

Відкрита студентська Олімпіада з математики
КПІ імені Ігоря Сікорського
I тур
20 січня 2021 року
Категорія С, старші курси

1. Знайти неперервну функцію f , яка задовольняє рівність

$$f(x) = x^2 + 2 \int_0^1 f(xt) dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. Про послідовність $a_n, n \geq 1$, відомо, що $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = -1$ та

$$a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-3}, \quad n > 3.$$

Знайти a_{2021} .

3. Дослідити збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arccos^2 \sqrt{\frac{n}{n+1}}.$$

4. Обчислити

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^{2021} + 1)}.$$

5. Знайти границю числової послідовності

$$a_n = \frac{(1!)^1 + (2!)^2 + (3!)^3 + \dots + (n!)^n}{(n!)^n}.$$

6. Нехай x та y — такі додатні числа, що $x + y = 1$. Доведіть нерівність

$$x^x + y^y \geq \sqrt{2}.$$