

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
Фізико-математичний факультет
Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

«На правах рукопису»
УДК 519.21

До захисту допущено:
Завідувач кафедри
_____ О.І. Клесов
« 08 » червня 2022 р.

Магістерська дисертація
на здобуття ступеня магістра
за освітньо-науковою програмою «Страхова та фінансова математика»
зі спеціальності 111 «Математика»
на тему: «Моделювання стохастичних процесів, які виникають в задачах
фінансової математики»

Виконала:
студент II курсу магістратури, групи ОМ-01мн
Десницький Олександр Михайлович _____

Науковий керівник:
кандидат фізико-математичних наук, доцент
Тимошенко Олена Анатоліївна _____

Рецензент: _____

Засвідчую, що у цій магістерській
дисертації немає запозичень з праць
інших авторів без відповідних
посилань.
Студент _____

Київ – 2022 року

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Фізико-математичний факультет

Кафедра математичного аналізу та теорії ймовірностей

Рівень вищої освіти – другий (магістерський) за освітньо-науковою програмою

Спеціальність – 111 «Математика»

Освітньо-наукова програма «Страхова та фінансова математика»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ О.І. Клесов

« 02 » лютого 2022 р.

ЗАВДАННЯ

на магістерську дисертацію студенту

Десницький Олександр Михайлович

1. Тема дисертації «Моделювання стохастичних процесів, які виникають в задачах фінансової математики», науковий керівник дисертації кандидат фізико-математичних наук, доцент Тимошенко Олена Анатоліївна, затверджені наказом по університету від «25» травня 2022 р. № НС/372/2022.
2. Термін подання студентом дисертації 7 червня 2022 р.
3. Об'єктом дослідження є стохастичні диференціальні рівняння, що виникають в задачах фінансової математики.
4. Предметом дослідження є знаходження умов при яких розв'язок лінійного стохастичне диференціальне рівняння збігається до детермінованої функції, моделювання траєкторій розв'язків чисельними методами.
5. Перелік завдань, які потрібно виконати:

- 1) Виконати аналіз літератури, знайти роботи та публікації зі схожою тематикою, ознайомитися з літературою;
- 2) Ознайомитися з уже відомими результатами, щодо збіжності розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь, та ознайомитися з чисельними методами моделювання розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь;
- 3) Ознайомитися із задачами фінансової математики, що описуються стохастичними диференціальними рівняннями;
- 4) Сформулювати та довести теорему про умови збіжності розв'язків лінійного стохастичного диференціального рівняння;
- 5) Розглянути та порівняти основні методи моделювання розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь;
- 6) Проаналізувати отриманні результати, та застосовувати їх до моделювання задач фінансової математики про асимптотичну поведінку вартості капіталу.

6. Орієнтовний перелік графічного (ілюстративного матеріалу):

Зображення змодельованих траєкторій вінерівського процесу, зображення траєкторій процесу Броунівського мосту, зображення траєкторій розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь отриманих як аналітичними, так і чисельними методами, зображення траєкторій розв'язків стохастичного диференціального рівняння разом з траєкторією розв'язку звичайного стохастичного диференціального рівняння..

7. Дата видачі завдання 2 лютого 2022 р.

Календарний план

№ з/п	Назва етапів виконання магістерської дисертації	Термін виконання етапів магістерської дисертації	Примітка
1	Постановка, формулювання та обговорення головної задачі магістерської дисертації	02.02.22-06.02.22	Виконано
2	Аналіз літератури та публікацій	07.02.22-13.02.22	Виконано
3	Аналіз існуючих результатів стосовно асимптотичної поведінки розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь	14.02.22-13.03.22	Виконано
4	Формулювання та доведення теореми про умови асимптотичної збіжності траєкторій розв'язку лінійного стохастичного диференціального рівняння	14.03.22-27.03.22	Виконано

5	Порівняння між собою, та програмна реалізація в мові програмування Python методів чисельного знаходження траєкторій розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь.	28.03.22-10.04.22	Виконано
6	Моделювання асимптотичної поведінки розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь, що виникають в задачах фінансової математики.	11.04.22-24.04.22	Виконано
7	Аналіз проробленої роботи, підбиття підсумків та написання висновків	25.04.22-08.05.22	Виконано
8	Оформлення магістерської дисертації	09.05.22-05.06.22	Виконано

Студент

О. М. Десницький

Науковий керівник

О. А. Тимошенко

РЕФЕРАТ

Магістерська містить 61 сторінку, 26 слайдів презентації, 22 першоджерел.

Об'єктом даної дипломної роботи є стохастичні диференціальні рівняння, що виникають в задачах фінансової математики.

Метою даної дипломної роботи є дослідження асимптотичної поведінки розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь.

У роботі були розглянуті різні класи стохастичних диференціальних рівнянь. Було знайдено достатні умови, при яких розв'язок лінійного стохастичного диференціального рівняння збігається до детермінованої функції. Для певних задач були змодельовані траєкторії розв'язків за допомогою метода Ейлера-Мураямі та методу Мільштейна.

Ключові слова: стохастичне диференціальне рівняння (СДР), автономне стохастичне диференціальне рівняння, неавтономне стохастичне диференціальне рівняння, лінійне стохастичне диференціальне рівняння загального вигляду, асимптотична поведінка стохастичного диференціального рівняння, дифузійна модель миттєвої відсоткової ставки, чисельні методи, метод Ейлера-Мураямі, метод Мільштейна.

ABSTRACT

The master's thesis contains 61 pages, 26 slides of presentation, 22 primary sources.

The object of this thesis are stochastic differential equations that appear in the problems of financial mathematics.

The aim of this thesis is to study the asymptotic behavior of solutions of stochastic differential equations.

Different classes of stochastic differential equations are considered in the paper. Sufficient conditions have been found under which the solution of a linear stochastic differential equation coincides with a deterministic function. For certain problems, the trajectories of the solutions were modeled using the Euler–Maruyama method and the Milstein method.

Keywords: stochastic differential equation (SDE), autonomous stochastic differential equation, non-autonomous stochastic differential equation, linear stochastic differential equation of general form, asymptotic behavior of stochastic differential equation, diffusion method, instantaneous method, Euler–Maruyama method, Milstein method.

Зміст

Вступ	9
1 Теоретичні відомості	11
1.1 Вінерівський процес. Основні властивості	11
1.2 Інтеграл Іто	13
1.3 Стохастичне диференціальне рівняння	17
2 Асимптотична поведінка розв’язків стохастичних диференціальних рівнянь	24
2.1 Асимптотична поведінка неавтономних та автономних стохастичних диференціальних рівнянь	25
2.2 Асимптотична поведінка розв’язків лінійних стохастичних диференціальних рівнянь загального вигляду	28
2.3 Висновки	33
3 Моделювання	35
3.1 Моделювання вінерівського процесу	35
3.2 Моделювання траєкторій розв’язків диференціальних рівнянь	39
3.2.1 Метод Ейлера для звичайного диференціального рівняння	39
3.2.2 Метод Ейлера-Мураямі	40
3.2.3 Схема Мільштейна	44
3.3 Приклади моделювання СДР та ЗДР	45
3.3.1 Модель росту відсоткової ставки.	46
3.3.2 Моделювання асимптотичної поведінки	48
3.3.3 Моделювання відсоткової ставки $r(t)$ за допомогою процесу Кокса-Інгерсолла-Росса	53
3.4 Висновки	57
Висновки	59

Вступ

Світ, в якому ми живемо надзвичайно складний та непередбачуваний, не детермінований. Нас оточують випадковості та випадкові події.

В силу цього, випадкові процеси відіграють важливу роль в економіці, фінансах, теорії керування, теорії зв'язку та багатьох інших областях науки та життєдіяльності.

За допомогою диференціальних рівнянь вже не одне десятиліття математики намагаються зобразити процеси і явища, які нас оточують.

На відміну від загальних диференціальних рівнянь, розв'язком яких є функція, розв'язком стохастичних диференціальних рівнянь є змінна в часі випадкова величина (випадковий процес). Тому надзвичайно важливою та цікавою є задача знаходження асимптотичних властивостей та збіжностей траєкторій розв'язків саме стохастичних диференціальних рівнянь. Фізичним інтерпретуванням таких властивостей може бути, наприклад, те як поведе себе капітал кампанії (тобто до якої детермінованої функції будуть збігатися траєкторії) за достатньо великий проміжок часу.

Метою цієї роботи є дослідження асимптотичної поведінки траєкторій розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь, які виникають в задачах фінансової математики.

Ми розглянемо та проаналізуємо результати, отримані іншими дослідниками цього питання, та виведемо власні результати для загального лінійного стохастичного диференціального рівняння. Також ми застосуємо отримані результати для розв'язування деяких задач які виникають у фінансовій математиці.

Доповненням до аналітичних результатів слугуватимуть результати моделювання, отримані за допомогою чисельних методів.

Інколи, в силу складності задачі, не завжди вдається (або не є раціональним) отримати аналітичний розв'язок рівняння. У таких випадках стає доцільним використання наближених методів обчислення та чисельного моделювання. Ці методи можуть бути застосовані для візуалізації, первинного аналізу траєкторій, побудови чисельних статистичних оцінок, тощо. Тому, окрім аналітичних методів аналізу поведінки траєкторій стохастичного диференціального рівняння, нами будуть розглянуті, та програмно реалізова-

ні, методи чисельного знаходження розв'язку стохастичних диференціальних рівнянь.

Для цього ми проаналізуємо основні методи чисельного знаходження траєкторій розв'язку СДР, та проведемо порівняння цих методів. Покажемо, як чисельно розв'язувати деякі задачі фінансової математики, та змоделюємо асимптотичну поведінку деяких розв'язків, і порівняємо отримані чисельні результати з аналітичними.

Розділ 1

Теоретичні відомості

Цей розділ містить основні означення, та інші теоретичні відомості, які будуть використані у подальших розділах.

1.1 Вінерівський процес. Основні властивості

Означення 1.1.1. Гаусовий процес $\omega(t)$, $t \geq 0$ називається **вінерівським**, якщо

- 1) $E\omega(t) = 0$, $t \geq 0$;
- 2) $cov(\omega(s), \omega(t)) = \min\{s, t\}$; $s, t \geq 0$.

Властивість 1.1.1. Вінерівський процес має нормальний розподіл $\omega(t) \sim N(0, t)$, до того ж $\omega(0) = 0$ майже напевно (м.н.).

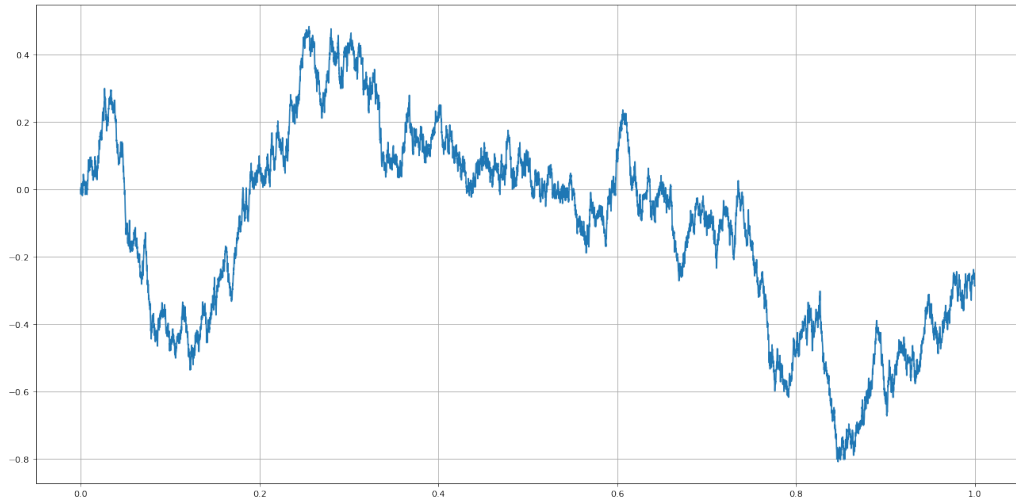
Властивість 1.1.2. Вінерівський процес – це процес з незалежними приростами: для $\forall m \geq 1$ та $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_m$ випадкові величини (в.в.) $w(t_0)$, $w(t_1) - w(t_0)$, $\dots$, $w(t_m) - w(t_{m-1}) \in \mathcal{U}$ сукупності незалежними.

Властивість 1.1.3. Однорідність приростів: в.в. $w(t) - w(s)$ та $w(v) - w(u)$ мають однакові розподіли для $\forall t, s, u, v \geq 0$ таких, що $t - s = v - u$. Якщо $0 \leq s \leq t$, то $w(t) - w(s) \sim N(0, t - s)$.

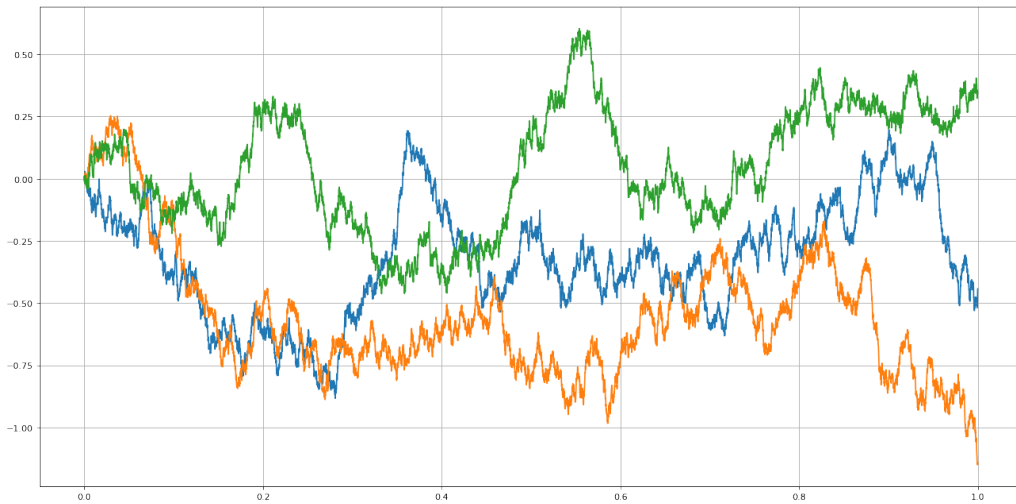
Властивість 1.1.4. Траєкторії вінерівського процесу є недиференційовними:

$$P(\exists t \geq 0 \text{ така, що } w'(t) \text{ існує}) = 0.$$

Наведемо приклади зображень траєкторій вінерівського процесу.



Одна траєкторія вінерівського процесу на 10000 точках.



Три траєкторії вінерівського процесу на 10000 точках.

Теорема 1.1.1. Для $\forall t_0 \in [0; 1]$

$$\limsup_{t \downarrow t_0} \left| \frac{w(t) - w(t_0)}{t - t_0} \right| = \infty \quad \text{м.н. (0.1)}$$

Наслідок 1.1.1. Похідна $w'(t_0)$ не існує для $\forall t_0 \in [0; 1]$.

Наслідок 1.1 випливає з теореми 1.1. Дійсно, якщо припустити, що похідна $w'(t_0)$ існує $\forall t_0 \in [0; 1]$, то з цього отримали б, що границя

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{w(t, \omega) - w(t_0, \omega)}{t - t_0}$$

існує для усіх $\omega \in A$, де A - випадкова подія додатної ймовірності. А це протирічить (0.1).

Вінерівський процес – це процес з нескінченноб варіацією

Введемо через $\Psi = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1\}$ – розбиття відрізка $[0, 1]$. Для розбиття Ψ визначимо квадратичну варіацію Q вінерівського процесу w :

$$Q(\omega) = \sum_{i=1}^n (w(t_i, \omega) - w(t_{i-1}, \omega))^2.$$

Має місце наступна теорема.

Теорема 1.1.2. *Нехай $\{\Psi_m\}$ – послідовність розбиття, для якої*

$$\Psi_m \rightarrow 0, m \rightarrow \infty.$$

Нехай $\{Q_m\}$ – послідовність відповідних квадратичних варіацій. Тоді

$$\lim_{m \rightarrow \infty} Q_m = 1.$$

Доведення теореми. Оскільки $w(t_i, \omega) - w(t_{i-1}, \omega) \in N(0, t_i - t_{i-1})$, то $EQ_m = 1$. Нехай γ – стандартна гаусівська в.в., тоді $E[\gamma]^4 = 3$ і в силу незалежності приростів вінерівського процесу

$$\begin{aligned} \text{var}[Q_m] &= \sum_{i=1}^n \text{var}[(w(t_i) - w(t_{i-1}))^2] = \\ &= \sum_{i=1}^n [E[w(t_i) - w(t_{i-1})]^4 - (t_i - t_{i-1})^2] = 2 \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^2 \leq \\ &\leq 2|Q_m| \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

що і потрібно було довести.

Варіація випадкового процесу V визначається наступним чином:

$$V(\omega) = \sup_{\Psi} \sum_{i=1}^n |w(t_i, \omega) - w(t_{i-1}, \omega)|,$$

Звичайна варіація випадкового процесу є необмежена.

Теорема 1.1.3. *Існує випадкова подія Ω_1 : $P(\Omega_1) = 1$ та $V(\omega) = \infty$ для $\forall \omega \in \Omega_1$. Це означає необмеженість варіації процесу на $[0, 1]$ майже напевно.*

1.2 Інтеграл Іто

Нехай вінерівський процес $w(t), t \in [0; T] = \Delta$ задано на $\{\Omega, \mathfrak{F}, P\}$. Нехай $\mathfrak{R}$ – σ -алгебра борелівських множин, яку задано на дійсній осі. Оберемо $t \in \Delta$ і задамо σ -алгебру подій $\{\mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$, яка породжується $\{w(s), s \leq t\}$.

Означення 1.2.1. Сукупність подій $\mathfrak{F}_t$, яка є найменшою σ -алгеброю, що містить усі події вигляду $\{w(s) \in \mathfrak{R}\}$ для $\forall s \leq t$ та $\forall B \in \mathfrak{R}$ називаються σ -алгеброю, що породжується $\{w(s), s \leq t\}$.

Означення 1.2.2. Сукупність σ -алгебр $\{\mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$ називають потоком, якщо для $t_1 < t_2$ має місце $\mathfrak{F}_{t_1} \subset \mathfrak{F}_{t_2}$.

Відмітимо, що в $\mathfrak{F}_t$ містяться усі події, про реалізацію яких можна дізнатись під час дослідження процесу $w(s)$ на проміжку $[0; t]$.

Означення 1.2.3. Будемо називати випадкову функцію $\{f(t), t \in \Delta\}$ неупередженою відносно потоку σ -алгебр $\{\mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$, якщо для $\forall t \in \Delta$ в. в. $f(t) \in \mathfrak{F}_t$ є вимірною (тобто $\{f(t) \in B\} \in \mathfrak{F}_t, \forall B \in \mathfrak{R}$).

Стохастичний інтеграл для простих функцій.

Визначимо стохастичний інтеграл по вінерівському процесу на інтервалі $\Delta = [0; T]$ для простих функцій.

Нехай Δ розбито на проміжки $\{\Delta_k\}, k = 1, \dots, n : \Delta = \bigcup_{k=1}^n \Delta_k$, де $\Delta_1 = [t_1; t_2], \Delta_2 = (t_2; t_3], \dots, \Delta_n = (t_n; t_{n+1}]$.

Означення 1.2.4. Випадкова функція $f(t)$ називається простою, якщо вона має вигляд:

$$f(t) = \sum_{k=1}^n x_k I_{\Delta_k}(t), t \in \Delta,$$

де $I_{\Delta_k}(t)$ - індикатор проміжку Δ_k , тобто

$$I_{\Delta_k}(t) = \begin{cases} 1, & t \in \Delta_k \\ 0, & t \notin \Delta_k \end{cases}$$

до того x_k - випадкові величини такі, що $E(x_k)^2 = D_k < \infty$.

З означення випливає, що $f(t)$ є неупередженою функцією, якщо величина x_k вимірною відносно $\mathfrak{F}_t, k = 1, \dots, n$. Дійсно, якщо $t \in \Delta_k$, то $f(t) = x_k$ є вимірною відносно $\mathfrak{F}_{t_k}$, але $t_k < t$ тому $\mathfrak{F}_{t_k} \subseteq \mathfrak{F}_t$, тобто $f(t) \in \mathfrak{F}_t$ вимірною.

Означення 1.2.5. Стохастичним інтегралом від простої функції $f(t)$ по $w(t), t \in \Delta$ називається:

$$I(f) = \int_{\Delta} f(t) dw(t) = \sum_{k=1}^n x_k \Delta w_k,$$

де $\Delta w_k = w(t_{k+1}) - w(t_k)$ - приріст процесу $w(t)$ на проміжку Δ_k .

Властивості інтеграла Іто.

Властивість 1.2.1. *Лінійність.* Для $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$:

$$I(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 I(f_1) + \alpha_2 I(f_2).$$

Дійсно, якщо $f_1(t), f_2(t)$ — прості випадкові функції, до того ж вимірні відносно $\mathfrak{F}_t$, то таку ж властивість має і $f(t) = \alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)$, тобто $f(t)$ — проста функція.

Властивість 1.2.2. $E(I(f)) = 0$.

Дійсно, в силу лінійності математичного сподівання

$$E(I(f)) = \sum_{k=1}^n E(x_k \Delta w_k).$$

Але в силу того, що Δw_k не залежить від $\mathfrak{F}_k$ за властивістю незалежності приростів вінерівського процесу $E(w(t)) = 0$ та x_k вимірні відносно $\mathfrak{F}_k$ маємо

$$\begin{aligned} E(x_k \Delta w_k) &= E(E(x_k \Delta w_k \mid \mathfrak{F}_k)) = E(x_k E(\Delta w_k \mid \mathfrak{F}_k)) = \\ &= E(x_k) E(\Delta w_k) = 0. \end{aligned}$$

Властивість 1.2.3.

$$E(I(f))^2 = \int_{\Delta} E(|f(t)|)^2 dt < \infty.$$

Дійсно

$$E(x_k \Delta w_k)^2 = E(x_k)^2 E(\Delta w_k)^2 = D_k(t_{k+1} - t_k).$$

Якщо $k < l$, то $E(x_k \Delta w_k) = E(x_k \Delta w_k f_l \Delta w_l) = E(x_k \Delta w_k f_l) E(\Delta w_l) = 0$, що також вірно і для $k > l$.

Отже,

$$E(I(f))^2 = \sum_{k=1}^n D_k(t_{k+1} - t_k) = \sum_{k=1}^n E(x_k)^2 (t_{k+1} - t_k) = \int_{\Delta} E(|f(t)|)^2 dt.$$

Тобто властивість 3 виконується.

Побудова стохастичного інтегралу для неперервних функцій.

Для побудови стохастичного інтегралу від більш розширеного класу функцій розглянемо наступне твердження.

Теорема 1.2.1. Нехай функція $f(t)$ є неперервною у середньому квадратичному, тоді:

1. Якщо $f(t)$ — неупереджена функція, то знайдеться послідовність простих $\{f_n(t)\}$ така, що

$$\int_{\Delta} E(|f(t) - f_n(t)|^2) dt \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

2. Має місце збіжність у середньому квадратичному послідовності стохастичних інтегралів $I(f_n)$:

$$I(f_n) \rightarrow I(f) \text{ с.к. при } n \rightarrow \infty.$$

Тепер можемо визначити стохастичний інтеграл від функції $f(t)$.

Означення 1.2.6. Випадкова величина

$$I(f) = \int_{\Delta} f(t)dw(t) = \sum_{k=1}^n x_k \Delta w_k,$$

називають стохастичним інтегралом Іто від випадкової функції $f(t)$.

Сформулюємо теорему про існування стохастичного інтегралу.

Теорема 1.2.2. Якщо $\{f(t), t \in \Delta\}$ — є функцією неперервною у середньому квадратичному, яку задано на скінченному проміжку $\Delta = [0; T]$ і вимірною відносно потоку σ алгебр $\{\mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$, де $\mathfrak{F}_t = \sigma\{w(s), s \in [0, t]\}$, то стохастичний інтеграл $I(f) = \int_{\Delta} f(t)dw(t)$ існує та має властивості 1-3.

Приклад. Переконаємось, що

$$\int_0^T w(t)dw(t) = \frac{1}{2} (w^2(T) - T).$$

Нагадаємо, що Δw_k має розподіл $N(0; h)$, тому $E(\Delta w_k)^2 = h$, а $E(|\Delta w_k|)^4 = 3E^2(|\Delta w_k|^2) = 3h^2$, до того ж $h = \frac{T}{n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Визначимо k -й член в інтегральній сумі.

$$w(t_k) \Delta w_k = \frac{1}{2} (w^2(t_{k+1}) - w^2(t_k)) - \frac{1}{2} (\Delta w_k)^2.$$

Для $I_n(w)$ отримаємо

$$I_n(w) = \sum_{k=1}^n w(t_k) \Delta w_k = \frac{1}{2} (w^2(T) - w^2(0)) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\Delta w_k)^2,$$

$$E \left(\sum_{k=1}^n (\Delta w_k)^2 \right) = \sum_{k=1}^n E (\Delta w_k)^2 = nh = T.$$

$$D \left(\sum_{k=1}^n (\Delta w_k)^2 \right) = \sum_{k=1}^n D (\Delta w_k)^2 = n2h^2 = \frac{2T^2}{n} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Таким чином, ряд $\sum_{k=1}^n (\Delta w_k)^2$ збігається до T в середньому квадратичному при $n \rightarrow \infty$, звідки в силу $w(0) = 0$ маємо

$$I_n(w) \rightarrow \frac{1}{2} (w^2(T) - T) \text{ в середньому квадратичному при } n \rightarrow \infty$$

Що і потрібно було довести.

1.3 Стохастичне диференціальне рівняння

Визначення стохастичного інтегралу Іто розглянути клас диференціальних систем з випадковими збуреннями.

Нехай $X(t) \in \mathbb{R}^n$, $a(t, x) \in \mathbb{R}^n$, $\sigma(t, x) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ — матрична функція розмірності $n \times m$, $w(t) \in \mathbb{R}^m$ вінерівський процес, $v \in \mathbb{R}^n$ — початкова умова.

Означення 1.3.1. Випадкова функція $X(t)$ є розв'язком стохастичного диференціального рівняння

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dw(t)$$

на проміжку $\Delta = [0, T]$ з початковою умовою $X(0) = v$, якщо її можна представити у вигляді

$$X(t) = v + \int_0^t a(\tau, X(\tau))d\tau + \int_0^t \sigma(\tau, X(\tau))dw(\tau)$$

Формула Іто.

Теорема 1.3.1. Нехай функція $f = f(t, x)$ неперервно диференційовною по t , двічі неперервно диференційовною по змінній x ($f = f(t, x) \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$). Припустимо, що

$$dX(t) = a(X(t))dt + \sigma(X(t))dw(t), t \in [0; T].$$

Тоді

$$df(t, X(t)) = f'_t(t, X(t))dt + f'_x(t, X(t))dX(t) + \frac{1}{2}f''_{xx}(t, X(t))\sigma^2(t)dt.$$

Можна сказати, що формулу Іто можна записати, як формулу Тейлора до другого члена:

$$df(t, X(t)) = f'_t(t, X(t))dt + f'_x(t, X(t))dX(t) + \frac{1}{2}(f''_{xx}(t, X(t))(dt)^2 + 2f''_{xx}(t, X(t))dtdX(t) + f''_{xx}(t, X(t))(dX(t))^2),$$

де використовується наступне правило множення диференціалів:

$\times$	dt	$dw(t)$
dt	0	0
$dw(t)$	0	dt

Наприклад, нехай $dX(t) = a(X(t))dt + \sigma(X(t))dw(t)$

$$\begin{aligned} (dX(t))^2 &= (dX(t))(dX(t)) = \\ &= (a(X(t))dt + \sigma(X(t))dw(t))(a(X(t))dt + \sigma(X(t))dw(t)) = \\ &= a^2(X(t))(dt)^2 + 2a(X(t))\sigma(X(t))dtdw(t) + \sigma^2(t)(dw(t))^2 = \sigma^2(t)dt. \end{aligned}$$

Випадкові процеси у задачах фінансової математики.

Стохастичні диференціальні рівняння ефективно моделюють випадковий процес. Вони є основним інструментом для дослідження у багатьох галузях таких, як: страхова та фінансова математика, економіка, теорія управління тощо. На теперішній час наближені аналітичні і асимптотичні методи дослідження математичних моделей стали невід'ємною частиною теорії математичного моделювання, що дозволяє вивчати приблизні розв'язки достатньо складних збурених задач, якщо відомі розв'язки детермінованих задач.

Зокрема, збурені динамічні системи часто мають економічну інтерпретацію, що дійсно робить дослідження розв'язків особливо цікавим для фахівців економічної галузі. Розглянемо деякі особливо помітні динамічні системи.

Модель росту відсоткової ставки.

$$dX(t) = \alpha X(t)dt + \sigma X(t)dw(t),$$

Розв'язок такого рівняння має вигляд

$$X(t) = X(0)e^{(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma w(t)}.$$

Процес Орнштейна–Уленбека

Модель Орнштейна–Уленбека задається наступним СДР

$$dX(t) = a(\beta - X(t))dt + \sigma dw(t),$$

де $a > 0$, $\sigma > 0$, $\beta = \text{const}$.

Знайдемо розв'язок цього рівняння. Для цього випишемо диференціал процесу:

$$f(X(t), t) = X(t)e^{at}$$

тоді ми будемо мати

$$\begin{aligned} df(X(t), t) &= aX(t)e^{at}dt + e^{at}dX(t) = \\ &= e^{at}a\beta dt + \sigma e^{at}dw(t). \end{aligned}$$

З попередньої рівності отримаємо наступне співвідношення

$$X(t)e^{at} = X(0) + \int_0^t e^{as}a\beta ds + \int_0^t \sigma e^{as}dw(s).$$

Звідки випливає, що розв'язком нашого СДР є процес

$$X(t) = X(0)e^{-at} + \beta(1 - e^{-at}) + \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)}dw(s).$$

Або, в іншій формі запису матимемо

$$X(t) = X(0)e^{-at} + \beta(1 - e^{-at}) + \frac{\sigma}{\sqrt{2a}}w(1 - e^{-2at}).$$

Як можна побачити, наш процес є гаусовим, а отже задається математичним сподіванням та коваріаційною функцією.

$$E(X(t)) = X(0)e^{-at} + \beta(1 - e^{-at})$$

$$\begin{aligned} \text{cov}(X(s), X(t)) &= E[(X(s) - E[X(s)])(X(t) - E[X(t)])] = \\ &= E\left[\int_0^s \sigma e^{a(u-s)}dw(u) \int_0^t \sigma e^{a(v-t)}dw(v)\right] = \\ &= \sigma^2 e^{-a(s+t)} E\left[\int_0^s e^{au}dw(u) \int_0^t e^{av}dw(v)\right] = \\ &= \frac{\sigma^2}{2a} e^{-a(s+t)} (e^{2a \min(s,t)} - 1) = \\ &= \frac{\sigma^2}{2a} (e^{-a|t-s|} - e^{-a(t+s)}). \end{aligned}$$

Модель О. Васічека.

Модель О. Васічека - це модель, що описує відсоткову ставку та її зміну з часом. Ця модель задається наступним С.Д.Р

$$dX(t) = \alpha(\beta - X(t))dt + \sigma dw(t),$$

де β - середній (довгостроковий) рівень відсоткової ставки, σ - параметр волатильності, w - вінерівський процес, а α параметр, що характеризує швидкість повернення до середнього значення.

Розв'язком цієї моделі є наступний випадковий процес:

$$X(t) = X(0)e^{-\alpha t} + b(1 - e^{-\alpha t}) + \sigma e^{-\alpha t} \int_0^t e^{as} dW_s.$$

Математичне сподівання розв'язку:

$$E[X(t)] = X(0)e^{-\alpha t} + b(1 - e^{-\alpha t})$$

Дисперсія розв'язку

$$\text{Var}[X(t)] = \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha t}).$$

Відповідно, гранична поведінка для математичного сподівання

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[X(t)] = b,$$

та для дисперсії

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Var}[X(t)] = \frac{\sigma^2}{2\alpha}.$$

Модель Кокса-Інгерсолла-Росса

У 1985 році Дж. К. Коксом, Дж. Е. Інгерсоллом і С. А. Россом була представлена модель Кокса-Інгерсолла-Росса (модель CIR). Ця модель позиціювалася як альтернатива моделі О. Васіченка. Модель CIR описана наступним СДР

$$dX(t) = \alpha(c - X(t))dt + \sigma\sqrt{X(t)}dw(t),$$

де $X(t) > 0$, $2\alpha c \geq \beta^2$, $w(t), t \geq 0$ - це вінерівський процес, α - середня швидкість реверсії, c - довгострокове середнє, а σ - коефіцієнт волатильності.

Розв'язком цього СДР є процес

$$X(t) = X(s) + \int_s^t \alpha(c - X(u))du + \sigma \int_s^t \sqrt{X(u)}dW(u), \quad s < t.$$

Для цього процесу

$$E[X(t) | X(s)] = X(s) + \int_s^t \alpha (c - E[X(u) | X(s)]) du, \quad s < t$$

це означає, що з $m_t = E[X(t) | X(s)]$,

$$\frac{d}{dt}m_t = \alpha (c - m_t), \quad s < t$$

з розв'язком

$$E[X(t) | X(s)] = m_t = X(s)e^{-\alpha(t-s)} + c \left(1 - e^{-\alpha(t-s)}\right), \quad s < t.$$

Аналогічно можна показати, що

$$\text{Var}[X(t) | X(s)] = \frac{X(s)\sigma^2}{\alpha} \left(e^{-\alpha(t-s)} - e^{-2\alpha(t-s)}\right) + \frac{c\sigma^2}{2\alpha} \left(1 - e^{-\alpha(t-s)}\right)^2.$$

Модель Д. Халла - А. Уайта.

У (1990) Халл і Уайт демонструють свою модель, що розширює модель відсоткової ставки (без арбітражу) О. Васічека.

Модель Д. Халла - А. Уайта. широко використовується серед практиків і в основному використовується для моделювання майбутніх коротких ставок або коефіцієнтів дисконту, з яких ми можемо розрахувати форвардні ставки, грошові потоки і теперішню вартість похідних цінних паперів interest rate derivative (IRD). Також, цю модель використовують для зображення і дисконтування страхових полісів (тобто для моделювання ціноутворення страхових зобов'язань), що мають характеристики опціонів (ціноутворення, узгоджене з ринком).

Ця модель задається наступним рівнянням:

$$dX(t) = (c(t) - a(t)X(t)) dt + \phi(t)dw(t).$$

Параметр $a(t)$ задає середню швидкість реверсії, $\phi(t)$ — миттєву волатильність, $w(t)$ — вінерівський процес, а $c(t)$ — змінний у часі дрейф.

Коли α , c і ϕ константи розв'язок цього СДР набуде вигляду

$$X(t) = e^{-\alpha t}X(0) + \frac{c}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) + \phi e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha u} dw(u),$$

що можна записати, як

$$X(t) \sim \mathcal{N} \left(e^{-\alpha t}X(0) + \frac{c}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}), \frac{\phi^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha t}) \right).$$

Коли $c(t)$ залежить від часу, процес, що є розв'язком цього СДР, матиме вигляд

$$X(t) = e^{-\alpha t} X(0) + \int_0^t e^{\alpha(s-t)} c(s) ds + \phi e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha u} dW(u),$$

що можна записати як

$$X(t) \sim \mathcal{N} \left(e^{-\alpha t} X(0) + \int_0^t e^{\alpha(s-t)} c(s) ds, \frac{\phi^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha t}) \right).$$

Зауважимо, що у реальному житті моделі, в яких параметри a, c, ϕ є константами, зустрічаються не часто, оскільки із зміною часу умов на ринку змінюються і волатильність, і середній рівень довгострокової ставки, і швидкість повернення до середнього значення.

Розглянемо декілька основних задач фінансової математики.

Задача про оптимальну зупинку.

Припустимо, що деяка фінансова установа має певні активи (нерухомість, акції, нафта тощо), які керівник планує продати. Ціна $X(t)$ активів на фінансовому ринку у момент часу t змінюється за наступним законом

$$dX(t) = rX(t)dt + \alpha X(t)dw(t).$$

Є відомою відсоткова ставка угоди. Виникає питання: у який момент часу продаж активів буде найкращим? Припускається, що продавець знає поведінку ціни до теперішнього моменту часу t , але через випадкові зовнішні фактори, він не може бути впевненим в моменті продажу, чи виявиться його вибір часу найкращим. Отже, потрібно знайти стратегію зупинки, яка дає найкращий результат в майбутньому, тобто максимізує очікувану вигоду продавця.

Задача про оптимальний вибір портфелю

Припускаємо, що є дві наступні можливості для інвестицій.

- Ризикові активи X (наприклад акції), коли ціна активу моделюється за допомогою диференціального рівняння з випадковими збуреннями

$$dX(t) = rX(t)dt + \alpha X(t)dw(t).$$

- Безризикове інвестування g (наприклад бони), коли ціна активу росте зі швидкістю експоненти:

$$dg(t) = bg(t)dt.$$

У кожний момент часу t робимо вибір, яку частину u_t заощаджень $X(t)$ помістити до ризикових інвестицій, а яку частину $(1 - u_t) X(t)$ помістити до безризикових, тобто $\max_{0 \leq t \leq 1} E[U(X(T))]$, T - кінцевий час.

Модель Блека-Шоулза.

Нехай $g(t)$ — банківський рахунок

$$dg(t) = rg(t)dt, B(t_0) = 1$$

ціна акції X задовольняє наступне рівняння:

$$dX(t) = r(t)X(t)dt + \sigma X(t)dw(t), X(t_0) = a > 0.$$

Модель Блека-Шоулза використовується для оцінки різних цінних паперів і власного капіталу бізнес-структур, що залучають позикові кошти з метою фінансування своєї діяльності. Формула має на увазі наявність ключового елемента визначення опціонної вартості. Їм є приблизна волатильність (показник мінливості ціни) акцій.

Низку інших важливих для фінансового світу стохастичних диференціальних рівнянь можна знайти у роботі Б. Оксендаля [17].

Розділ 2

Асимптотична поведінка розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь

Однією з важливих задач теорії випадкових процесів є вивчення властивостей розв'язків стохастичних диференціальних. Особливу увагу математики приділяють асимптотичним властивостям розв'язків при $t \rightarrow \infty$. Такі задачі вивчали Гіхман Й.І., Скороход А.В. [19], Хасьмінський Р.З. [22], Г. Маккіна [20], Н. Ікеди та С. Ватанабе [18], М. Метів'є [12] та багато інших. За деяких умов розв'язки збурених систем можуть зберігати асимптотичні властивості траєкторій відповідних граничних автономних систем. Але загалом це не так: поведінка збуреної та незбуреної траєкторій може суттєво відрізнятися. Так, Гіхман Й.І., Скороход А.В. [19] вивчали асимптотичну поведінку розв'язку автономного рівняння збуреного за допомогою вінерівського процесу:

$$dX(t) = a(X(t))dt + \sigma(X(t))dw(t), t \geq 0,$$

де w – стандартний вінерівський процес, a, σ – неперервні функції. Гіхман Й.І., Скороход А.В. досліджували асимптотику розв'язку стохастичного диференціального рівняння за допомогою звичайного диференціального рівняння з відокремлювальними змінними. Тобто, було знайдено умови, за яких випадковий шум майже не впливає на швидкість зростання розв'язку X збуреної системи. Умови асимптотичної еквівалентності розв'язків стохастичного диференціального рівняння та звичайного диференціального рівняння представлено в роботі Г. Келлера, Г. Керстінга та У. Рослера [7]. Пізніше в роботах [6],[8] було знайдено точний порядок зростання для рівняння

$$dX(t) = a(X(t))\phi(t)dt + \sigma(X(t))\theta(t)dw(t), t \geq 0.$$

2.1 Асимптотична поведінка неавтономних та автономних стохастичних диференціальних рівнянь

Розглянемо автономне стохастичне диференціальне рівняння.

В роботі Гіхман Й.І та Скорохода А.В. [19] були наведені наступні результати.

Розглянемо рівняння вигляду

$$d\xi(t) = a(\xi(t))dt + \sigma(\xi(t))dw(t). \quad (2.1)$$

Відмітимо, що коефіцієнти α та σ не залежать на пряму від часу t .

Спробуємо знайти таку функцію $\varphi(t)$, щоб

$$P \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\xi(t)}{\varphi(t)} = 1 \right\} = 1. \quad (2.2)$$

Функцію $\varphi(t)$ називають точним порядком зростання функції $\xi(t)$ при $t \rightarrow \infty$.

Теорема 2.1.1. *Нехай $\xi(t)$ є розв'язком рівняння (2.1), а його коефіцієнти задовольняють умовам*

- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} a(x) = a_0 > 0$;
- 2) $\sigma(x)$ дадатня обмежена функція;
- 3) коефіцієнти $a(x)$ та $\sigma(x)$ такі, що

$$P \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = +\infty \right\} = 1.$$

Тоді

$$P \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\xi(t)}{a_0 t} = 1 \right\} = 1$$

Розглянемо теорему про існування точного порядку росту.

Теорема 2.1.2. *Нехай $\xi(t)$ є розв'язком (2), і виконуються наступні умови:*

- 1) $a(x)$ и $\sigma(x)$ такі, що $P \{ \lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = +\infty \} = 1$;
- 2) існує зростаюча, двічі неперервна функція $f(x)$, така, що $f(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} [a(x)f'(x) + \frac{1}{2}f''(x)\sigma^2(x)] = C > 0$ та $f'(x)\sigma(x)$ обмежено.

Тоді

$$P \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(\xi(t))}{t} = C \right\} = 1.$$

Доведення. Нехай $\varphi(x)$ - обернена до f функція.
Покладемо $\eta(t) = f(\xi(t))$. Не важко побачити, що $\mathbf{P} \{ \lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t) = +\infty \} = 1$.

Далі, $\eta(t)$ задовільняє співвідношенню $d\eta(t) = \bar{a}(\eta(t))dt + \bar{\sigma}(\eta(t))dw(t)$ де

$$\bar{a}(x) = a(\varphi(x))f'(\varphi(x)) + \frac{1}{2}\sigma(\varphi(x))f''(\varphi(x)),$$

$$\sigma(x) = \sigma(\varphi(x))f'(\varphi(x)).$$

З умови теореми слідує, що $\lim_{x \rightarrow +\infty} \bar{a}(x) = C > 0$, $\bar{\sigma}(x)$ обмежена. Тому, на підставі теореми 2.1.1

$$\mathbf{P} \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\eta(t)}{Ct} = 1 \right\} = 1.$$

Оскільки $\eta(t) = f(\xi(t))$ - теорему доведено.

Зауваження1. Можна взяти наступні умови для f , щоб виконувалися твердження теореми:

- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} a(x)f'(x) = C > 0$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f''(x)\sigma^2(x) = 0$;
- 3) $f'(x)\sigma(x)$ - обмежена функція.

Наслідок.

Нехай $a(x) \sim Cx^\alpha$ коли $x \rightarrow +\infty$, $0 < \alpha < 1$, $C > 0$. Покладемо $f(x) = x^{1-\alpha}$ для достатньо великих x . Тоді $f'(x) = (1-\alpha)x - \alpha$, $f''(x) = -\alpha(1-\alpha)x^{-1-\alpha}$.

Оскільки $f'(x)a(x) \rightarrow C(1-\alpha)$, то

$$\mathbf{P} \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\xi(t)^{1-\alpha}}{t} = C(1-\alpha) \right\} = 1,$$

якщо тільки $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2(x)}{x^{1+\alpha}} = 0$ та $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sigma(x)}{x^\alpha} = 0$.

Звідси, якщо виконані всі умови, маємо

$$\mathbf{P} \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\xi(t)}{\frac{1}{t^{1-\alpha}}} = [C(1-\alpha)]^{\frac{1}{1-\alpha}} \right\} = 1.$$

Дослідимо асимптотичну поведінку неавтономного стохастичного диференціального рівняння, дляц ього розглянемо наступне рівняння вигляду.

$$d\eta(t) = g(\eta(t))\varphi(t)dt + \sigma(\eta(t))\theta(t)dv(t), t \geq 0; \eta(0) \equiv b, b > 0, \quad (2.3)$$

де w - стандартний вінерів процес; b - додатна константа. Припустимо, що $\varphi = (\varphi(t), t \in \mathbb{R}_+^1)$ та $\theta = (\theta(t), t \in \mathbb{R}_+^1)$ - дійсні функції, і вони є неперервні, $g = (g(x), x \in \mathbb{R}^1)$ та $\sigma = (\sigma(x), x \in \mathbb{R}^1)$ - неперервні додатні функції такі, що (2.3) має неперервний розв'язок η .

Покладемо $\mu = (\mu(x), x \in \mathbb{R}^1)$ - неперервний розв'язок звичайного диференціального рівняння

$$d\mu(t) = g(\mu(t))\varphi(t)dt, t \geq 0; \mu(0) = b, b > 0, \quad (2.4)$$

яке відповідає рівнянню (0.3) при $\sigma \equiv 0$, тобто

Нехай функції g та φ такі, що існує неперервний розв'язок μ . Також, нехай g та φ такі, що виконується умова $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(t) = \infty$.

Поклавши $t \geq 0$, позначимо

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(u)du \quad i \quad \Phi_+(t) = \int_0^t |\varphi(u)|du$$

та припустимо, що справедливі наступні умови

$$\Phi(t) > 0, t > 0; \quad (2.5)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) = \infty, \quad (2.6)$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\Phi_+(t)}{\Phi(t)} < \infty, \quad (2.7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} G(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_b^x \frac{ds}{g(s)} = \infty. \quad (2.8)$$

Теорема 2.1.3. Припустимо, що φ та θ - неперервні функції, та g і σ - додатні неперервні функції, для яких (2.3) має неперервний розв'язок η . Нехай умови (2.5) - (2.8) виконуються. Нехай

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\int_0^{2^{k+1}} \theta^2(s)ds}{\Phi_+^2(2^k)} < \infty \quad (2.9)$$

і виконуються наступні умови:

а) $\frac{\sigma}{g}$ - обмежена функція;

б) g - неперервно диференційована функція, та

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t |g'(\eta(s))| \theta^2(s)ds}{\Phi_+(t)} = 0 \quad \text{м. н. на множині } \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t) = \infty \right\}. \quad (2.10)$$

Тоді справедливе наступне

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{G(\eta(t))}{\Phi(t)} = 1 \text{ м.н. на множині } \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t) = \infty \right\}.$$

В умові (2.10) міститься незручне для перевірки обмеження на розв'язок η рівняння (2.3).

Запропонуємо достатні умови, які є більш зручними для перевірки, та не містять в собі η .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g'(x) = 0 \quad \text{та} \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t \theta^2(s) ds}{\Phi_+(t)} < \infty$$

або

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} |g'(x)| < \infty \quad \text{та} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t \theta^2(s) ds}{\Phi_+(t)} = 0.$$

Теорема 2.1.3 є узагальнює результати У. Рослера, Г. Керстинга Г. Келлера та відповідні результати Й.І. Гіхмана та А.В. Скорохода, для автономного СДР

Теорема, що представлена далі, описує достатні умови для асимптотичної еквівалентності розв'язків СДР та ЗДР.

Теорема 2.1.4. Припустимо, що є дійсними умови теореми 2.1.3, та

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_t^{ct} \frac{du}{g(u)G(u)} > 0 \quad \text{для всіх} \quad c > 1.$$

Тоді

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\eta(t)}{\mu(t)} = 1 \text{ м.н. на множині } \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t) = \infty \right\},$$

де η розв'язок рівняння (2.3), а μ розв'язок рівняння (2.4).

2.2 Асимптотична поведінка розв'язків лінійних стохастичних диференціальних рівнянь загального вигляду

У цьому розділі ми розглянемо асимптотичні властивості розв'язку лінійного стохастичного диференціального рівняння

$$dX(t) = (\alpha(t)X(t) + c(t))dt + (\beta(t)X(t) + \varphi(t))dw(t) \quad (2.11)$$

Зауважимо, що якщо покласти $c(t) = 0$ та $\varphi(t) = 0$, то отримаємо так зване однорідне рівняння

$$dX(t) = \alpha(t)X(t)dt + \beta(t)X(t)dw(t) \quad (2.12)$$

Рівняння (2.11) є узагальненням моделі відсоткових ставок, що наведені у таблиці 1.

Таблиця 1

Моделі	СДР
<i>Vasicek</i>	$dX(t) = \alpha(\beta - X(t))dt + \sigma dw(t)$
Brenan-Schmude	$dX(t) = \alpha(\beta - X(t)) + \sigma X(t)dw(t)$
Ornstein-Uhlenbeck	$dX(t) = a(t)(X(t) - \beta(t))dt + dw(t)$
Hull-White	$dX(t) = (a(t)X(t) + c(t))dt + \varphi(t)dw(t)$
Rendleman-Bartter	$dX(t) = a(t)X(t)dt + b(t)X(t)dw(t)$

Саме однорідні рівняння (2.12) використовуються для знаходження розв'язку рівняння (2.11) див (приклад Гіхман Й.І., Скороход А.В. [19]).

Для цього спочатку для нового процесу $Z(t) = \ln(X(t))$, де $X(t)$ - розв'язок (2.12) застосовують формулу Іто.

$$dZ(t) = \frac{1}{X(t)}\alpha(t)X(t)dt - \frac{1}{2} \frac{1}{X^2(t)}\beta^2(t)X^2(t)dt + \frac{1}{X(t)}\beta(t)X(t)dw(t),$$

звідки

$$dZ(t) = [\alpha(t) - \frac{1}{2}\beta^2(t)]dt + \beta(t)dw(t),$$

$$Z(t) = Z(0) + \int_0^t [a(s) - \frac{1}{2}\beta^2(s)]ds + \int_0^t \beta(s)dw(s),$$

Тоді

$$X(t) = X(0)\exp \left\{ \int_0^t [a(s) - \frac{1}{2}\beta^2(s)]ds + \int_0^t \beta(s)dw(s) \right\}. \quad (2.13)$$

Відомо, що остання формула описує розв'язок рівняння (2.12) до того моменту, поки цей розв'язок не перетвориться в 0. В силу того, що права частина (2.13) не перетворюється в нуль при $t > 0$, то (2.13) є представленням будь-якого розв'язку рівняння (2.12) при $X(t) > 0$.

При аналогічних міркуваннях до $X(t)$, при $X(0) < 0$ одержуємо справедливність (2.13).

Перейдемо до розв'язку рівняння (2.11).

Розглянемо процес де $Y(t) = X_0(t)X(t)$ де

$$X_0(t) = \exp \left\{ - \int_0^t [a(s) - \frac{1}{2}\beta^2(s)]ds - \int_0^t \beta(s)dw(s) \right\}.$$

Застосуємо формулу Іто до $Y(t)$. Як результат отримаємо

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t X_0[\alpha(s) - \varphi(s)b(s)]ds = \int_0^t \varphi(s)X_0dw(s).$$

Підставивши X_0 одержимо

$$\begin{aligned} X(t) = \exp \left\{ \int_0^t \left[a(s) - \frac{1}{2}b^2(s) \right] ds + \int_0^1 b(s)dw(s) \right\} \cdot \\ \left[X(0) + \int_0^t \exp \left\{ - \int_0^s \left[a(u) - \frac{1}{2}b^2(u) \right] du - \int_0^s b(u)dw(u) \right\} \right. \\ \cdot [c(s) - \varphi(s)b(s)]ds + \int_0^t \exp \left\{ - \int_0^s \left[a(u) - \frac{1}{2}b^2(u) \right] du - \right. \\ \left. \left. \int_0^s b(u)dw(u) \right\} \varphi(s)dw(s) \right]. \end{aligned}$$

Як бачимо, хоч сам розв'язок має представлення в явному вигляді, але це представлення достатньо громіздке для виявлення його асимптотичних властивостей.

Розглянемо рівняння (2.11), та припустимо, що

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = 0, \quad X(t) > 0$$

Також розглянемо звичайне диференціальне рівняння

$$d\mu(t) = a(t)\mu(t)dt, \tag{2.14}$$

де a - неперервна функція. μ - розв'язок рівняння (2.14) такий, що

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(t) = \infty, \tag{2.15}$$

а також

$$\frac{d\mu(t)}{\mu(t)} = a(t)dt,$$

Позначимо $A(t) = \int_0^t a(s)ds$. Оскільки

$$\ln \mu(t) = A(t),$$

тоді в силу умови (2.15)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \infty. \quad (2.16)$$

Сформулюємо основну теорему.

Теорема

Нехай a , c , φ - неперервні функції, b - неперервна додатня функція такі, що існує неперервний розв'язок $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = \infty$. Припустимо, що виконуються умови (2.16), та наступні три умови

$$1) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{A(t)} \int_0^t b^2(s) ds = K \quad [0, +\infty).$$

$$2) \lim_{t \rightarrow \infty} \sup \frac{\int_0^t |c(s)| ds}{A(t)} < \infty.$$

$$3) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t \varphi^2(s) ds}{A(t)} < \infty.$$

Тоді

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln X(t)}{\ln \mu(t)} = 1 - \frac{1}{2}K.$$

Доведення. Розглянемо новий процес $Z(t) = \ln X(t)$ та застосуємо формулу Іто

$$dZ(t) = \frac{1}{X(t)} dX(t) - \frac{1}{2} \frac{1}{X^2(t)} \langle dx(t), dx(t) \rangle.$$

Оскільки

$$\langle dx(t), dx(t) \rangle = (b(t)X(t) + \varphi(t))^2 dt,$$

то

$$\begin{aligned} dZ(t) &= \frac{1}{X(t)} (a(t)X(t) + c(t)) dt + \frac{1}{X(t)} (b(t)X(t) + \varphi(t)) dw(t) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{1}{X^2(t)} (b(t)X(t) + \varphi(t))^2 dt, \end{aligned}$$

тобто

$$\begin{aligned} dZ(t) &= e^{-Z(t)} (a(t)e^{Z(t)} + c(t)) dt + e^{-Z(t)} (b(t)e^{Z(t)} + \varphi(t)) dw(t) - \\ &\quad - \frac{1}{2} e^{-2Z(t)} (b(t)e^{Z(t)} + \varphi(t))^2 dt. \end{aligned}$$

Звідки

$$dZ(t) = (a(t) + c(t)e^{-Z(t)} - \frac{1}{2}b^2(t) - b(t)\varphi(t)e^{-c(t)} - \frac{1}{2}\varphi^2(t)e^{-Z(t)})dt + \\ + (b(t) + \varphi(t)e^{-Z(t)})dw(t).$$

Що рівносильно інтегральній формі

$$Z(t) = Z(0) + A(t) - \frac{1}{2} \int_0^t b^2(s)ds - \int_0^t b(s)\varphi(s)e^{-Z(s)}ds - \int_2^1 \frac{1}{2}\varphi^2(s)e^{-2Z(s)}ds + \\ + \int_0^t c(s)e^{-Z(s)}ds + \int_0^t b(s)dw(s) + \int_0^t \varphi(s)e^{-Z(s)}dw(s).$$

Поділимо ліву і праву частину на $A(t)$, тоді для доведення теореми достатньо покласти що

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{A(t)} \int_0^t c(s)e^{-Z(s)}ds = 0 \text{ м.н.} \quad (2.17)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{A(t)} \int_0^t b(s)dw(s) = 0 \text{ м.н.} \quad (2.18)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{A(t)} \int_0^t \varphi^2(s)e^{-2Z(s)}ds = 0 \text{ м.н.} \quad (2.19)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{A(t)} \int_0^t \varphi(s)e^{-Z(s)}dw(s) = 0 \text{ м.н.} \quad (2.20)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{A(t)} \int_0^t b(s)\varphi(s)e^{-Z(s)}ds = 0 \text{ м.н.} \quad (2.21)$$

Оскільки

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t |c(s)|}{A(t)} < \infty,$$

а

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0,$$

то умова (2.17) виконується.

Для доведення (2.17) скористаємось нерівністю Дуба

$$\mathbb{P}\left\{ \sup_{K \in \mathbb{Z}} \sup_{t \in [kT; (k+1)T]} \frac{1}{A(t)} \left| \int_{kT}^t b(s)dw(s) \right| > \epsilon \right\} \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\left\{ \sup_{t \in [kT; (k+1)T]} \frac{1}{A(t)} \left| \int_{kT}^t b(s) dw(s) \right| > \epsilon \right\} \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{A^2(kT)\epsilon^2} \int_{kT}^{(k+1)T} b^2(s) ds < \infty \end{aligned}$$

звідси випливає виконання (2.18)

З аналогічних до (2.18) міркувань, в силу того, що

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{A(t)} \int_0^t \varphi^2(s) ds < \infty,$$

а

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-2x} = 0$$

маємо (2.19).

Для доведення (2.20) необхідно використати нерівність Дуба так, як показано в (2.18)

Оскільки, в силу нерівності Коші-Буняковського

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{A(t)} \int_0^t b(s) \varphi(s) e^{-Z(s)} ds \right| \leq \\ &\leq \left(\frac{1}{A^2} \int_0^t b^2(s) ds \right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^t (\varphi(s))^2 ds \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

То в силу умов 1) та 3) маємо (2.21).

Отже, теорему доведено.

2.3 Висновки

Дослідження асимптотичних властивостей розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь представляє особливий інтерес з практичної точки зору. У розділі 2 наведено умови при яких властивості розв'язку автономного рівняння визначаються властивостями розв'язку відповідного звичайного диференціального рівняння. До того ж було розглянуто аналогічну задачу для неавтономного диференціального рівняння спеціального вигляду, а саме, коли коефіцієнти зсуву та дифузії є добутками двох функцій, одна з яких залежить від випадкового процесу, інша від часової змінної.

У цьому розділі було сформульовано новий результат для лінійного стохастичного диференціального рівняння загального вигляду .

$$dX(t) = (\alpha(t)X(t) + c(t))dt + (\beta(t)X(t) + \varphi(t))dw(t),$$

що є узагальненням більшості моделей росту відсоткової ставки, та знайшли не випадкові функції за допомогою яких є можливим визначити асимптотичні властивості розв'язку при прямуванні часової змінної до нескінченності. Для доведення основного результату було використано метод, розроблений Гіхманом - Скороходом в монографії [19].

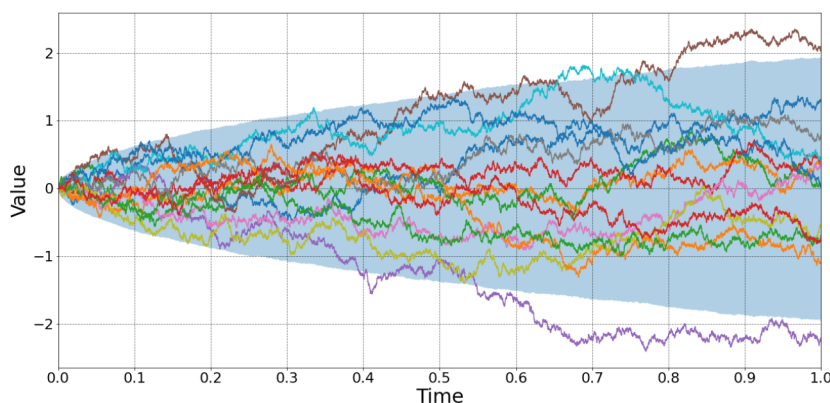
Розділ 3

Моделювання

3.1 Моделювання вінерівського процесу

Зазвичай, лише одного аналітичного дослідження випадкового процесу недостатньо для вирішення задачі практичного чи теоретичного характеру. Інколи лише візуалізація траєкторій випадкового процесу може дати повне уявлення про поведінку моделі з плином часу, яка ним описується. Бувають випадки, коли неможливо, або дуже складно обчислити ті чи інші статистики аналітично, при цьому комп'ютерне моделювання стає необхідним інструментом. Задачам моделювання випадкових процесів присвячено багато досліджень (див. наприклад [3], [10]), оскільки такі задачі дозволяють описувати динаміку розвитку досліджуваного випадкового явища в часі. Відмітимо, що сам по собі окремо процес Вінера для моделювання фінансових інструментів (наприклад, цін акцій, значень індексів тощо) використовується рідко, хоча деякі економічні процеси візуально подібні із вінерівським. Однак на основі стандартного вінерівського процесу будуються майже всі випадкові процеси, що використовуються у сучасній фінансовій математиці. Тому візуалізація поведінки вінерівського процесу є важливою.

Наведемо приклади методів моделювання вінерівського процесу.



Моделювання за допомогою Центральної Граничної Теорему

Покладемо $W = W(B_t, t \in [0, \infty))$ - Броунівський рух (інша назва процесу Вінера).

Нехай $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ - незалежні однаково розподіленні випадкові величини, із середнім $\mu_Y = EY_1$ та дисперсією $\sigma_Y^2 = \text{var}(Y_1)$.

Покладемо $R_0 = 0, R_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n \forall n \geq 1$, тоді

$$S_n(t) = \begin{cases} (\sigma_Y^2 n)^{-\frac{1}{2}} (R_i - \mu_Y i) & t = \frac{i}{n}, i = 0, 1, \dots, n \\ \text{лінійна інтерполяція} & \text{інакше} \end{cases}$$

S_n збігається за розподілом до W .

Моделювання через представлення у вигляді ряду

Моделювання через представлення у вигляді ряду (Paley-Wiener representation). Нехай $(Z_n, n \geq 0)$ - послідовність незалежних однаково розподілених $N(0, 1)$ в. в., тоді

$$W(t) = Z_0(\omega) \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} + \frac{2}{\pi^{\frac{1}{2}}} \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(\omega) \frac{\sin(nt/2)}{n}, t \in [0, 2\pi]$$

Приклад моделювання вінерівського процесу за допомогою мови програмування Python

```
#імпортування бібліотеки numpy
import numpy as np
#імпорт модуля pyplot графічної бібліотеки matplotlib
import matplotlib.pyplot as plt
#фіксуємо "ядро" генератора випадкових чисел
np.random.seed(1234)

#Функція для симуляції броунівського руху
def brownian_motion(N, T, h):
    """
    Симуляція броунівського руху
    N: ціле число : кількість розбиттів проміжка (0,1)
    T: ціле число : значення t
    h: дробове число : дисперсія інкрементів
    """
    dt = 1. * T/N # константа нормалізації
    random_increments = np.random.normal(0.0, 1.0 * h, N)*np.sqrt(dt) # прирости
    brownian_motion = np.cumsum(random_increments) # броунівський рух
    brownian_motion = np.insert(brownian_motion, 0, 0.0) # задаємо початкове значення (0,0)

    return brownian_motion
```

```

fig = plt.figure(figsize=(21, 10))
ax = plt.axes(xlim=(0, 1))
line, = ax.step([], [], where='mid', color='#0492C2')

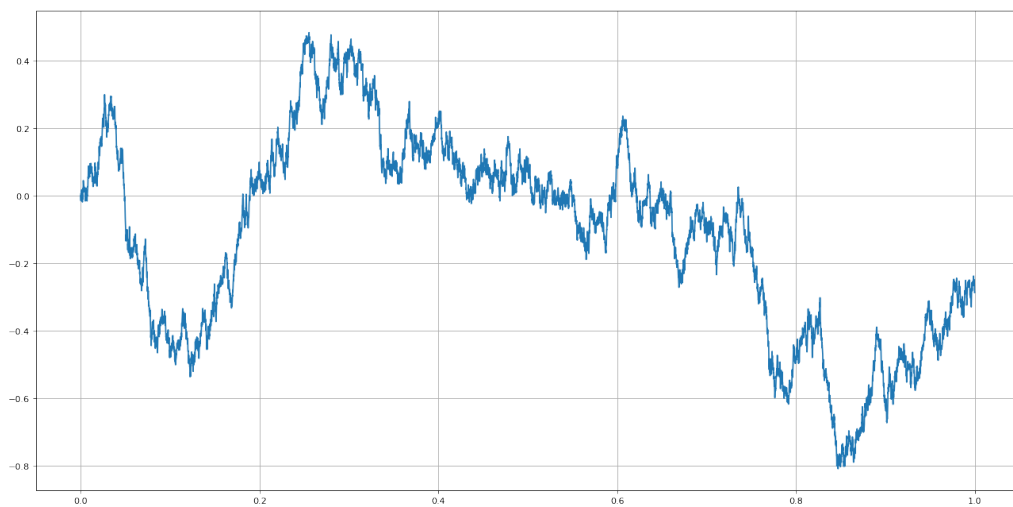
# Налаштування форматування
ax.set_xticks(np.linspace(0,1,11))
ax.set_xlabel('Time', fontsize=30)
ax.set_ylabel('Value', fontsize=30)
ax.tick_params(labelsize=22)
ax.grid(True, which='major', linestyle='--', color='black', alpha=0.6)

# кількість ітерацій поділена на 10
i=10**3-1

tr = np.linspace(0.0, 1, (i + 1) * 10 + 1)
y = brownian_motion((i + 1) * 10, 1, 1)
ax.set_title('$W(t)$ proceses for {} steps'.format((i + 1) * 10), fontsize=40)
plt.plot(tr,y)

```

У результаті отримаємо



Тепер, знаючи як моделювати Вінерівський процес, змоделюємо Бرونівський міст з емпірично обчисленим 95% довірчим інтервалом для нього
Броунівський міст:

$$X(t) = w(t) - tw(t), t \in [0, 1].$$

3.2 Моделювання траєкторій розв'язків диференціальних рівнянь

Для моделювання розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь використовують чисельні методи. Метод Ейлера є одним із найпростіших методів, що використовуються для симуляції розв'язків звичайних диференціальних рівнянь. Для моделювання розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь використовують метод Ейлера-Маруяма, який є аналогом методу Ейлера для звичайних диференціальних рівнянь, але застосовується до стохастичних диференціальних рівнянь. Метод Ейлера-Маруяма є достатньо зручним для генерування випадкового процесу у порівнянні з багатокроковими методами (такими як наприклад метод Мілтейна), оскільки його реалізація є інтуїтивно зрозумілою та не потребує великої кількості даних для обчислення.

3.2.1 Метод Ейлера для звичайного диференціального рівняння

Чисельні методи для звичайних диференціальних рівнянь. Метод Ейлера

Розглянемо звичайне диференціальне рівняння $dg(t) = a(t, g(t))dt$ на інтервалі $[0, 1]$ з початковою умовою $g(0) = g_0$. Чисельний розв'язок g^h зазвичай реалізується через дискретні наближення $g_n^h = g^h(t_n^h)$ в рівновіддалених точках сітки розбиття $t_n^h = nh$, де $h = h_N = \frac{1}{N}$, з оцінкою похибки

$$e(h) = |g(1) - g^h(1)|.$$

Як зазначалось одним з основних чисельних методів для звичайних диференціальних рівнянь є метод Ейлера.

$$g_0^h = g_0, \quad g_n^h = g_{n-1}^h + a(t_{n-1}^h, g_{n-1}^h)h. \quad (3.1)$$

За відповідних умов гладкості (які буде наведено нижче),

$$e(h) = O(h) = O(1/N).$$

Оцінку похибки можна покращити.

Розглянемо розвинення в ряд Тейлора

$$g_n^h = g_{n-1}^h + a(t_{n-1}^h, g_{n-1}^h)h + \left(a_t(t_{n-1}^h, g_{n-1}^h) + a_x(t_{n-1}^h, g_{n-1}^h) \right) \frac{h^2}{2},$$

де $g_t = \frac{\partial g}{\partial t}$, $g_x = \frac{\partial g}{\partial x}$. У цьому випадку $e(h) = O(h^2)$. У представленні

$$g(h) = g(0) + \int_0^h a(t, g(t)) dt$$

наблизимо інтеграл

$$\frac{h}{2}(a(0, g(0)) + a(h, g(h))).$$

Це наближення є кращим ніж $a(0; g(0))h$ в (3.1). До того ж, $g(h)$ є невідомим параметром, але який можна оцінити за допомогою (3.1), тобто

$$\bar{g}^h(h) = g(0) + a(0, g(0))h.$$

Отримаємо

$$\begin{aligned} g_0^h &= g_0; \\ \bar{g}_n^h(h) &= g_{n-1}^h + a(t_{n-1}^h, g_{n-1}^h)h; \\ g_n^h(h) &= g_{n-1}^h + (a(t_{n-1}^h, g_{n-1}^h) + a(t_n^h, \bar{g}_n^h))\frac{h}{2}. \end{aligned}$$

Знову $e(h) = O(h^2)$.

3.2.2 Метод Ейлера-Мураямі

Метод Ейлера-Маруямі

Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + b(t, X(t))dw(t), t \geq 0, X(0) = x_0. \quad (3.2)$$

В інтегральній формі це рівняння перепишеться наступним чином

$$X(t) = x_0 + \int_0^t a(s, X(s))ds + \int_0^t b(s, X(s))dw(s),$$

де перший інтеграл є звичайним інтегралом, а другий потрібно інтерпретувати в сенсі інтегралу Іто. Покладемо $t_n^h = nh$ та $\Delta_n^h w = w(t_n^h) - w(t_{n-1}^h)$. Числове наближення X , породжене в точці $t_n^h = nh$ і лінійно інтерпольоване між ними, будемо позначати $\{X^h(t)\}_{0 \leq t \leq 1}$, тобто $X_n^h(t) = X^h(t_n^h)$ – значення в n -ій точці сітки розбиття.

Траєкторії розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь моделюються на основі методу для звичайного диференціального рівняння. Аналогічно методу Ейлера, базуючись на розвиненні в ряд Тейлора вищого порядку,

були розроблені методи моделювання динамічних систем з випадковими збуреннями (див. Kloeden Platen [10] та Milstein Третьякова [14]). Між точками розбиття $X^h(t)$ можна визначити як X_{n-1}^h , при $t_{n-1}^h \leq t < t_n^h$ або шляхом лінійної інтерполяції. Схема є наступною:

$$X^h(0) = x_0;$$

$$X_n^h = X_{n-1}^h + a(t_{n-1}^h, X_{n-1}^h)h + b(t_{n-1}^h, X_{n-1}^h)\Delta_n^h w,$$

де $\Delta_n^h w$ – гаусівська випадкова величини $N(0; h)$ при фіксованому h та $X_n^h(t) = X^h(t_n^h)$. У випадку відрізка $[0; 1]$ вибираємо $h = \frac{1}{N}$, $N \in \mathbb{N}$.

Запрограмуємо цей алгоритм

SDEFunction
function __latex : NoneType __string_representation : NoneType function latex
__init__(function, string_representation, latex) __str__()

SDEHandler
__analytical_solution_function : NoneType __dt : float __function_a __function_b __k : int __n : int __t : int __winner : ndarray __y0 : int
__init__(function_a, function_b, n, k, t, y0, analytical_solution_function) get_analytical_solution() get_dw(num) get_euler_solution(w) get_time_array_for_analytical_solution() get_time_array_for_numerical_solution() get_winner() get_y_n1(y_n, tau_n, dw) plot_one() plot_solutions(number, add_to_title)

Схема ООП моделі програми

Програмна реалізація

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib.pyplot import figure
# np.random.seed(0)
import warnings
warnings.filterwarnings('ignore')

class SDEFunction:
    def __init__(self, function, string_representation: str = None, latex: str = None):
        self.__function = function
        self.__string_representation = string_representation
        self.__latex = latex

    @property
    def function(self):
        return self.__function

    @property
    def latex(self):
        return self.__latex

    def __str__(self):
        return self.__string_representation

class SDEHandler:

    def __init__(self, function_a: SDEFunction, function_b: SDEFunction, n=50, k=10, t=1,
        analytical_solution_function: SDEFunction = None):
        self.__function_a = function_a
        self.__function_b = function_b
        self.__t = t
        self.__n = n
        if analytical_solution_function is not None:
            self.__k = k
        else:
            self.__k = 1
        self.__dt = t/n
        self.__y0 = y0
        self.__analytical_solution_function = analytical_solution_function
        self.__winner = self.get_winner()

    def get_y_n1(self, y_n: int, tau_n: float, dw: int):
        return y_n + self.__function_a.function(y_n, tau_n)*self.__dt + self.__function_b.f

    def get_dw(self, num):
        return (1/num) ** 0.5 * np.random.normal(size=num)

    def get_winner(self):
        w0 = np.zeros(shape=1)
        winner_increments = self.get_dw(self.__n * self.__k)
        return np.concatenate((w0, np.cumsum(winner_increments)))

    def get_time_array_for_analytical_solution(self):
        return np.linspace(0, self.__t, self.__n * self.__k + 1)

    def get_time_array_for_numerical_solution(self):
        return np.linspace(0, self.__t, self.__n + 1)

```

```

def get_euler_solution(self, w=None):
    if w is None:
        w = self.__winner
        numerical_solution_sde = np.array([self.__y0])
        y_n = self.__y0
        for i in range(self.__n):
            y_n1 = self.get_y_n1(y_n=y_n,
                                tau_n=self.__dt*(i+1),
                                dw=w[(i + 1) * self.__k] - w[i * self.__k])
            numerical_solution_sde = np.concatenate((numerical_solution_sde, np.array([y_n1])))
            y_n = y_n1
        return numerical_solution_sde

def get_analytical_solution(self):
    return self.__analytical_solution_function.function(self.__winner, self.__y0)

def plot_one(self):
    figure(figsize=(18, 6), dpi=80)

    if self.__analytical_solution_function is not None:
        real_solution_sde = self.get_analytical_solution()
        times = self.get_time_array_for_analytical_solution()
        plt.plot(times, real_solution_sde, label="Аналітично знайдена траєкторія")

    times_es = self.get_time_array_for_numerical_solution()
    numerical_solution_sde = self.get_euler_solution()
    plt.plot(times_es, numerical_solution_sde, label="траєкторія знайдена за допомогою")
    plt.legend(fontsize=20)
    plt.show()

```

Побудуємо аналітично знайдену траєкторію, та траєкторію знайдену методом Ейлера траєкторію рівняння

$$dX(t) = \frac{1}{2}X(t)dt + \sqrt{1 - X(t)^2}dw(t).$$

Не важко переконатися, що розв'язком цього рівняння буде

$$X_t = \sin(\arcsin(X_0 + w(t))).$$

Тоді будемо мати:

```

# функція a(X_t, t)
def a_function(X_t, t):
    return (-1/2)*X_t

# функція b(X_t, t)
def b_function(X_t, t):
    return (1-X_t**2)**(1/2)

# аналітичний розв'язок
def solution_function(w_t, x0):
    return np.sin(np.arcsin(x0)+w_t)

# створення об'єктів класу SDEFunction для функції a, b, та для функції що задає аналітичний розв'язок
a = SDEFunction(function=a_function, string_representation="", latex="")
b = SDEFunction(function=b_function, string_representation="", latex="")
solution = SDEFunction(function=solution_function, string_representation="")

# створення об'єкту класу SDEHandler
sde = SDEHandler(a,b,analytical_solution_function=solution, y0=0, n=50, k=10)

sde.plot_one()

```



Критерій оцінки похибки

Для стохастичних диференціальних рівнянь використовують два підходи: слабкий та сильний, кожен з яких залежить від типу застосування.

а) X^h має давати чудову апроксимацію траєкторій розв'язку стохастичного диференціального рівняння, тому похибку можна оцінити наступним чином

$$e_s(h) = E|X(1) - X^h(1)| = E|X(1) - X_N^h|.$$

б) $X^h(1) = X_N^h$ дає гарну оцінку для $X(1)$. Тобто $E_g X_N^h$ має бути близьким до $E_g X(1)$ для достатньої множини гладких функцій.

Будемо говорити, що X^h строго збігається до X при $t = 1$ з порядком $\beta > 0$, якщо $e_s(h) = O(h^\beta)$ і слабо збігається, якщо $|E_g(X(1)) - E_g(X_N^h)| = O(h^\beta)$ для всіх $g \in C_p^{2(\beta+1)}$, де $C_p^{2(\beta+1)}$ простір функцій $g', g'', \dots, g^{2(\beta+1)}$.

3.2.3 Схема Мільштейна

Ідея полягає в тому, що наближення

$$\int_0^h b(t, X(t))dw(t) \sim b(0, X(0))w(h)$$

є основним джерелом помилок для схеми Ейлера. Щоб покращити схему Ейлера, у схемі Мільштейна ми оцінюємо похибку за допомогою формули Іто для $b(t, X(t))$:

$$\begin{aligned} \int_0^h b(t, X(t))dw(t) - b(0, X(0))w(h) &= \int_0^h (b(t, X(t)) - b(0, X(0)))dw(t) = \\ &= \int_0^h \left(\int_0^t [b_t(s, X(s)) + a(s, X(s))b_x(s, X(s)) + \frac{1}{2}b^2(s, X(s))b_{xx}(s, X(s))]dt + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^t b(s, X(s))b_x(s, X(s))dw(s))dw(t) \\
& \sim O(h^2) + b(0, x_0)b_x(0, x_0) \int_0^h \int_0^t dw(s)dw(t) \\
& \sim b(0, x_0)b_x(0, x_0) \int_0^h w(t)dw(t) = \\
& = b(0, x_0)b_x(0, x_0)\left(\frac{1}{2}w^2(h) - \frac{1}{2}h\right).
\end{aligned}$$

Звідки випливає схема Мільштейна $X_0^h = x_0$

$$X_n^h = X_{n-1}^h + ah + b\Delta_n^h w + \frac{1}{2}bb_x\{\Delta_n^h w^2 - h\},$$

де $a(t_{n-1}^h, X_{n-1}^h)$ та аналогічно для b, b_x .

Теорема 3.2.1. *Схема Мільштейна сильно збігається з порядком $\beta = 1$.*

3.3 Приклади моделювання СДР та ЗДР

Важливою частиною майже будь-якого аналізу є візуалізація. Правильно зображений графік, із вірно підібраним масштабом та центром координат, може буди не лише візуальним доповненням до аналітичного запису того чи іншого рівняння, а ще й потужним інструментом, який дозволяє подивитися на рівняння під іншим кутом.

Моделювання та візуалізація дозволяють побачити закономірності, які важко розгледіти в аналітичному записі рівняння. Таким чином, можна помітити не очевидну на перший погляд асимптотичну поведінку чи паттерн в поведінці траєкторій.

Для моделювання рівняння скористаємося наступною програмною реалізацією методу Ейлера-Мураямі

```

1 import numpy as np
2
3
4 class Wiener:
5     def __init__(self, end_point, num):
6         self.end_point = end_point
7         self.num = num
8         self.dw = self.get_wiener_delta()
9
10    def get_wiener_delta(self):
11        h = self.end_point / self.num
12        dw = h ** 0.5 * np.random.normal(size=self.num)
13        return dw
14
15    def make_trajectory(self):
16        w0 = np.zeros(shape=1)
17        trajectory = np.concatenate((w0, np.cumsum(self.dw)))
18        return trajectory
19

```

```

1 import numpy as np
2 from BM import Wiener
3
4
5 class SDEHandler:
6     def __init__(self, function_a, function_b, y0, t, n):
7         self.t = t
8         self.n = n
9         self.a = function_a
10        self.b = function_b
11        self.y0 = y0
12        self.dt = t / n
13        self.wiener = Wiener(end_point=t, num=n)
14        self.time = np.linspace(0, t, n + 1)
15
16    def euler_maruyama_solution(self):
17        y = np.zeros(self.n+1)
18        y[0] = self.y0
19        for n in range(self.n):
20            # print(n)
21            t = self.time[n]
22            y_n = y[n]
23            y[n+1] = y_n + self.a(y_n, t) * self.dt + self.b(y_n, t) * self.wiener.dw[n]
24        return y
25

```

3.3.1 Модель росту відсоткової ставки.

$$dX(t) = \alpha X(t)dt + \sigma X(t)dw(t),$$

Зобразимо траєкторії випадкового процесу, що задовольняє цьому рівнянню, знайденні чисельно для різних значень параметрів alpha і sigma

```

from matplotlib import pyplot as plt
from Solver import SDEHandler
from BM import Wiener
import numpy as np
import warnings
from matplotlib.pyplot import figure
warnings.filterwarnings('ignore')

```

покладемо $\alpha = 1$ та $\sigma = 0.5$ та $X(0) = 1$

```

alpha=1
sigma=0.5
print("-----")
print(f"alpha={alpha}")
print(f"sigma={sigma}")

def a_function(y_t, t):
    return alpha*y_t

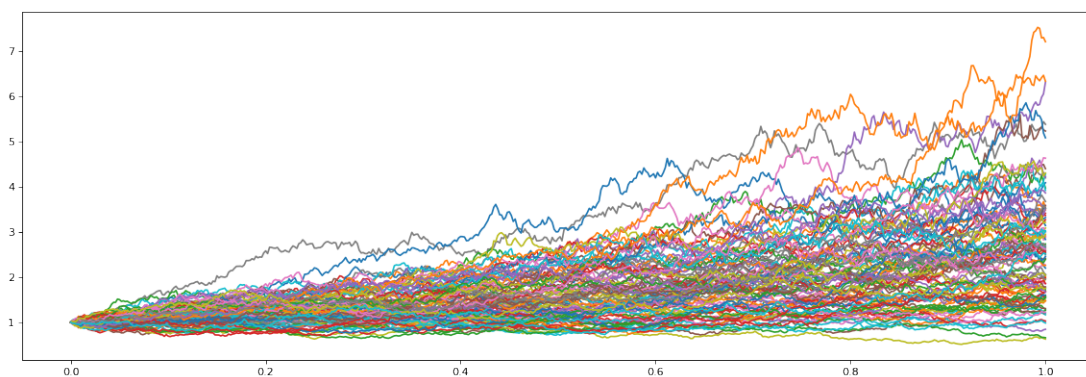
def b_function(y_t, t):
    return sigma*y_t

n=500 #n of dots for tr
start=1
end = 100
k=100 # n of traj

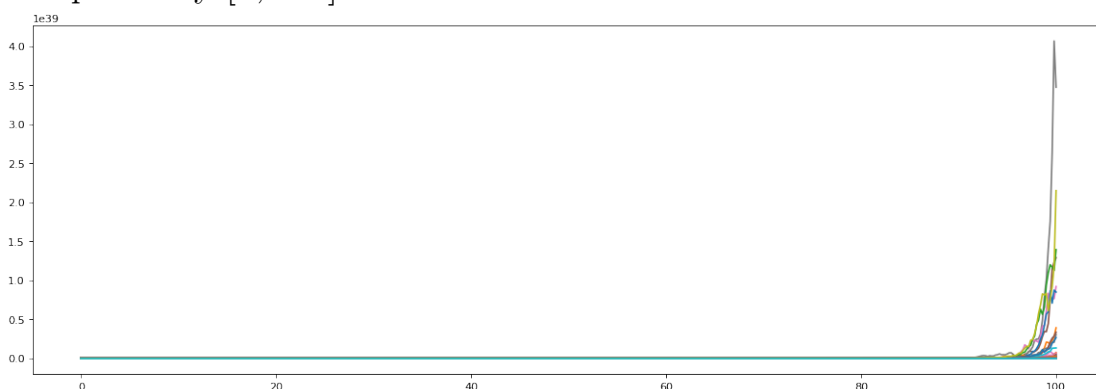
for t in np.linspace(start,end,2).astype(int):
    figure(figsize=(18, 6), dpi=80)
    for i in range(k):
        solver = SDEHandler(function_a=a_function, function_b=b_function, n=n, t=t, y0=1)
        plt.plot(solver.time,solver.euler_maruyama_solution())
    plt.show()

```

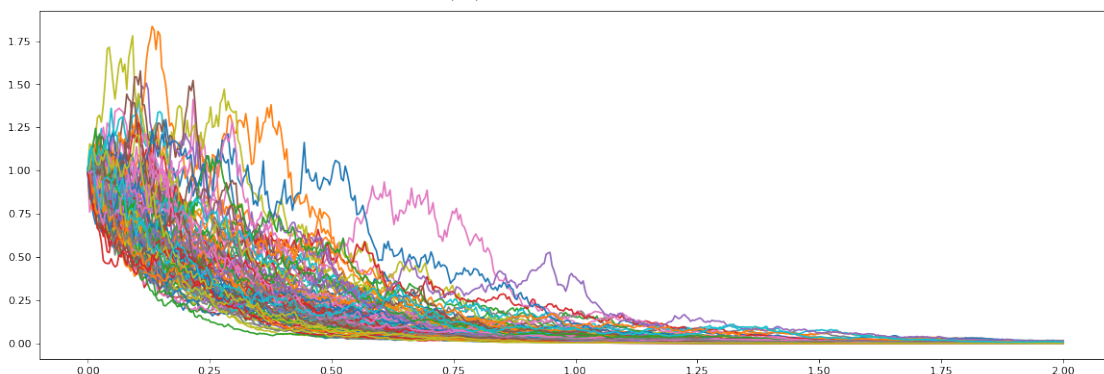
тоді на проміжку $[0, 1]$ будемо мати:



на проміжку $[0, 100]$



для $\alpha = -3$ та $\sigma = 1$ та $X(0) = 1$ будемо мати



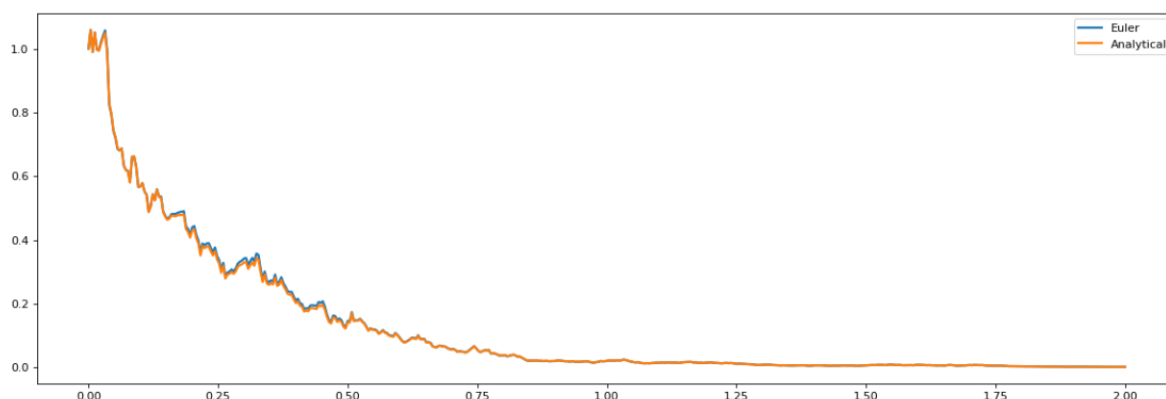
Як ми бачимо з графіків при $\alpha > 0$ (з початковою умовою $X(0) = 1$), зі збільшенням часу t , наші траєкторії прямують до нескінченності розбігаючись все більше одна від одної. Однак, при $\alpha < 0$ (з початковою умовою $X(0) = 1$), зі збільшенням часу t , наші траєкторії збігаються до нуля.

Порівняємо результати моделювання методом Ейлера-Мураямі з результатами моделювання траєкторії аналітичного розв'язку. Як відомо, розв'язок такого рівняння має вигляд:

$$X(t) = X(0)e^{(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma w(t)}.$$

Перевіримо, чи будуть схожими траєкторія отримана за допомогою метода Ейлера-Мураямі із траєкторією отриманою за допомогою аналітичного розв'язку (за умови однакової реалізації траєкторії вінерівського процесу)

```
figure(figsize=(18, 6), dpi=80)
solver = SDEHandler(function_a=a_function, function_b=b_function, n=n, t=t, y0=y0)
plt.plot(solver.time,solver.euler_maruyama_solution(),label="Euler", linewidth=2)
plt.plot(solver.time,solution(solver.wiener.make_trajectory(),solver.time),label="Analytical",linewidth=2)
plt.legend()
plt.show()
```



Як можна помітити - траєкторії дуже схожі, і практично ідентичні

3.3.2 Моделювання асимптотичної поведінки

Розглянемо деякі приклади.

Приклад 1 (Модель росту відсоткової ставки)

Стохастичне диференціальне рівняння

$$dX(t) = r(t)X(t)dt + \beta X(t)dw(t), \quad t \geq 0; X(0) \equiv 1,$$

Описує ріст популяції, де X розмір популяції на момент часу t ; r - відносний темп зростання популяції, що залежить від часу; w - вінерівський процес; $\beta \in \mathbb{R}_+^1$.

Позначимо $R(t) = \int_0^t r(s)ds$ і припустимо, що

$$R(t) > 0, \quad t > 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t r(s)ds = \infty,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{R(t)} = 0.$$

Покладемо $\Phi(t) = R(t)$. Як ми бачимо, таке $\Phi(t)$ задовільняє умовам теореми 2.1.3, адже

$$\Phi(t) = R(t) > 0 \quad t > 0 \quad \text{та} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = \infty,$$

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\Phi_+(t)}{\Phi(t)} = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{R_+(t)}{R(t)} < \infty,$$

Оскільки $g(x) = x$, ми отримаємо

$$\lim_{x \rightarrow \infty} G(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty.$$

Також очевидно, що, якщо виконується $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{R(t)} = 0$, тоді

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\int_0^{2^{k+1}} \theta^2(s) ds}{\Phi_+^2(2^k)} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{R^2(2^k)} < \infty,$$

Тоді, за теоремою 2.1.3, ми матимемо

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{G(X(t))}{\Phi(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln(X(t))}{R(t)} = 1 \text{ м.н.}$$

Моделювання

Покладемо $r(t) = e^t$, $\beta = 1$

```
from matplotlib import pyplot as plt
from Solver import SDEHandler
from BM import Wiener
import numpy as np
import warnings
from matplotlib.pyplot import figure
warnings.filterwarnings('ignore')
import pandas as pd

betta = 1

def r(t):
    return np.exp(t)

def function_a(y_t,t):
    return r(t)*y_t

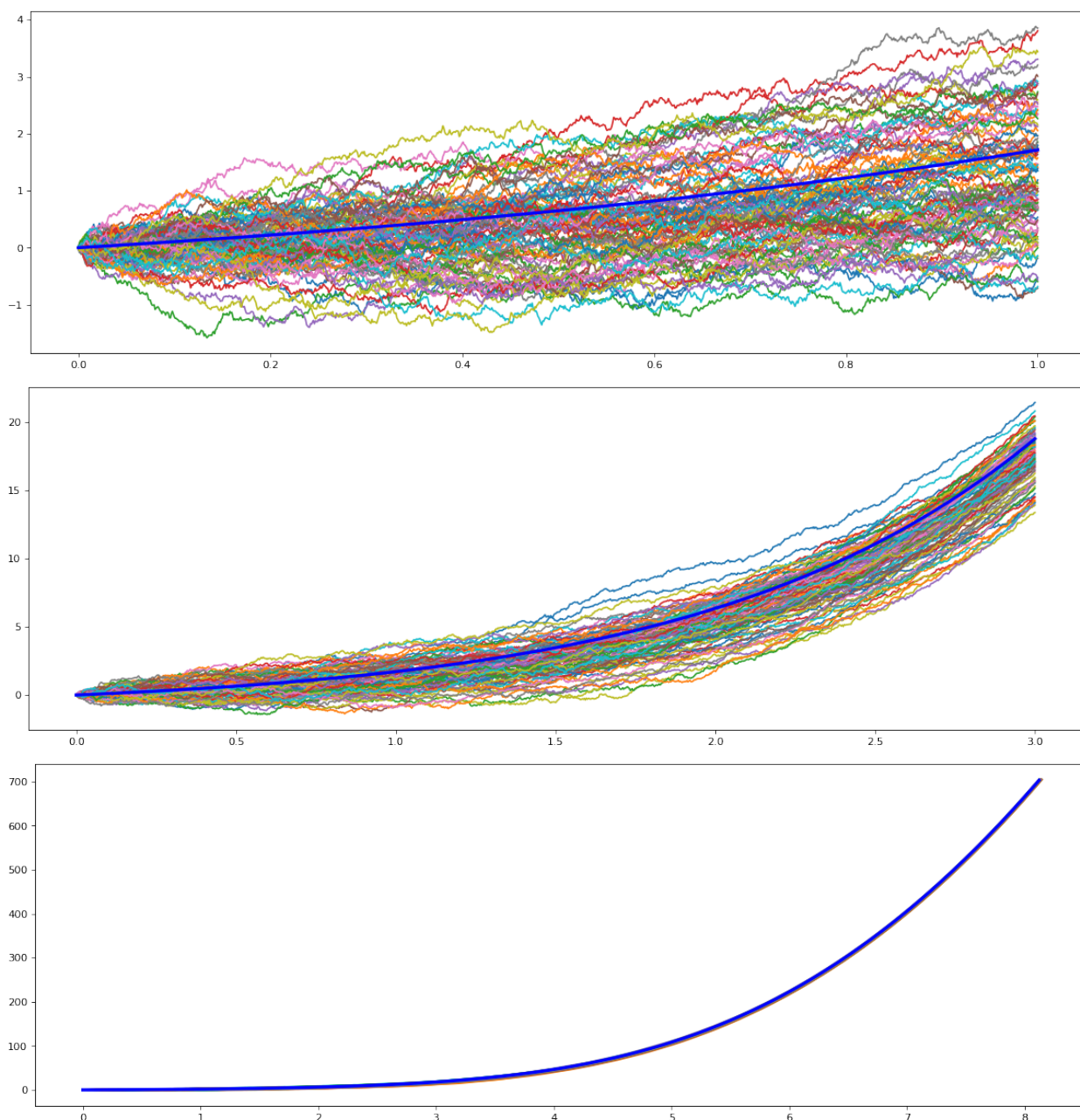
def function_b(y_t,t):
    return betta*y_t

n=1000
t=1
y0=1
k=100

for t in np.logspace(0,5,10).astype(int):
    figure(figsize=(18, 6), dpi=80)
    for _ in range(k):
        solver = SDEHandler(function_a=function_a, function_b=function_b, n=n, t=t, y0=y0)
        plt.plot(solver.time, np.log(solver.euler_maruyama_solution()))
    de_sovler=SDEHandler(function_a=function_a, function_b=lambda x,y: 0, n=n, t=t, y0=y0)
    plt.plot(de_sovler.time, np.log(de_sovler.euler_maruyama_solution()),"b", linewidth=3, label="$dX(t)=r(t)X(t)dt$")
    plt.show()
```

Синя лінія - $R(t) = \int_0^t r(s)ds$

Інші траєкторії - логорифм траєкторії розв'язку СДР



Як ми бачимо, траєкторія ЗДР задає напрям для С.Д.Р, а при $t \rightarrow \infty$ інтегральна функція відсоткової ставки $R(t)$ еквівалентна випадковому процесу $X(t)$ м.н.

Приклад 2

Розглянемо наступне стохастичне дифференціальне рівняння

$$dX(t) = t^\alpha (1 + X^2(t))^\gamma dt + (1 + X^2(t))^\gamma dw(t), t \geq 0; X(0) \equiv b$$

де w - Віннерівський процес; $b \in \mathbb{R}_+$, $0 < \gamma < \frac{1}{2}$, $\alpha > 0$. Коefіцієнти рівняння мають вигляд $\varphi(t) = t^\alpha$, $\theta(t) = 1$, $g(x) = \sigma(x) = (1 + x^2)^\gamma$.

При $\alpha > 0$ одержуємо, що ряд збігається

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\int_0^{k+1} \theta^2(s) ds}{\Phi_+^2(2^k)} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{(2^k)^{2j+2}} < \infty.$$

Функція $\frac{\sigma}{g} = 1$ є обмеженою.

Для $g'(x) = 2\gamma x (1 + x^2)^{\gamma-1}$, $\frac{1}{2} < 1 - \gamma < 1$, ми маємо

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 2\gamma \frac{x}{(1 + x^2)^{1-\gamma}} = 0$$

і

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_0^t \theta^2(s) ds}{\Phi(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\alpha + 1)t}{t^{\alpha+1}} = 0 < \infty.$$

Звідси, за теоремою 2.1.3

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{G(X(t))}{\Phi(t)} = 1 \text{ м.н.}$$

МОДЕЛЮВАННЯ

Змодельовуємо це рівняння поклавши $\alpha = \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{1}{4}$, (що задовільняє умови $0 < \gamma < \frac{1}{2}$, $\alpha > 0$), і є аналогічним до моделювання рівняння

$$dX(t) = t^\alpha (1 + X^2(t))^\gamma dt + (1 + X^2(t))^\gamma t^\beta dw(t)$$

при $\beta = 0$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{1}{4}$.

```
alpha=1/2
beta=0
gamma=1/4

print("-----")
print(f"gamma={gamma}")
print(f"beta={beta}")
print(f"alpha={alpha}")

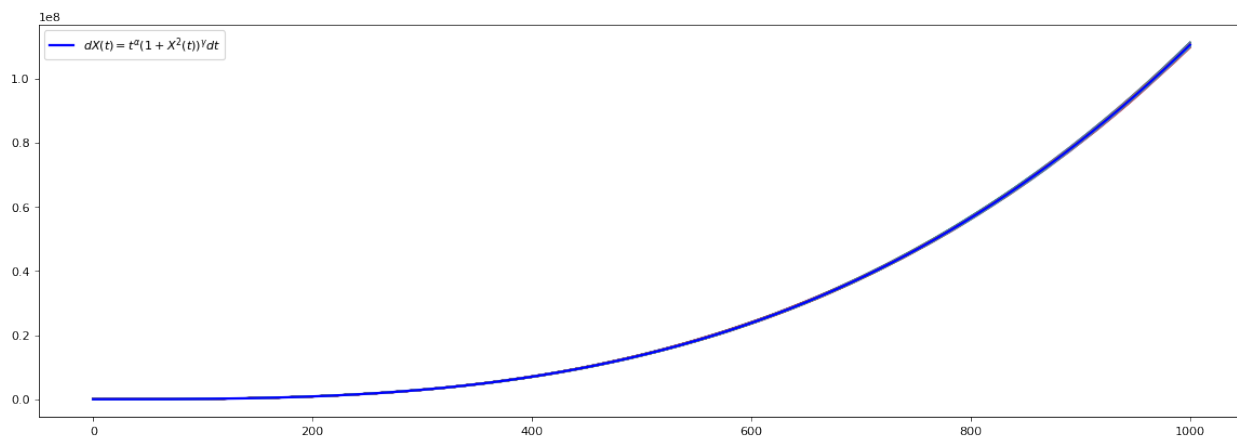
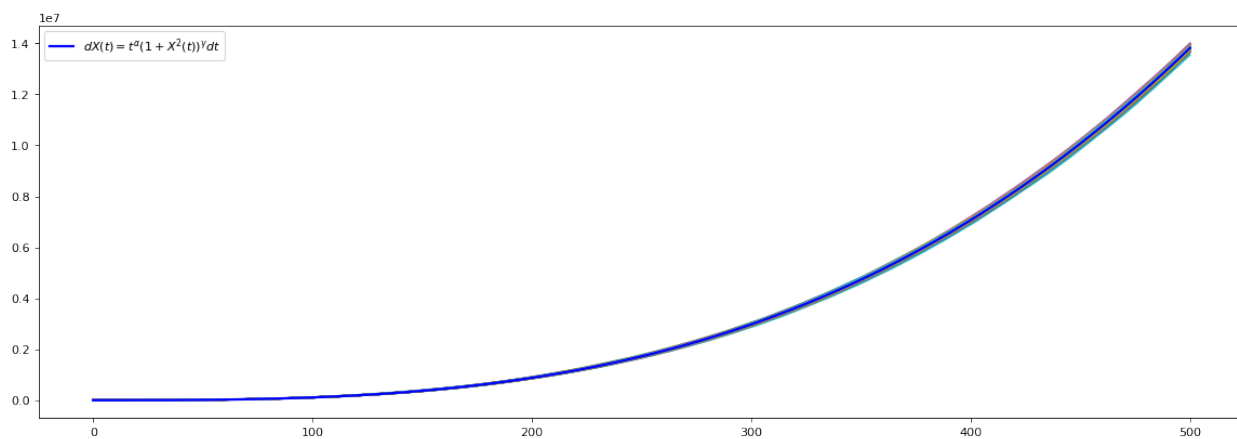
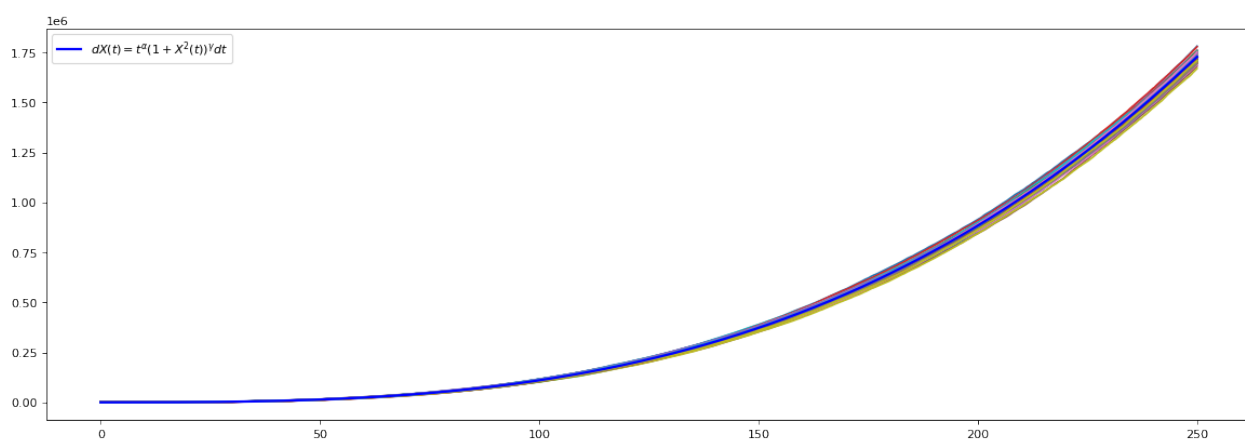
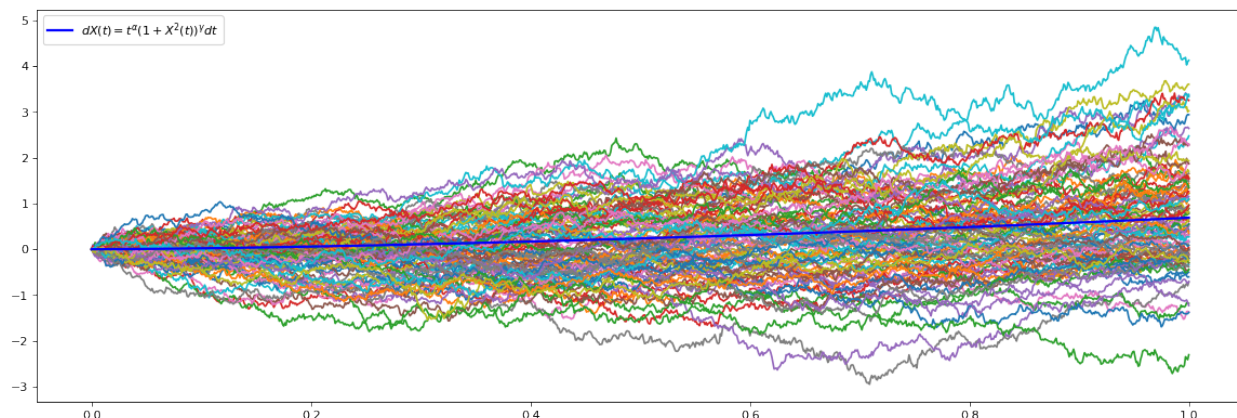
def a_function(y_t, t):
    return (t ** alpha) * (1 + y_t ** 2) ** gamma

def b_function(y_t, t):
    return (t ** beta) * (1 + y_t ** 2) ** gamma

n=int(1e+3) #n of dots for tr
start=1
end = 1e+3
k=100 # n of traj

for t in np.linspace(start,end,5).astype(int):
    try:
        figure(figsize=(18, 6), dpi=80)
        for i in range(k):
            solver = SDEHandler(function_a=a_function, function_b=b_function, n=n, t=t, y0=0)
            plt.plot(solver.time,solver.euler_maruyama_solution())
            solver = SDEHandler(function_a=a_function, function_b=lambda x,y:0, n=n, t=t, y0=0)
            plt.plot(solver.time,solver.euler_maruyama_solution(), "b", linewidth=2, label="$dX(t)=t^{\alpha}(1+x^2(t))^{\gamma}dt$")
            plt.legend()
            plt.show()
        except:
            print("FAIL ON PLOT/SOLVING")
```

Синя лінія - траекторія З.Д.Р $dX(t) = t^\alpha(1 + X^2(t))dt$
 Інші траекторії - траекторії розв'язку СДР



Як ми бачимо, траєкторія ЗДР задає напрям для СДР

3.3.3 Моделювання відсоткової ставки $r(t)$ за допомогою процесу Кокса-Інгерсолла-Росса

Банк хоче оцінити свою 5-річну анuitетну позику на ринку, на якому коротка ставка $r(t)$ у момент t є стохастичною. Позику виплачується безперервно з постійною ставкою, скажімо, p , і, таким чином, сума погашення визначається

$$ds(t) = (p + s(t)X(t))dt, \quad s(0) = 5,$$

$X(t)$ - коротка відсоткова ставка, відповідає відсотку за рік у розмірі

$$\varepsilon = e^{X(t)} - 1.$$

Банк використовує процес Кокса-Інгерсолла-Росса як модель для процесу $X(t)$. Це означає, що ми маємо дрейф у бік параметру c , який, таким чином, можемо інтерпретувати як типову довгострокову відсоткову ставку і яка, за оцінками банку, відповідає $\varepsilon = 6\%$; відсоткова ставка в момент $t = 0$ має значення $\varepsilon = 6,5\%$. Використаємо схему Ейлера-Мураямі для моделювання $X(t)$. Спочатку виконаємо кілька пілотних запусків, щоб визначити (емпіричним шляхом) деякі значення двох інших параметрів α, β , які дадуть "розумні" коливання $X(t)$. Нарешті, порівняємо результати випадкової моделі з детермінованими значеннями, що відповідають $X(t) \equiv c$.

моделювання

```

from matplotlib import pyplot as plt
from Solver import SDEHandler
from BM import Wiener
import numpy as np
import warnings
from matplotlib.pyplot import figure
warnings.filterwarnings('ignore')
import pandas as pd

c = 0.06
y0 = 0.065
sigma = 0.001
# alpha = 1
print("-----")
# print(f"alpha={alpha}")
print(f"sigma={sigma}")
print(f"c={c}")
for alpha in [1,2,5,10, 25, 50]:

    def a_function(y_t, t):
        return alpha * (c - y_t)

    def b_function(y_t, t):
        return sigma*((y_t)**(1/2))

    n=1000 #n of dots for tr
    # start=1
    # end = 10000
    k=25 # n of traj

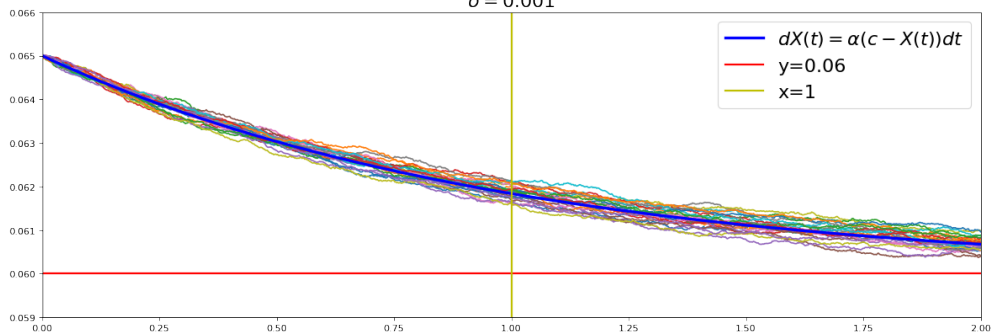
    t=2
    figure(figsize=(18, 6), dpi=80)
    ax = plt.gca()
    ax.set_xlim([0, 2])
    ax.set_ylim([0.059, 0.066])
    plt.title(r"$dX(t)=\alpha(c-X(t))dt+\sigma\sqrt{X(t)}dw(t)$"+
            "\n"+f"$\alpha = \{alpha\}$"+
            "\n"+f"$c = \{c\}$"+
            "\n"+f"$\sigma = \{sigma\}$"
            , fontsize =20)
    for i in range(k):
        solver = SDEHandler(function_a=a_function, function_b=b_function, n=n, t=t, y0=y0)
        plt.plot(solver.time,solver.euler_maruyama_solution())
    de_solver = SDEHandler(function_a=a_function, function_b=lambda x,y: 0, n=n, t=t, y0=y0)
    plt.plot(de_solver.time, de_solver.euler_maruyama_solution(), "b", linewidth=3, label=r"$dX(t)=\alpha(c-X(t))dt$")
    plt.axhline(y=c, c='r', linewidth=2, label=f"y={c}")
    plt.axvline(x=1, c='y', linewidth=2, label="x=1")
    plt.legend(fontsize = 20)
    plt.show()

```

Підберемо параметр α , зафіксувавши параметр σ

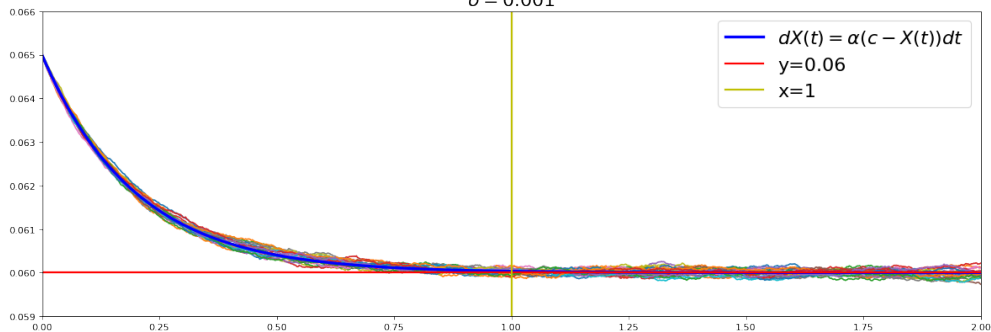
$$dX(t) = \alpha(c - X(t))dt + \sigma\sqrt{X(t)}dw(t)$$

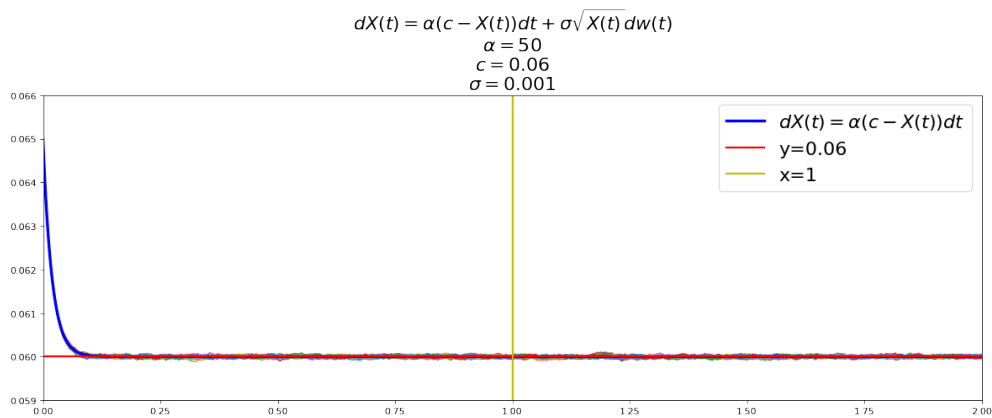
$$\begin{aligned}\alpha &= 1 \\ c &= 0.06 \\ \sigma &= 0.001\end{aligned}$$



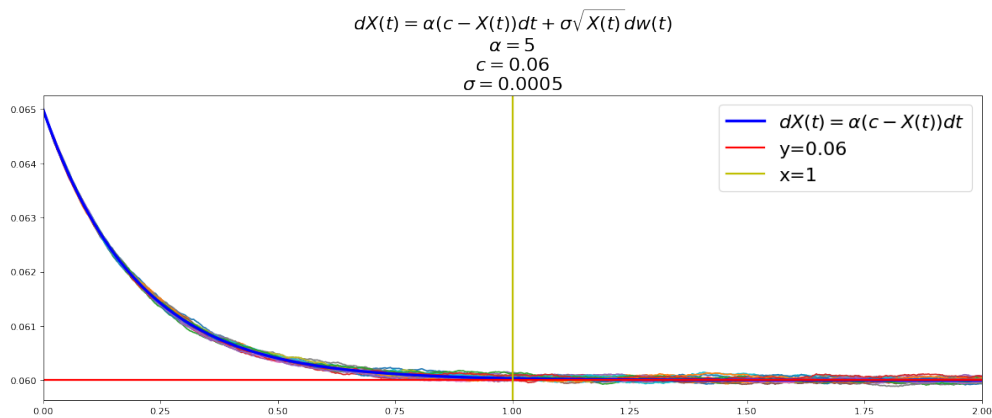
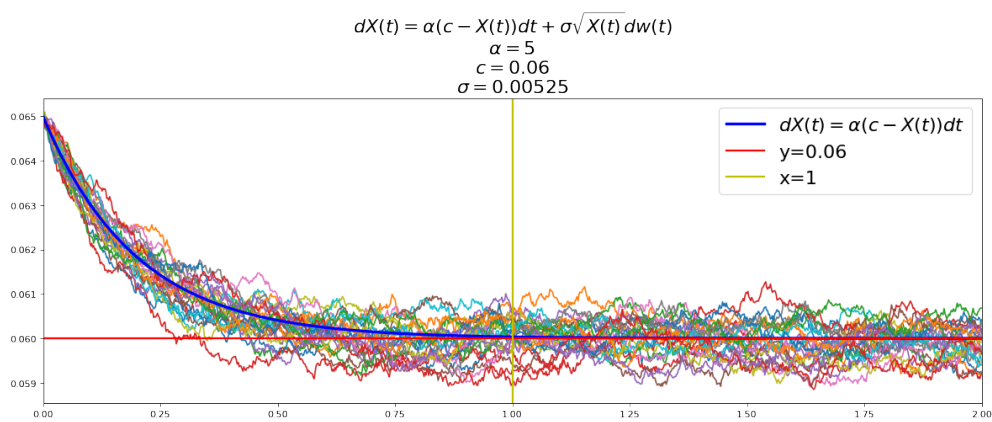
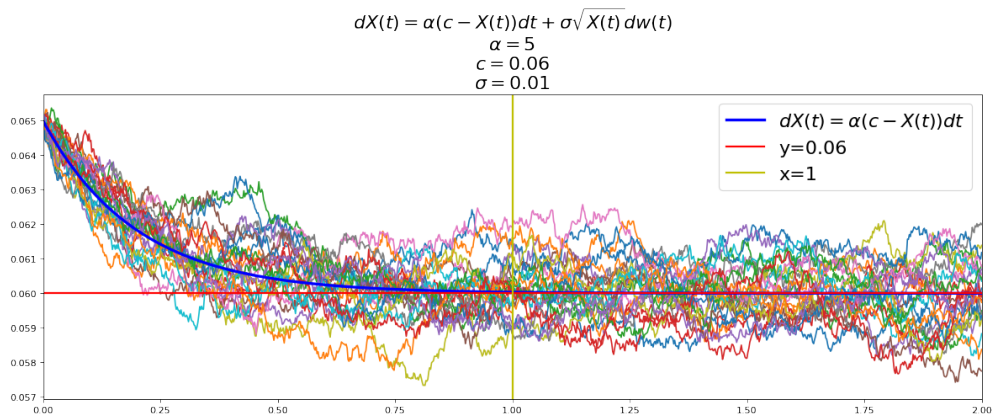
$$dX(t) = \alpha(c - X(t))dt + \sigma\sqrt{X(t)}dw(t)$$

$$\begin{aligned}\alpha &= 5 \\ c &= 0.06 \\ \sigma &= 0.001\end{aligned}$$

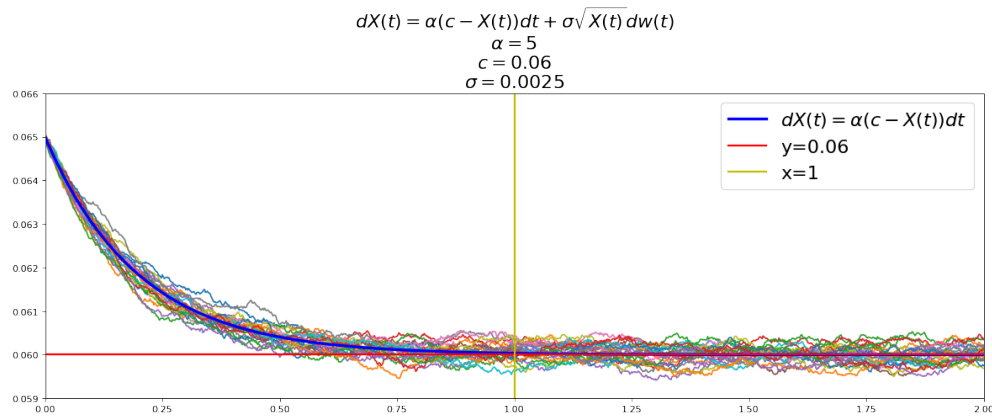




Підберемо параметр σ , зафіксувавши параметр α



Шляхом моделювання було встановлено, що оптимальні параметри мають значення $\alpha = 5$, $\sigma = 0.0025$



Тепер, методом Ейлера, для кожної отриманної на попередньому кроці траєкторії $X(t)$, знайдемо розв'язок диференціального рівняння

$$ds(t) = (p + s(t)X(t))dt, \quad s(0) = 5$$

також порівняємо його з розв'язками, коли $X(t) = c = 0.06$.

Покладемо $p = 0.1$, $S(0) = 5$

```

n=1000 #n of dots for tr
k=25 # n of traj

t=1
res={}
for i in range(k):
    solver = SDEHandler(function_a=a_function, function_b=b_function, n=n, t=t, y0=y0)
    res[i]=solver.euler_maruyama_solution()

time = solver.time
|
p=0.1
s0=5
h=1/n

def f(t,s,t,r):
    return p+r[t]*t

figure(figsize=(18, 6), dpi=80)
plt.title("$dS(t)=(p+r(t)S(t)dt)$"+
"\n"+f"$\alpha = \{\alpha\}$"+
"\n"+f"$c = \{c\}$"+
"\n"+f"$\sigma = \{\sigma\}$"
, fontsize = 20)

r={time[i]:c for i in range(tr.shape[0])}
s = np.zeros(time.shape[0])
s[0]=5

for key in res:
    tr =res[key]
    r={time[i]:tr[i] for i in range(tr.shape[0])}
    s = np.zeros(time.shape[0])
    s[0]=5

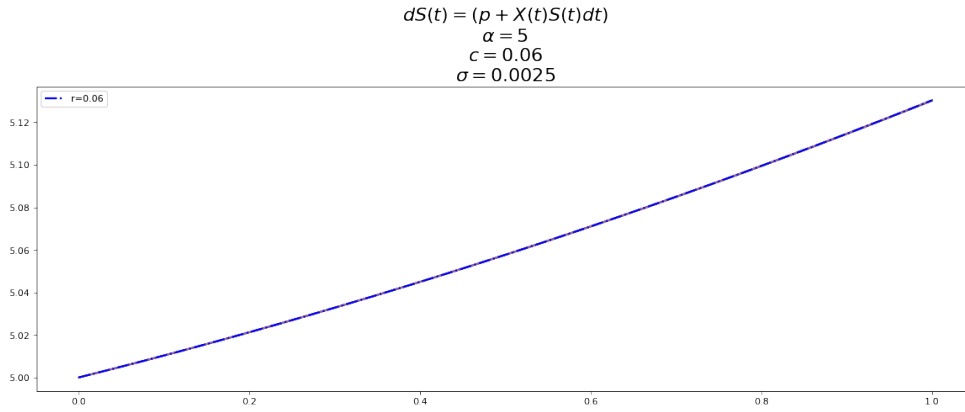
    h

    for i in range(1,s.shape[0]):
        s_prev =s[i-1]
        s[i]=s_prev+h*f(time[i],s_prev,r)

    plt.plot(time,s)
for i in range(1,s.shape[0]):
    s_prev =s[i-1]
    s[i]=s_prev+h*f(time[i],s_prev,r)

plt.plot(time,s, "b", label=f"$r=\{c\}$", linewidth="2", linestyle="-.")
plt.legend()
plt.show()

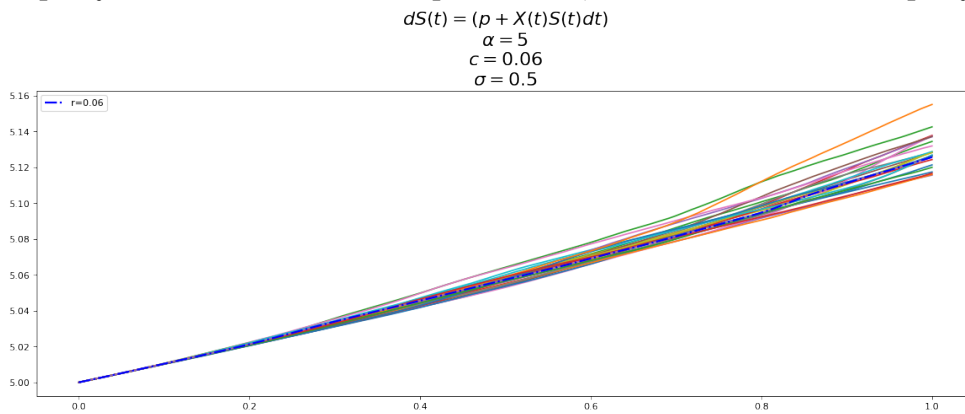
```



як ми бачимо, траєкторії майже збігаються, та співпадають з траєкторією

$$ds(t) = (p + 0.06s(t))dt, \quad s(0) = 5$$

спробуємо збільшити коефіцієнт σ , та подивимось на результат.



як можна побачити, при збільшенні σ , траєкторії розходяться.

3.4 Висновки

У розділі 3 ми розглянули основні методи для моделювання розв'язків СДР.

Основну увагу було приділено методам моделювання вінерівського процесу, а саме, використанню Центральної Граничної Теорема для симуляції розв'язків та моделюванню через представлення у вигляді ряду. З точки зору програмної реалізації найбільш оптимальним є метод моделювання за допомогою Центральної Граничної Теорема. Моделювання процесу Вінера не єдине питання цього розділу, але розуміння техніки візуалізації вінерівського процесу є необхідним в подальшому моделюванні траєкторій розв'язків СДР.

Було проведено порівняння двох методів симуляції траєкторій розв'язку СДР:

метод Ейлера-Мураямі

$$X^h(0) = x_0;$$

$$X_n^h = X_{n-1}^h + a(t_{n-1}^h, X_{n-1}^h)h + b(t_{n-1}^h, X_{n-1}^h)\Delta_n^h w,$$

та метод Мільштейна

$$X_n^h = X_{n-1}^h + ah + b\Delta_n^h w + \frac{1}{2}bb_x\{\Delta_n^h w^2 - h\}.$$

Як наслідок зроблено висновок, що метод Мільштейна є більш точним, ондак потребує існування похідної b_x

За допомогою цих методів ми чисельно розв'язали задачу про Моделювання відсоткової ставки за допомогою процесу Кокса-Інгерсолла-Росса, та перевірили асимптотичні властивості збіжності розв'язків інших типів рівнянь, що належать до класу моделей росту відсоткової ставки.

Висновки

Стохастичні диференціальні рівняння стали стандартними моделями для таких фінансових величин, як ціни на активи, відсоткові ставки та їх похідні інструменти. На відміну від детермінованих моделей, таких як звичайні диференціальні рівняння, які мають єдиний розв'язок для кожної відповідної початкової умови, стохастичні диференціальні рівняння мають розв'язки, які є випадковими процесами, тому їх дослідження є достатньо складним.

У магістерській дисертації було досліджено асимптотичну поведінку розв'язків деяких стохастичних диференціальних рівнянь, в тому числі певних моделей росту відсоткової ставки. У цій роботі було встановлено достатні умови, за яких асимптотика розв'язку загального лінійного стохастичного диференціального рівняння визначається не випадковою функцією. Було знайдено дві не випадкові функції, під дією яких розв'язок стохастичного рівняння та розв'язок відповідної детермінованої задачі мають однаковий порядок на нескінченності.

Ми розглянули основні методи моделювання траєкторій розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь, та для деяких рівнянь змоделивали асимптотичну поведінку розв'язків. Чисельні методи розв'язку стохастичних диференціальних рівнянь базуються на методах аналогічних до методів, що використовуються для звичайних диференціальних рівнянь, але узагальнені для забезпечення підтримки стохастичної динаміки. У цій роботі було показано, що чисельні методи розв'язку стохастичних диференціальних рівнянь є потужним інструментом як для доповнення аналітичних результатів, так і для самостійного аналізу та розв'язування задач. За допомогою методу Ейлера-Мураямі та методу Мільштейна було досліджено асимптотичну поведінку моделі роста відсоткової ставки та чисельно розв'язано фінансову задачу, в якій моделювання відсоткової ставки проводилося за допомогою процесу Кокса-Інгерсолла-Росса.

Список використаних джерел

- [1] Allen, E. J., Allen, L., Arciniega, A., Greenwood, P.: Construction of Equivalent Stochastic Differential Equation Models. <http://www.sherrytowers.com/equivalentsdes.pdf>
- [2] Allen, E. J., Khoujmane, A., Krifa, M. and Simsek, H.: A Stochastic Differential Equation Model for Cotton Fiber Breakage. *Neural, Parallel Scientific Computaton* 15 (2007) 181-192.
- [3] Allen, E. J.: Modeling with Ito Stochastic Differential Equations. Texas Tech University, USA, Springer 2007. <http://www.math.mun.ca/xzhao/ARRMSSchool/sdetext.pdf>
- [4] R. Bellman, Stability theory of differential equations, McGraw-Hill, New York, 1953.
- [5] V. V. Buldygin, O. I. Klesov, J. G. Steinebach, and O. A. Tymoshenko, *On the φ - asymptotic behavior of solutions of stochastic differential equations*, *Theor Stoch. Process.*, **14** (2008), 11–30.
- [6] V. V. Buldygin and O. A. Tymoshenko, *On the exact order of growth of solutions of stochastic differential equations with time-dependent coefficients*, *Theor Stoch. Process.*, **16** (2010), 12–22.
- [7] G. Keller, G. Kersting, U. Rösler On the asymptotic behaviour of solutions of stochastic differential equations <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/BF00531776.pdf>
- [8] O. I. Klesov, O. A. Tymoshenko, *Unbounded solutions of stochastic differential equations with time-dependent coefficients*, *Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp.*, **41** (2013), 25-35.
- [9] Peter E. Kloeden, Eckhard Platen. Numerical solution of stochastic differential equations, Springer Verlag, 1995.

- [10] P.E. Kloeden E. Platen (1992) Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. Springer–Verlag
- [11] L. Markus, Asymptotically autonomous differential systems. In: S. Lefschetz (ed.), Contributions to the theory of nonlinear oscillations III, Ann. Math. Stud., vol. 36, pp. 17–29, Princeton University Press, Princeton, 1956.
- [12] Mativier M. Stochastic Integration/ Mativier M., Pellaumail J. // Academic Press.– New York.– 1980
- [13] Thomas Mikosch. Elementary Stochastic Calculus with Finance in View, Advanced series on statistical science applied probability , World Scientific Publ., 1998
- [14] G.N. Milstein M.V. Tretyakov (2004) Stochastic Numerics for Mathematical Physics. Springer-Verlag.
- [15] Reza, H.: Using the Euler-Maruyama Method for Finding Solution to Stochastic Financial Problems. Department of mathematics, University of Science and Culture, Tehran, Iran, I.J Intelligent Systems and Applications, 2016, 6, 48-55. <http://www.mecs-press.org/ijisa/ijisa-v8-n6/IJISA-V8-N6-6.pdf>
- [16] Sauer. T.: Numerical Solution of Stochastic Differential Equations in Finance. Department of Mathematics, George Mason University, Fairfax, VA 22030. <http://math.gmu.edu/~tsauer/pre/sde.pdf>
- [17] Bernt Oksendal, Agnès Sulem Applied Stochastic Control of Jump Diffusions Springer 2000.
- [18] Ватанабэ С. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы/ Ватанабэ С., Икеда Н. // М.: Наука.–1986. – 445 с.
- [19] Гихман И. И., Скороход А. В. *Стохастические дифференциальные уравнения*. – К.: Наукова думка. – 1968. – 356 с.
- [20] Маккин Г. Стохастические интегралы/ Маккин Г.// М.: Мир. – 1972. – 181 с.
- [21] Новак, І. Г., А. М. Самойленко, and О. М. Станжицький. “про асимптотичну відповідність між розв’язками стохастичних та звичайних рівнянь.” *країнський математичний журнал* // Т. 63 – 2011 - №8 – С.1103-1127.
- [22] Хасьминский Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. – Наука, 1969.