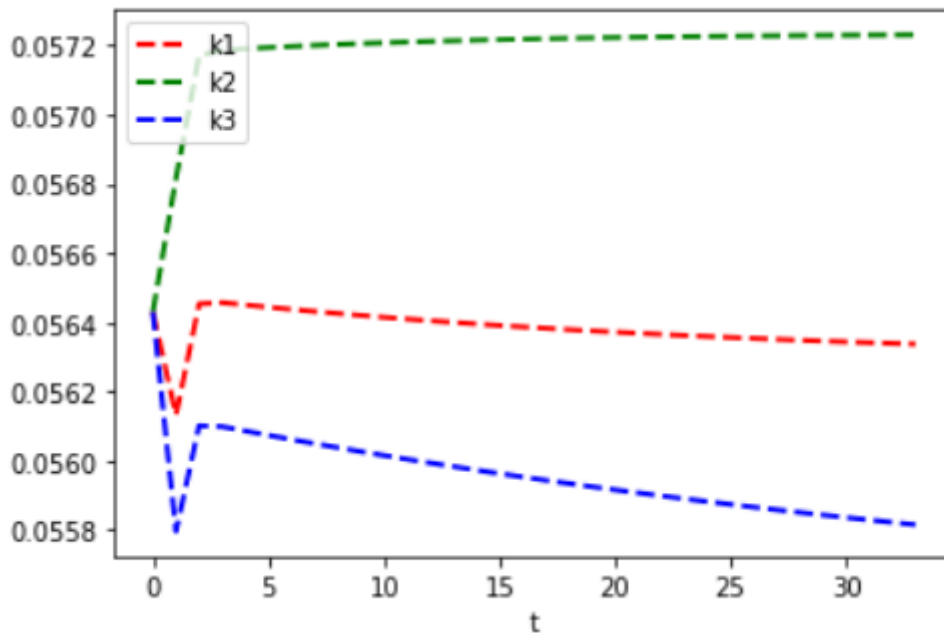


Реакція на зміну β_l :

- $\beta_l = 1/24$ (L1); $\beta_l = 1/12$ (L2); $\beta_l = 1/48$ (L3)

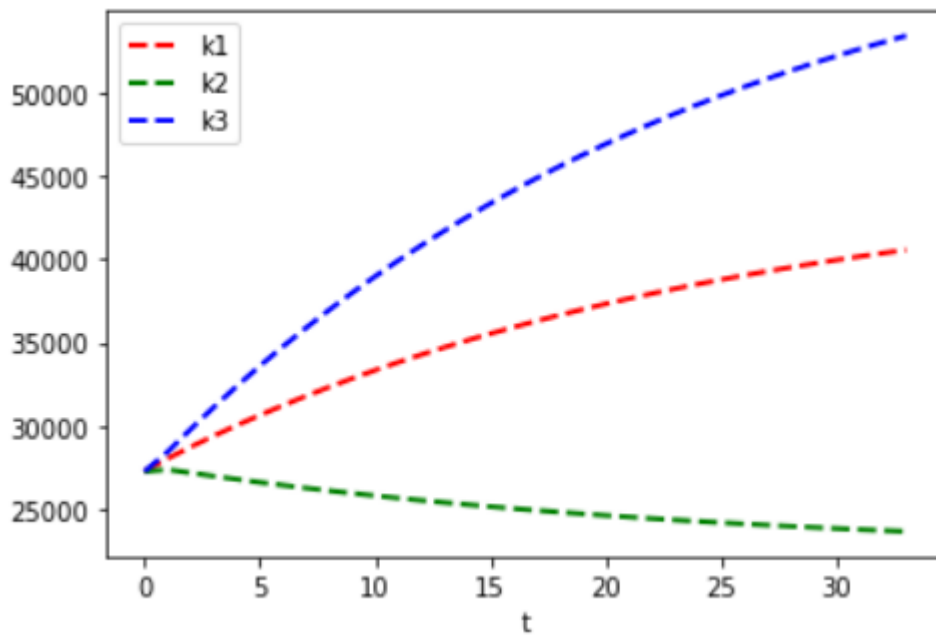


- $\beta_l = 1/24$ (k1); $\beta_l = 1/12$ (k2); $\beta_l = 1/48$ (k3)

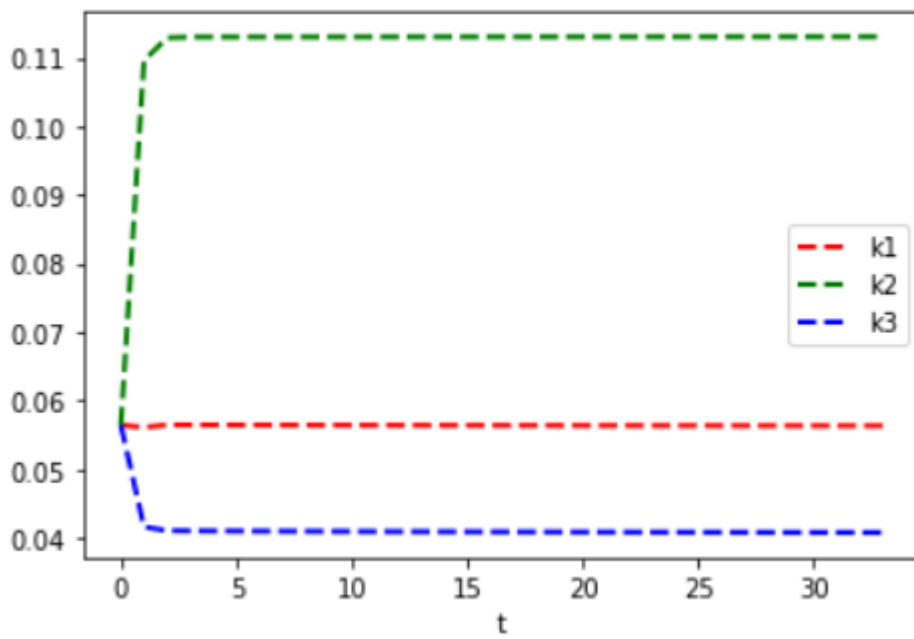


Реакція на зміну β_s :

- $\beta_s = 1/96$ (L1); $\beta_s = 1/48$ (L2); $\beta_s = 1/132$ (L3)



- $\beta_s = 1/96$ (k1); $\beta_s = 1/48$ (k2); $\beta_s = 1/132$ (k3)



ВИСНОВКИ

В даній роботі проведено пошук математичних моделей функціонування банківської системи та пошук реальних даних фінансової звітності банків України. Після чого проведено аналіз, ціллю якого є підбір моделі, яка б описувала динаміку та залежність кількісних змінних та для якої в наявності дані спостережень. На основі найбільш підходящих було побудовано та адаптовано нову систему, всі параметри розраховані під дані спостережень. В результаті було розроблено модель, яка дозволяє банківській системі вчасно реагувати на несподівані події.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бейко І.В., Зінько П.М., Наконечний О.Г.. Задачі, методи та алгоритми оптимізації: навчальний посібник, 2-ге вид., перероб. — К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2012. — 799 с.
2. Пильник Н.П., Поспелов И.Г. О естественных терминальных условиях в моделях межвременного равновесия. Экономический журнал ВШЭ, 2007, т. 11, №1.
3. Банки и банковское дело; Под ред. Балабанова И.Т. Санкт-Петербург: Питер, 2001-255с
4. Березин А.А., Финогеев А.Г. Математическое моделирование динамики изменения банковских показателей в процессе эволюционного развития организационного поля // Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ» Том 8, №1 (2016)
<http://naukovedenie.ru/PDF/09EVN116.pdf> (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ. DOI: 10.15862/09EVN116
5. Моделювання динаміки об'ємі банківських кредитів та депозитів за допомогою моделі перемикавання. Сиванич І.Б., Капустян В.О. Національний технічний університет України «КПІ»
6. Чуканов С.В. Переходные процессы в экономике и нестационарные модели экономической динамики. М.: ВЦ РАН, 2006.
7. Генезис математических моделей банка. Янковський І.А., Поліський національний університет Білорусії, Банківський вісник 2008
8. Андреев М.Ю., Пильник Н.П., Поспелов И.Г. Эконометрическое исследование и модельное описание деятельности современной российской банковской системы. М., ВЦ РАН, 2008. - 171 с.
9. Вітлінський В.В. Моделювання економіки: Навч. посібник: -К. КНЕУ, 2003. — 408с.
10. Павловский В.С. Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических процессов. - М.: ВЦ РАН, 1991. 149 с.

11. Чуканов С.В. Переходные процессы в экономике и нестационарные модели экономической динамики/С.В. Чуканов; М.: ВЦ РАН, 2006.
12. Бейко І.В., Щирба О.В. Методи оптимізації узагальнених динамічних моделей В.М. Глушкова. Математичне та комп'ютерне моделювання. 2017. — Вип. 10. — с. 18-25.