Відкрита студентська Олімпіада з математики
КПІ імені Ігоря Сікорського
I тур
20 січня 2021 року
Категорія B, 1 курс

1. Послідовність $a_n, n \geq 1$, задано рекурентно

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + 1}{a_n}, \quad a_1 = 2, a_2 = 2021.$$

Знайдіть a_{2021}.

2. Для фіксованого $n > 1$ розглянемо набір дробових чисел вигляду

$$0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n,$$

що містять рівно n цифр після коми, цифри a_i можуть приймати значення лише 0 та 1 ($a_n = 1$). Нехай x_n — кількість чисел в такому наборі, а y_n — сума усіх чисел набору. Знайдіть

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}.$$

3. Усі стовпці та рядки матриці A — арифметичні прогресії. Знайти елемент a_{14}, якщо

$$A = \begin{pmatrix} * & 9 & * & * \\ * & * & 8 & * \\ * & * & * & 5 \\ 1 & * & * & * \end{pmatrix}.$$

Зірочкою позначені невідомі елементи матриці A.

4. Нехай F_1 та F_2 — фокуси еліпса $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, а P — така точка еліпса, що $PF_1 : PF_2 = 2 : 1$. Знайти площу трикутника PF_1F_2.

5. Нехай $f(x) = x^{100} + 1$, $g(x) = x^{100} + 2x^{99} + 3x^{98} + \dots + 100x + 101$. Розглянемо функцію

$$h(x) = f(x) \cdot g^{(100)}(x) - f'(x) \cdot g^{(99)}(x) + f''(x) \cdot g^{(98)}(x) - f'''(x) \cdot g^{(97)}(x) + \dots + f^{(100)}(x) \cdot g(x),$$

де $f^{(n)}$ — похідна порядку n. Знайти $h(2020^{2021})$.

6. Знайти значення виразу

$$\frac{1^2}{1! \cdot 2020!} + \frac{2^2}{2! \cdot 2019!} + \frac{3^2}{3! \cdot 2018!} + \dots + \frac{2021^2}{2021! \cdot 0!}.$$