

Відкрита студентська Олімпіада з математики
КПІ імені Ігоря Сікорського
I тур
20 січня 2021 року
Категорія С, 1 курс

1. Розглянемо число

$0,123456789101112\dots998999$

Після коми в цьому числі стоять підряд записані натуральні числа від 1 до 999. Знайти 2021-шу цифру після коми цього числа.

2. Про послідовність $a_n, n \geq 1$, відомо, що $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = -1$ та

$$a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-3}, \quad n > 3.$$

Знайти a_{2021} .

3. Усі стовпці та рядки матриці A — арифметичні прогресії. Знайти елемент a_{14} , якщо

$$A = \begin{pmatrix} * & 9 & * & * \\ * & * & 8 & * \\ * & * & * & 5 \\ 1 & * & * & * \end{pmatrix}.$$

Зірочкою позначені невідомі елементи матриці A .

4. Нехай F_1 та F_2 — фокуси еліпса $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, а P — така точка еліпса, що $PF_1 : PF_2 = 2 : 1$. Знайти площу трикутника PF_1F_2 .

5. Знайти границю числової послідовності

$$a_n = \frac{(1!)^1 + (2!)^2 + (3!)^3 + \dots + (n!)^n}{(n!)^n}.$$

6. Нехай x та y — такі додатні числа, що $x + y = 1$. Доведіть нерівність

$$x^x + y^y \geq \sqrt{2}.$$